

Temă pentru acasă - partea B.

14 puncte [1p: B1] + [1p: B2] + [1p: B3] + [4p: B4] + [7p: B5]

B1. (1 punct) Volumul elipsoidului

$$E(a, b, c) = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \subseteq [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$$

este $\frac{4\pi \cdot a \cdot b \cdot c}{3}$. Estimați acest volum utilizând metoda Monte Carlo pentru $a = 3, b = 2, c = 4$ și comparați rezultatul cu valoarea exactă. Folosiți eșantioane de dimensiune 10000, 20000 și 50000 și calculați erorile relative.

B2. (1 punct) Fie triunghiul definit astfel $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x, 2x + y \leq 4\}$. Determinați o zona rectangulară $[a, b] \times [c, d]$ care include punctele interioare ale acestui triunghi și apoi estimați aria (necunoscută) a lui T folosind metoda Monte Carlo cu un eșantion de dimensiune cel puțin 20000.

B3. (1 punct) Estimați valorile următoarelor integrale și comparați rezultatul cu valorile exacte:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 - 2 \ln 2; (b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \frac{dx}{1 + x^2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

B4. (4 puncte) Patru servere web oferă (serve) aceleași pagini posibililor clienți (web). Timpul necesar procesării unei cereri (request) HTTP este distribuit $\Gamma(5, 3)$ pe primul server, $\Gamma(5, 2)$ pe cel de-al doilea, $\Gamma(4, 3)$ pe cel de-al treilea și $\Gamma(6, 4)$ pe cel de-al patrulea (în milisecunde⁻¹). La această durată se adaugă latența dintre client și servere pe Internet care are o distribuție exponențială cu $\lambda = 4$ (în milisecunde). Se știe că un client este direcționat către primul server cu probabilitatea 0.35, către al doilea cu probabilitate 0.15 și către al treilea server cu probabilitatea 0.20. Estimați timpul mediu necesar servirii unui client (de la lansarea cererii până la primirea răspunsului).

B5. (7 puncte) Douăzeci de computere sunt conectate într-un LAN. Un virus infectează această rețea în felul următor: în fiecare zi, acest virus ajunge în mod independent de la orice computer infectat la orice alt computer "curat" cu probabilitate p . De asemenea, în fiecare zi (începând cu a doua zi), administratorul de sistem alege la întâmplare k computere infectate și în mod independent îndepărtează virusul de pe fiecare cu probabilitate q . Se știe că în prima zi sunt deja infectate trei calculatoare. (Parametrii p, q și $k \leq 10$ îi puteți alege.)

- (a) (3 puncte) Estimați numărul mediu de zile necesare îndepărtării virusului din întreaga rețea (daca este posibil).
- (b) (2 puncte) Estimați probabilitatea ca după 10 zile să mai existe computere infectate în rețea.
- (c) (2 puncte) Estimați această ultimă probabilitate cu o eroare de ± 0.01 cu probabilitatea 0.95.

Rezolvările acestor exerciții (funcțiile R și apelurile lor) vor fi redactate într-un singur script R.