

Домашнее задание 7

В данной домашняя работа представлен обзор всех тем, которые мы проходили ранее в этом модуле.

Задача 1

Определите интервалы возрастания и интервалы выпуклости данных функций:

а) $y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$

б) $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$

в) $y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)$

Задача 2

Определите интервалы возрастания и интервалы выпуклости данных функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

б) $y = -x + \cos x$

в) $y = xe^{-5x}$

г) $y = x^2 - \ln(x^2)$

Задача 3

Определите, сходятся ли данные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}}$

Задача 4

Определите, сходятся ли данные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Задача 5

Определите, сходятся ли данные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Задача 6

Определите, сходятся ли данные ряды:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)}{\ln n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \ln n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$

Задача 7

Определите радиус сходимости данных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 10^{n-1}}$

Задача 8

Вычислите данные пределы с применением разложения функций в ряд Тейлора (ряд Маклорена):

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/3} - \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \tanh x}{x^5}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x^2 + \sqrt[6]{1+3x^4} - 1}{x^8}$

Задача 9

Разложите функции в ряд Тейлора 8-го порядка вокруг 0:

а) $f(x) = \ln(\cos x^2)$

б) $g(x) = \sqrt[6]{1 + 3x^4}$

Задача 10

Разложите функции $y(x)$ вокруг соответствующей точки ряд Тейлора 2-го порядка:

а) $y^3 - x^2y + x^5 = 1, x = 1, y = 0$

б) $x \cos y + y \cos x = 2x, x = y = 0$