Līdzfinansē Eiropas Savienība

Nacionālais attīstības plāns 2027

Valsts izglītības attīstības aģentūra

Eiropas Sociālā fonda Plus projekts Nr. 4.2.2.3/1/24/I/001 “Pedagogu profesionālā atbalsta sistēmas izveide”

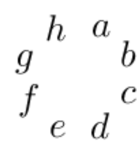
# Latvijas 75. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

## 9. klase

**9.1.** Ap apaļu galdu sēž 8 bērni. Katriem trīs pēc kārtas sēdošiem bērniem kopā ir nepāra skaits konfekšu. Pierādīt, ka katram bērnam ir vismaz viena konfekte!

**Atrisinājums.** Prasītais būs pierādīts, ja pamatosim, katram bērnam ir nepāra skaits konfekšu.

Apzīmējam katram bērniem esošo konfekšu skaitu, kā parādīts 1. att. Pēc dotā $a+b+c$, $d+e+f$, $g+h+a$ ir nepāra skaitļi. Tad arī $(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+a)$ ir nepāra skaitlis; tas nozīmē, ka $2a+(b+c+d+e+f+g+h)$ ir nepāra skaitlis. Tātad $(b+c+d)+(e+f+g)+h$ ir nepāra; tātad $h$ ir nepāra. Līdzīgi pierāda, ka arī $a$; $b$; $\dots$; $g$ ir nepāra skaitļi.




*1. att.*

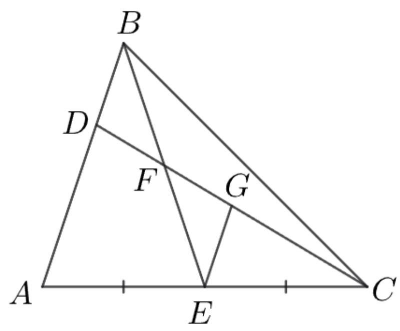
**9.2.** Uz trijstūra $ABC$ malas $AB$ atlikts tāds punkts $D$, ka $AD : DB = 2 : 1$. Trijstūra $ABC$ mediāna $BE$ krusto $CD$ punktā $F$. Pierādīt, ka $BF = FE$.

**1. atrisinājums.** Novilksim nogriezni $EG$ tā, lai $G$ ir $CD$ viduspunkts (skat. 2. att.). Tādā gadījumā $CG = GD$ un $AE = EC$ ($BE$ ir trijstūra $ABC$ mediāna), tātad $EG$ ir trijstūra $ADC$ viduslīnija un $EG \parallel AD$.

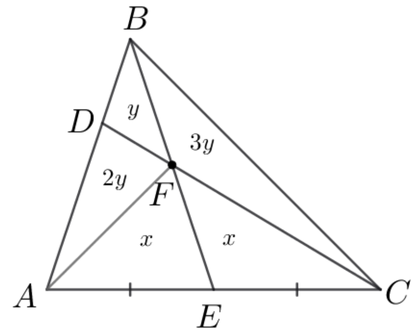
Iegūstam, ka $\Delta DBF = \Delta GEF$ pēc pazīmes $lml$:

- $\sphericalangle FDB = \sphericalangle FGE$ (iekšējie šķērsleņķi pie $EG \parallel AD$);
- $EG = \frac{1}{2}AD = DB$, jo $EG$ ir $\Delta ADC$ viduslīnija un $AD : DB = 2 : 1$;
- $\sphericalangle DBF = \sphericalangle GEF$ (iekšējie šķērsleņķi pie $EG \parallel AD$).

Tātad $BF = FE$ kā vienādo trijstūru atbilstošās malas.




2. att.




3. att.

**2. atrisinājums.** Izmantosim faktu, ja trijstūra malas dalās attiecībā $a : b$ un augstumi pret šīm malām ir vienādi, tad trijstūru laukumi arī dalās attiecībā $a : b$. Līdz ar to:

- ja $S_{DFB} = y$, tad $S_{DFA} = 2y$ ($BD: AD = 1: 2$ un kopīgs augstums no $F$);
- ja $S_{AFE} = x$, tad $S_{FEC} = x$ ($AE = EC$ un kopīgs augstums no $G$).

Ievērosim, ka arī $S_{ABE} = S_{BEC}$ ($AE = EC$ un kopīgs augstums no $B$), tad $S_{BFA} = 3y = S_{BFC}$ (skat. 3. att.).
Tā kā $S_{ADC} = 2S_{BDC}$ ($BD: AD = 1: 2$ un kopīgs augstums no $C$), tad $2y + 2x = 2 \cdot 4y$ jeb $x = 3y$.
Tas nozīmē, ka $S_{FEC} = x = 3y = S_{BFC}$. No apgrieztā fakta $BF : FE = 1 : 1$ jeb $BF = FE$.

**9.3.** Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē katru nākamo skaitli, sākot no otrā, var iegūt iepriekšējam pieskaitot vai nu 54, vai 77. Pierādīt, ka šajā virknē ir skaitlis, kuram divi pēdējie cipari ir vienādi!

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka $2 \cdot 77 = 154$, kas nozīmē, ka pieskaitīt 54 ir tas pats, kas divas reizes pieskaitīt 77 (mums interesē tikai skaitļa divi pēdējie cipari). Aplūkosim citu virkni $b_i$, kurā pirmais loceklis ir dotās virknes pirmais loceklis, bet katru nākamo, iegūst, iepriekšējam loceklim pieskaitot 77:

$$b_0 = a_1;\ b_1 = a_1 + 77;\ b_2 = a_1 + 2 \cdot 77;\ b_3 = a_1 + 3 \cdot 77; \ldots \text{ jeb } b_i = a_1 + 77 \cdot i, \text{ kur } i = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$$

Tad mūsu dotās virknes locekļus var iegūt no šīs virknes, sākot no $a_1$ un katrā solī ejot uz priekšu vai nu par 1 vietu (uz nākamo locekli) vai par 2 vietām (uz aiznākamo).

Pierādīsim, ka šajā virknē ir visas 100 iespējamās pēdējo ciparu vērtības (no 00 līdz 99). Aplūkosim pirmos 100 šīs virknes locekļus. Ja kāda no vērtībām nebūtu sastopama, tad pēc Dirihlē principa kādiem diviem no pirmajiem 100 virknes locekļiem būtu vienādi divi pēdējie cipari. Tādā gadījumā to starpība dalītos ar 100. Ja sakrīt $b_i$ ar $b_j$ locekli, tad $b_j - b_i = a_1 + 77 \cdot j - (a_1 + 77 \cdot i) = 77(j - i)$, kas dalās ar 100. Tā kā 77 un 100 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad no tā var secināt, ka $i - j$ dalās ar 100. Kas ir pretruna, jo gan $i$, gan $j$ ir mazāki nekā 100 (mēs aplūkojām pirmos 100 locekļus).

Tātad kaut kur šajā virknē $b_i$ ir loceklis, $b_k$, kas beidzas ar 11. Bet tas nozīmē, ka nākamais loceklis $b_{k+1}$ beidzas ar $11 + 77 = 88$. Tā kā mums ir divi locekļi pēc kārtas, kam pēdējie cipari ir vienādi, tad tiem "pārlēkt pāri" nevar, tā kā mēs katrā solī ejam vai nu uz nākamo, vai aiznākamo locekli, tad uz viena no šiem diviem mēs noteikti trāpīsim.

**9.4.** Dotas septiņas pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām piecas ir īstas (tām visām ir vienāda masa), bet divas ir viltotas (abām viltotajām ir vienāda masa), turklāt zināms, ka viltotā monēta ir vieglāka nekā īstā. Kā ar 3 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem atrast abas viltotās monētas?

**Atrisinājums.** Pirmajā svēršanā uzliksim uz katra svaru kausa 3 monētas. Tad ir iespējami divi gadījumi.

1. Svaru kausi ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka uz katra svaru kausa ir tieši divas īstās un viena viltotā monēta.

Apzīmēsim monētas, kas atradās uz kreisā svaru kausa, ar $a$, $b$ un $c$. Otrajā svēršanā uzliksim uz viena svaru kausa $a$, bet uz otra – $b$. Ja tagad viens no svaru kausiem ir vieglāks, tad attiecīgā monēta ($a$ vai $b$) ir viltota. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad monēta $c$ ir viltota.

Trešajā svēršanā analoģiski rīkojamies ar tām trim monētām, kas pirmajā svēršanā atradās uz labā svaru kausa.

2. Svaru kausi nav līdzsvarā. Tas nozīmē, ka uz smagākā svaru kausa visas monētas ir īstas, bet uz vieglākā ir viena vai divas viltotas.

Apzīmēsim monētas, kas atradās uz vieglākā svaru kausa, ar $a$, $b$ un $c$, bet to monētu, kas pirmajā svēršanā nepiedalījās, ar $d$. Otrajā svēršanā uzliksim monētas $a$ un $b$ katru uz sava svaru kausa.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vai nu tās abas ir viltotas, vai arī tās abas ir īstas, un tādā gadījumā viltotās ir c un $d$. Kurš no šiem gadījumiem ir īstais, var noskaidrot trešajā svēršanā, salīdzinot, piemēram, monētas $a$ un $c$.
- Ja viena no tām ir vieglāka (simetrijas pēc pieņemsim, ka tā ir monēta $a$), tad mēs zinām, ka monēta $a$ ir viltota, monēta $b$ ir īsta un otra viltotā ir viena no monētām $c$ un $d$. Kura tieši, var noskaidrot trešajā svēršanā, tās salīdzinot.

**9.5.** Uz tāfeles uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2025. Alise un Kate spēlē šādu spēli. Spēli sāk Alise, viņas gājienus veic pamīšus un katrā gājiena katra meitene nodzēš vienu skaitli. Spēle beidzas, kad uz tāfeles palikuši divi skaitļi. Ja šo skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts, tad uzvar Alise, pretējā gadījumā uzvar Kate. Kura meitene, pareizi spēlējot, noteikti var uzvarēt?

**Atrisinājums.** Vienmēr var uzvarēt Alise. Savā pirmajā gājienā viņai jānodzēš skaitli 2025. Tālāk visus skaitļus Alisei jāsadala pāros tā, lai katrā pārī esošo skaitļi summa ir 2025:

$$(1; 2024);\ (2; 2023); \ldots;\ (2022; 2023).$$

Kad Kate nodzēš kādu skaitli, tad Alisei pēc tam jānodzēš atbilstošā pāra otrais skaitlis. Beigās uz tāfeles paliks divi skaitļi, kuru summa ir 2025, kas ir naturāla skaitļa kvadrāts ($2025 = 45^2$).

## 10. klase

**10.1.** Vai eksistē tādi veseli skaitļi $a, b, c, d$, ka $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| = 2025$?

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka $|x-y| \equiv x+y \pmod 2$. No šejienes iegūstam, ka

$$\begin{aligned} |a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| &\equiv (a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 2(a+b+c+d) \\ &\equiv 0 \pmod 2). \end{aligned}$$

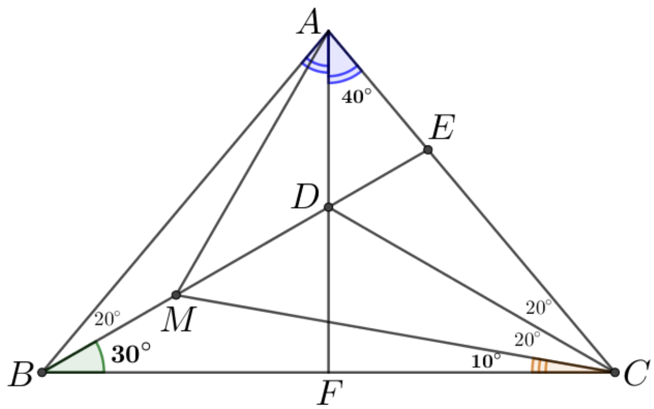
**10.2.** Dots vienādsānu trijstūris $ABC$, kuram $AB = AC$ un $\sphericalangle BAC = 80°$. Uz malas $AC$ atlikts punkts $E$ tā, ka $\sphericalangle EBC = 30°$, bet uz nogriežņa $BE$ atlikts punkts $M$ tā, ka $\sphericalangle MCB = 10°$. Aprēķināt $\sphericalangle AMC$ lielumu!

**Atrisinājums.** Novelkam virsotnes leņķa bisektrisi (kas ir arī mediānu un augstums) $AF$, tās krustpunktu ar $BE$ apzīmējam ar $D$ (skat. 4. att.). Savienojot $C$ un $D$, iegūstam divus vienādus trijstūrus $BAD$ un $DAC$ pēc pazīmes $m\ell m$ ($AB = AC$, $AD$ – kopīga, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$). Tātad $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 20°$. Līdz ar to $\sphericalangle DCM = \sphericalangle ACB - \sphericalangle MCB - \sphericalangle ACD = 50° - 10° - 20° = 20°$.

Leņķis $\sphericalangle EMC = \sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB = 30° + 10° = 40°$ kā trijstūra $BMC$ ārējais leņķis. Izmantojot iekšējo leņķu summu, iegūstam:

- no $\Delta ADC$: $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle DAC - \sphericalangle ACD = 120°$;
- no $\Delta CDM$: $\sphericalangle MDC = 180° - \sphericalangle DMC - \sphericalangle DCM = 180° - 40° - 20° = 120°$.

Tātad $\Delta ADC = \Delta MDC$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ ($CD$ – kopīga, $\sphericalangle CDM = \sphericalangle ADC$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle MCD$). Līdz ar to $AC = CM$ un $\Delta ACM$ ir vienādsānu trijstūris ar virsotnes leņķi $\sphericalangle ACM = 40°$ un $\sphericalangle CMA = (180° - 40°) : 2 = 70°$.




*4. att.*

**10.3.** Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Katram skaitļa $n+1$ pozitīvam dalītājam $d$ (ieskaitot 1 un $n+1$) Petrs izdalīja skaitli $n$ ar $d$ (ar atlikumu), dalījumu uzrakstīja uz tāfeles, bet atlikumi ierakstīja kladē. Pierādīt, ka uz tāfeles un kladē ir uzrakstīti vieni un tie paši skaitļi!

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka, ja $n+1 = ab$, tad skaitli $n$, dalot ar $a$, dalījumā iegūstam $b-1$ un atlikumā $a-1$ (jo $n = (b-1)\cdot a + (a-1)$), savukārt, $n$ dalot ar $a$, dalījumā iegūstam $a-1$, bet atlikumā $b-1$ (jo $n = (a-1)\cdot b + b - 1$). Tas nozīmē, ka ja skaitlis $x$ parādās uz tāfeles kā dalījums, dalot ar $d$, tad tas parādīsies arī kladē kā atlikums, dalot ar $\frac{n+1}{d}$. Un otrādi, ja skaitlis $y$ parādās kladē, kā atlikums, $n$ dalot ar $d$, tad tas parādīsies arī uz tāfeles, kā dalījums, $n$ dalot ar $\frac{n+1}{d}$ (spriedums ir spēkā arī tad, ja $d = \frac{n+1}{d}$). Tas nozīmē, ka uz tāfeles un kladē ir uzrakstīti vieni un tie paši skaitļi.

**10.4.** Dots $5 \times 5$ rūtiņu kvadrāts, kurā katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis no 1 līdz 25 (skat. 5. att.). No šī kvadrāta izgrieza 6 figūras, kas katra bija vai nu $1 \times 4$ rūtiņu taisnstūris (vertikāls vai horizontāls), vai arī $2 \times 2$ rūtiņu kvadrāts, pāri palika viena rūtiņa. Kāds skaitlis var būt rakstīts uz šīs rūtiņas?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

*5. att.*

**1. atrisinājums.** Parādīsim, ka pāri palikusī rūtiņa ir stūra rūtiņa, t.i., uz tās ir rakstīts 1, 5, 21 vai 25. Tas, ka tā var būt stūra rūtiņa, redzams šajā piemērā (skat. 6. att.), lai iegūtu pārējās stūra rūtiņas, attēls jāpagriež. Atliek pamatot, ka citu iespēju nav.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

*6. att.*

Vispirms ievērosim, ka katrā izgrieztajā figūrā ir divi pāra un nepāra skaitļi. Tātad atlikusī viena rūtiņa noteikti satur nepāra skaitli (jo to mums ir vairāk). Aplūkosim rūtiņas, uz kurām rakstīts 8, 12, 14 un 18 (kas visi ir pāra skaitļi, tātad šīs rūtiņas noteikti tika izgrieztas) Ievērosim, ka

- šīs rūtiņas pieder vismaz trim dažādām figūrām, kas izriet no tā, ka jebkura figūra, kas satur divas no šīm rūtiņām, satur arī centrālo rūtiņu 13,
- neviena figūra, kas satur kādu no šīm rūtiņām, nevar saturēt nevienu stūra rūtiņu.

Tas nozīmē, ka uz visām četrām stūra rūtiņām mums ir atlikušas tikai trīs figūras, kam tās var piederēt. Tā kā divas stūra rūtiņas nevar atrasties vienā figūrā, tad viena no tām paliks neizgriezta.

**2. atrisinājums.** Parādīsim, ka pāri palikusī rūtiņa ir stūra rūtiņa, t.i., uz tās ir rakstīts 1, 5, 21 vai 25. Tas, ka tā var būt stūra rūtiņa, redzams šajā piemērā (skat. 6. att.), lai iegūtu pārējās stūra rūtiņas, attēls jāpagriež. Atliek pamatot, ka citu iespēju nav.
Lai pamatotu atrisinājuma otro daļu, (ka nevar būt izgriezta neviena cita rūtiņa, izņemot stūra rūtiņu) var izmantot arī šādu alternatīvu spriedumu:
Ierakstīsim skaitļus rūtiņās tā, kā parādīts 7. att.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 |

*7. att.*

Ievērosim, ka jebkura pieļaujamā $1 \times 4$ vai $2 \times 2$ figūra satur skaitļus, kuru summa ir 10. Tā kā visu skaitļu summa ir 61, tad skaidrs, ka vienīgā pāri palikusī rūtiņa satur skaitli 1. Ja tā būtu kāda cita rūtiņa, kas satur 1, izņemot stūra rūtiņu, tad pagriežot visu "griezumu" par 90 grādiem vienu vai atspoguļojot pret vertikālo simetrijas asi, mēs vienmēr varēsim panākt, ka pāri palikusī rūtiņa satur kādu citu skaitli, kas nav 1 (kas nav iespējams). Tātad vienīgā iespēja ir, ka neizgriezta ir palikusi stūra rūtiņa.

**10.5.** Naturālu skaitli ar vismaz diviem cipariem sauksim par īpašu, ja, nodzēšot jebkuru vienu tā ciparu, iegūst sākotnējā skaitļa dalītāju. Piemēram, 120 ir īpašs skaitlis (dalās gan ar 12, gan ar 20, gan ar 10, nodzēšot attiecīgi 0; 1 vai 2). Atrast visus deviņciparu īpašos skaitļus, kuri dalās ar deviņi!
*Piezīme*. Gadījumā, ja pēc pirmā cipara nodzēšanas atlikušais skaitlis sākas ar vienu vai vairākām nullēm, tad liekās nulles tiek atmestas.

**Atrisinājums.** Pierādīsim, ka katram īpašam skaitlim, kuram ir vismaz trīs cipari, pēdējais cipars noteikti ir 0, kā arī nodzēšot šo pēdējo ciparu, ir iegūts cits īpašais skaitlis.
Aplūkosim $n$-ciparu skaitli $A = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n}$. Tā kā skaitlis ir īpašs, tas dalās ar skaitli, kuru iegūst, nodzēšot pēdējo ciparu $a_n$ jeb tas dalās ar skaitli $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$. Šī dalītāja reizinājums ar 10 ir $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} 0}$, līdz ar to $a_n = 0$, jo, reizinot aplūkoto dalītāju ar naturālu skaitli, kas ir lielāks vai mazāks nekā 10, iegūtais reizinājums būs lielāks vai mazāks nekā $A$ attiecīgi, salīdzinot šķiras sākot ar desmitiem (jo $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$ ir vismaz divciparu skaitlis). Ja nodzēstu jebkuru skaitļa $A$ ciparu, kas nav pēdējais, iegūtais skaitlis $D$ būs skaitļa 10 daudzkārtnis, jo pēdējais cipars būs 0. Tā kā gan $A$, gan iegūtais dalītājs $D$ dalās ar 10, arī $\frac{A}{10} = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$ dalās ar $\frac{D}{10}$. Tā kā $\frac{D}{10}$ iegūts no $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$ nodzēšot kādu brīvi izvēlētu ciparu, tad arī skaitlis $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}}$ ir īpašs.
No tā izriet, ka deviņciparu īpašie skaitļi ir uzrakstāmi formā $\overline{a_1 a_2 0000000}$, kur $\overline{a_1 a_2}$ ir īpašs divciparu skaitlis (tātad $a_2 \neq 0$). Tā kā $\overline{a_1 a_2}$ dalās ar $a_1$, tad arī $\overline{a_1 a_2} - \overline{a_1 0} = a_2$ dalās ar $a_1$. Šāds nosacījums izpildās visiem divciparu

skaitļiem, kas mazāki nekā 20, un arī skaitļiem 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88 un 99. Lai $\overline{a_1 a_2 0000000}$ dalītos ar 9, skaitlim $\overline{a_1 a_2}$ arī jādalās ar 9. Tātad derīgie skaitļi ir 18, 36 un 99.

Nosacījums, ka $\overline{a_1 a_2}$ dalās ar $a_2$ neizpildās vienīgi skaitlim 18. Tātad 360000000 un 990000000 ir vienīgie deviņciparu īpašie skaitļi, kuri dalās ar 9.

## 11. klase

**11.1.** Dotas septiņas pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām piecas ir īstas (tām visām ir vienāda masa), bet divas ir viltotas (abām viltotajām ir vienāda masa), turklāt zināms, ka viltotā monēta ir vieglāka nekā īstā. Kā ar 3 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem atrast abas viltotās monētas?

**Atrisinājums.** Pirmajā svēršanā uzliksim uz katra svaru kausa 3 monētas. Tad ir iespējami divi gadījumi.

1. Svaru kausi ir līdzsvarā. Tas nozīmē, ka uz katra svaru kausa ir tieši divas īstās un viena viltotā monēta.

Apzīmēsim monētas, kas atradās uz kreisā svaru kausa, ar $a$, $b$ un $c$. Otrajā svēršanā uzliksim uz viena svaru kausa $a$, bet uz otra – $b$. Ja tagad viens no svaru kausiem ir vieglāks, tad attiecīgā monēta ($a$ vai $b$) ir viltota. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad monēta $c$ ir viltota.

Trešajā svēršanā analoģiski rīkojamies ar tām trim monētām, kas pirmajā svēršanā atradās uz labā svaru kausa.

2. Svaru kausi nav līdzsvarā. Tas nozīmē, ka uz smagākā svaru kausa visas monētas ir īstas, bet uz vieglākā ir viena vai divas viltotas.

Apzīmēsim monētas, kas atradās uz vieglākā svaru kausa, ar $a$, $b$ un $c$, bet to monētu, kas pirmajā svēršanā nepiedalījās, ar $d$. Otrajā svēršanā uzliksim monētas $a$ un $b$ katru uz sava svaru kausa.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad vai nu tās abas ir viltotas, vai arī tās abas ir īstas, un tādā gadījumā viltotās ir c un $d$. Kurš no šiem gadījumiem ir īstais, var noskaidrot trešajā svēršanā, salīdzinot, piemēram, monētas $a$ un $c$.
- Ja viena no tām ir vieglāka (simetrijas pēc pieņemsim, ka tā ir monēta $a$), tad mēs zinām, ka monēta $a$ ir viltota, monēta $b$ ir īsta un otra viltotā ir viena no monētām $c$ un $d$. Kura tieši, var noskaidrot trešajā svēršanā, tās salīdzinot.

**11.2.** Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā, tā diagonāles krustojas punktā $E$. Uz hordām $AC$ un $BD$ attiecīgi atlikti tādi punkti $F$ un $G$, ka $AF = BE$ un $DG = CE$. Pierādīt, ka punkti $B$, $F$, $G$, $C$ atrodas uz vienas riņķa līnijas!

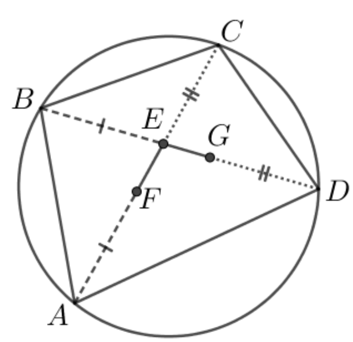
**Atrisinājums.** Izmantojot krustisku hordu īpašību, iegūstam, ka $BE \cdot ED = AE \cdot CE$ (skat. 8. att.). Izsakām nogriežņus $ED$ un $AE$:

- $ED = EG + GD = EG + CE$;
- $AE = AF + FE = BE + EF$.

Līdz ar to iegūstam:

$$BE \cdot (EG + CE) = (BE + FE) \cdot CE;$$
$$BE \cdot EG + BE \cdot CE = BE \cdot CE + FE \cdot CE;$$
$$BE \cdot EG = FE \cdot CE.$$

Tātad punkti $B$, $F$, $G$, $C$ atrodas uz vienas riņķa līnijas, jo izpildās krustisku hordu īpašībai aprieztā īpašība.




*8. att.*

**11.3.** Divas dažādas skaitļu virknes $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{2025}$ un $b_1; b_2;\ \ldots; b_{2025}$ katra satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2025 (katru tieši vienu reizi), bet skaitļu virkne $c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_{2025}$ satur visus pāra skaitļus no 2 līdz 4050 katru tieši vienu reizi. Pierādīt, ka

$$\frac{c_1^2-4a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{c_2^2-4a_2b_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{c_{2025}^2-4a_{2025}b_{2025}}{a_{2025}+b_{2025}+c_{2025}}>0.$$

**Atrisinājums.** Ievērosim, ka $(a+b)^2\geq 4ab$ jebkuriem skaitļiem $a$ un $b$ (tas ir ekvivalents $(a-b)^2\geq 0$), turklāt vienādība izpildās tad un tikai tad, ja $a=b$. Tas nozīmē, ka

$$\frac{c^2-4ab}{a+b+c}\geq\frac{c^2-(a+b)^2}{a+b+c}=\frac{(c-a-b)(c+a+b)}{a+b+c}=c-a-b,$$

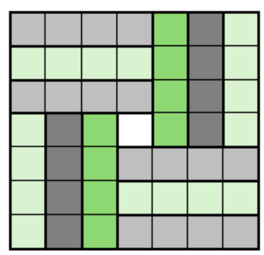
turklāt vienādība izpildās tad un tikai tad, ka $a=b$. Tad

$$\frac{c_1^2-4a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{c_2^2-4a_2b_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{c_{2025}^2-4a_{2025}b_{2025}}{a_{2025}+b_{2025}+c_{2025}}\geq$$
$$\geq(c_1-a_1-b_1)+(c_2-a_2-b_2)+\cdots+(c_{2025}-a_{2025}-b_{2025})=0.$$

Turklāt tā kā virknes $a_n$ un $b_n$ ir dažādas, tad vismaz vienā (patiesībā vismaz divās) izteiksmēs nevienādība ir stingrā, līdz ar to rezultāts arī ir stingri lielāks nekā 0.

**11.4.** Dots $7\times 7$ rūtiņu kvadrāts. No šī kvadrāta izgrieza 12 figūras, kas katra bija vai nu $1\times 4$ rūtiņu taisnstūris (vertikāls vai horizontāls), vai arī $2\times 2$ rūtiņu kvadrāts, pāri palika viena rūtiņa. Kurā vietā sākotnējā kvadrātā varēja atrasties šī pāri palikusī rūtiņa?

**Atrisinājums.** Pierādīsim, ka pāri palikusī rūtiņa varēja atrasties tikai un vienīgi sākotnējā kvadrāta centrā, piemēru skat. 9. att.



*9. att.*

Vēl jāparāda, ka neviena cita rūtiņa pāri palikt nevar. Lai to pamatotu, ierakstīsim skaitļus rūtiņās tā, kā parādīts 10. att.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |

*10. att.*

Ievērosim, ka jebkura pieļaujamā $1\times 4$ vai $2\times 2$ figūra satur skaitļus, kuru summa ir 10. Tā kā visu skaitļu summa ir 121, tad skaidrs, ka vienīgā pāri palikusī rūtiņa satur skaitli 1. Ja tā būtu kāda cita rūtiņa, kas satur 1, izņemot centrālā, tad pagriežot visu "griezumu" par 90 grādiem vienu vai atspoguļojot pret vertikālo simetrijas asi, mēs vienmēr varēsim panākt, ka pāri palikusī rūtiņa satur kādu citu skaitli, kas nav 1 (kas nav iespējams). Tātad vienīgā iespēja ir, ka palikusi ir centrālā rūtiņa.

**11.5.** Uz tāfeles sākumā uzrakstīti divi vieninieki. Vienā gājienā var:

- nodzēst vienu uz tāfeles uzrakstīto skaitli un tā vietā uzrakstīt divas reizes lielāku;
- ja uz tāfeles uzrakstītie skaitļi ir dažādi (apzīmēsim tos ar $x > y$), tad nodzēst skaitli $x$ un tā vietā uzrakstīt skaitli $x - y$.

Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi **a)** 20 un 24; **b)** 20 un 25?

**Atrisinājums. a)** Var, piemēram, šādi:

$$(1;1) \to (1;2) \to (1;4) \to (1;3) \to (2;3) \to (4;3) \to (8;3) \to (5;3) \to (10;3) \to (20;3) \to (20;6) \to$$
$$\to (20;12) \to (20;24).$$

**b)** Tas nav iespējams. Ievērosim, ka katrā solī uz tāfeles uzrakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs vai nu nemainās, vai arī palielinās divas reizes. Tā kā sākumā skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad beigās tas nevar pieņemt vērtību $5 = LKD(20;\ 25)$.

## 12. klase

**12.1.** Pierādīt, ka visām naturālām $n$ vērtībām $2^{2n-1}3^{n-1} + 5^n$ dalās ar 7.

**1. atrisinājums.** Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$2^{2n-1}3^{n-1} + 5^n = 2 \cdot 2^{2n-2} \cdot 3^{n-1} + 5^n = 2 \cdot 12^{n-1} + 5^n = \frac{12^n + 6 \cdot 5^n}{6} = \frac{12^n - 5^n + 7 \cdot 5^n}{6}.$$

Starpība $12^n - 5^n$ dalās ar 7, tātad skaitītājs dalās ar 7. Tā kā sākotnējā izteiksme ir naturāls skaitlis visām naturālām $n$ vērtībām, un 7 un 6 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad arī sākotnējā izteiksme dalās ar 7.

**2. atrisinājums.** Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

*Indukcijas bāze.* Ja $n = 1$, tad $2^1 \cdot 3^0 + 5^1 = 7$, kas dalās ar 7.

*Induktīvais pieņēmums.* Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, t. i.,

$$2^{2k-1}3^{k-1} + 5^k \;\vdots\; 7$$

*Induktīvā pāreja.* Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī tad, ja $n = k+1$, t. i.,

$$2^{2k+1}3^k + 5^{k+1} \;\vdots\; 7$$

Pārveidosim izteiksmi:

$$2^{2k+1}3^k + 5^{k+1} = 4 \cdot 2^{2k-1} \cdot 3 \cdot 3^{k-1} + 5 \cdot 5^k = 12 \cdot 2^{2k-1}3^{k-1} + 5 \cdot 5^k =$$
$$= \underbrace{5 \cdot (2^{2k-1}3^{k-1} + 5^k)}_{\vdots 7\ p\bar{e}c\ ind.pie\c{n}.} + \underbrace{7 \cdot 2^{2k-1}3^{k-1}}_{\vdots 7}$$

Ja katras saskaitāmais dalās ar 7, tad visa summa dalās ar 7.

*Secinājums.* Tā kā apgalvojums ir patiesa, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

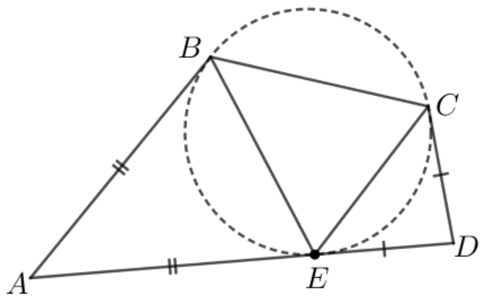
**12.2.** Četrstūris $ABCD$, kuram $AB + CD = AD$, ir ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka leņķu $ABC$ un $BCD$ bisektrišu krustpunkts atrodas uz četrstūra malas $AD$.

**1. atrisinājums.** Apzīmējam $\sphericalangle BCD = 2\alpha$ un $\sphericalangle ABC = 2\beta$. No tā, ka četrstūrim $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, iegūstam, ka $\sphericalangle BAD = 180° - 2\alpha$ un $\sphericalangle ADC = 180° - 2\beta$. Uz malas $AD$ atliek punktu $E$ tā, ka $AB = AE = a$ un $DE = DC = b$. Tad $\Delta ABE$ un $\Delta CDE$ ir vienādsānu trijstūri, kuriem $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ABE = \alpha$ un $\sphericalangle CED = \sphericalangle ECD = \beta$.

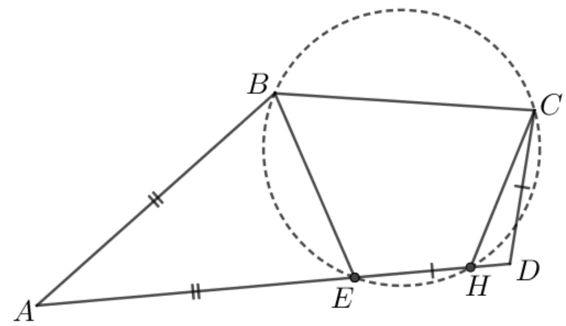
Ap trijstūri $BCE$ apvelkam riņķa līniju. Iespējami divi gadījumi.

1. Četrstūra mala $AD$ ir šīs riņķa līnijas pieskare un punkts $E$ ir vienīgais punkts uz $AD$, kas kopīgs šim nogrieznim un riņķa līnijai (skat. 11. att.). Tad $\sphericalangle BCE = \sphericalangle AEB = \alpha$ kā ievilktais leņķis un hordas-pieskares leņķis, kas abi balstās uz vienu un to pašu loku $BE$. Līdz ar to $\sphericalangle ECD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCE = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Tātad $CE$ ir leņķa $BCD$ bisektrise. Līdzīgi pierāda, ka $BE$ ir leņķa $ABC$ bisektrise.

2. Riņķa līnija krusto $AD$ gan punktā $E$, gan vēl otrā punktā $H$ (skat. 12. att.). Tad $\sphericalangle BEH = 180° - \alpha$. No tā, ka ap $BCHE$ var apvilkt riņķa līniju, izriet, ka $\sphericalangle BEH + \sphericalangle BCH = 180°$ jeb $\sphericalangle BCH = \alpha$. No tā seko, ka $CH$ ir leņķa $BCD$ bisektrise. Līdzīgi pierāda, ka $BH$ ir leņķa $ABC$ bisektrise. Tātad bisektrises krustojas punktā $H$, kas atrodas uz malas $AD$.



11. att.



12. att.

**2. atrisinājums.** Apzīmējam $\sphericalangle BCD = 2\alpha$ un $\sphericalangle ABC = 2\beta$. No tā, ka četrstūrim $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, iegūstam, ka $\sphericalangle BAD = 180° - 2\alpha$ un $\sphericalangle ADC = 180° - 2\beta$. Uz malas $AD$ atliek punktu $E$ tā, ka $AB = AE = a$ un $DE = DC = b$ (skat. 13. att.). Tad $\Delta ABE$ un $\Delta CDE$ ir vienādsānu trijstūri, kuriem $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ABE = \alpha$ un $\sphericalangle CED = \sphericalangle ECD = \beta$.

Izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī $ABE$, iegūstam, ka

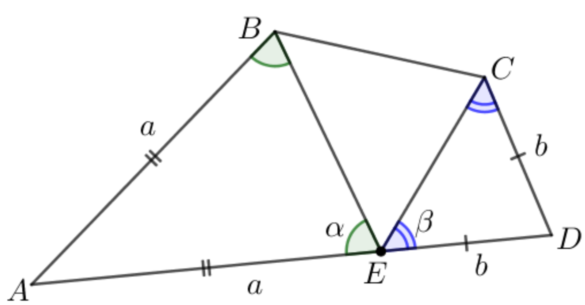
$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos(180° - 2\alpha)\,;$$

$$BE^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos 2\alpha = 2a^2(1 + \cos 2\alpha) = 2a^2 \cdot 2\cos^2 \alpha\,;$$

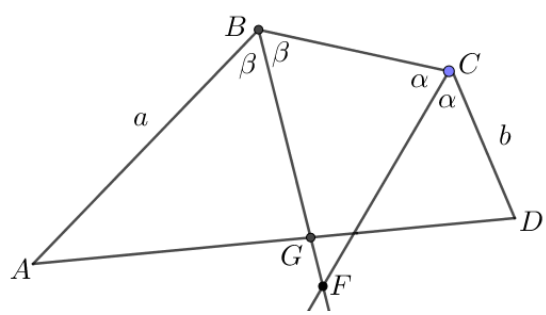
$$BE = 2a \cdot \cos \alpha.$$

Pēc sinusu teorēmas trijstūrī $BCE$ iegūstam, ka

$$\frac{BC}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{EB}{\sin(2\alpha - \beta)} = \frac{2a \cdot \cos\alpha}{\sin(2\alpha - \beta)}. \qquad (1)$$



13. att.



14. att.

Tagad novelkam leņķu $ABC$ un $BCD$ bisektrises, kas krustojas kādā punktā $F$ (skat. 14. att.). Bisektrises $BF$ krustpunktu ar $AC$ apzīmējam ar $G$.

Tad $\sphericalangle AGB = 180° - \sphericalangle BAG - \sphericalangle ABG = 180° - (180° - 2\alpha) - \beta = 2\alpha - \beta$.

No sinusu teorēmas trijstūrī $ABG$ iegūstam, ka

$$\frac{a}{\sin(2\alpha - \beta)} = \frac{BG}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{BG}{\sin 2\alpha}. \qquad (2)$$

No leņķu sakarībām trijstūrī $BCF$ leņķu sakarībām izriet, ka $\sphericalangle BFC = 180° - \alpha - \beta = \sphericalangle BEC$ un

$$\frac{BC}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \frac{BF}{\sin\alpha} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{2a \cdot \cos\alpha}{\sin(2\alpha - \beta)} = \frac{BF}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(2\alpha-\beta)}=\frac{BF}{\sin 2\alpha} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{BF}{\sin 2\alpha}=\frac{BG}{\sin 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad BF=BG.$$

Tas nozīmē, ka punkti $F$ un $G$ sakrīt un atrodas uz $AD$.

**12.3.** Pozitīviem reāliem skaitļiem $x, y, z$ izpildās $x+y+z=1$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{xy-z+2}+\frac{1}{yz-x+2}+\frac{1}{xz-y+2}\geq\frac{27}{16}.$$

**Atrisinājums.** Izmantojot doto vienādību $x+y+z=1$ un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$\frac{1}{xy+x+y+1}+\frac{1}{yz+y+z+1}+\frac{1}{xz+x+z+1}\geq\frac{27}{16};$$

$$\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(y+1)(z+1)}+\frac{1}{(x+1)(z+1)}\geq\frac{27}{16};$$

$$\frac{z+1+x+1+y+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\geq\frac{27}{16};$$

$$\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}\geq\frac{27}{16};$$

$$\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\geq\frac{27}{64}.$$

Pierādīsim, ka pēdējā nevienādība ir patiesa, izmantojot nevienādību starp aritmētisko vidējo un ģeometrisko vidējo pozitīviem skaitļiem $x+1$, $y+1$ un $z+1$:

$$\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{3}\geq\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)};$$

$$\frac{4}{3}\geq\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)};$$

$$\frac{64}{27}\geq(x+1)(y+1)(z+1);$$

$$\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\geq\frac{27}{64}.$$

**12.4.** Pirmskaitļi $p$ un $q$ ir tādi, ka $p^2+pq+q^2$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts. Pierādīt, ka $p^2-pq+q^2$ ir pirmskaitlis!

**Atrisinājums.** Ja $p=q$, tad $p^2+pq+q^2=3p^2$ un tas nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $p<q$. Tādā gadījumā $p^2+pq+q^2=k^2>1$. Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$p^2+2pq+q^2-k^2=pq;$$

$$(p+q)^2-k^2=pq;$$

$$(p+q-k)(p+q+k)=pq.$$

Tā kā $p$ un $q$ ir pirmskaitļi, tad iespējami divi gadījumi:

1. Ja $p+q-k=1$ un $p+q+k=pq$, tad $k=p+q-1$ un, ievietojot otrajā vienādībā, iegūstam $p+q+(p+q-1)=pq$. Pārveidojam iegūto vienādību:

$$pq+1-2p-2q=0;$$

$$pq+4-2p-2q=3;$$

$$(p-2)(q-3)=3.$$

Tā kā ir tikai viens veids, kā skaitli 3 izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, tad $p-2=1$ un $q-2=3$ jeb $p=3$ un $q=5$. Līdz ar to $p^2-pq+q^2=9-15+25=19$ un tas ir pirmskaitlis.
2. Ja $p+q-k=p$ un $p+q+k=q$, tad no otrās vienādības iegūstam, ka $p=-k$ un šis gadījums neder.

**12.5.** Uz tāfeles uzrakstīti divi polinomi $P(x)=x^2+2$ un $Q(x)=x+1$. Vienā gājienā Ilmārs izvēlas kādus divus uz tāfeles jau uzrakstītus polinomus $a$ un $b$ ($a$ un $b$ var būt arī viens un tas pats polinoms) un uzraksta uz tāfeles kādu no polinomiem $a+b$, $a-b$ vai $a\cdot b$ (rezultātā var sanākt arī nulltās pakāpes polinoms, kas ir skaitlis). Vai, atkārtojot šādas darbības, viņam kādā brīdī var izdoties uz tāfeles uzrakstīt polinomu: **a)** $x^3+2$; **b)** $x^4+2$?

**Atrisinājums. a)** Nē, neizdosies. Ievērosim, ka sākotnējiem polinomiem $P(2)=6$ un $Q(2)=3$, tātad polinoma vērtība punktā $x=2$ dalās ar 3. Tas paliek spēkā arī pēc jebkuras no atļautajām darbībām (ja polinomi $P_1(x)$ un $P_2(x)$ punktā $x=2$ dalās ar 3, tad arī $P_1(x)+P_2(x)$, $P_1(x)-P_2(x)$ un $P_1(x)\cdot P_2(x)$ punktā $x=2$ dalīsies ar 3). Bet polinoms $R(x)=x^3+2$ punktā $x=2$ pieņem vērtību $R(2)=2^3+2=8$, kas nedalās ar 3.

**b)** Tas ir iespējams, piemēram, uzrakstot uz tāfeles šādus polinomus:

$$P_1(x)=Q(x)\cdot Q(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1;$$

$$P_2(x)=P1(x)-P(x)=x^2+2x+1-(x^2+2)=2x-1;$$

$$P_3(x)=P(x)\cdot P(x)=(x^2+2)^2=x^4+4x^2+4;$$

$$P_4(x)=P_2(x)\cdot P_2(x)=(2x-1)^2=4x^2-4x+1;$$

$$P_5(x)=P_3(x)-P_4(x)=(x^4+4x^2+4)-(4x^2-4x+1)=x^4+4x+3;$$

$$P_6(x)=P_5(x)-P_2(x)=x^4+4x+3-(2x-1)=x^4+2x+4;$$

$$P_7(x)=P_6(x)-Q(x)=x^4+2x+4-(x+1)=x^4+x+3;$$

$$P_8(x)=P_7(x)-Q(x)=x^4+x+3-(x+1)=x^4+2.$$