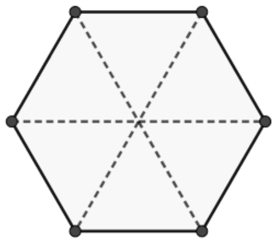
Latvijas 75. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 5.-8. klasei

5. klase

5.1. Sešstūra virsotnēs ieraksti 6 dažādus naturālus skaitļus tā, lai vienlaicīgi izpildās nosacījumi:

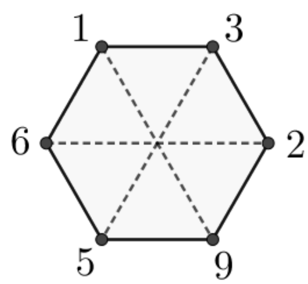
- jebkuriem diviem blakus virsotnēs ierakstītiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1;
- katra ar raustītu līniju uzzīmētā nogriežņa galapunktos (skat. 1. att.) ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 3;
- visu sešu ierakstīto skaitļu summa būtu vismazākā iespējamā!

Pietiek tikai ar piemēru, kā ierakstīt skaitļus. Nav jāpamato, ka iegūtā summa ir vismazākā iespējamā.



1. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 2. att., kur ierakstīto skaitļu summa ir 26.



2. att.

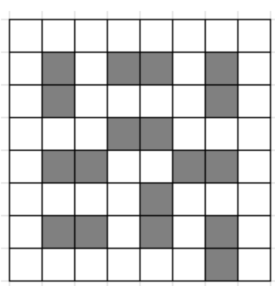
5.2. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt **a)** 2520; **b)** 5460?

Atrisinājums. a) Jā, var būt, piemēram, skaitļa 8975 ciparu reizinājums ir $8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 72 \cdot 35 = 2520$.

b) Nē, nevar būt. Ja skaitlis ir kāda skaitļa ciparu reizinājums, tad visi tā pirmreizinātāji ir mazāki nekā 10 (tātad tie var būt tikai 2, 3, 5 vai 7). Bet skaitlim 5460 viens no pirmreizinātājiem ir 13 ($5460 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$), tātad tas nav neviena skaitļa ciparu reizinājums.

5.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 8×8 rūtiņas. Iekrāso 9 taisnstūrus ar izmēriem 1×2 rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir neiekrāsotas!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 3. att.



3. att.

5.4. Alise un Kate spēlē spēli. Pirmajā gājienā Kate nosauc skaitli nulle, pēc tam viņas pamīšus izdara gājienus. Katra meitene savā gājienā izvēlas vienu naturālu skaitli no 1 līdz 10, pieskaita to pēdējam nosauktajam skaitlim un nosauc rezultātu. (Piemēram, ja Alise savā gājienā ir nosaukusi skaitli 18, tad Kate var nosaukt jebkuru naturālu skaitli no 19 līdz 28). Uzvar tā meitene, kas nosauc skaitli 56. Pamato, ka Alise vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no Kates nosauktajiem skaitļiem!

Atrisinājums. Savā pirmajā gājienā Alisei jānosauc skaitlis 1. Pēc tam pēc katra Kates gājiena Alise izvēlas pieskaitīt tādu skaitli, kas kopā ar Kates iepriekšējā gājienā izvēlēto skaitli summā dod 11 (šādu gājienu Alise vienmēr var veikt, jo var izvēlēties skaitļus no 1 līdz 10). Līdz ar to pēc katra Alises gājiena skaitlis palielināsies par 11. Alises nosauktie skaitļi būs 1; 12; 23; 34; 45; 56.

5.5. Dotas sešas bumbiņas, uz kurām ir uzraksti 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, kas atbilst bumbiņas masai gramos. Zināms, ka pieci no šiem uzrakstiem ir pareizi, bet viens ir nepareizs – attiecīgās bumbiņas masa ir mazāka nekā norādīts uzrakstā. Kā ar divām svēršanām uz sviru svariem var noskaidrot, kurš uzraksts ir nepareizs?

Piezīme. Sviru svari ir svari, kuriem svirai abos galos piestiprina vienādus svaru kausus. Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, tad svaru kausi ir līdzsvarā. Ja vienā kausā ieliktais priekšmets ir smagāks, tad atbilstošais kauss nosveras uz leju.

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 2 g bumbiņas, bet otrā liekam 3 g bumbiņu. Iespējami trīs gadījumi.

1. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} > 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 3 g.
2. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} < 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g vai 2 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
   - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} < 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g;
   - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} > 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 2 g.
3. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} = 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g, 5 g vai 6 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
   - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} < 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 5 g;
   - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} > 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g;
   - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} = 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 6 g.

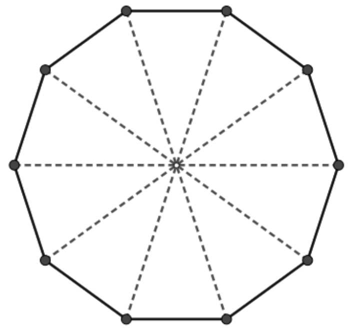
Piezīme. Ir arī citi varianti, kā noskaidrot prasīto.

6. klase

6.1. Desmitstūra virsotnēs ieraksti 10 dažādus naturālus skaitļus tā, lai vienlaicīgi izpildās nosacījumi:

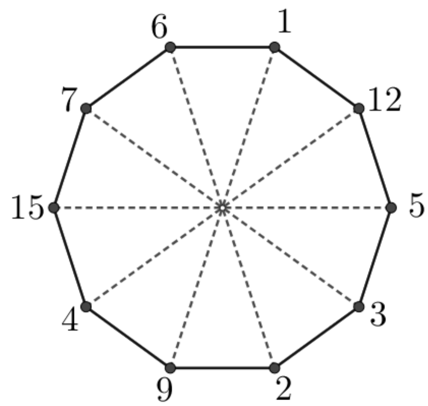
- jebkuriem diviem blakus virsotnēs ierakstītiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1;
- katra ar raustītu līniju uzzīmētā nogriežņa galapunktos (skat. 4. att.) ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 3;
- visu desmit ierakstīto skaitļu summa būtu vismazākā iespējamā!

Pietiek tikai ar piemēru, kā ierakstīt skaitļus. Nav jāpamato, ka iegūtā summa ir mazākā iespējamā.



4. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 5. att., kur ierakstīto skaitļu summa ir 64.



5. att.

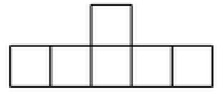
6.2. Vai skaitli 299 var izteikt kā vairāku (vismaz divu) naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo skaitļu reizinājums būtu 299?

Atrisinājums. Skaitlis 299 ir izsakāms kā $299 = 13 \cdot 23$, bet reizinātāju summa ir $13 + 23 = 36 < 299$. Tātad reizinājumam $13 \cdot 23$ vēl jāpiereizina vajadzīgais skaits vieninieku (reizinājums no tā nemainās). Ievērojam, ka $299 - 36 = 263$, tātad skaitli 299 atbilstoši uzdevuma prasībām varam izteikt šādi:

$$299 = 13 \cdot 23 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{263 \text{ vieninieki}} \text{ un } 299 = 13 + 23 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{263 \text{ vieninieki}}.$$

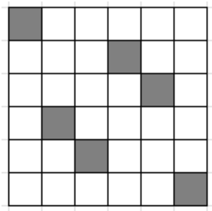
Piezīme. Šis ir vienīgais atrisinājums, neņemot vērā reizinātāju secību.

6.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Iekrāso 6 rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu 6. att. doto figūru, kam visas rūtiņas ir neiekrāsotas!



6. att.

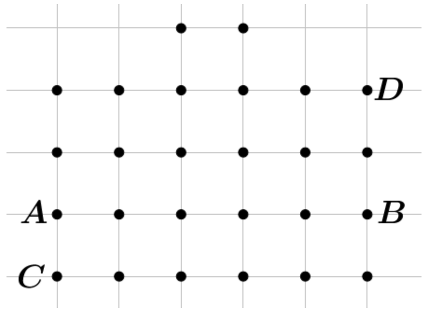
Atrisinājums. Skat., piemēram, 7. att.



7. att.

6.4. Kādā pilsētā ir kvadrātveida ielu plānojums, attālums starp diviem blakus krustojumiem ir 1 km. Dažos ielu krustojumos atrodas piemineklis, kas apzīmēts ar melnu punktu (skat. 8. att.). Ziņkārīgs tūrists kādā dienā (ejot pa ielām) apmeklēja visus šīs pilsētas pieminekļus. Vai var gadīties, ka viņa maršruta garums bija tieši 25 km, ja tas **a)** sākās pie pieminekļa A un beidzās pie pieminekļa B; **b)** sākās pie pieminekļa C un beidzās pie pieminekļa D?

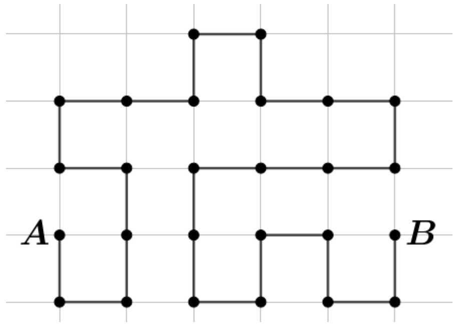
Piezīme. Pa vienu ielas posmu starp diviem blakus krustojumiem drīkst iet arī vairāk nekā vienu reizi.



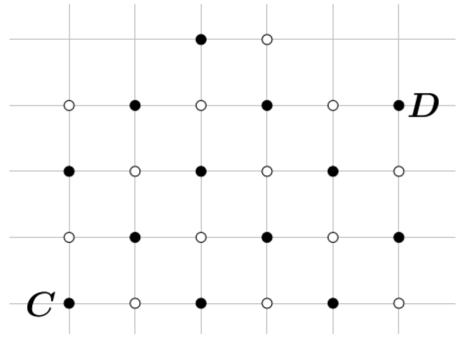
8. att.

Atrisinājums. a) Var, piemēram, skat. 9. att.

b) Nē, nevar. Nokrāsojam punktus (pieminekļus) melnā un baltā krāsā, kā parādīts 10. att. Ievērojam, ka ik pēc 1 km punkta krāsa mainās uz pretējo. Tā kā attālums starp diviem vienas krāsas posmiem ir pāra skaitlis, tad kopējam maršruta garumam no pilsētas C līdz pilsētai D jābūt pāra skaitlim. Tātad maršruta garums nevar būt 25 km.



9. att.



10. att.

6.5. Doti seši atsvari, uz kuriem ir uzraksti 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, kas atbilst atsvara masai gramos. Zināms, ka pieci no šiem uzrakstiem ir pareizi, bet viens ir nepareizs – attiecīgā atsvara masa ir lielāka nekā norādīts uzrakstā. Kā ar divām svēršanām uz sviru svariem var noskaidrot, kurš uzraksts ir nepareizs?

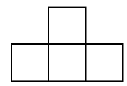
Piezīme. Sviru svari ir svari, kuriem svirai abos galos piestiprina vienādus svaru kausus. Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, tad svaru kausi ir līdzsvarā. Ja vienā kausā ieliktais priekšmets ir smagāks, tad atbilstošais kauss nosveras uz leju.

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 2 g atsvarus, bet otrā liekam 3 g atsvaru. Iespējami trīs gadījumi.

1. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} < 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 3 g.
2. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} > 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g vai 2 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
    - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} < 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 2 g;
    - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} > 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g.
3. Ja $1\ \mathrm{g} + 2\ \mathrm{g} = 3\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g, 5 g vai 6 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
    - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} < 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g;
    - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} > 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 5 g;
    - ja $1\ \mathrm{g} + 5\ \mathrm{g} = 2\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$, tad nepareizais uzraksts ir 6 g.

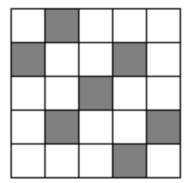
7. klase

7.1. Dots kvadrāts ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Vai var iekrāsot **a)** 8 rūtiņas, **b)** 7 rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu 11. att. redzamo figūru, kurai visas rūtiņas ir neiekrāsotas?



11. att.

Atrisinājums. Abos gadījumos prasītais ir izdarāms, piemēram, skat. 12. att., kur iekrāsotas 7 rūtiņas.



12. att.

7.2. Kādu četru dažādu naturālu skaitļu reizinājums ir 414?
Atrodi visus iespējamos variantus un pamato, ka citu nav!
Atrisinājums. Skaitli 414 kā četru dažādu skaitļu reizinājumu var iegūt trīs veidos:

$$414 = 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 23 = 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 23 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 69.$$

Sadalīsim doto skaitli 414 pirmreizinātājos: $414 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23$. Apskatām divus iespējamos gadījumus.
Ja neviens no reizinātājiem nav 1, tad šis ir arī vienīgais veids, kā sadalīt 414 četros reizinātājos. Bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, jo divi no reizinātājiem ir vienādi.
Ja viens no reizinātājiem ir 1, tad ir 3 atrisinājumi. Tā kā divi reizinātāji ir 3, tad viens no tiem ir jāpiereizina kādam no pārējiem skaitļiem. Tā kā, reizinot 3 ar 1, iegūsim to pašu sadalījumu pirmreizinātājos, tad šis gadījums neder. Atliek vēl 3 iespējas:

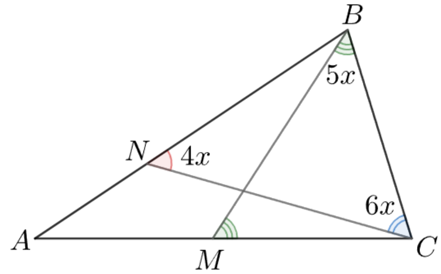
- 3 reizina ar 2, iegūst $414 = 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 23$;
- 3 reizina ar 3, iegūst $414 = 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 23$;
- 3 reizina ar 23, iegūst $414 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 69$.

Esam apskatījuši visas iespējas, tātad nav citu veidu, kā skaitli 414 sadalīt četros dažādos naturālos reizinātājos.

7.3. Uz trijstūra ABC malas AC atzīmēts punkts M, bet uz malas AB atzīmēts punkts N tā, ka $\sphericalangle BNC = 4x$, $\sphericalangle BCN = 6x$ un $\sphericalangle BMC = \sphericalangle CBM = 5x$. Pierādīt, ka trijstūra ABC divi leņķi ir vienādi!
Atrisinājums. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu divos trijstūros (skat. 13. att.), iegūstam:

- $\sphericalangle NBC = 180° - \sphericalangle BNC - \sphericalangle NCB = 180° - 4x - 6x = 180° - 10x$ (ΔNBC);
- $\sphericalangle MCB = 180° - \sphericalangle MBC - \sphericalangle BMC = 180° - 5x - 5x = 180° - 10x$ (ΔMBC).

Tātad $\sphericalangle ABC = \sphericalangle NBC = 180° - 10x = \sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB$ un divi trijstūra ABC leņķi ir vienādi.



13. att.

7.4. Pirmklasnieki un otrklasnieki, kopā 30 bērni, sastājās aplī un sadevās rokās. Izrādījās, ka 20 bērni aiz rokas turēja vismaz vienu pirmklasnieku, bet 24 bērni aiz rokas turēja vismaz vienu otrklasnieku. Cik varēja būt otrklasnieku?

Atrisinājums. Ja 20 bērni turēja aiz rokas vismaz vienu pirmklasnieku, tad atlikušie $30 - 20 = 10$ katrs turēja pie rokas divus otrklasniekus.

Tā kā kopā bija 24 bērni, kas turēja pie rokas vismaz vienu otrklasnieku, un 10 no tiem turēja divus otrklasniekus, tad atlikušie $24 - 10 = 14$ katrs turēja tieši vienu otrklasnieku.

Saskaitīsim, cik roku kopā ir otrklasniekiem. Kopā ir 10 bērni, kas katrs tur divas otrklasnieku rokas, un 14 bērni, kas katrs tur vienu otrklasnieka roku, kopā tātad ir $10 \cdot 2 + 14 = 34$ otrklasnieku rokas.

Tātad kopā ir $34 : 2 = 17$ otrklasnieki.

Piemēram, bērni varēja stāvēt aplī šādi:

$$O_1\ O_2\ O_3\ O_4\ O_5\ O_6\ O_7\ O_8\ O_9\ O_{10}\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6\ P_7\ P_8\ O_{11}\ O_{12}\ P_9\ P_{10}\ O_{13}\ O_{14}\ P_{11}\ P_{12}\ O_{15}\ O_{16}\ P_{13}\ O_{17},$$

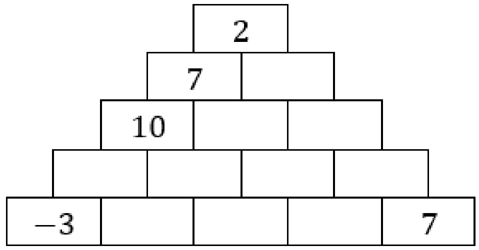
$O_1 - O_9$ un P_{13} katrs tur divus otrklasniekus (attiecīgi pārējie 20 tur vismaz vienu pirmklasnieku), un P_2 līdz P_7 katrs tur divus pirmklasniekus (attiecīgi pārējie 24 tur katrs vismaz vienu otrklasnieku).

7.5. Trīs naturālus skaitļus A, B un C saista sakarības: $A < B < C$ un $C - B = B - A$. Skaitļu A, B un C pierakstā kopā ir izmantoti tieši astoņi cipari, kas visi ir savā starpā atšķirīgi. Vai ir iespējams, ka skaitlis A ir **a)** divciparu skaitlis; **b)** viencipara skaitlis?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 21$, $B = 354$, $C = 687$ ($687 - 354 = 333 = 354 - 21$).
b) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 3$, $B = 546$, $C = 1089$ ($1089 - 546 = 543 = 546 - 3$).

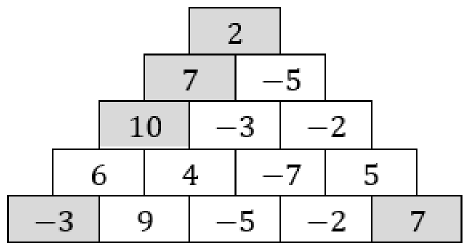
8. klase

8.1. Ieraksti 14. att. redzamās figūras katrā tukšajā taisnstūrī veselu skaitli tā, lai katrā taisnstūrī, izņemot apakšējo rindu, ierakstītais skaitlis ir divu skaitļu, kas atrodas divos taisnstūros tieši zem tā, summa!



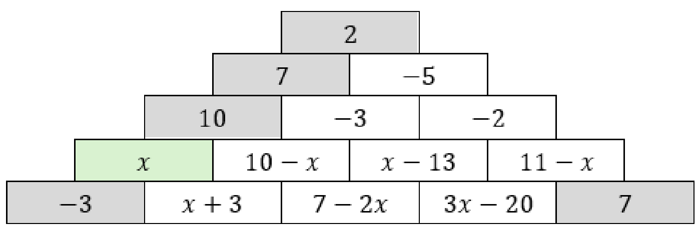
14. att.

Atrisinājums. Skat. 15. att.



15. att.

Piezīme. Apzīmējot taisnstūrī ierakstīto skaitli ar x un izsakot pārējos nezināmos skaitļus, iegūst 16. att. doto skaitļu izkārtojumu. Iegūstam vienādojumu $11 - x = 3x - 20 + 7$, kura atrisinājums $x = 6$.



16. att.

8.2. Cik starp pirmajiem 2025 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)$ dalās ar 74?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $74 = 37 \cdot 2$. Tā kā 37 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem x vai $x + 1$ jādalās ar 37. No diviem pēc kārtas esošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 2.

No 1 līdz 2026 (2026 ir lielākā iespējamā $x + 1$ vērtība) ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais no tiem ir $1998 = 54 \cdot 37$). Līdz ar to:

- 54 veidos var izvēlēties tādu x, kas dalās ar 37 (tas ir, $1 \cdot 37; 2 \cdot 37; 3 \cdot 37; \ldots; 54 \cdot 37$);
- 54 veidos var izvēlēties tādu x, ka $x + 1$ dalās ar 37 (tas ir, $1 \cdot 37 - 1; 2 \cdot 37 - 1; \ldots; 54 \cdot 37 - 1$).

Tātad pavisam starp pirmajiem 2025 naturālajiem skaitļiem ir $54 + 54 = 108$ tādi skaitļi x, ka $x(x+1)$ dalās ar 74.

8.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC visi augstumi krustojas punktā M. Aprēķināt $\sphericalangle ACB$, ja $AB = CM$!

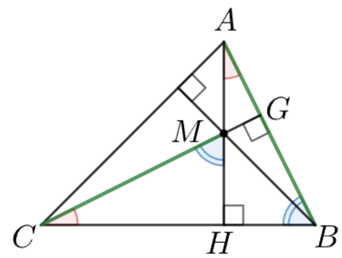
Atrisinājums. Ar H un G apzīmēsim augstumu, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A un C, galapunktus (skat. 17. att.). Apzīmējot $\sphericalangle ABC = \alpha$ un izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam:

- $\sphericalangle HAB = 180° - \sphericalangle AHB - \sphericalangle ABH = 90° - \alpha$ (ΔABH);
- $\sphericalangle GCB = 180° - \sphericalangle CGB - \sphericalangle GBC = 90° - \alpha$ (ΔCGB).

Tātad $\Delta ABH = \Delta CMH$ pēc pazīmes lml:

- $\sphericalangle HAB = 90° - \alpha = \sphericalangle MCH$;
- $AB = CM$ pēc dotā;
- $\sphericalangle CMH = 180° - \sphericalangle MHC - \sphericalangle MCH = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha = \sphericalangle ABH$ (ΔCMH).

Tā kā $AH = CH$ kā vienādo trijstūru atbilstošās malas, tad ΔCAH pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas un $\sphericalangle ACH = \sphericalangle CAH = (180° - \sphericalangle AHC) : 2 = 90° : 2 = 45°$. Tātad $\sphericalangle ACB = 45°$.



17. att.

8.4. Alise un Kate spēlē spēli. Pirmajā gājienā Kate nosauc skaitli nulle, pēc tam viņas pamīšus izdara gājienus. Katra meitene savā gājienā izvēlas vienu naturālu skaitli no 1 līdz 10, pieskaita to pēdējam nosauktajam skaitlim un nosauc rezultātu. (Piemēram, ja Alise savā gājienā ir nosaukusi skaitli 18, tad Kate var nosaukt jebkuru naturālu skaitli no 19 līdz 28). Uzvar tā meitene, kas nosauc skaitli 100. Kura meitene vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no otras spēlētājas gājieniem?

Atrisinājums. Vienmēr var uzvarēt Alise. Savā pirmajā gājienā Alisei jānosauc skaitlis 1. Pēc tam pēc katra Kates gājiena Alise izvēlas pieskaitīt tādu skaitli, kas kopā ar Kates iepriekšējā gājienā izvēlēto skaitli summā dod 11 (šādu gājienu Alise vienmēr var veikt, jo var izvēlēties skaitļus no 1 līdz 10). Līdz ar to pēc katra Alises gājiena skaitlis palielināsies par 11. Alises nosauktie skaitļi būs 1; 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89; 100.

8.5. Trīs naturālus skaitļus A, B un C saista sakarības: $A < B < C$ un $C - B = B - A$. Skaitļu A, B un C pierakstā kopā ir izmantoti tieši desmit cipari, kas visi ir savā starpā atšķirīgi. Vai ir iespējams, ka skaitlis A ir **a)** divciparu skaitlis; **b)** viencipara skaitlis?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 27$, $B = 1548$, $C = 3069$ $(3069 - 1548 = 1521 =$
$= 1548 - 27)$.

b) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 3$, $B = 8526$, $C = 17049$ $(17049 - 8526 = 8523 = 8526 - 3)$.