LATVIJAS 30. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI

5. klase

1. Sauksim naturālu skaitli par interesantu, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars par 1 mazāks nekā visu citu ciparu summa.

- **a)** kāds ir mazākais interesantais četrciparu skaitlis?
- **b)** kāds ir lielākais interesantais skaitlis?

2. Uz galda atrodas 7 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka 6 no tām masas ir vienādas, bet septītajai masa **varbūt** ir citāda. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir un, ja tā ir, tad vai tā vieglāka vai smagāka par citām?

3. No 10×10 rūtiņu liela kvadrāta izgriezts centrālais 8×8 rūtiņu kvadrāts. Sagrieziet atlikušo "rāmi" iespējami mazā skaitā gabalu, lai no tiem varētu salikt vienu kvadrātu bez caurumiem un pārklāšanās. (Griezumiem jāiet pa rūtiņu robežām; **nav jāpierāda**, ka Jūsu iegūtais gabalu skaits ir mazākais iespējamais).

4. Vai kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, var katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 16 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai nekādi divi skaitļi, kas ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu, abi vienlaicīgi nedalītos ne ar vienu citu naturālu skaitli kā 1?

5. Kastē atrodas 10 baltas, 12 sarkanas un 16 zaļas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izņemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti. Vai var panākt, lai kastē paliek tikai viena lodīte? Vai to var panākt, ja sākotnējie lodīšu daudzumi ir 10, 12 un 15?

6. klase

1. Šodien pulkst. 12^{00} divi pulksteņi ar parastu ciparnīcu rādīja pareizu laiku. Pirmais pulkstenis katru dienu steidzas par 4 minūtēm, otrais pulkstenis katru dienu atpaliek par 6 minūtēm. Pēc cik dienām pirmo reizi pulkst. 12^{00} abi pulksteņi atkal rādīs pareizu laiku?

2. Kvadrāts sastāv no $n\times n$ rūtiņām; viena stūra rūtiņa izgriezta. Rūtiņas malas garums ir 1. Atlikušo daļu jāsadala taisnstūros ar izmēriem 1×2 tā, lai pusei no tiem garākā mala ietu vienā virzienā, bet pusei – otrā. Vai to var izdarīt, ja a) $n=5$, b) $n=7$?

3. Vai var rindā izrakstīt divus ciparus 1, divus ciparus 2, ..., divus ciparus 5 tā, lai katrs izrakstītais viencipara skaitlis, izņemot pirmo un pēdējo, būtu vienāds ar savu abu kaimiņu summu vai starpību?

4. Šaha turnīrā katrs spēlētājs ar katru citu spēlēja vienu reizi. Par uzvaru iegūst 1 punktu, par neizšķirtu ½ punkta, par zaudējumu – 0 punktus. Jānis, Pēteris, Andris un Juris ieguva attiecīgi 4½ , 3½, 3 un 1½ punktus; neviens no citiem spēlētājiem neieguva vairāk punktu nekā Juris. Cik bija citu spēlētāju un cik punktus viņi ieguva?

5. Doti 4 atsvari. Katram no tiem masa ir 10 g vai 11g. Doti arī svari, kas rāda uz tiem uzlikto atsvaru kopējo masu. Vai ar 3 svēršanām var noteikt katra atsvara masu?

LATVIJAS 30. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI

7. klase

1. Dots, ka $|x+y|+|x-y|=10$. Kāda ir lielākā iespējamā x vērtība?

2. Trijstūri krusto 4 taisnes. Vai var gadīties, ka trijstūris sadalās 5 trijstūros, 3 četrstūros, 2 piecstūros un 1 sešstūrī?

Vai var gadīties, ka sadalījumā iegūto trijstūru ir par vienu mazāk, četrstūru – par vienu vairāk, bet piecstūru un sešstūru daudzumi ir tādi paši, kā minēts iepriekš?

3. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 9 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.

Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt.

4. Izliektā piecstūrī ABCDE punkti A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ir attiecīgi malu CD, DE, EA, AB, BC viduspunkti. Dots, ka $AA_1\perp CD$, $BB_1\perp DE$, $CC_1\perp EA$ un $DD_1\perp AB$. Pierādiet, ka $EE_1\perp BC$.

5. Uz tāfeles pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt $|a^2-b^2|$. Pēc n-1 gājiena uz tāfeles paliek viens skaitlis. Vai tas var būt 0, ja a) n=8, b) n=9?

8. klase

1. Vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ un $x^2+p_3x+q_3=0$ ir attiecīgi saknes x_0 un x_1, x_0 un x_2, x_0 un x_3. Izteikt vienādojuma $x^2+\frac{p_1+p_2+p_3}{3}x+\frac{q_1+q_2+q_3}{3}=0$ saknes ar x_0, x_1, x_2 un x_3, nelietojot kvadrātsaknes zīmi.

2. Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus pozitīvus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja?

3. Kādā lielākajā daudzumā dažādu naturālu saskaitāmo, kas visi lielāki par 1, var sadalīt skaitli 56 tā, lai katru divu saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs būtu 1?

4. Andrim un Jurim iedots pa papīra kvadrātam ar izmēriem 1 m × 1 m. Katrs no viņiem savā kvadrātā novilka vairākas līnijas, sadalot to daļās; katra daļa ir taisnstūris ar izmēriem 4 cm × 4 cm vai 3 cm × 6 cm.

Pierādiet, ka Andra novilkto līniju kopgarums vienāds ar Jura novilkto līniju kopgarumu. (Tika novilktas **tikai** līnijas, kas dala kvadrātus taisnstūros.)

5. Uz katras no divām lapām jāuzraksta pa n veseliem pozitīviem skaitļiem. Visiem 2n uzrakstītajiem skaitļiem jābūt dažādiem. Pie tam uz lapām uzrakstīto skaitļu summām jābūt vienādām savā starpā, un uzrakstīto skaitļu kvadrātu summām arī jābūt vienādām savā starpā.

Vai tas iespējams, ja a) n=3, b) n=4, c) n=2003?

LATVIJAS 30. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI

9. klase

1. Dots, ka $q_1q_2q_3<0$. Pierādiet, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2+p_1x+q_1=0$, $x^2+p_2x+q_2=0$ un $x^2+p_3x+q_3=0$ ir divas dažādas saknes.

2. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var tajās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai skaitļu summas visās rindās un kolonnās būtu dažādas un visas dalītos ar a) 4, b) 8?

3. Noskaidrot, kādiem dažādiem pirmskaitļiem p_1, p_2, ..., p_n pastāv īpašība: $p_1p_2p_3...p_n$ dalās ar $(p_1-1)(p_2-1)...(p_n-1)$.

4. Trijstūra ABC ievilktā riņķa centrs ir I. Dots, ka CA+AI=CB. Pierādīt, ka $\angle BAC=2\angle CBA$.

5. Uz galda atrodas k konfektes. Andris un Juris pamīšus izdara gājienus: Andris – pirmo, trešo, piekto, ..., Juris – otro, ceturto, sesto, ... Ar n-to gājienu (n=1, 2, 3, ...) jāapēd vismaz viena, bet ne vairāk par n konfektēm. Kas apēd pēdējo konfekti, uzvar.

Kurš uzvar, pareizi spēlējot, ja a) k=8, b) k=64?

10. klase

1. Vai noteikti $x+\frac{4}{x}>y+\frac{4}{y}$, ja

a) $x>y>0$, b) $x>y>2$?

2. Uz trijstūra ABC malām AC un AB ņemti attiecīgi punkti M un N. Taisne t dala uz pusēm trijstūra ārējos leņķus pie virsotnes A. Riņķa līnijas, kas apvilktas ap ΔABM un ΔACN, krusto taisni t attiecīgi punktos K un L. Pierādiet, ka trijstūri KBM un LCN ir vienādsānu un līdzīgi savā starpā.

3. Dots, ka n – vesels pozitīvs skaitlis un skaitļi 2n+1 un 3n+1 ir veselu skaitļu kvadrāti.

a) atrodiet kaut vienu tādu n,
b) vai 5n+3 var būt pirmskaitlis?

4. Rindā ir 12 krēslu; uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā kārtībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu iepriekšējā vietā, vai tieši blakus iepriekšējai vietai.

Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārkārtošanās?

5. Ap apaļu galdu kaut kādā kārtībā apsēžas m votivapas un n šillišallas (gan vieni, gan otri ir rūķīši). Kādām m un n vērtībām noteikti var atrast rūķīti, kam gan pa labi, gan pa kreisi blakus sēž šillišalla? (Pieņemam, ka $m+n\geq 3$).

LATVIJAS 30. ATKLĀTĀS MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES UZDEVUMI

11. klase

1. Dots, ka x, y, z – reāli skaitļi un

$$|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|=2003.$$

Kāda ir lielākā iespējamā z vērtība?

2. No punkta A riņķa līnijai w novilktas pieskares AX un AY (X un Y – pieskāršanās punkti). Punktam Y diametrāli pretējais punkts ir Z. Punkts B pieder nogrieznim YZ un $XB \perp YZ$.

Pierādiet, ka taisne AZ dala nogriezni XB uz pusēm.

3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka 6^n-1 dalās ar 4^n-1?

4. Kādā klubā ir 8 biedri. Vai var nodibināt vairākas komisijas tā, lai vienlaicīgi izpildītos divas prasības:

a) katrā komisijā ir tieši 4 biedri,
b) katri 3 no astoņiem kluba biedriem ir kopā tieši vienā komisijā?

5. Volejbola turnīrā piedalās $(n+2)\cdot 2^{n-1}-2$ komandas (n – naturāls skaitlis), katra ar katru citu spēlē tieši vienu reizi (neizšķirtu nav). Pierādīt: pēc turnīra beigām var izvēlēties n no šīm komandām tā, ka katra no pārējām zaudējusi vismaz vienai no izvēlētajām n.

12. klase

1. Pierādīt: ΔABC visu leņķu kosinusi ir racionāli skaitļi tad un tikai tad, ja ΔABC līdzīgs tādam trijstūrim, kura visu malu garumi izsakās ar veselu skaitu centimetru.

2. Vai eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka skaitlim n^2 ir tikpat daudz naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, cik naturālu dalītāju, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3?

3. Uz trijstūra ABC malām AB un BC kā uz pamatiem ārpus ΔABC konstruēti vienādsānu trijstūri AMB un BNC (AM=MB un BN=NC). Zināms, ka $\angle AMB+\angle BNC=180^0$ un K ir malas AC viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle MKN=90^0$.

4. Atrisināt vienādojumu sistēmu ar 5 mainīgajiem $x+y=z^2$, $y+z=u^2$, $z+u=v^2$, $u+v=x^2$, $v+x=y^2$ pozitīvos skaitļos.

5. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Spēlētāji A un B pamīšus raksta tukšajās rūtiņās skaitļus (sāk A): A – vieninieku, B – nulli. A mērķis ir panākt, lai pēc tam, kad visas rūtiņas aizpildītas, varētu atrast 3×3 rūtiņu kvadrātu ar iespējami lielu tajā ierakstīto skaitļu summu S; B cenšas viņam traucēt.

Kādu lielāko summu S var sasniegt spēlētājs A?