Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9.1. Kādām naturālām n vērtībām izteiksmes $\frac{(3n-1)(n+4)}{n+2}$ vērtība ir vesels skaitlis?

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

$$\frac{(3n-1)(n+4)}{n+2}=\frac{3n^2+11n-4}{n+2}=\frac{3n(n+2)+5n-4}{n+2}=\frac{3n(n+2)}{n+2}+\frac{5(n+2)-14}{n+2}=3n+5-\frac{14}{n+2}.$$

Tā kā $3n+5$ ir naturāls skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis tikai tad, ja $\frac{-14}{n+2}$ ir vesels skaitlis, bet tas iespējams, ja $(n+2)$ ir skaitļa 14 dalītājs. Ievērojot, ka n ir naturāls, iegūstam, ka $n+2=7$ vai $n+2=14$, no kā iegūstam, ka $n=5$ vai $n=12$.

9.2. Atrast visus naturālos skaitļus B intervālā $1<B<99$, kuriem izpildās šāda īpašība: jebkuram naturālam skaitlim C, kuram $B<C<100$ ir spēkā $B\leq V\leq C$, kur $V=\frac{1+B+C+100}{4}$ ir skaitļu 1, B, C, 100 vidējais aritmētiskais.

Atrisinājums. Pēc dotā $1<B<C<100$. Tā kā $B<C$, tad var pieņemt, ka $C=B+x$, kur $1\leq x\leq 99-B$. Līdz ar to iegūstam, ka četru doto skaitļu vidējais aritmētiskais ir

$$V=\frac{1+B+B+x+100}{4}=\frac{2B+x+101}{4}.$$

Ņemot vērā, ka jāizpildās nevienādībām $B\leq V\leq C$, iegūstam

$$B\leq\frac{2B+x+101}{4}\leq B+x$$

$$4B\leq 2B+x+101\leq 4B+4x.$$

Pārrakstot iegūto divkāršo nevienādību kā nevienādību sistēmu, iegūstam

$$\begin{cases}4B\leq 2B+x+101\\2B+x+101\leq 4B+4x\end{cases}\quad \text{jeb}\quad \begin{cases}2B\leq 101+x\\2B\geq 101-3x\end{cases}.$$

Ievērojam, ja nevienādība izpildās pie $x=1$, tad tā izpildās arī pie lielākiem x. Tāpēc tas, ka šī nevienādība izpildās visiem $x\geq 1$ ir ekvivalents apgalvojumam, ka tā izpildās pie $x=1$. Tātad

$$\begin{cases}2B\leq 102\\2B\geq 98\end{cases}\quad \text{jeb}\quad \begin{cases}B\leq 51\\B\geq 49\end{cases}$$

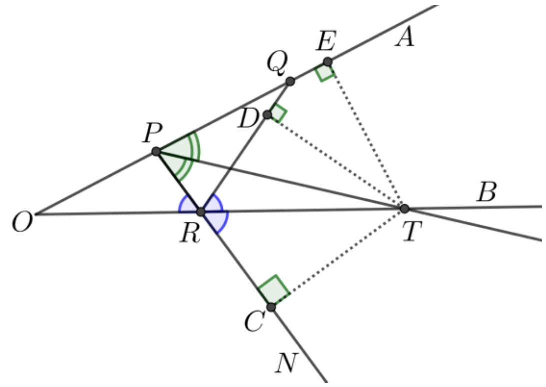
Līdz ar to esam ieguvuši, ka jebkurai derīgai C vērtībai ir spēkā sakarība $B\leq V\leq C$, ja B ir 49, 50 vai 51.

9.3. Punkts R atrodas uz stara OB un punkti P un Q atrodas uz stara OA tā, ka $OP<OQ$ un $\sphericalangle ORP=\sphericalangle BRQ$. Leņķa RPA bisektrise krusto staru OB punktā T. Pierādīt, ka QT ir $\sphericalangle RQA$ bisektrise!

Atrisinājums. Pagarinām nogriezni PR, tad $\sphericalangle ORP=\sphericalangle NRB$ kā krustleņķi (skat. 1. att.) un līdz ar to arī $BRQ=\sphericalangle NRB$. Izmantojot bisektrises īpašību, iegūstam, ka punkts T atrodas vienādā attālumā no

- leņķa NRQ malām NR un RQ, tas ir, $TC=TD$;
- leņķa QPR malām PR un PQ, tas ir, $TC=TE$.

Tātad $TD=TE$ un esam ieguvuši, ka punkts T atrodas vienādā attālumā no leņķa RQA malām. Līdz ar to pēc bisektrises pazīmes esam ieguvuši, ka punkts T atrodas uz $\sphericalangle RQA$ bisektrises jeb QT ir $\sphericalangle RQA$ bisektrise.



1. att.

9.4. Vai eksistē tādi četri dažādi **a)** naturāli skaitļi, **b)** pirmskaitļi a, b, c, d, ka vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

- $b + c + d$ dalās ar a,
- $c + d + a$ dalās ar b,
- $d + a + b$ dalās ar c,
- $a + b + c$ dalās ar d?

Atrisinājums. a) Jā, eksistē. Skaitļiem 1, 2, 3, 6 izpildās visi uzdevuma nosacījumi:

- $2 + 3 + 6$ dalās ar 1,
- $1 + 3 + 6$ dalās ar 2,
- $1 + 2 + 6$ dalās ar 3,
- $1 + 2 + 3$ dalās ar 6.

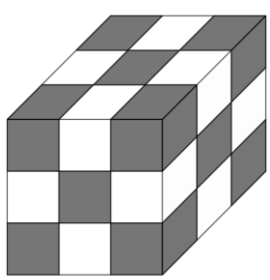
b) Nē, neeksistē. Ievērojam, ka

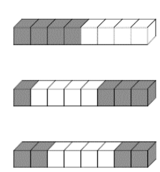
- $a + (b + c + d)$ dalās ar a (jo abi saskaitāmie dalās ar a),
- $b + (c + d + a)$ dalās ar b,
- $c + (d + a + b)$ dalās ar c,
- $d + (a + b + c)$ dalās ar d.

Tā kā a, b, c, d ir pirmskaitļi, tad $a + b + c + d$ dalās ar $abcd$, no kā izriet, ka $a + b + c + d \geq abcd$. Nezaudējot vispārīgumu varam pieņemt, ka $a \leq b \leq c \leq d$. Tādā gadījumā $a + b + c + d \leq 4d < abcd$, jo pat trīs mazāko atšķirīgo pirmskaitļu reizinājums $2 \cdot 3 \cdot 5 > 4$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad neeksistē tādi četri dažādi pirmskaitļi, kuriem izpildās visi uzdevuma nosacījumi.

9.5. Vai kubu ar izmēriem $12 \times 12 \times 12$ iespējams salikt no ķieģeļiem, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 8$?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasīto nevar izdarīt. Sadalām kubu 9 mazākos kubos, kuru izmēri ir $4 \times 4 \times 4$, un iekrāsojam tos kā šaha galdiņu (skat. 2. att.). Pavisam ir $64 \cdot 14 = 896$ melni un $64 \cdot 13 = 832$ balti kubiņi ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Tā kā katrs ķieģelis pārklāj 4 melnus un 4 baltus kubiņus ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$ (skat. 3. att.), tad, ja no šiem ķieģeļiem būtu salikts kubs, tas saturētu vienāda skaita melnos un baltos kubiņus ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$, bet $896 \neq 832$.


2. att.


3. att.

10.1. Pierādīt, ka skaitlim $2019^3 + 2020^3 + 2021^3$ ir vismaz 20 dažādi pozitīvi dalītāji!

Atrisinājums. Apzīmējam $n = 2020$ un pārveidojam doto skaitli:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1 + n^3 + n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 =$$
$$= n \cdot (3n^2 + 6) = n \cdot 3 \cdot (n^2 + 2) = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot 3 \cdot (2020^2 + 2).$$

Tā kā naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, kur p_i ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_m + 1)$ dažādi naturālie dalītāji, tad dotajam skaitlim ir vismaz $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24$ dažādi dalītāji, pat neņemot vērā reizinātāju $2020^2 + 2$. Patiesībā dotajam skaitlim ir 640 dažādi dalītāji.

10.2. Zināms, ka $x^2 + y^2 + xy = 3$. Kāda var būt $x + y$ vērtība?

1. atrisinājums. Pamatosim, ka $x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}\ (x + y)^2$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}\ x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{4}y^2$$
$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy \geq 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$
$$(x - y)^2 \geq 0.$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība, tad arī dotā nevienādība ir patiesa. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $3 \geq \frac{3}{4}\ (x + y)^2$ jeb $4 \geq (x + y)^2$, tātad $-2 \leq x + y \leq 2$.

Vēl jāparāda, ka visām vērtībām šajā intervālā ir atbilstošas x un y vērtības. Apzīmējam $x + y = t$ $(-2 \leq t \leq 2)$. No dotās vienādības iegūstam

$$x^2 + 2xy + y^2 - xy = 3 \quad \Rightarrow \quad xy = (x + y)^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad xy = t^2 - 3.$$

Sastādām kvadrātvienādojumu $a^2 - ta + t^2 - 3 = 0$, kura sakņu summa ir $a_1 + a_2 = t$ un sakņu reizinājums ir $a_1 a_2 = t^2 - 3$. Ja šim vienādojumam ir atrisinājums dotai t vērtībai, tad tā saknes ir meklētās x un y vērtības. Aprēķinām diskriminantu $D = (-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^2 - 3) = 12 - 3t^2$, tā kā $-2 \leq t \leq 2$, tad $t^2 \leq 4$, tātad visām pieļaujamajām t vērtībām $D \geq 0$. Tātad $-2 \leq x + y \leq 2$.

2. atrisinājums. Apzīmējam $x = u + v$ un $y = u - v$. Ievietojot apzīmējumus dotajā vienādībā, iegūstam

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 + (u + v)(u - v) = 3$$
$$u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - v^2 = 3$$
$$3u^2 + v^2 = 3.$$

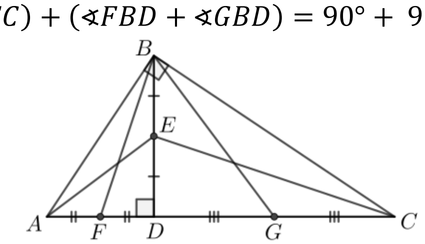
Lai pēdējā vienādība būtu patiesa, tad $-1 \leq u \leq 1$. Tā kā $x + y = (u + v) + (u - v) = 2u$, tad $-2 \leq x + y \leq 2$.

10.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC, kurā $\sphericalangle ABC = 90°$, novilkts augstums BD, nogriežņa BD viduspunkts ir E. Punkti F un G ir attiecīgi nogriežņu AD un CD viduspunkti. Pierādīt, ka $\sphericalangle AEC + \sphericalangle FBG = 180°$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $\Delta ABD \sim \Delta BDC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = 90°$ un $\sphericalangle BAD = 90° - \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ (skat. 4. att.). Tātad trijstūru malas ir proporcionālas, tas ir, $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}$. Tā kā $AD = 2FD$ un $BD = 2ED$, tad $\frac{BD}{CD} = \frac{FD}{ED}$. Līdz ar to $\Delta BDF \sim \Delta CDE$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle FBD = \sphericalangle DCE = 90° - \sphericalangle DEC$ jeb $\sphericalangle FBD + \sphericalangle DEC = 90°$.

Līdzīgi pierāda, ka $\sphericalangle GBD + \sphericalangle AED = 90°$.

Tātad $\sphericalangle AEC + \sphericalangle FBG = (\sphericalangle AED + \sphericalangle DEC) + (\sphericalangle FBD + \sphericalangle GBD) = 90° + 90° = 180°$.



4. att.

10.4. Aplūkojam skaitļu virkni 7; 737; 73737; 7373737; ..., kuras pirmais loceklis ir 7 un katru nākamo iegūst, iepriekšējam pierakstot galā 37. Pierādīt, ka neviens šīs virknes loceklis nedalās ar 17.

Atrisinājums. Apzīmējam virknes locekļus ar $s_0 = 7$, $s_1 = 737$, $s_2 = 73737$, …

Redzams, ka virknē ir spēkā sakarība $s_{k+1} = 100s_k + 37$. Patiešām, skaitli pareizinot ar 100 tam tiek galā pierakstītas divas nulles, bet pieskaitot 37 šīs nulles pārvēršas par 37, tātad šī operācija pieraksta skaitļa galā 37. Apzīmēsim ar a_k atlikumu virkni, kas rodas s_k dalot ar 17, $a_k = s_k \bmod 17$. Mums jāpierāda, ka virknē (a_k) nav nevienas nulles.

Arī virknes a_k katrs loceklis (tāpat kā virknei s_k) ir atkarīgs tikai no iepriekšējā

$$a_{k+1} = s_{k+1} \bmod 17 = \; 100s_k + 37 \bmod 17 \; = \; 15a_k \; + \; 3 \bmod 17.$$

Izmantojot šo formulu un to, ka $a_0 = 7 \bmod 17 = 7$, aprēķināsim virknes a_k pirmos locekļus.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k (mod 17)	7	6	8	4	12	13	11	15	7

Esam ieguvuši, ka $a_0 = a_8 = 7$. Tā kā šajā virknē katrs loceklis ir atkarīgs tikai no iepriekšējā, tad šī virkne būs periodiska ar periodu 8: no tā, ka $a_0 = a_8$, secinām, ka $a_1 = a_9$, tad $a_2 = a_{10}$ utt.

Tā kā starp pirmajiem 8 locekļiem šajā virknē nav nevienas nulles, tad, tā kā tā ir periodiska, tad arī tālāk tajā nebūs nevienas nulles.

10.5. Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas, katras monētas masa ir 20 g vai 21 g. Kā noteikt katras monētas masu ar trīs svēršanām uz elektroniskajiem svariem, kas rāda uz svariem uzlikto monētu kopējo masu?

Atrisinājums. Apzīmējam monētas ar A, B, C, D. Pirmajā svēršanā uz svariem liekam A un B.

- Ja $A + B = 40$ vai $A + B = 42$, tad A un B masas jau zināmas, tās attiecīgi ir 20 g un 20 g vai 21 g un 21 g. Pēc tam ar divām svēršanām atrodam C un D masu.
- Ja $A + B = 41$, tad otrajā svēršanā uz svariem liekam A un C.
    - Ja $A + C = 40$ un $A + C = 42$, tad zinām A un C masu, tātad arī B masu. Trešajā svēršanā uz svariem liekam D un nosakām tās masu.
    - Ja $A + C = 41$, tad no tā, ka $A + B = A + C$, secinām, ka $B = C$. Trešajā reizē uz svariem liekam B, C un D. Ievērojam, ka $B + C$ ir pāra skaitlis (40 vai 42). Apskatot visus iespējamos svēršanas iznākumus, iegūstam katras monētas masu, skat. 5. att.

$B+C$	$B+C+D$	D	B	C	A
40	60	20	20	20	21
40	61	21	20	20	21
42	62	20	21	21	20
42	63	21	21	21	20

5. att.

11.1. Dota funkcija $f(x) = mx^2 + (m-1)x + \frac{2020}{m-2019}$. Ar kādām parametra m vērtībām funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$?

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $m \neq 2019$. Lai funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $f(1) < f(2)$. Atrisinām šo nevienādību:

$$m + (m-1) + \frac{2020}{m-2019} < 4m + (m-1)\cdot 2 + \frac{2020}{m-2019}$$
$$2m - 1 < 6m - 2$$
$$m > \frac{1}{4}.$$

Vēl jāgarantē, ka parabolas virsotne neatrodas intervālā $(1; 2)$. Tā kā m vērtības ir pozitīvas, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $x_v \leq 1$ jeb $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup$ $\cup\ (2019; +\infty)$.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka $m \neq 2019$. Ja $m < 0$, tad parabolas virsotnes abscisa $\frac{1-m}{2m} < 0$, kas nozīmē, ka funkcija nav augoša dotajā intervālā. Ja $m = 0$, tad iegūstam $f(x) = -x - \frac{2020}{2019}$ un tā ir dilstoša funkcija. Ja $m > 0$, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai $\frac{1-m}{2m} \leq 1$. Reizinot nevienādību ar $2m > 0$, iegūstam $1 - m \leq 2m$ jeb $m \geq \frac{1}{3}$. Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā $(1; 2)$, ja $m \in \left[\frac{1}{3}; 2019\right) \cup (2019; +\infty)$.

11.2. Aplūkojam virkni 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; ..., kurā katrs naturālais skaitlis k tiek atkārtots k reizes. Pierādīt, ka šīs virknes n-to locekli var aprēķināt pēc formulas $\left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$.
Ar $[x]$ apzīmējam skaitļa veselo daļu, tas ir, lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $[3{,}1] = 3$, $[17] = 17$, $[6{,}99] = 6$.
Atrisinājums. Katrs naturāls skaitlis k dotajā virknē atkārtojas k reizes, noskaidrosim, ar kādiem indeksiem (kurās pozīcijās) tas tajā parādās.
Pirms pirmā skaitļa k ir viens vieninieks, divi divnieki, trīs trijnieki, ..., $(k-1)$ skaitlis $(k-1)$, tātad kopā

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k^2 - k}{2}$$

skaitļi. Tātad skaitlim k indeksi šajā virnē būs

$$\frac{k^2-k}{2} + 1;\ \frac{k^2-k}{2} + 2;\ \ldots;\ \frac{k^2-k}{2} + k,$$

jeb, citiem vārdiem sakot, jebkurš skaitlis k šajā virknē parādās ar indeksu $\frac{k^2-k}{2} + i$, kur $1 \leq i \leq k$.
Lai pierādītu formulu, jāpierāda, ka visiem naturāliem k un visiem naturāliem $1 \leq i \leq k$ izpildās

$$\left[\sqrt{2\left(\frac{k^2-k}{2} + i\right)} + \frac{1}{2}\right] = k \quad \text{jeb} \quad \left[\sqrt{k^2 - k + 2i} + \frac{1}{2}\right] = k$$

Vienādība $[x] = y$, kur y ir naturāls skaitlis izpildās tad un tikai tad, ja $y \leq x < y + 1$, tāpēc vienādība pārvēršas par divkāršo nevienādību

$$k \leq \sqrt{k^2 - k + 2i} + \frac{1}{2} < k + 1$$

Atņemot $\frac{1}{2}$ un kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq k^2 - k + 2i < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4} \leq 2i < 2k + \frac{1}{4}.$$

Redzams, ka pēdējā nevienādība ir patiesa visiem $1 \leq i \leq k$. Tā kā visi pārveidojumi bija ekvivalenti (kvadrātā tika kāpinātas pozitīvas izteiksmes), tad sākotnējā izteiksme arī ir spēkā.

11.3. Četrstūris $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka trijstūros ABC, BCD, CDA, DAB ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes!
Atrisinājums. Ja X un Y ir attiecīgi ΔABD un ΔABC ievilkto riņķa līniju centri (skat. 6. att.), tad AY un BY ir attiecīgi $\sphericalangle BAC$ un $\sphericalangle ABC$ bisektrises. Tātad

$$\sphericalangle AYB = 180° - (\sphericalangle BAY + \sphericalangle ABY) = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC) =$$
$$= \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

Līdzīgi $\sphericalangle AXB = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle ADB$.

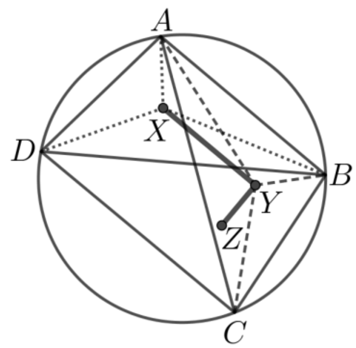
Tā kā $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, tad $\sphericalangle AYB = \sphericalangle AXB$. Tātad punkti A, X, Y, B atrodas uz vienas riņķa līnijas. Līdz ar to $\sphericalangle XYB = 180° - \sphericalangle XAB = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DAB$.

Ja Z ir ΔBCD ievilktās riņķa līnijas centrs, tad līdzīgi iegūstam, ka $\sphericalangle ZYB = 180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DCB$.

Izmantojot šīs divas vienādības, iegūstam

$$\sphericalangle XYZ = 360° - \sphericalangle XYB - \sphericalangle ZYB = 360° - (180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DAB) - (180° - \frac{1}{2}\sphericalangle DCB) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle DCB) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie četrstūra leņķi ir taisni, tātad tas ir taisnstūris.



6. att.

11.4. Zināms, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

Atrisinājums. a) Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka $c \neq 0$, jo pretējā gadījumā $\overline{abc}$ nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka 0 nav vienādojuma sakne. Ja $x \geq 0$, tad $ax^2 + bx + c \geq c > 0$. Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar $-x_1$, $-x_2$ un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

$$ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x + x_2).$$

Pieņemsim, ka šīs saknes ir veseli skaitļi. Ja $x = 10$, tad iegūstam

$$a(10 + x_1)(10 + x_2) = 100a + 10b + c = \overline{abc}.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $\overline{abc}$ ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

b) Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim pretējo, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, $-\frac{p_1}{q_1}$ un $-\frac{p_2}{q_2}$, kur p_1, q_1 ir savstarpēji pirmskaitļi un arī p_2, q_2 ir savstarpēji pirmskaitļi. Sadalām vienādojuma kreiso pusi reizinātājos:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{p_1}{q_1}\right)\left(x + \frac{p_2}{q_2}\right) = \frac{a}{q_1q_2}(q_1x + p_1)(q_2x + p_2).$$

Ievietojot $x = 10$, iegūstam

$$\frac{a}{q_1q_2}(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2) = 100a + 10\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_1p_2}{q_1q_2} = 100a + 10b + c = \overline{abc}$$

$$a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2) = \overline{abc} \cdot q_1q_2.$$

Pamatosim, ja kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ sakne ir $\frac{p}{q}$ (nesaīsināma daļa), tad a dalās ar q.

Ievietojam vienādojumā $ax^2 + bx + c = 0$ tā sakni $x = \frac{p}{q}$ un pārveidojam iegūto identitāti:

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$$

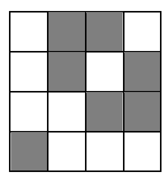
$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

$$q(cq + bp) = -ap^2.$$

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar q, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar q. Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma p un q ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka a ir jādalās ar q.
Līdz ar to secinām, ka q_i ir viencipara skaitlis, jo a ir cipars.
Analogi iegūst, ka c dalās ar p_i. Tas nozīmē, ka $10q_i + p_i$ ir divciparu skaitlis.
Tātad vienādība $q_1 q_2 \cdot \overline{abc} = a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2)$ nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs $\overline{abc}$ (trīsciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē a ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

11.5. Atrast lielāko naturālo skaitli N, kuram ir spēkā īpašība: lai kuras N rūtiņas būtu aizkrāsotas 4×4 rūtiņu tabulā, vienmēr varēs izvēlēties divas rindas un divas kolonnas tā, ka katra aizkrāsotā rūtiņa atrodas vai nu izvēlētajā rindā, vai izvēlētajā kolonnā (vai abās).

Atrisinājums. Lielākā N vērtība ir 6. Pamatosim, ja iekrāsotas 6 rūtiņas, tad jebkuram krāsojumam izpildās uzdevuma nosacījumi. Ja kādā rindā ir vairāk nekā divas iekrāsotas rūtiņas, tad izvēlamies šo rindu un vēl kādu rindu, kurā ir kāda iekrāsota rūtiņa. Tātad izvēlētajās divās rindās jau ir vismaz četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.
Ja nevienā rindā nav vairāk kā divas iekrāsotas rūtiņas, tad pēc Dirihlē principa divas iekrāsotas rūtiņas ir vismaz divās rindās. Izvēlamies šīs divas (vai divas no trim, ja trīs rindās ir pa divām iekrāsotām rūtiņām) rindas. Tad izvēlētajās divās rindās jau ir tieši četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.
Pamatosim, ka lielākām N vērtībām īpašība nav spēkā visām tabulām. Ja $N = 7$, tad īpašība nav spēkā, piemēram, 7. att. dotajam rūtiņu izvietojumam. Ievērojam, ka, izvēloties jebkuras divas rindas, paliek trīs kolonnas, kurās atrodas iekrāsotās rūtiņas.



7. att.

12.1. Ģeometriskās progresijas pirmais, desmitais un 2020-ais loceklis ir naturāls skaitlis. Vai noteikti arī tās 2019-ais loceklis ir naturāls skaitlis?

Atrisinājums. Nē, 2019-ais loceklis var nebūt naturāls skaitlis, piemēram, ja $b_1 = 1 \in \mathbb{N}$ un $q = \sqrt[3]{2}$, tad

- $b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 2^3 = 8 \in \mathbb{N}$,
- $b_{2020} = b_1 \cdot q^{2019} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{2019} = 2^{673} \in \mathbb{N}$,
- $b_{2019} = b_1 \cdot q^{2018} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{2016} \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 2^{672} \cdot \sqrt[3]{4}$, kas nav naturāls skaitlis.

12.2. Noteikt izteiksmes $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ vislielāko un vismazāko vērtību, ja $1 \le x, y, z \le 2020$.

Atrisinājums. Pārveidojam doto izteiksmi un lietojam nevienādību $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \ge 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Tātad dotās izteiksmes mazākā vērtība ir 9 un to var iegūt, ja $x = y = z$.
Lai atrastu izteiksmes F maksimālo vērtību, vispirms pierādīsim lemmu.
Lemma. Funkcija $f(x) = x + \frac{k}{x}$, $k > 0$, dilst pa kreisi no tās minimuma punkta $x = \sqrt{k}$ un aug pa labi no tā, tas ir,

$$0 < u < v \le \sqrt{k} \Rightarrow f(u) > f(v) \quad \text{un} \quad \sqrt{k} \le u < v \Rightarrow f(u) < f(v).$$

Pierādījums. Apskatām abus gadījumus.

$$f(u) > f(v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{u} - \frac{k}{v} > v - u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{uv} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > uv.$$

$$f(u) < f(v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{u} - \frac{k}{v} < v - u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{uv} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < uv.$$

Saskaņā ar Lemmu fiksētiem $y, z \in [1; 2020]$, funkcija

$$F(x) = x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x}(y + z) + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + 3$$

maksimālo vērtību sasniedz intervāla galapunktā, tas ir, kad $x = 1$ vai $x = 2020$. Simetrijas dēļ tas pats attiecas uz gadījumiem, kad fiksējam x, y un x, z. Tātad izteiksme F maksimālo vērtību sasniedz tad, kad $x, y, z \in \{1; 2020\}$. Apskatām izteiksmes F vērtību, ja $x, y, z \in \{1; 2020\}$:

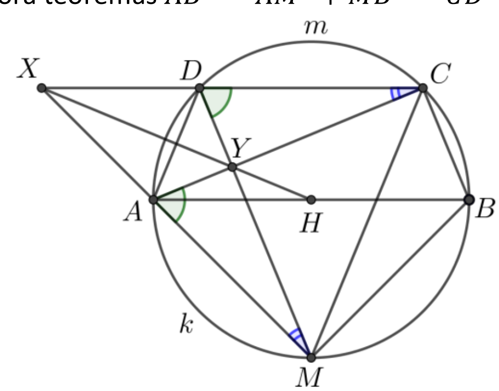
- $x = y = z = 1$ vai $x = y = z = 2020$, tad $F(x; x; x) = 9$;
- $x = y = 1$ un $z = 2020$, tad $F(1; 1; 2020) = 2022 \cdot 2\frac{1}{2020} = \frac{2022 \cdot 4041}{2020}$;
- $x = y = 2020$ un $z = 1$, tad $F(2020; 2020; 1) = 4041 \cdot 1\frac{2}{2020} = \frac{4041 \cdot 2022}{2020}$.

Līdz ar to dotās izteiksmes vislielākā vērtība ir $\frac{4041 \cdot 2022}{2020}$.

12.3. Riņķa līnijā ω ievilkta vienādsānu trapece $ABCD$, punkts H ir garākā pamata AB viduspunkts. Punkts M ir viduspunkts tam lokam AB, kas nesatur punktus C un D. Taisnes CD un AM krustojas punktā X. Zināms, ka nogriežņi HX, DM un AC krustojas vienā punktā Y un $DM = AC$. Pierādīt, ka $AB^2 = 2CD^2$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka H ir riņķa līnijas ω centrs. Tā kā $AC = DM$, tad $\overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{DAM}$ un $\overset{\frown}{AkM} = \overset{\frown}{DAM} - \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CDA} - \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CmD}$ (skat. 8. att.). Tā kā uz vienādiem lokiem balstās vienādas hordas, tad $AM = CD$. Ievērojam, ka $\sphericalangle MAC = \sphericalangle CDM$ un $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DCA$ kā ievilktie leņķi, kas balstās attiecīgi uz viena un tā paša loka. Tad $\Delta AYM = \Delta DYC$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ un $MY = YC$ kā atbilstošās malas. Esam ieguvuši, ka punkts Y atrodas vienādā attālumā no nogriežņa MC galapunktiem. Trijstūris MXC ir vienādsānu, jo $\sphericalangle DCM = \sphericalangle AMC$ kā leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem DAM un ADC, tātad punkts X atrodas vienādā attālumā no nogriežņa MC galapunktiem. Līdz ar to XY (jeb XH) ir nogriežņa MC vidusperpendikuls. Ievērojam, ka simetrijas dēļ MH ir malu AB un CD vidusperpendikuls. Tā kā četrstūris $DAMC$ ir ievilkts četrstūris, tad tam apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā, līdz ar to punkts H ir riņķa līnijas ω centrs.

Tā kā punkts M ir mazākā loka AB viduspunkts, tad $AM = MB$. Trijstūris AMB ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo balstās uz diametra AB, tad pēc Pitagora teorēmas $AB^2 = AM^2 + MB^2 = CD^2 + CD^2 = 2CD^2$.



8. att.

12.4. Zināms, ka četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$ ir pirmskaitlis un ka vienādojumam $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ir trīs reālas saknes. Vai var gadīties, ka visas šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

Atrisinājums. a) Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka $d \neq 0$, jo pretējā gadījumā $\overline{abcd}$ nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka 0 nav vienādojuma sakne. Ja $x \geq 0$, tad $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq d > 0$. Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar $-x_1, -x_2, -x_3$ un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3).$$

Pieņemsim, ka vienādojuma saknes ir veseli skaitļi. Ja $x = 10$, tad iegūstam

$$a(10 + x_1)(10 + x_2)(10 + x_3) = 1000a + 100b + 10c + d = \overline{abcd}.$$

Tātad esam ieguvuši, ka $\overline{abcd}$ ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

b) Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, $-\frac{p_1}{q_1}$, $-\frac{p_2}{q_2}$ un $-\frac{p_3}{q_3}$, pie kam daļas ir nesaīsināmas jeb p_i un q_i ir savstarpēji pirmskaitļi. Pārveidojam vienādojuma kreisās puses izteiksmi:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x + \frac{p_1}{q_1}\right)\left(x + \frac{p_2}{q_2}\right)\left(x + \frac{p_3}{q_3}\right) = \frac{a}{q_1q_2q_3}(q_1x + p_1)(q_2x + p_2)(q_3x + p_3).$$

Ievietojot $x = 10$, iegūstam

$$\frac{a}{q_1q_2q_3}(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2)(10q_3 + p_3) =$$

$$= 1000a + 100\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right) + 10\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_3}{q_3} + \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3}\right) + \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} =$$

$$= 1000a + 100b + 10c + d = \overline{abcd}.$$

Reizinot abas puses ar $q_1q_2q_3 \neq 0$, iegūstam

$$q_1q_2q_3 \cdot \overline{abcd} = a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2)(10q_3 + p_3).$$

Pamatosim, ja vienādojuma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sakne ir $\frac{p}{q}$ (nesaīsināma daļa), tad a dalās ar q.

Ievietojam vienādojumā $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tā sakni $x = \frac{p}{q}$ un pārveidojam iegūto identitāti:

$$a\left(\frac{p}{p}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\left(\frac{p}{q}\right) + d = 0$$

$$ap^3 + bp^2q + cq^2p + dq^3 = 0$$

$$q(bp^2 + cqp + dq^2) = -ap^3.$$

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar q, tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar q. Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma p un q ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka a ir jādalās ar q.

Līdz ar to secinām, ka q_i ir viencipara skaitlis, jo a ir cipars.

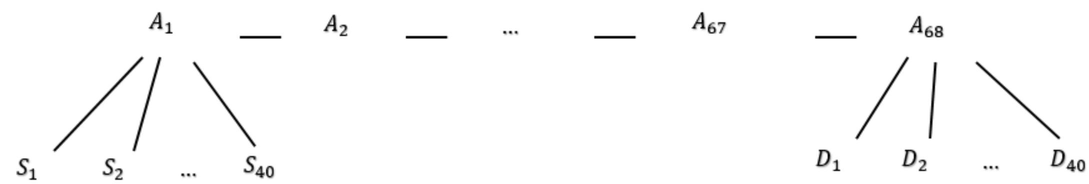
Analogi iegūst, ka c dalās ar p_i. Tas nozīmē, ka $10q_i + p_i$ ir divciparu skaitlis.

Tātad vienādība $q_1q_2q_3 \cdot \overline{abcd} = a(10q_1 + p_1)(10q_2 + p_2)(10q_3 + p_3)$ nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs $\overline{abcd}$ (četrciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē a ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

12.5. Kādā valstī ir 2020 pilsētas, katra ar katru ir savienota ar ceļu, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas (izmantoti viadukti). Biznesmenis ar ceļu pārvaldi spēlē šādu spēli: katru dienu biznesmenis privatizē vienu ceļu, bet ceļu pārvalde nojauc desmit neprivatizētus ceļus. Pierādīt, ka biznesmenis var panākt, ka pēc kāda laika viņam pieder ciklisks ceļu maršruts kas iet caur tieši 70 pilsētām, katrā iegriežoties tieši vienu reizi!

Atrisinājums. Vispirms biznesmenis sev var izveidot ceļu virkni no 67 ceļiem caur kādām pilsētām $A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_{67} - A_{68}$. To noteikti var izdarīt, jo pat pēc pēdējā gājiena ceļu pārvalde ir nojaukusi tikai $67 \cdot 10 = 670$ ceļus, bet no katras pilsētas iziet 2019 ceļi. Nosauksim pilsētas $A_1, A_2, \ldots, A_{68}$ par zaļām.

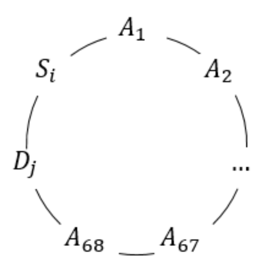
Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas A_1 un iet uz pilsētām $S_1, S_2, \ldots, S_{40}$ (skat. 9. att.), kas nav zaļas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas A_1 iziet $2019 - 68 = 1951$ ceļš uz pilsētām, kas nav zaļas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai $(67 + 40) \cdot 10 = 1070$ ceļus. Nosauksim pilsētas $S_1, \ldots, S_{40}$ par sarkanām.



9. att.

Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas A_{68} un iet uz pilsētām $D_1, D_2, \ldots, D_{40}$, kas nav ne zaļas, ne sarkanas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas A_{68} iziet $2019 - 68 - 40 = 1911$ ceļi uz pilsētām, kas nav ne zaļas, ne sarkanas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai $(67 + 40 + 40) \cdot 10 = 1470$ ceļus.

Uz doto brīdi ceļu pārvalde ir nojaukusi 1470 ceļus, bet 40 sarkanās ar 40 zaļajām pilsētām kopā savieno $40 \cdot 40 = 1600$ ceļi, tātad vismaz 130 no tiem vēl nav nojaukti. Pieņemsim, ka nav nojaukts ceļš, starp pilsētām S_i un D_j. Tad pēdējā gājienā biznesmenis var privatizēt šo ceļu un viņš būs ieguvis ciklisku maršrutu caur 70 pilsētām (skat. 10. att.).



10. att.