Līdzfinansē Eiropas Savienība
Nacionālais attīstības plāns 2027
Valsts izglītības attīstības aģentūra

Eiropas Sociālā fonda Plus projekts Nr. 4.2.2.3/1/24/I/001 "Pedagogu profesionālā atbalsta sistēmas izveide"

Latvijas 75. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9. klase

9.1. Aprēķināt izteiksmes $\frac{20252024^2}{20252023^2+20252025^2-2}$ vērtību!

Atrisinājums. Apzīmējam $20252024 = a$, tad iegūstam, ka

$$\frac{20252024^2}{20252023^2+20252025^2-2} = \frac{a^2}{(a-1)^2+(a+1)^2-2} = \frac{a^2}{a^2-2a+1+a^2+2a+1-2} = \frac{1}{2}.$$

9.2. Atrast vismazāko naturālo skaitli N, kam reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ dalās ar **a)** 434; **b)** 2025.

Atrisinājums. a) Vismazākais skaitlis $N = 31$. Sadalot pirmreizinātājos, iegūstam, ka $434 = 2 \cdot 7 \cdot 31$. Lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ dalītos ar 434, tad reizinājumam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ ir noteikti jāsatur reizinātājs 31. Tā kā 31 ir pirmskaitlis, tad pirmo reizi tas parādīsies kā reizinātājs 31, reizinātāji 2 un 7 atbilstošajā reizinājumā noteikti būs. Līdz ar to mazākā iespējamā vērtība ir $N = 31$.

b) Vismazākais skaitlis $N = 10$. Ievērojam, ka $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ dalītos ar 2025, tad reizinājumam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ ir jāsatur vismaz četri reizinātāji 3 un vismaz divi reizinātāji 5. Līdz ar to:

- lai reizinājums saturētu vismaz divus reizinātājus 5, tad N vērtībai jābūt vismaz 10 (atbilstošie reizinātāji ir 5 un 10);
- lai reizinājums saturētu vismaz četrus reizinātājus 3, tad N vērtībai jābūt vismaz 9 (atbilstošie reizinātāji ir $3;\ 6;\ 9 = 3^2$).

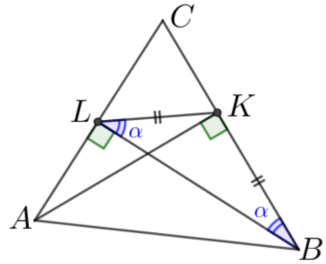
Tātad mazākā N vērtība ir 10.

9.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AK un BL. Zināms, ka $BK = KL$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādsānu!

Atrisinājums. Tā kā $BK = KL$, tad $\sphericalangle BLK = \sphericalangle KBL = \alpha$ (skat. 1. att.) kā leņķi pret vienādām malām trijstūrī LKB. No ΔCLB iegūstam, ka $\sphericalangle BCL = 180° - \sphericalangle CBL - \sphericalangle CLB = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$.

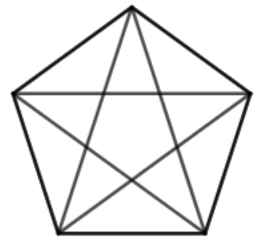
Tā kā $\sphericalangle KLC = 90° - \sphericalangle BLK = 90° - \alpha = \sphericalangle KCL$, tad ΔCKL ir vienādsānu trijstūris un $KL = KC$. Līdz ar to $KC = KB$ un esam ieguvuši, ka AK ir arī trijstūra ABC mediāna. Tā kā AK ir gan augstums, gan mediāna, tad trijstūris ABC ir vienādsānu.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, ap četrstūri $ALKB$ apvelkot riņķa līniju.



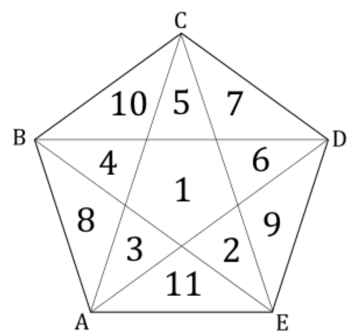
1. att.

9.4. Dots regulārs piecstūris, kurā novilktas visas diagonāles, kas to sadala 11 daļās (skat. 2. att.). Katrā daļā ierakstīt vienu naturālu skaitli no 1 līdz 11 (katrā daļā citu) tā, lai visos trijstūros, kam visas virsotnes ir arī dotā piecstūra virsotnes, ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati!



2. att.

Atrisinājums. Piemēram, skat. 3. att., kur katrā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir 22.
Piezīme. Ir tikai viens derīgs skaitļu izkārtojums ar precizitāti līdz pagriešanai un apmešanai otrādi.



3. att.

9.5. Rindā novietotas n bumbiņas. Katra bumbiņa nokrāsotā kādā no 100 krāsām. Bumbiņas saliktas tā, ka katrai krāsai A un katrai krāsai B ir tāda bumbiņa krāsā A, kas atrodas pa kreisi no kādas bumbiņas krāsā B (ne obligāti blakus). Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

Atrisinājums. Mazākais bumbiņu skaits ir 199. No dotā secinām, ka katrā krāsā ir vismaz viena bumbiņa. Ja būtu divas krāsas K_1 un K_2, kurās katrā būtu nokrāsota tieši viena bumbiņa, tad, piemēram, būtu bumbiņa krāsā K_1, kas atrodas pa kreisi no bumbiņas krāsā K_2, bet tad nebūtu bumbiņas krāsā K_2, kas atrodas pa kreisi no bumbiņas krāsā K_1. Tātad maksimums vienā krāsā var būt tikai viena bumbiņa, bet pārējās 99 krāsās jābūt vismaz 2 bumbiņām. Tātad mazākais bumbiņu skaits ir $1 + 2 \cdot 99 = 199$.
Atbilstošu bumbiņu krāsojumu skat. 4. att.

4. att.

10. klase

10.1. Atrast visus naturālos trīsciparu skaitļus, kuri ir tieši 5 reizes lielāki par savu ciparu reizinājumu!

Atrisinājums. Apzīmējam meklējamo skaitli $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Tad iegūstam, ka $100a + 10b + c = 5abc$. Ievērojam, ka neviens no cipariem nedrīkst būt 0, jo tad arī skaitlim būtu jābūt 0. Tā kā labās puses izteiksme dalās ar 5, tad arī labās puses izteiksmei (meklējamam skaitlim) jādalās ar 5, no kā secinām, ka $c = 0$ (neder) vai $c = 5$. Līdz ar to iegūstam:

$$100a + 10b + 5 = 25ab;$$
$$20a + 2b + 1 = 5ab.$$

Tā kā 20 un 5 dalās ar 5, tad $2b + 1$ arī jādalās ar 5. Ņemot vērā, ka b ir nenulles cipars, apskatām iespējamās $2b + 1$ vērtības:

- ja $2b + 1 = 5$ jeb $b = 2$, tad $20a + 5 = 10a$ jeb $a = -0{,}5$ (neder);
- ja $2b + 1 = 10$ jeb $b = 4{,}5$ (neder)
- ja $2b + 1 = 15$ jeb $b = 7$, tad $20a + 15 = 35a$ jeb $a = 1$, un iegūstam skaitli 175;
- citas vērtības neder, jo lielākā b vērtība ir 9, kam $2b + 1$ atbilstošā vērtība ir 19.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai skaitlis 175.

10.2. Kāds ir vismazākais naturālais skaitlis, kuram ir tieši 18 dažādi naturāli dalītāji un kas dalās ar 7?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $18 = 18 \cdot 1 = 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2$. Ja skaitlis n sadalās pirmreizinātājos kā $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, tad tā dalītāju skaits ir $d(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1)$. No tā izriet, ka skaitli, kuram ir tieši 18 dalītāji, var uzrakstīt vienā no formām:

$$p_1^{17}, \qquad p_1^8 \cdot p_2, \qquad p_1^5 \cdot p_2^2, \qquad p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3.$$

Skaitlim jādalās ar 7, tāpēc kādam no pirmreizinātājiem ir jābūt 7, un tā kā meklējam mazāko skaitli, tad kā citi reizinātāji jāaplūko mazākie pirmskaitļi ar vislielāko pakāpi. Apskatām visus gadījumus:

- $p_1 = 7$, tad iegūstam skaitli $7^{17} > 252$;
- $p_1 = 2$ un $p_2 = 7$, tad iegūstam skaiti $2^8 \cdot 7 = 256 \cdot 7 = 1792$;
- $p_1 = 2$ un $p_2 = 7$, tad iegūstam skaiti $2^5 \cdot 7^2 = 32 \cdot 49 = 1568$;
- $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ un $p_3 = 7$, tad iegūstam skaiti $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 36 \cdot 7 = 252$.

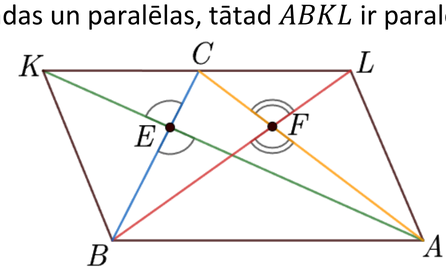
Tātad vismazākais naturālais skaitlis, kuram ir tieši 18 dažādi naturāli dalītāji un kas dalās ar 7, ir 252.

10.3. Uz trijstūra ABC malām AC un BC ir atlikti attiecīgi punkti F un E tā, ka $2CF = FA$ un $2CE = EB$. Ārpus trijstūra ABC uz stariem AE un BF ir atlikti attiecīgi punkti K un L tā, ka $2KE = EA$ un $2LF = FB$. Pierādīt, ka $ABKL$ ir paralelograms!

Atrisinājums. Ievērojam divu trijstūru pāru līdzību pēc pazīmes $m\ell m$ (skat. 5. att.).

- $\Delta AEB \sim \Delta KEC$ $\left(\frac{AE}{KE} = \frac{EB}{EC} = 2, \sphericalangle AEB = \sphericalangle KEC\right)$, tātad $AB = 2KC$ un $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EKC$. Līdz ar to $AB \parallel KC$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.
- $\Delta BFA \sim \Delta LFC$ $\left(\frac{BF}{LF} = \frac{FA}{FC} = 2, \sphericalangle BFA = \sphericalangle LFC\right)$, tātad $AB = 2CL$ un $\sphericalangle FBA = \sphericalangle FLC$. Līdz ar to $AB \parallel CL$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Tā kā $AB \parallel KC$ un $AB \parallel CL$, tad $C \in KL$ un $AB \parallel KL$, turklāt $2KC = AB = 2CL = KL$. Esam ieguvuši, ka četrstūra $ABKL$ divas pretējās malas ir vienādas un paralēlas, tātad $ABKL$ ir paralelograms.



5. att.

10.4. Dots taisnstūris ar izmēriem $1 \times n$ rūtiņas, kur $n \geq 3$, uz kura Kims un Māris spēlē spēli. Sākumā Kima kauliņš K atrodas taisnstūra kreisajā rūtiņā un Māra kauliņš M atrodas taisnstūra labajā rūtiņā (skat. 6. att.). Vienā gājienā spēlētājs var pārvietot savu kauliņu 1 vai 2 rūtiņas otra spēlētāja virzienā, ja atbilstošā rūtiņa (rūtiņas) ir tukša (nedrīkst uzkāpt uz vai veikt "lēcienu" pāri otra spēlētāja kauliņam). Spēli sāk Kims un spēlētāji gājienus veic pamīšus. Ja spēlētājs nevar veikt gājienu, tad viņš zaudē. Kādām n vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Kims, un kādām n vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Māris?

K			...			M

6. att.

Atrisinājums. Māris vienmēr var uzvarēt, ja $n = 3k + 2$, kur $k \in \mathbb{N}$, bet Kims vienmēr var uzvarēt visām atlikušajām n vērtībām.

Apskatām mazākās n vērtības.

Ja $n = 3$, tad uzvar Kims, jo viņš var veikt vienu gājienu, bet Māris gājienu nevar veikt.

K	K_1	M

Ja $n = 4$, tad uzvar Kims, jo viņš var veikt vienu gājienu, bet Māris gājienu nevar veikt.

K		K_1	M

Ja $n = 5$, tad uzvar Māris, jo Kims var veikt pirmo gājienu un Māris veic otro gājienu, pēc kura Kims vairāk nevar veikt gājienu.

K	K_1	M_1		M

vai

K		K_1	M_1	M

Pamatosim, ka Māris vienmēr var uzvarēt, ja $n = 5; 8; 11; 14;$ ... jeb $n = 3k + 2$, kur $k \in \mathbb{N}$. Ievērojam, ka katrā savā gājienā Māris var panākt, ka taisnstūra garums samazinās par 3 rūtiņām (iegūst gadījumu $n = 3k + 2 - 3 = = 3k - 1$ utt.) – ja Kims savā gājienā kauliņu pārvieto par vienu (divām) rūtiņu, tad attiecīgi Māris savā gājienā kauliņu pārvieto par divām (vienu) rūtiņu. Šādi rīkojoties, kādā brīdī būs situācija, kad $n = 5$, un Māris uzvar.

Pamatosim, ka Kims vienmēr var uzvarēt atlikušajām n vērtībām:

- ja $n = 3; 6; 9;$ ... jeb $n = 3k$, tad savā pirmajā gājienā Kims kauliņu pārvieto par 1 rūtiņu un paliek taisnstūris ar garumu $3k - 1$, un gājiens ir Mārim. Pēc katra Māra gājiena Kims panāk situāciju, ka taisnstūra garums šo divu gājienu samazinās par 3 rūtiņām (Kims rīkojas pēc tādas pašas stratēģijas kā Māris). Šādi rīkojoties, kādā brīdī būs situācija, kad $n = 5$ un Mārim jāveic gājiens (un tā ir zaudējoša pozīcija), un Kims uzvar.
- ja $n = 4; 7; 10;$ ... jeb $n = 3k + 1$, tad savā pirmajā gājienā Kims kauliņu pārvieto par 2 rūtiņām un paliek taisnstūris ar garumu $3k - 1$, un gājiens ir Mārim, rīkojoties tāpat kā iepriekš, Kims uzvar.

10.5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(a+1)(b+1)(c+1)=3abc$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka vienādojums ir simetrisks attiecībā pret a, b, c vērtībām, tāpēc, nezaudējot vispārīgumu, var pieņemt, ka $a \le b \le c$. Abas vienādojuma puses dalot ar $abc > 0$, iegūstam $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$.

Ja $a \ge 3$, tad

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) < \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{64}{27} < 3.$$

Tātad, ja $a \ge 3$, tad vienādojumam atrisinājuma nav. Aplūkosim atlikušos gadījumus, kad $a=1$ vai $a=2$.

Ja $a=1$, tad iegūstam:

$$2(b+1)(c+1)=3bc;$$
$$2bc+2b+2c+2=3bc;$$
$$bc-2b-2c+4=6;$$
$$(b-2)(c-2)=6.$$

Iespējamie atrisinājumi (ņemot vērā, ka $b \le c$) ir $b=3, c=8$ un $b=4, c=5$.

Ja $a=2$, tad iegūstam

$$3(b+1)(c+1)=6bc;$$
$$bc+b+c+1=2bc;$$
$$bc-b-c+1=2;$$
$$(b-1)(c-1)=2.$$

Iespējamais atrisinājums (ņemot vērā, ka $b \le c$) ir $b=2$ un $c=3$.

Līdz ar to esam aplūkojuši visus iespējamos gadījumus un ieguvuši atrisinājumus $(1;3;8)$, $(1;4;5)$ un $(2;2;3)$.

Sākotnēji pieņēmām, ka $a \le b \le c$. Tātad der jebkura iepriekšminēto atrisinājumu skaitļu permutācija un pavisam ir 15 atrisinājumi:

$(1;3;8)$	$(1;8;3)$	$(3;1;8)$	$(3;8;1)$	$(8;1;3)$	$(8;3;1)$
$(1;4;5)$	$(1;5;4)$	$(4;1;5)$	$(4;5;1)$	$(5;1;4)$	$(5;4;1)$
$(2;2;3)$	$(2;3;2)$	$(3;2;2)$			

11. klase

11.1. Atrast divas tādas reālas pozitīvas x vērtības, ka $2x^x = \sqrt{2}$.

Atrisinājums. Der $x = \frac{1}{2}$ un $x = \frac{1}{4}$. Pārbaudām, ka iegūta patiesa vienādība:

- $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;
- $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Piezīme. Citu derīgu reālu pozitīvu vērtību nav.

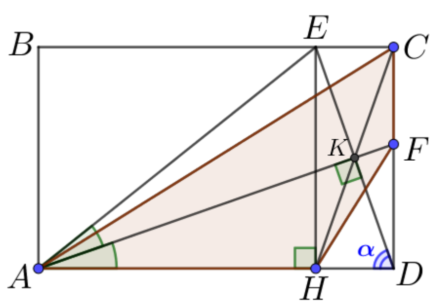
11.2. Zināms, ka naturālam skaitlim A ir tieši 111 dažādi naturāli dalītāji. Pierādīt, ka A nedalās ar 216.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka A dalās ar 216. Tā kā $216 = 2^3 \cdot 3^3$, tad skaitli A var uzrakstīt formā $A = 2^k \cdot 3^m \cdot p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$, kur $k \geq 3$ un $m \geq 3$. Skaitlim A ir $(k+1)(m+1)(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_r+1)$ dažādi dalītāji; turklāt $k+1 \geq 4$ un $m+1 \geq 4$. Taču skaitli $111 = 37 \cdot 3$ nevar sadalīt reizinājumā, kurā divi reizinātāji ir lielāki vai vienādi ar 4. Tātad pieņēmums ir aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka skaitlis A nedalās ar 216.

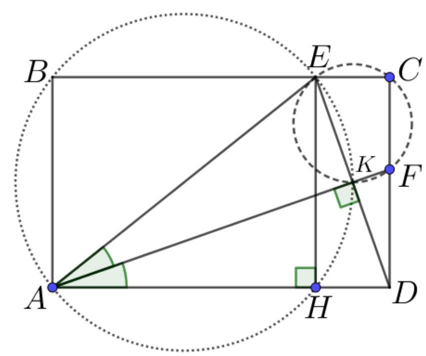
11.3. Dots taisnstūris $ABCD$, kuram $AB < BC$. Uz malas BC ir izvēlēts tāds punkts E, ka $AE = AD$. Leņķa DAE bisektrise krusto malu CD punktā F. Trijstūrī ADE novilkts augstums EH. Pierādīt, ka punkti A, H, F, C atrodas uz vienas riņķa līnijas!

1. atrisinājums. Vienādsānu trijstūrī DAE ir novilkta bisektrise AK, tātad tā ir arī augstums un mediāna, no kā izriet, ka $AK \perp ED$ un K ir taisnstūra $ECDH$ diagonāļu krustpunkts (skat. 7. att.). Pamatosim, ka $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AFC$, tad ap četrstūri $AHFC$ varēs apvilkt riņķa līniju, līdz ar to punkti A, H, F, C atradīsies uz vienas riņķa līnijas.

Apzīmējam $\sphericalangle ADK = \alpha$. Tādā gadījumā $\sphericalangle KHD = \sphericalangle ADK = \alpha$ (jo $ECDH$ ir taisnstūris, tā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm un ΔDKH ir vienādsānu) un $\sphericalangle AHC = 180° - \sphericalangle KHD = 180° - \alpha$. Aplūkojam ΔKFD. Tā kā $\sphericalangle KDF = 90° - \alpha$, tad $\sphericalangle DFK = \alpha$. Līdz ar to $\sphericalangle AFC = 180° - \sphericalangle DFK = 180° - \alpha$ un esam ieguvuši, ka $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AFC = 180° - \alpha$.



7. att.



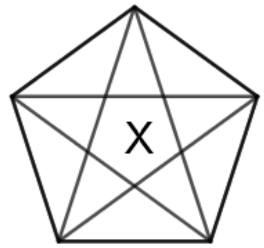
8. att.

2. atrisinājums. Ar K apzīmējam AF un DE krustpunktu. Trijstūris DAE ir vienādsānu trijstūris, tāpēc bisektrise AK ir arī augstums jeb $AK \perp ED$. Tad ap četrstūri $ECFK$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle ECF + \sphericalangle EKF = 90° + 90° = 180°$, un ap četrstūri $AEKH$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\sphericalangle AHE = \sphericalangle AKE = 90°$ (skat. 8. att.). Tādā gadījumā pēc sekanšu īpašības iegūstam, ka $DH \cdot DA = DK \cdot DE$ (attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilkta ap $AEKH$) un $DK \cdot DE = DF \cdot DC$ (attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilkta ap $ECFK$). Tas nozīmē, ka $DH \cdot DA = DF \cdot DC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $HACF$ var apvilkt riņķa līniju (no apgrieztās teorēmas) jeb punkti A, H, F, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

11.4. Dots regulārs piecstūris, kurā novilktas visas diagonāles, kas to sadala 11 daļās (skat. 9. att.).

a) Katrā daļā ierakstīt vienu naturālu skaitli no 1 līdz 11 (katrā daļā citu) tā, lai visos trijstūros, kam visas virsotnes ir arī dotā piecstūra virsotnes, ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati!

b) Kāds skaitlis var būt ierakstīts daļā, kas apzīmēta ar X?



9. att.

Atrisinājums. a) Piemēram, skat. 10. att.

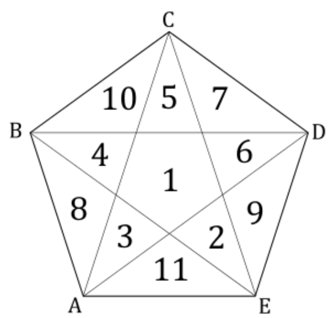
b) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka daļā, kas apzīmēta ar X, var būt ierakstīts tikai skaitlis 1. Vispirms noskaidrosim, kāda ir vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa. Visu ierakstīto skaitļu summa ir visu skaitļu no 1 līdz 11 summa, tātad 66. Doto piecstūri var sadalīt trīs trijstūros no vienas piecstūra virsotnes novelkot divas diagonāles. Tātad vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir $M = 66 : 3 = 22$.

Apzīmējam $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ un $b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ (skat. 11. att.).

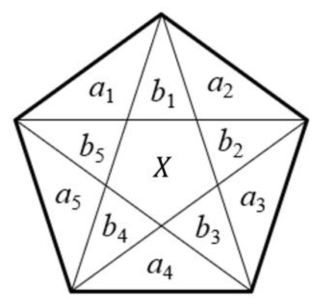
Saskaitot piecos platleņķa trijstūros ierakstīto skaitļu summas, iegūstam:

$$5M = 2a + b = (a + b + X) + a - X = 3M + a - X;$$
$$2M = a - X \leq 11 + 10 + 9 + 8 + 7 - X = 45 - X;$$
$$44 \leq 45 - X.$$

Tātad der tikai $X = 1$.

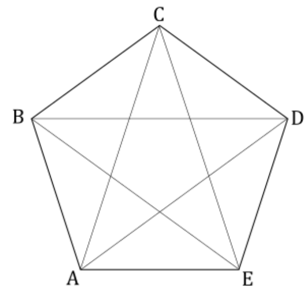


10. att.

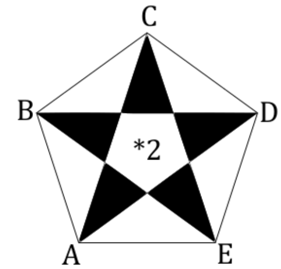


11. att.

b) 2. atrisinājums. Pamatosim, ka daļā, kas apzīmēta ar X, var būt ierakstīts tikai skaitlis 1. Vispirms noskaidrosim, kāda ir vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa. Visu ierakstīto skaitļu summa ir visu skaitļu no 1 līdz 11 summa, tātad 66. Doto piecstūri var sadalīt trīs trijstūros, piemēram, ΔABC, ΔACE un ΔCDE (skat. 12. att.). Tātad vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir $66 : 3 = 22$.



12. att.



13. att.

Ja saskaita ΔACE un ΔBDE, bet atņem ΔADE ierakstītos skaitļus, tad ir saskaitīti visi skaitļi, kas ierakstīti iekrāsotajos apgabalos, un divas reizes pieskaitīts skaitlis, kas ierakstīts centrālajā daļā (skat. 13. att.).
Skaitļu summa, kas ierakstīta atbilstošajās daļās, ir $22+22-22=22$.
Mazākā iespējamā iekrāsotajās daļās ierakstīto skaitļu summa ir $1+2+3+4+5=15$. Tātad centrālajā daļā ierakstītais skaitlis nevar būt lielāks kā $(22-15):2=3{,}5$ jeb centrā var būt ierakstīts skaitlis 1, 2 vai 3.
Ja centrā ir 2, tad iekrāsotajās daļās skaitļu summa ir 18, kas ir mazāka nekā piecu mazāko skaitļu no atlikušajiem summa $1+3+4+5+6=19$.
Ja centrā ir 3, tad iekrāsotajās daļās ierakstīto skaitļu summa ir 16, kas ir mazāka nekā piecu mazāko skaitļu no atlikušajiem summa $1+2+4+5+6=18$.
Tātad esam pierādījuši, ka vidū var būt ierakstīts tikai 1, bet skaitļi no 7 līdz 11 izvietoti daļās gar piecstūra malām.

11.5. Doti tādi reāli skaitļi a, b un c, ka $a^2+c-bc=b^2+a-ac=c^2+b-ab$. Vai noteikti $a=b=c$?
Atrisinājums. No pirmās vienādības iegūstam:

$$a^2+c-bc=b^2+a-ac;$$
$$a^2-b^2+ac-bc=a-c;$$
$$(a-b)(a+b+c)=a-c.$$

Ja $a=b$, tad no iegūtās vienādības izriet, ka $a=c$, tātad $a=b=c$. Tāpēc pieņemsim, ka $a\neq b$.
Līdzīgi no pārējām divām vienādībām iegūstam:

$$(b-c)(a+b+c)=b-a;$$
$$(a-c)(a+b+c)=b-c.$$

Reizinot iegūtās vienādības, iegūstam

$$(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)^3=(a-c)(b-a)(b-c);$$
$$(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)^3=-(a-c)(a-b)(b-c).$$

Ņemot vērā, ka nekādi divi no skaitļiem a, b un c nav vienādi, iegūstam, ka

$$(a+b+c)^3=-1 \quad\Rightarrow\quad a+b+c=-1.$$

Tādā gadījumā

$$(a-b)(a+b+c)=a-c;$$
$$(a-b)(-1)=a-c;$$
$$b+c-2a=0;$$
$$b+c+a-3a=0 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{3}.$$

Līdzīgi iegūst, ka $b=-\frac{1}{3}$, bet tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka $a\neq b$.
Tātad noteikti $a=b=c$.

12. klase

12.1. Doti tādi naturāli skaitļi a, b un c, ka skaitlis $\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ ir racionāls. Pierādīt, ka $ab+bc+ac$ dalās ar $a+b+c$.

Atrisinājums. Dotās daļas skaitītāju un saucēju reizinām ar saucēja saistīto izteiksmi

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}=\frac{(a\sqrt{2}+b)(b\sqrt{2}-c)}{(b\sqrt{2}+c)(b\sqrt{2}-c)}=\frac{2ab-bc+\sqrt{2}(b^2-ac)}{2b^2-c^2}.$$

Tā kā skaitlis ir racionāls, tad skaitītājā jābūt veselam skaitlim (jo saucējā ir vesels skaitlis), tāpēc $b^2-ac=0$ jeb $b^2=ac$.

Tādā gadījumā $ab+bc+ca=ab+bc+b^2=b(a+b+c)$ un tas dalās ar $a+b+c$.

12.2. Atrast divus tādu veselu skaitļu a, b un c trijniekus $(a;b;c)$, ka $972^a\cdot 32^b\cdot 9^c=1$.

Atrisinājums. Der, piemēram, $(0;0;0)$ un $(10;-4;-25)$. Pārbaudām, ka šie skaitļu trijnieki atbilst nosacījumiem:

- $972^0\cdot 32^0\cdot 9^0=1\cdot 1\cdot 1=1$;
- $972^{10}\cdot 32^{-4}\cdot 9^{-25}=(2^2\cdot 3^5)^{10}\cdot(2^5)^{-4}\cdot(3^2)^{-25}=2^{20}\cdot 3^{50}\cdot 2^{-20}\cdot 3^{-50}=2^0\cdot 3^0=1\cdot 1=1$.

Piezīme. Ir bezgalīgi daudz veselu skaitļu trijnieku, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Vispārīgo atrisinājumu var atrast, sadalot skaitļus $972=2^2\cdot 3^5$; $32=2^5$ un $9=3^2$ pirmreizinātājos un ievietojot tos dotajā vienādībā: $2^{2a+5b}\cdot 3^{5a+2c}=2^0\cdot 3^0$.

No tā iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu (kāpinātājiem pie vienādām bāzēm jābūt vienādiem):

$$\begin{cases}2a+5b=0\\5a+2c=0\end{cases}\text{ jeb }\begin{cases}5b=-2a\\2c=-5a\end{cases}$$

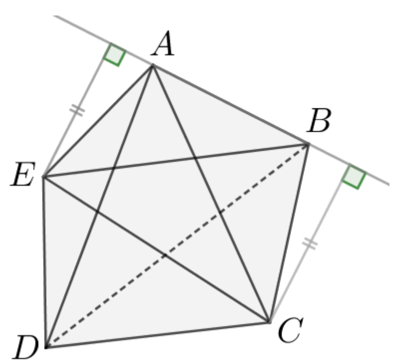
No iegūtās sistēmas pirmā vienādojuma redzams, ka $-2a$ dalās ar 5, tātad a dalās ar 5; no trešā vienādojuma redzams, ka $-5a$ dalās ar 2, tātad a dalās ar 2. Tātad $a=10k$, kur k ir vesels skaitlis, $b=-4k$ un $c=-25k$.

Tātad der visi skaitļu trijnieki $(10k;-4k;-25k)$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis.

12.3. Izliektā piecstūrī četras no diagonālēm ir paralēlas kādai no piecstūra malām. Pierādīt, ka arī piektā diagonāle ir paralēla kādai piecstūra malai!

Atrisinājums. Apzīmējam piecstūri ar $ABCDE$ un pieņemam, ka $AB\parallel CE$, $BC\parallel AD$, $CD\parallel BE$ un $DE\parallel AC$. Pamatosim, ka arī $AE\parallel BD$.

Tā kā $AB\parallel CE$, tad augstumi, kas novilkti no punktiem C un E pret malu AB ir vienādi kā attālumi starp paralēlām taisnēm (skat. 14. att.). No šī varam secināt, ka $S_{ABE}=S_{ABC}$, jo novilktie augstumi pret vienu un to pašu malu AB ir vienāda garuma.



14. att.

Līdzīgi var pamatot, ka $S_{ABC}=S_{BCD}$, jo augstumi, kas novilkti no punktiem A un D pret malu BC, ir vienāda garuma, jo $BC\parallel AD$. Šādi turpinot, iegūstam, ka $S_{BCD}=S_{CDE}$, jo $CD\parallel BE$, un $S_{CDE}=S_{ADE}$, jo $DE\parallel AC$.

Tātad esam ieguvuši, ka $S_{ABE}=S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{ADE}$ jeb $S_{ABE}=S_{ADE}$. Trijstūriem ABE un ADE ir kopīga mala AE. Tā kā šo trijstūru laukumi ir vienādi, tad augstumiem, kas novilkti pret šo malu, arī jābūt vienādiem. Tātad attālumi starp nogriežņiem AE un BD ir vienādi. Secinām, ka šie nogriežņi ir paralēli, tas ir, $AE\parallel BD$.

12.4. Pie apaļa galda apsēdušies daži rūķīši un katram no viņiem sākumā ir pāra skaits konfekšu. Ik pēc brīža burvju feja pamāj ar nūjiņu un tad visi rūķīši reizē dalās ar savām konfektēm – katrs rūķītis atdod pusi no savām konfektēm blakus pa labi sēdošajam rūķītim. Pēc tam katram rūķītim, kam atlicis nepāra skaits konfekšu, feja iedod vienu papildu konfekti. Pierādīt, ka pēc galīga šādu gājienu skaita visiem rūķīšiem būs vienāds skaits konfekšu!

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka lielākais iespējamais skaits konfekšu, kas var būt katram rūķītim pēc gājiena, nepalielinās. Ievērosim, ka kādam rūķītim esošo konfekšu skaits var kļūt lielāks tikai tad, ja viņš gājienā iegūst vairāk konfekšu nekā atdod, tas ir, pa kreisi sēdošajam rūķītim ir lielāks konfekšu skaits. Pieņemsim, ka mums ir kāds rūķītis M ar m konfektēm, un viņam pa kreisi sēž rūķītis ar n konfektēm, turklāt $m < n$. Pēc gājiena rūķītim M būs ne vairāk kā $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + 1 = \frac{m+n}{2} + 1$ konfekšu. Tā kā $m < n$, tad $m < \frac{m+n}{2} < n$. Tā kā visi šie skaitļi ir naturāli, tad, pieskaitot 1 pie šīs vidējās vērtības, iegūstam, ka $\frac{m+n}{2} + 1 \leq n$. Tātad rūķīša M konfekšu skaits pēc katra gājiena nepārsniedz tam kreisi sēdošā rūķīša konfekšu skaitu n jeb tā lielākais iespējamais konfekšu skaits nepalielinās. Ja n ir lielākais iespējamais konfekšu skaits, tad pēc katra gājiena rūķīšu skaits ar šādu konfekšu skaitu, nepalielinās.

Līdzīgi varam pierādīt, ka mazākais iespējamais konfekšu skaits, kas var būt katram rūķītim katrā gājienā, nesamazinās. Ja rūķītim M ir m konfektes, un rūķītim, kas sēž pa kreisi no viņa, ir n konfektes, turklāt $m > n$, tad pēc gājiena rūķītim M būs ne mazāk kā $\frac{m+n}{2}$ konfekšu $\left(\frac{m+n}{2} > n\right)$. Tātad, ja n ir mazākais iespējamais konfekšu skaits, tad pēc katra gājiena rūķīšu skaits ar šādu konfekšu skaitu, nepalielinās. Turklāt šādu rūķīšu skaits samazinās vai arī mazākais iespējamais konfekšu skaits palielinās.

Apskatīsim rūķīti ar vismazāko konfekšu skaitu x (vai vienu no tādiem), kam pa kreisi sēž rūķītis ar vairāk konfektēm (ja šādu rūķīšu nav, tad visiem ir vienāds konfekšu skaits). Pēc gājiena šī rūķīša konfekšu skaits pieaugs, tāpēc rūķīšu skaits, kam bija tieši x konfektes, samazinās par 1. Ja šis bija vienīgais rūķītis ar x konfektēm, tad mazākais konfekšu, kas var būt kādam rūķītim, skaits ir pieaudzis.

Tā kā lielākais konfekšu skaits nepalielinās, un katru gājienu vai nu palielinās mazākais konfekšu skaits, vai arī samazinās rūķīšu skaits ar mazāko konfekšu skaitu, tad pēc galīga skaita gājienu mazākais konfekšu skaits sakritīs ar lielāko konfekšu skaitu, tas ir, visiem rūķīšiem būs vienāds skaits konfekšu.

12.5. Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas. Katrā tabulas rūtiņā ierakstīts kāds naturāls skaitlis no 1 līdz n^2, katrā rūtiņā atšķirīgs skaitlis. Tabulu sauksim par sakarīgu, ja katrā kvadrātā ar izmēriem 2×2 rūtiņas ierakstīto skaitļu reizinājums dalās ar 5.

a) Pierādīt, ka tabula nav sakarīga, ja n ir pāra skaitlis.

b) Kāds ir lielākais nepāra skaitlis n, kuram tabula var būt sakarīga?

Atrisinājums. a) Tā kā n ir pāra skaitlis, tad $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, un kopā tabulā ir $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ rūtiņu. Tādā gadījumā tabulu var sadalīt ar k^2 kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas. Lai katra šāda kvadrāta skaitļu reizinājums dalītos ar 5, tad kādā no rūtiņām ir jāatrodas skaitļa 5 daudzkārtnim. Tātad kopā nepieciešami k^2 atšķirīgi skaitļi, kas dalās ar 5, tas ir, $5; 10; 15; \ldots; 5k^2$. Lielākais tabulā ierakstītais skaitlis ir $4k^2 < 5k^2$, tāpēc nepietiek skaitļa 5 daudzkārtņu, ko ierakstīt katrā no kvadrātiem ar izmēriem 2×2. Līdz ar to tabula nav sakarīga.

b) Pamatosim, ka lielākā n vērtība ir 9. Ja $n = 2k + 1$ ir nepāra skaitlis, tad tabulu, neieskaitot pēdējo rindu un pēdējo kolonnu, var sadalīt k^2 kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas. Tādā gadījumā nepieciešami vismaz k^2 skaitļa 5 daudzkārtņi, lai iegūtu sakarīgu tabulu. Pavisam tabulā ierakstīti $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ skaitļi, tāpēc nepieciešams, lai $4k^2 + 4k + 1 \geq 5k^2$ (lai pietiktu skaitļa 5 daudzkārtņu). Līdz ar to iegūstam nevienādību $k^2 \leq 4k + 1$, kas ir patiesa naturāliem skaitļiem $k \leq 4$, tāpēc lielākā k vērtība ir 4 un attiecīgi lielākā n vērtība ir 9. Skaitļus kvadrātā ar izmēriem 9×9 rūtiņas var sarakstīt, piemēram, kā redzams 15. att., kurā atlikušos skaitļus var ierakstīt patvaļīgi.

	5		10		15		20	
	25		30		35		40	
	45		50		55		60	
	65		70		75		80	

15. att.