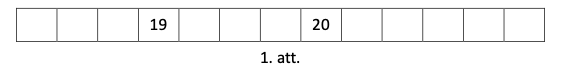
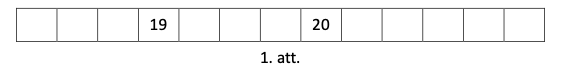
# LV.NOL.2023.5.1

Ieraksti katrā tukšajā rūtiņā (skat. 1.att.) vienu skaitli (skaitļi var būt arī vienādi) tā, lai katrās trīs blakus rūtiṇās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiṇās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu . Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.



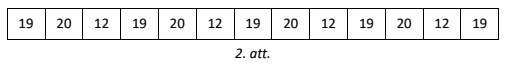
Write a number in each empty cell (see Figure 1) so that the sum of the numbers in any three consecutive cells is the same, and the total sum of all the numbers written in the cells (including the two given numbers) is . It is sufficient to show one example of how to achieve this.



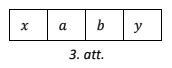
* questionType:FindExample
* domain:Alg

## Atrisinājums

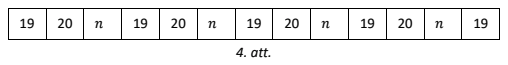
Prasīto var izdarīt, kā parādīts 2. att., kur katru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir .



Paskaidrosim, kā šos skaitlus var atrast. Aplūkojam četras rūtiņas pēc kārtas, kurās ierakstīti skaitli un (skat. 3. att.).



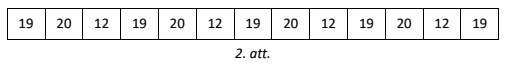
Tā kā katrās trijās blakus rūtiṇās skaitļu summa ir viena un tā pati, tad , tātad un rūtiṇās un jābūt ierakstītam vienam un tam pašam skaitlim. Tātad rūtiṇās ierakstītie skaitḷi atkārtojas ar periodu (skat. 4.att.), kur ir kāds nezināms skaitlis (visur viens un tas pats).



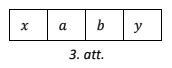
Ja mēs noṇemam nost pašu pēdējo skaitli , tad mēs iegūstam, ka četros trīs rūtiņu blokos kopā skaitlu summa ir , tātad vienā šādā blokā skaitļu summa ir . Tātad skaitļa vietā jāraksta .

## Solution

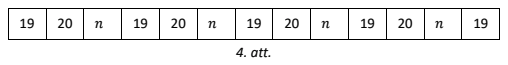
The required solution can be achieved as shown in Figure 2, where the sum of every three consecutive numbers is .



Let’s explain how these numbers can be found. Consider four consecutive cells that contain the numbers and (see Figure 3).



Since the sum of the numbers in any three consecutive cells is the same, we have , which implies , and thus the numbers and must be the same. Therefore, the numbers written in the cells repeat with a period of (see Figure 4), where is an unknown number (the same everywhere).



If we remove the very last number , we find that in four blocks of three cells , the total sum of the numbers is . Hence, the sum of the numbers in one such block is . Therefore, the number must be .

# LV.NOL.2023.5.2

Rūķīši mežā ir uzbūvējuši astoṇas mājiṇas un starp tām izveidojuši vairākas taciṇas. Katra taciṇa savieno divas mājiņas, taciṇas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājiņām iziet attiecīgi: **(A)** taciṇas;  
**(B)** taciṇas?

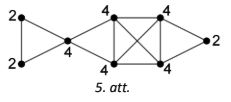
In the forest, gnomes have built eight houses and created several paths between them. Each path connects two houses, and paths can intersect. Is it possible that the houses have the following number of paths coming out of them:  
**(A)** paths respectively;  
**(B)** paths respectively?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

**(A)** Jā, piemēram, skat. 5. att., kur ar punktiem attēlotas mājiņas, bet ar līnijām attēlotas taciṇas un pie katra punkta pierakstīts no tā izejošo līniju skaits.

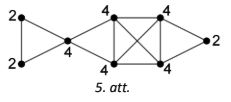
**(B)** Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciņai ir divi gali, tad kopējam taciṇu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet pēc dotā iegūstam, ka ir taciṇu gali. Tā kā ir nepāra skaitlis, tad prasītais nav iespējams.



## Solution

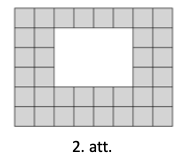
**(A)** Yes, for example, see Fig. 5, where dots represent houses, lines represent paths, and the number of lines emanating from each point is noted next to each point.

**(B)** Let us show that this is not possible. Since each path has two endpoints, the total number of path ends must be an even number. From the given data, we get that there are endpoints. Since is an odd number, the required configuration is not possible.



# LV.NOL.2023.5.3

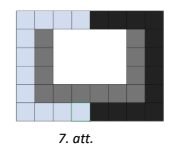
Parādi, kā 2.att. figūru ( rūtiņu taisnstūris, no kura izgriezts rūtiņu taisnstūris), griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt trīs vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



* questionType:FindExample
* domain:Geom

## Atrisinājums

Skat. 7. att.



1. att.

# LV.NOL.2023.5.4

Parādi, kā skaitli var uzrakstīt kā dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitļu summa dalītos ar trešo skaitli!

* questionType:FindExample
* domain:NT

## Atrisinājums

Prasīto var izdarīt šādi: . Pārbaudām, ka katru divu šo skaitļu summa dalās ar trešo skaitli:

# LV.NOL.2023.5.5

Ja automātā ievieto sarkanu monētu, tad tas izdod zilas monētas, bet, ja automātā ievieto zilu monētu, tad tas izdod sarkanas monētas. Vai, atkārtoti izmantojot automātu, ir iespējams iegūt vienāda skaita sarkanās un zilās monētas, ja sākumā ir dota viena sarkana monēta?

* questionType:ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

Nē, tas nav iespējams. Ievērosim, ka sākumā ir dota viena monēta un ar katru darbību monētu skaits palielinās par monētām (ja ievieto sarkanu monētu, tad izdod zilas monētas) vai monētām (ja ievieto zilu monētu, tad izdod sarkanas monētas), tātad kopējais monētu skaits vienmēr būs nepāra skaitlis. Bet, ja zilās un sarkanās monētas būtu vienādā skaitā, tad kopējais monētu skaits būtu pāra skaitlis. Tātad prasītais nav iespējams.

# LV.NOL.2023.6.1

Atrodi vienu veidu, kādi naturāli skaitḷi jāievieto un vietā, lai vienādība

būtu patiesa!

* questionType:FindExample
* domain:Alg

## Atrisinājums

Der vērtības ; un . Ar šīm vērtībām vienādība ir patiesa, jo

*Piezīme.* Parādīsim, kā var iegūt prasītās vērtības. Ievērojam, ka , tātad , no kā iegūstam, ka . Tā kā , tad un , no kā iegūstam, ka . Ievērojot, ka , iegūstam, ka un .

# LV.NOL.2023.6.2

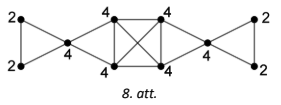
Rūķīši mežā ir uzbūvējuši desmit mājinas un starp tām izveidojuši vairākas taciṇas. Katra tacina savieno divas mājiṇas, taciṇas var krustoties. Vai iespējams, ka no mājinām iziet attiecīgi:  
**(A)** tacinas; **(B)** taciņas?

* questionType:ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

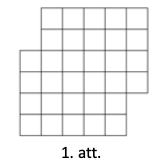
**(A)** Pamatosim, ka tas nav iespējams. Tā kā katrai taciṇai ir divi gali, tad kopējam taciṇu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, bet no dotā iegūstam, ka taciņu gali. Tā kā ir nepāra skaitlis, tad prasītais nav iespējams.

**(B)** Jā, piemēram, skat. 8. att., kur ar punktiem attēlotas mājiņas, bet ar līnijām attēlotas taciṇas un pie katra punkta pierakstīts no tā izejošo līniju skaits.



# LV.NOL.2023.6.3

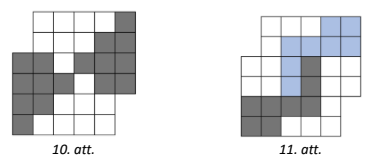
Parādi, kā, griežot pa rūtiņu līnijām, 1.att. doto figūru var sagriezt vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras pilnīgi sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



* questionType:FindExample
* domain:Geom

## Atrisinājums

Skat., piemēram, 10. att. vai 11. att.



# LV.NOL.2023.6.4

Vai skaitli: **(A)** , **(B)** var izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu summu tā, lai katru divu šo skaitḷu summa dalītos ar atlikušo skaitli?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:NT

## Atrisinājums

**(A)** Jā, var šādi . Pārbaudām, vai katru divu šo skait|u summa dalās ar trešo skaitli:

**(B)** Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja divu skaitļu un summa dalās ar kādu skaitli , tad arī visu trīs šo skaitlu summa dalās ar skaitli . Tātad visu trīs skaitļu summai jeb jādalās ar jebkuru no trīs saskaitāmajiem. Bet skaitlis ir pirmskaitlis, kas dalās tikai ar un . Tātad šie trīs dažādie skaiți var pieṇemt tikai vērtības vai , kas nav iespējams.

# LV.NOL.2023.6.5

Naturālu skaitli atļauts reizināt ar , kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus (varbūt tikai kādu no tiem). Vai, vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitla var iegūt: **(A)** skaitli ; **(B)** skaitli ?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:NT
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

**(A)** Jā, var, piemēram, šādi:

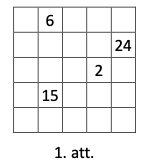
**(B)** Nē, nevar. Sākotnējais skaitlis nedalās ar . Ja skaitlis nedalās ar , tad, izpildot dotās darbības, iegūtais skaitlis nedalīsies ar :

* ja skaitli, kas nedalās ar , reizina ar , tad arī iegūtais reizinājums nedalīsies ar ;
* ja skaitlim, kas nedalās ar , izsvītro ciparu , tad arī iegūtais skaitlis nedalīsies ar (sākotnējā skaitla ciparu summa nedalās ar (dalāmības pazīme ar ), ja izsvītros , tad arī iegūs ciparu summu, kas nedalās ar ).

Tātad arī pēc vairākām operācijām iegūtais skaitlis nedalīsies ar . Tas nozīmē, ka skaitli iegūt nevar, jo tas dalās ar .

# LV.NOL.2023.7.1

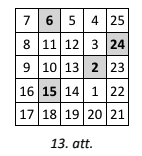
Vai tukšajās rūtiņās (skat. 1.att.) var ierakstīt pa vienam naturālam skaitlim tā, lai rezultātā būtu ierakstīti visi naturālie skaitḷi no līdz un katri divi skaitli, kuru starpība ir , būtu ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu?



* questionType:ProveDisprove
* domain:Comb

## Atrisinājums

Atrisinājums. Jā, var, skat. attēlu.



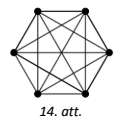
# LV.NOL.2023.7.2

Vai **(A)** lampiṇas, **(B)** lampiṇas ar vadiem var savienot tā, lai katra no tām būtu savienota ar vadu ar tieši citām lampiņām?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

**(A)** Jā, var. Sadalām lampiņas grupās pa lampiṇām katrā grupā. Katras grupas katras divas lampiṇas savienojam ar vadu (skat. 14.att., kur lampiṇas attēlotas ar punktiem un vadi ar nogriežṇiem, kas šos punktus savieno). Šādā veidā katra no lampinām būs savienota ar tieši citām lampiņām.



**(B)** Tā kā no katras lampiṇas iziet vadi, tad vadu galu skaits ir . Bet katram vadam ir gali, tāpēc kopējais galu skaits nevar būt nepāra skaitlis. Tāpēc lampiņas ar vadiem nevar savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota tieši ar citām lampiņām.

# LV.NOL.2023.7.3

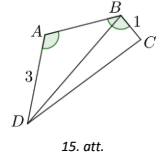
Dots četrstūris , kuram visi leņķi ir mazāki nekā , , un . Pierādīt, ka .

* questionType:Prove
* domain:Geom
* LTopic:LTStructureAugmentation

## Atrisinājums

Novelkam nogriezni (skat. 15.att.). No dotā izriet, ka . Tā kā trijstūrī pret lielāku lenki atrodas garāka mala, tad .

No trijstūra nevienādības trijstūrī iegūstam, ka .



# LV.NOL.2023.7.4

Cik ir tādu naturālu skaitļu , kuriem skaitlim ir tikpat ciparu, cik skaitlim ?

* questionType:FindCount
* domain:NT

## Atrisinājums

Ir trīs skaitli, kam izpildās uzdevuma nosacījumi, šie skaitḷi ir ; un , jo ; un visi ir vienciparu skaitli, un un abi ir divciparu skaitļi. Pamatosim, ka citu derīgu vērtību nav.

Skaitlis neder, jo , bet .

Skaitļu no līdz kvadrāti ir divciparu skaitli, jo un abi ir divciparu, tātad arī skaitļu ; ; kvadrāti ir divciparu skaitli. Šo skaitļu kubi ir trīsciparu skaitļi, jo un abi ir trīsciparu, tātad pa vidu esošo skaitļu kubi arī ir trīsciparu skaitļi.

Skaitḷiem, kas lielāki nekā , lai no skaitļa kvadrāta iegūtu skaitļa kubu, tie jāreizina ar pašu skaitli, tātad vismaz ar . Tādā gadījumā skaitḷa kuba ciparu skaits ir vismaz par lielāks nekā šī skaitļa kvadrāta ciparu skaits.

# LV.NOL.2023.7.5

Kastē atrodas baltas, sarkanas un zaḷas lodītes. Ar vienu gājienu no kastes var izṇemt divas dažādu krāsu lodītes un ielikt kastē vienu trešās krāsas lodīti (vienmēr pietiek jebkuras krāsas lodīšu, ko ielikt kastē). Vai var panākt, ka kastē paliek tikai viena lodīte, ja sākumā kastē atrodas:  
**(A)** baltas, sarkanas un zalas lodītes;  
**(B)** baltas, sarkanas un zaḷas lodītes?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

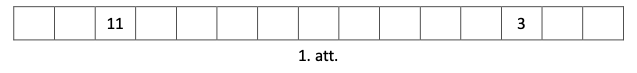
## Atrisinājums

**(A)** Nē, nevar. Ar katru gājienu visu krāsu lodīšu skaita paritāte mainās (no pāra skaitļa uz nepāra skaitli un otrādi). Tāpēc nevaram iegūt situāciju, ka divi lodīšu skaiti ir (pāra skaitlis), bet viens skaits ir (nepāra skaitlis), jo sākumā visu krāsu lodīšu skaits ir pāra skaitlis.

**(B)** Jā, var. Ar trīs pēc kārtas sekojošiem gājieniem ṇemot balta-sarkana (apzīmēsim ar *bs*), balta-zala (apzīmēsim ar *bz*), sarkana-zaḷa (apzīmēsim ar *sz*), katras krāsas lodīšu skaits samazinās par . Atkārtojot reizes šādu gājienu trijniekus, iegūstam, ka kastē ir balta, sarkanas un zaḷas lodītes. Tālāk ar gājieniem *sz*, *sz*, *bz* izveidojam situāciju, ka kastē ir baltas, sarkanas un zaļas lodītes. To ar gājieniem *bs*, *sz*, *bz*, *sz*, *bz*, *bs* pārveidojam par situāciju, kad kastē ir baltas, sarkanas un zaļa lodīte.

# LV.NOL.2023.8.1

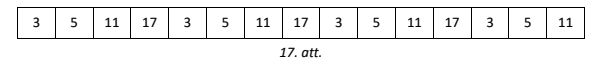
Ieraksti katrā tukšajā rūtiṇā (skat. 1.att.) vienu pirmskaitli (skaitḷi var būt arī vienādi) tā, lai katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa būtu viena un tā pati un visu rūtiņās ierakstīto skaitļu (ieskaitot abus dotos skaitļus) summa būtu . Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.



* questionType:FindExample
* domain:NT

## Atrisinājums

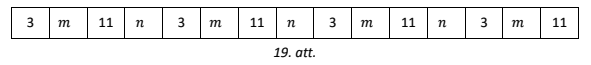
To var izdarīt, kā parādīts 17.att., kur katru četru pēc kārtas ierakstītu skait|u summa ir .



*Piezīme.* Paskaidrosim, kā šos skait!us var atrast. Aplūkojam piecas rūtiņas pēc kārtas, kurās ierakstīti skaiți un (skat. 18. att.).



Tā kā katrās četrās blakus rūtiņās skaitļu summa ir viena un tā pati, tad , tātad un rūtiņās un jābūt ierakstītam vienam un tam pašam skaitlim. Tātad rūtiṇās ierakstītie skaitḷi atkārtojas ar periodu (skat. 19. att.), kur un ir kādi vēl nezināmi pirmskaitļi.



No tā, ka visu skaitļu summa ir iegūstam, ka , no kā iegūstam, ka . Aplūkosim dažas iespējamās pirmskaitļa vērtības, līdz iegūsim derīgu vērtību:

* ja , tad (nav pirmskaitlis);
* ja , tad (nav pirmskaitlis);
* ja , tad (pirmskaitlis).

# LV.NOL.2023.8.2

Pasākumā satikās cilvēki. Katrs no tiem draudzējas ar tieši citiem cilvēkiem (ja draudzējas ar , tad draudzējas ar ). Zināms, ka no katriem trim cilvēkiem var atrast divus, kuri savā starpā nedraudzējas. Vai var gadīties, ka **(A)** , **(B)** ?

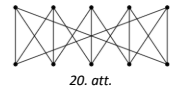
* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

**(A)** Nē, nevar. Cilvēkus iedomāsimies kā punktus, bet draudzības kā nogriežṇus, kas šos punktus savieno. Tā kā no katra punkta iziet tieši nogriežṇi un katru nogriezni ieskaitām divas reizes (nogrieznis un ir viens un tas pats nogrieznis), tad kopējais nogriežņu skaits ir . Iegūta pretruna, jo nogriežṇu skaitam ir jābūt naturālam skaitlim.

*Piezīme.* Pretrunu var iegūt arī, ja skaita nogriežṇu galus - tā kā no katra punkta iziet nogriežṇi, tad kopā ir nogriežṇu gali, bet katram nogrieznim ir divi gali, tātad kopā jābūt pāra skaitam nogriežṇu galu.

**(B)** Jā, var gadīties, piemēram, skat. 20. att. Dotajā piemērā dalībnieki sadalīti divās grupās pa pieciem dalībniekiem tā, ka katrs pirmās grupas dalībnieks draudzējas ar tieši trīs dalībniekiem no otrās grupas, bet nedraudzējas ar nevienu savas grupas dalībnieku. Tā kā starp jebkuriem trīs dalībniekiem vismaz divi atrodas vienā grupā, tad tie savā starpā nedraudzējas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



# LV.NOL.2023.8.3

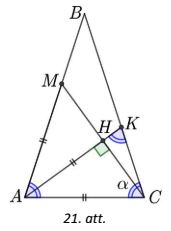
Dots vienādsānu trijstūris , kuram . Uz malas izvēlēts punkts un uz malas izvēlēts punkts tā, ka . Zināms, ka . Aprēḳināt trijstūra leṇkus!

* questionType:FindAll
* domain:Geom
* LTopic:LTStructureAugmentation

## Atrisinājums

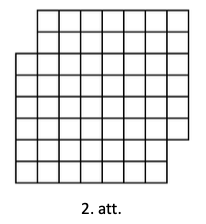
Apzīmējam un krustpunktu ar (skat. 21.att.). Tā kā un ir vienādsānu trijstūri, tad . Nogrieznis ir vienādsānu trijstūra augstums pret pamatu, tātad arī bisektrise, tāpēc . Tā kā trijstūra iekšējo leṇku summa ir , tad iegūstam, ka , no kurienes jeb .

Tātad un .



# LV.NOL.2023.8.4

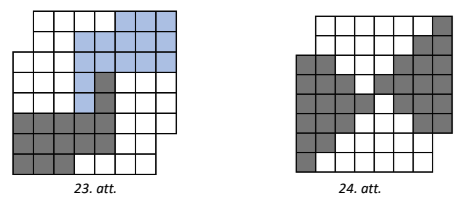
Parādi, kā, griežot pa rūtiṇu līnijām, 2.att. doto figūru var sagriezt vienādās figūrās! Figūras ir vienādas, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras sakrīt (figūras var pagriezt un apmest otrādi).



* questionType:FindExample
* domain:Geom

## Atrisinājums

Skat. 23.att. vai 24.att.



# LV.NOL.2023.8.5

Pa apļveida trasi vienā virzienā Kārlis skrien ar kājām un Sandris brauc ar skrejriteni, bet pretējā virzienā Vilnis brauc ar velosipēdu un Mārtiṇš ar mopēdu (katrs brauc ar savu, nemainīgu ātrumu). Zināms, ka Kārlis satiek Vilni ik pēc minūtēm, Sandris apdzen Kārli ik pēc minūtēm, bet Mārtiṇš apdzen Vilni ik pēc minūtēm. Cik bieži Mārtiṇš satiek Sandri?

* questionType:FindAll
* domain:Alg

## Atrisinājums

Apzīmēsim Kārḷa ātrumu ar , Sandra ātrumu ar , Viḷna ātrumu ar , Mārtiṇa ātrumu ar un trases garumu ar .

No tā, ka Kārlis satiek Vilni ik pa minūtēm, izriet, ka .

No tā, ka Sandris apdzen Kārli ik pa 20 minūtēm, izriet, ka .

No tā, ka Mārtiṇš apdzen Vilni ik pa 5 minūtēm izriet, ka .

Tā kā , tad secinām, ka Mārtiṇš Satiek Sandri ik pēc minūtēm.

## Atrisinājums

Pieņemsim, ka Kārlis un Sandris pārvietojas pa labi, bet Vilnis un Kārlis - pa kreisi. Pieṇemsim arī, ka viņi visi sāk pārvietoties vienā laikā no viena punkta un noskaidrosim, cik aplus un kurā virzienā minūtēs Kārli apdzen pārējie ( izvēlēts, kā , un minūšu mazākais kopīgais dalāmais). No tā, ka Kārlis satiek Vilni ik pa minūtēm izriet, ka Vilnis ir veicis apļus pa kreisi attiecībā pret Kārli.

No tā, ka Mārtiṇš apdzen Vilni ik pa minūtēm izriet, ka Mārtiṇš ir veicis aplus pa kreisi attiecībā pret Vilni, tātad viṇš veicis apļus pa kreisi attiecībā pret Kārli.

No tā, ka Sandris apdzen Kārli ik pa 20 minūtēm izriet, ka Sandris ir veicis aplus pa labi attiecībā pret Kārli.

Tā kā Mārtiṇš ir veicis attiecībā pret Kārli apļus pa kreisi, bet Sandris veicis 3 apļus pa labi, tad viņi šajās minūtēs ir satikušies reizes. Tātad viņi satiekas ik pēc minūtēm.

# LV.NOL.2023.9.1

Dots, ka ir naturāls skaitlis. Kāds lielākais skaits skaitļu ; ; ; ; vienlaicīgi var būt pirmskaitḷi?

* questionType:FindOptimal
* domain:NT

## Atrisinājums

Ja , tad ir pirmskaitli, un tie ir ( nav pirmskaitlis).

Ja ir pāra skaitlis, tad ir ne vairāk kā viens pirmskaitlis (pirmskaitlis , pārējie ir pāra skaitli, tātad nav pirmskaitļi).

Ja , tad pirmskaitļu skaits ir , un tie ir ( nav pirmskaitlis).

Ja , tad pirmskaitļu skaits ir , un tie ir ( nav pirmskaitlis).

Ja ir nepāra skaitlis un , tad skaitļa pēdējais cipars var būt , bet tad vienam no skaitļiem pēdējais cipars būs (jo ; , , ), tātad tas nebūs pirmskaitlis, jo dalīsies ar un būs lielāks nekā . Līdz ar to vismaz viens no skaitļiem nebūs pirmskaitlis, un pirmskaitļu skaits nebūs lielāks kā .

Tātad lielākais pirmskaitļu skaits ir .

*Piezīme.* Var pamatot, ka viens no skaitliem vai dalās ar (un ir lielāks nekā ).

# LV.NOL.2023.9.2

Novadijā dzīvo rūḳi un daži no tiem savā starpā draudzējas (ja rūḳis draudzējas ar rūḳi , tad arī draudzējas ar , tas ir, draudzība ir abpusēja). Vai var būt tā, ka katram rūķim ir tieši draugi?

* questionType:ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTInvariant

## Atrisinājums

Rūķus apzīmējam ar punktiem un divus punktus savienojam ar nogriezni, ja punktiem atbilstošie rūķi savā starpā draudzējas. Tā kā no katra punkta iziet nogriežṇu gali, tad nogriežṇu galu kopējais skaits ir , kas ir nepāra skaitlis. Bet katram nogrieznim ir divi gali, tāpēc nogriežņu galu skaitam ir jābūt pāra skaitlim. Esam ieguvuši pretrunu. Tāpēc nevar būt, ka katram rūķim ir tieši draugi.

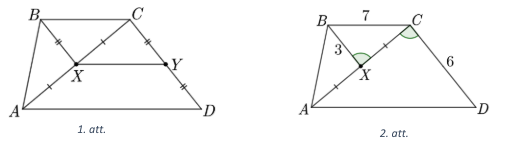
# LV.NOL.2023.9.3

Punkts ir izliekta četrstūra diagonāles viduspunkts. Zināms, ka . Aprēķināt garumu, ja un .

* questionType:FindAll
* domain:Geom
* LTopic:LTStructureAugmentation

## Atrisinājums

Apzīmēsim viduspunktu ar punktu un novilksim nogriezni (skat. 1.att.). Tā kā , tad . Tā kā nogriežṇi ir vienādi un paralēli, tad četrstūris ir paralelograms. Tādā gadīumā kā paralelograma malas. Nogrieznis ir trijstūra viduslīijia, tātad .



## Atrisinājums

Tā kā , tad kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm (skat. 2.att.). No dotā izriet, ka . Tātad pēc pazīmes . Līdz ar to kā atbilstošās malas līdzīgos trijstūros.

# LV.NOL.2023.9.4

Atrast visus tādus reālu skaitļu pārus , kuriem

* questionType:FindAll
* domain:Alg
* LTopic:LTExpressionTransforms

## Atrisinājums

Atverot iekavas un abām vienādojuma pusēm atṇemot , iegūstam:

Divu kvadrātu summa ir nulle tikai tad, ja katrs saskaitāmais ir nulle, tātad

Tas nozīmē, ka . Tātad vienādojumam ir četri atrisinājumi: un .

## Atrisinājums

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad

Analoğiski iegūstam, ka . Sareizinot kopā pēdējās divas nevienādības (to drīkst darīt, jo abu nevienādību abas puses ir nenegatīvas), iegūstam, ka

No iepriekš veiktajiem spriedumiem izriet, ka vienādība tiks sasniegta tad un tikai tad, ja un , tas ir, . Tātad vienādojumam ir četri atrisinājumi: un .

# LV.NOL.2023.9.5

Dabas rezervātā katra koka vecums gados izsakāms kā naturāls skaitlis. Koku vidējais vecums pirms vakardienas negaisa bija tieši gadi. Negaisa laikā Zibens spēriena dēļ gāja bojā viens gadus vecs koks un tagad rezervāta koku vidējais vecums ir tieši gads. Kāds lielākais skaits gadus vecu koku varēja atrasties rezervātā pirms vakardienas negaisa?

*Piezīme.* Pa šīm divām dienām neviens koks nav kļuvis vecāks.

* questionType:FindOptimal
* domain:Alg

## Atrisinājums

Koku skaitu pirms negaisa apzīmēsim ar , bet koku gadu kopsummu apzīmēsim ar .

Tad un . Tātad un iegūstam, ka un .

Noskaidrosim, kāds lielākais skaits 2023 gadus vecu koku var būt. Ievērojam, ka + 957. Tātad gadus veco koku skaits nevar pārsniegt . Pieṇemot, ka atlikušo koku vecums ir mazākais iespējamais (1 gads), koku kopskaits ir mazāks nekā koku skaits parkā: . Tātad gadus veco koku skaits nevar būt .

Nākamā iespējamā vērtība ir . Izsakām . Pieṇemsim, ka starp atlikušajiem kokiem ir viengadīgi koki un viens koks, kuram ir gadi ().

Tad koku skaits , no kā iegūstam, ka jeb parkā ir viengadīgi koki. N̦emot vērā, ka , iegūstam, ka jeb atlikušā koka vecums ir gadi.

Tātad lielākais skaits gadus vecu koku parkā pirms vakardienas negaisa ir .

# LV.NOL.2023.10.1

Noskaidrot, vai skaitlis ir racionāls vai iracionāls!

* questionType:ProveDisprove
* domain:Alg

## Atrisinājums

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Līdz ar to esam ieguvuši, ka dotais skaitlis ir racionāls skaitlis.

## Atrisinājums

Doto skaitli kāpinot kvadrātā, iegūstam

Tā kā skaitḷa kvadrāts ir , tad dotais skaitlis ir racionāls skaitlis.

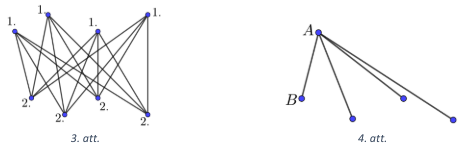
# LV.NOL.2023.10.2

Uz papīra lapas atzīmēti daži punkti tā, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Daži punkti ir savienoti ar nogriežņiem tā, ka no katra punkta iziet tieši nogriežṇi. Zināms, ka nav uzzīmēts neviens tāds trijstūris, kuram visas virsotnes ir dotajos punktos. Kāds ir mazākais skaits punktu, kas var būt atzīmēti uz papīra lapas?

* questionType:FindOptimal
* domain:Comb

## Atrisinājums

Mazākais iespējamais punktu skaits ir astoņi. Dotajā piemērā (skat. 3.att.) punkti sadalīti divās grupās (1. grupa un 2. grupa) pa četriem punktiem tā, ka katrs pirmās grupas punkts ir savienots ar katru otrās grupas punktu, bet nav savienots ar nevienu savas grupas punktu. Izvēloties jebkurus trīs punktus, vismaz divi būs vienā grupā, tātad attiecīgie punkti nebūs savienoti ar nogriezni, līdz ar to nebūs uzzīmēts neviens trijstūris, kura virsotnes ir dotajos punktos.



Pierādīsim, ka uz lapas nevar būt atzīmēts mazāks skaits punktu. Apskatām punktu (skat. 4.att.), kas savienots ar tieši citiem punktiem. Apskatām punktu (skat. 4.att.). Tā kā nav uzzīmēts neviens trijstūris, tad punkts nevar būt savienots ne ar vienu citu punktu, kas savienots ar , bet tādā gadījumā nepieciešami vēl vismaz citi punkti, tas ir, kopā uz lapas ir atzīmēti vismaz punkti.

# LV.NOL.2023.10.3

Šaurleṇķu trijstūra augstumi krustojas punktā . Aprēḳināt četrstūra laukumu, ja .

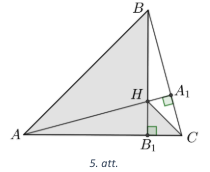
* questionType:FindAll
* domain:Geom
* LTopic:StructureAugmentation

## Atrisinājums

Pret malām un novilktos augstumus apzīmējam ar un (skat. 5.att.).

levērojam, ka .

Izmantojot trijstūra laukuma aprēḳināšanas formulu , iegūstam, ka



## Atrisinājums

Pret malām un novilktos augstumus apzīmējam ar un (skat. 5.att.). Ievērojam, ka .

Izmantojot trijstūra laukuma aprēkināšanas formulu , iegūstam, ka

# LV.NOL.2023.10.4

Atrast lielāko naturālo skaitli ar īpašību - katram pirmskaitlim skaitlis arī ir pirmskaitlis!

* questionType:FindOptimal
* domain:NT

## Atrisinājums

Aplūkojam vērtību un pārbaudām, vai ir pirmskaitlis visiem , kas mazāki nekā :

* ja , tad (pirmskaitlis);
* ja , tad (pirmskaitlis);
* ja , tad (pirmskaitlis).

Pamatosim, ka neder skaitḷi, kas lielāki nekā . Ja , tad kāds no trīs skaitļiem: nav pirmskaitlis, jo

* dalās ar , ja ,
* dalās ar , ja ,
* dalās ar , ja ,
* dalās ar , ja .

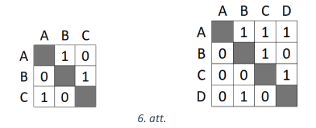
# LV.NOL.2023.10.5

Volejbola turnīrā katra komanda spēlēja ar katru tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Ir zināms: lai kuru komandu mēs izvēlētos (apzīmēsim to ar ), tā ir izcīnījusi tieši tikpat uzvaru, cik kopā izcīnījušas visas tās komandas, pret kurām uzvarēja. Kāds var būt komandu skaits, kas piedalījās šajā turnīrā? (Nevienā turnīrā nav mazāk kā komandas.)

* questionType:FindAll
* domain:Comb

## Atrisinājums

Turnīrā varēja piedalīties vai komandas, piemēram, atbilstošu spēļu norisi skat. 6.att., kur skaitlis norāda rindā rakstītās komandas atbilstošās uzvaras pret komandām, kas rakstītas kolonnā, skaitlis norāda zaudējumu (piemēram, trīs komandu gadījumā komanda ir uzvarējusi komandu un zaudējusi komandai ). Pamatosim, ka cits komandu skaits nav iespējams. Komandu skaits nevar būt , jo tad ir tikai viena spēle, kurā ir uzvarētājs un zaudētājs.



1. att.

Ievērosim, ka komandas savā starpā kopā izspēlē spēles un izcīna tikpat uzvaras. Tā kā vidēji uz vienu komandu ir uzvaras, tad ir komanda ar vismaz uzvarām (ja šādas komandas nebūtu, tad kopējais uzvaru skaits būtu mazāks nekā ).

Apzīmēsim turnīra komandu skaitu ar un pieṇemsim, ka lielākais uzvaru skaits vienai komandai ir ; apzīmēsim šo komandu ar . Tās komandas, kas zaudējušas pret , savā starpā spēlējušas spēles, kurās izcīnītas uzvaras; bez tam viṇām varbūt ir vēl kādas citas uzvaras. Tāpēc , no kurienes izriet, ka .

Apskatām visas iespējamās vērtības.

* Ja , tad A izcīnījusi uzvaras pret , , . Tātad un savā starpā arī ir uzvaras. Ja būtu vēl kāda komanda , tad tā ir uzvarējusi gan pret , gan pret , , (citādi , , kopā būtu vairāk par uzvarām), un tā ir pretruna ar to, ka ir vislielākais uzvaru skaits. Tātad šajā gadījumā citu komandu nav, un turnīrā piedalās komandas.
* Ja , tad no iepriekš iegūtās nevienādības izriet, ka . Mums tikai jānoskaidro, vai var būt, ka . Ja , tad tiek izspēlētas spēles un izcīnītas uzvaras. Ja lielākais uzvaru skaits ir , tad visām komandām ir pa uzvarām, un tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpēc .
* Ja , tad no izriet, ka . Tātad citu iespēju bez sākumā uzrādītajām nav.

# LV.NOL.2023.11.1

Pierādīt, ka visiem reāliem un .

* questionType:Prove
* domain:Alg
* LTopic:LTExpressionTransforms

## Atrisinājums

Reizinām abas nevienādības puses ar un veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Tā kā divu kvadrātu summa ir nenegatīva, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

## Atrisinājums

Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Tā kā divu kvadrātu summa ir nenegatīva, tad iegūtā nevienādība ir patiesa, tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

# LV.NOL.2023.11.2

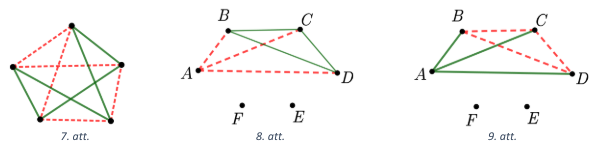
Kādā zemē dzīvo rūķi, katri divi no tiem vai nu draudzējas, vai viens otru ienīst. Zināms, ka nav tādu trīs rūḳu, kas visi viens otru ienīst. Vai noteikti var atrast tādus trīs rūḳus, kas visi savā starpā draudzējas, ja šajā zemē ir **(A)** rūķi, **(B)** rūķi?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTContradiction

## Atrisinājums

Katru rūķi apzīmēsim ar punktu. Ja divi rūḳi draudzējas, tad tos savienosim ar zaḷu nogriezni (nepārtraukta līnija), ja tie viens otru ienīst, tad savienosim tos ar sarkanu nogriezni (pārtraukta līnija).

**(A)** Nē, var gadīties, ka nav tādu trīs rūḳu, kas visi savā starpā draudzējas, piemēram, skat. 7. att.



**(B)** Pamatosim, ka noteikti var atrast tādus trīs rūķus, kas visi savā starpā draudzējas.

Apskatām punktu . No tā iziet vismaz vienas krāsas nogriežņi, jo katri divi rūķi vai nu draudzējas, vai ir ienaidnieki un no viena punkta iziet nogriežṇi (pēc Dirihlē principa). Apskatām abus iespējamos gadījumus, kādā krāsā var būt nogriežṇi , un .

1. Ja nogriežṇi , , ir sarkanā krāsā (ienīst), tad nogriežṇiem ir jābūt zaḷā krāsā (skat. 8.att.), lai neveidotos sarkani trijstūri , un , jo pēc dotā nav tādu trīs rūķu, kas visi ienīst viens otru. Tātad ir trīs rūki un , kas visi draudzējas savā starpā (veidojas zals̆ trijstūris ).
2. Nogriežṇi , , ir zalạ krāsā (draudzējas). Pieṇemsim pretējo, ka nav tādu trīs rūķu, kas visi savā starpā draudzējas (nav zaḷa trijstūra). Tad punkti jāsavieno ar sarkaniem nogriežņiem , , (skat. 9.att.), lai neviens no trijstūriem , un nebūtu zaļš. Bet tādā gadījumā rūķi visi viens otru ienīst, kas ir pretrunā ar doto. Tātad pieņēmums ir aplams un ir tādi trīs rūķi, kas visi savā starpā draudzējas.

# LV.NOL.2023.11.3

Dots vienādsānu trijstūris , kuram un . Riṇka līnija, kuras centrs ir punktā un rādiuss , krusto trijstūra malas un attiecīgi punktos un . Aprēķināt , ja .

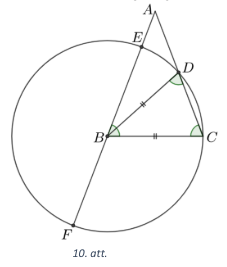
* questionType:FindAll
* domain:Geom
* LTopic:LTStructureAugmentation

## Atrisinājums

Apzīmējam un . Tad .

Trijstūri un ir vienādsānu trijstūri ( pēc dotā un kā rādiusi), turklāt leņķi pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ( ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 10.att.). Tātad pēc pazīmes .

Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc un līdz ar to iegūstam, ka . Tātad un .



## Atrisinājums

Apzīmējam un (skat. 10.att.). Tad .

Pagarināsim līdz otram krustpunktam ar rinķa līniju, apzīmēsim to ar . Tādā gadījumā kā rādiusi un . Izmantojot sekanšu īpašību, iegūstam, ka

Tā kā , tad .

# LV.NOL.2023.11.4

Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā , kur ir naturāls skaitlis!

* questionType:Prove
* domain:NT
* LTopic:LTContradiction

## Atrisinājums

Pieṇemsim pretējo, ka šādi skaitļi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar un , iegūstot vienādojumu .

Pareizinot abas vienādojuma puses ar un pieskaitot , iegūstam, ka

Ievērojam, ka dalās ar , toties dalās ar , bet nedalās ar . Tātad dalās ar , bet nedalās ar , un tas nevar būt naturāla skaitḷa kvadrāts. Tātad esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā , kur - naturāls skaitlis.

## Atrisinājums

Pieṇemsim, ka šāds secīgu naturālu skaitḷu pāris eksistē. Tad to reizinājums pēc moduḷa ir , jo . Aplūkosim, kādus atlikumus pēc moduḷa var iegūt, reizinot secīgus skaitlus un .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 6 |
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 5 | 2 |
| 5 | 6 | 3 |
| 6 | 7 | 6 |
| 7 | 8 | 2 |
| 8 | 0 | 0 |

Visi iespējamie varianti ir aplūkoti un nevienā gadījumā reizinājuma atlikums pēc moduḷa nav . Tātad esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitḷu reizinājums nav izsakāms formā , kur ir naturāls skaitlis.

# LV.NOL.2023.11.5

Skaitļu virkni, kurā ir elementi, sauksim par mazāko naturālo skaitļu permutāciju, ja tajā atrodami visi naturālie skaitļi no līdz .

Zināms, ka virkne ir () mazāko naturālo skaitļu permutācija.

Virknes () elementus aprēķina pēc formulas .

Virknes () elementus aprēķina pēc formulas .

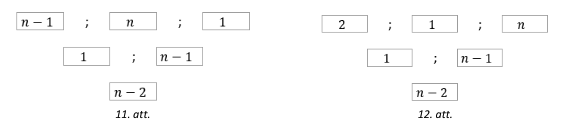
Pierādīt, ka un vienlaikus abas nevar būt attiecīgi un mazāko naturālo skaitļu permutācijas!

* questionType:Prove
* domain:Comb

## Atrisinājums

Pieņemsim pretējo, ka abas virknes un ir attiecīgi un mazāko skaitļu permutācijas. Tas nozīmē, ka virknē ir skaitlis , bet virknē ir visi skaitļi no līdz .

Uzskatāmības pēc rakstīsim virknes vienu zem otras tā, ka elements atrodas zem elementiem un pa vidu un arī elements atrodas zem elementiem un pa vidu. Tieši virs virknē jāatrodas virknes skaitliem 1 un , jo nav cita veida, kā virknē iegūt . Līdzīgi tieši virs virknē jāatrodas virknes skaitļiem un , jo nav cita veida, kā virknē iegūt skaitli . Tādējādi ir iespējami divi varianti, kādi skaitḷi atrodas virknē virs un (skat. 11. att. un 12. att.). Gadījumi, kad virknē skaitļi un atrodas pretējā secībā, ir šiem simetriski.



Virknē kaut kur jāatrodas arī skaitlim , ko var iegūt tikai divos veidos: vai nu kā , vai arī kā . Tātad virknē vai nu skaitļu pārim , vai arī jāatrodas blakus. Bet nevienā no gadījumiem tas nav iespējams. Patiešām, 11.att. gadijumā un neatrodas blakus, bet skaitlim abi kaimiṇi jau ir aizṇemti, un līdzīgi 12.att. gadijumā skaitḷi un neatrodas blakus, bet skaitlim abi kaimiņi jau ir aizṇemti. Tātad pieņēmums bija aplams un abas virknes un vienlaikus nevar būt attiecīgi un mazāko naturālo skaitļu permutācijas.

# LV.NOL.2023.12.1

Atrast mazāko reālo skaitli , ar kuru visiem reāliem skaitliem ir spēkā nevienādība:

* questionType:FindOptimal
* domain:Alg
* LTopic:LTExpressionTransforms

## Atrisinājums

Mazākā iespējamā vērtība ir . Ekvivalenti pārveidosim doto nevienādību, atdalot pilnos kvadrātus:

Vispirms pamatosim, ka nevar būt mazāks kā . Ievietosim nevienādībā , iegūstot, ka nevienādības kreisā puse kļūst vienāda ar , tātad .

Ja , tad nevienādība izpildās visiem reāliem un , jo triju kvadrātu summa noteikt ir nenegatīvs skaitlis. Tātad ir mazākā iespējamā vērtība, ar kuru izpildās dotā nevienādība visiem reāliem skaitliem .

# LV.NOL.2023.12.2

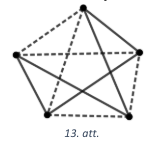
Šaha turnīrā katri divi šahisti ir vai nu izspēlējuši tieši vienu šaha partiju, vai arī nav izspēlējuši nevienu partiju. Vai noteikti var atrast tādus trīs šahistus, kas savā starpā ir izspēlējuši vai nu visas partijas, vai nevienu partiju, ja turnīrā piedalās **(A)** , **(B)** šahisti?

* questionType:ProveDisprove,ProveDisprove
* domain:Comb
* LTopic:LTMeanValuePrinciple

## Atrisinājums

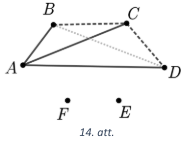
Šahistus apzīmējam ar punktiem. Divus šahistus savienosim ar nepārtrauktu līniju, ja tie ir izspēēejuši partiju, bet ar pārtrauktu līiiju, ja tie nav izspēlējuši partiju.

**(A)** Nē, var gadīties, ka nav tādu trīs šahistu, kas izspēlējuši vai nu 3, vai nevienu partiju, piemēram, skat. 13. att., kur nav neviena trijstūra, kuram visas malas ir viena veida līnijas.



**(B)** Pierādīsim, ka noteikti var atrast tādus trīs šahistus, kas kopā ir izspēlējuši vai nu 3 partijas, vai nevienu partiju, tas ir, ka var atrast tādu trijstūri, kuram visas malas ir viena veida līnijas.

Pieṇemsim, ka nav neviena šāda trijstūra. Aplūkojam punktu . Tā kā no tā iziet nogriežṇi, tad vismaz trīs no tiem ir viena veida (pēc Dirihlē principa). Nezaudējot vispārīgumu, uzskatīsim, ka nogriežṇi ir nepārtrauktas līnijas. Tad un jābūt pārtrauktām līnijām, bet tādā gadījumā trijstūrim vai visas malas būs viena veida līnijas (skat. 14. att.). Iegūta pretruna ar pienēmumu.



# LV.NOL.2023.12.3

Dots vienādsānu trijstūris , kuram un . Rinķa līnija, kuras centrs ir punktā un rādiuss , krusto trijstūra malas un attiecīgi punktos (kas nesakrīt ar ) un . Pierādīt, ka .

* questionType:Prove
* domain:Geom

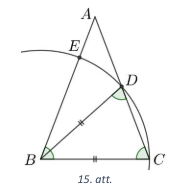
## Atrisinājums

Trijstūri un ir vienādsānu trijstūri ( pēc dotā un kā rādiusi), turklāt leņķi pie pamata abiem trijstūriem ir vienādi ( ir kopīgs abiem trijstūriem, skat. 15. att.). Tātad pēc pazīmes .

Līdzīgos trijstūros atbilstošo malu garumi ir proporcionāli, tāpēc

Tā kā kā rādiusi, tad

Dalot abas vienādības puses ar , iegūstam, ka



# LV.NOL.2023.12.4

Pierādīt, ka nekādu divu secīgu naturālu skaitļu reizinājums nav izsakāms formā , kur ir naturāls skaitlis.

* questionType:Prove
* domain:NT
* LTopic:LTExpressionTransforms

## Atrisinājums

Pienemsim pretējo, ka šādi skaitḷi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar un , iegūstot vienādojumu .

Pareizinot abas puses ar 4 un pieskaitot 1, iegūstam, ka

Vienādojuma labā puse dalās ar 9 , tātad dalās ar 3 . Izdalot abas vienādojuma puses ar 9, iegūstam, ka

levērojam, ka, dalot vienādojuma labo pusi ar 3, tiek iegūts atlikums 2. Toties, dalot skaitla kvadrātu ar 3, var iegūt tikai atlikumu 0 vai 1. Tātad šim vienādojumam nav atrisinājuma un esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skait|u reizinājums nav izsakāms formā , kur - naturāls skaitlis.

## Atrisinājums

Pieņemsim pretējo, ka šādi skaitḷi eksistē un apzīmēsim tos attiecīgi ar un , iegūstot vienādojumu .

Ja vai dalās ar , tad vienādojuma kreisā puse dalās ar , bet labā nedalās, tātad vienādojumam nav atrisinājuma. No tā iegūstam, ka, dalot ar , nevar iegūt atlikumu vai , tātad tiek iegūts atlikums . Tātad var izeikt formā . Ievietojot doto vienādību vienādojumā, iegūstam

Abas vienādojuma puses izdalot ar un sadalot reizinātājos, iegūstam

Tā kā vienādojuma labā puse nedalās ar , tad analogi iepriekš secinātajam, iegūstam, ka, dalot ar , var iegūt tikai atlikumu (citādi vienādojuma kreisā puse dalīsies ar ). Līdz ar to, apzīmējot , iegūstam vienādojumu

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar , bet labā - nedalās. Tātad šim vienādojumam nav atrisinājuma un esam ieguvuši pretrunu. Līdz ar to nekādu divu secīgu naturālu skaitlu reizinājums nav izsakāms formā , kur - naturāls skaitlis.

# LV.NOL.2023.12.5

Dotas kastes, sākumā tajās ir attiecīgi konfektes. Vienā gājienā var izvēlēties naturālu skaitli un no dažām kastēm (varbūt tikai no vienas) apēst konfektes. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var panākt, ka visas kastes ir tukšas?

* questionType:FindOptimal
* domain:Comb
* LTopic:LTInduction

## Atrisinājums

*Atbilde.* Mazākais gājienu skaits ir .

Parādīsim, ka ar gājieniem pietiek. Pirmajā gājienā apēdam pa konfektei no kastēm, kurās ir nepāra skaits konfekšu. Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar . Otrajā gājienā apēdam pa konfektēm no tām kastēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar . Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar . Trešajā gājienā apēdam pa konfektēm no tām kastēm, kurās konfekšu skaits nedalās ar . Rezultātā visās kastēs konfekšu skaits dalās ar . Līdzīgi turpinot, pēc gājieniem konfekšu skaits visās kastēs dalās ar . Tā kā nevienā kastē konfekšu skaits nepārsniedz , tad šajā brīdī tas ir .

Pamatosim, ka ar gājieniem nepietiek. Sākumā visās kastēs ir dažāds skaits konfekšu. Līdz ar to pēc pirmā gājiena vienāds konfekšu skaits var būt lielākais kastēs, pēc otrā gājiena - lielākais kastēs, pēc trešā gājiena lielākais kastēs, , pēc 10. gājiena - lielākais kastēs. Tāpēc pēc 10.gājiena visas kastes nevar būt tukšas.