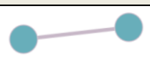
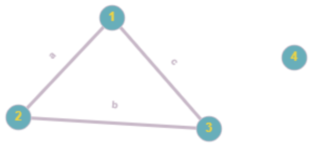
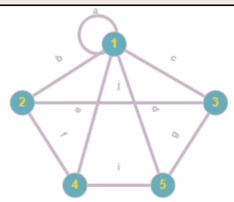
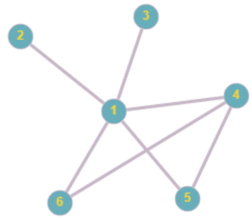
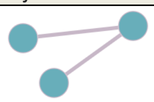
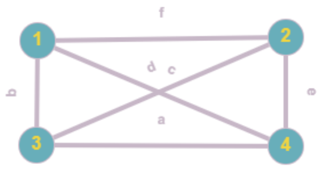
La teoría de grafos

Estudia las propiedades de los grafos. Estas son estructuras que constan de 2 partes, el conjunto de vértices y nodos; y el conjunto de aristas que pueden ser orientados o no, por ello, también se conoce como análisis de redes.

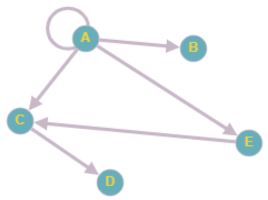
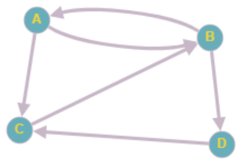
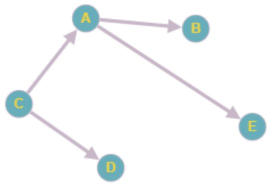
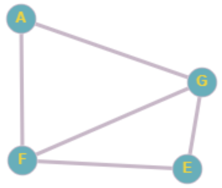
La teoría de grafos es una rama de las matemáticas discretas y de las matemáticas aplicadas, y es un tratado que usa diferentes conceptos de diversas áreas como combinatoria, álgebra, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética y topología.

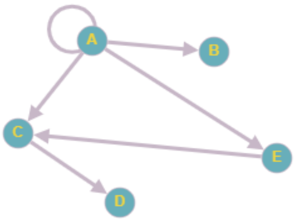
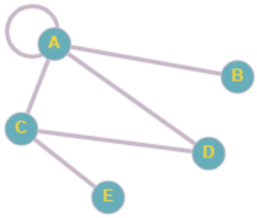
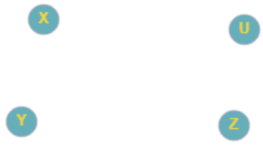
Componentes de un grafo:

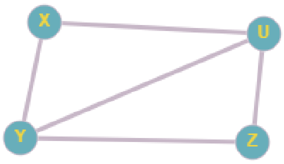
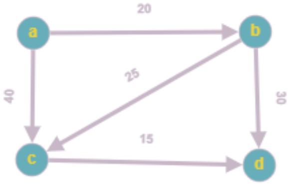
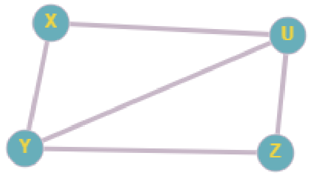
Vértices o nodos				
Vértice: puntos o nodos con los que están conformados los grafos.	**Vértice Terminal**: vértice de grado uno.	**Vértice Aislado**: vértice de grado cero.	**Grado de un Vértice:** número de aristas que inciden sobre un vértice.	**Vértice Adyacente**: los vértices son adyacentes si están unidos mediante una arista.
				

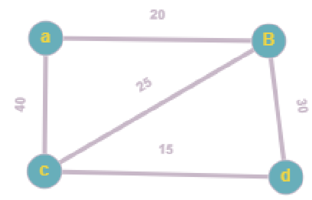
Aristas o arcos				
Aristas: es la relación entre 2 vértices de un grafo.	**Aristas Adyacentes:** son aristas que se dirigen al mismo vértice y se juntan en él.	**Aristas Paralelas:** son aristas si el vértice inicial y el final son los mismos.	**Cruce**: son aristas que se cruzan en un punto.	**Lazo o bucle:** es una arista cuyos extremos inciden sobre el mismo vértice.
				

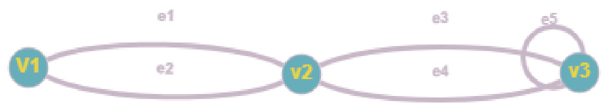
Grafos			
Grafo: Un grafo es un conjunto de vértices o nodos unidos por aristas o arcos.	**Grafo cíclico:** se dice cíclico si contiene algún ciclo simple.	**Grafo acíclico:** grafo que no contiene ningún ciclo simple.	**Grafo denso:** es aquel grafo en el que el número de aristas es cercano al número de máximo de aristas, es decir, a las que tendría si el grafo fuera completo. Al contrario, un grafo disperso es un grafo con un número de aristas muy bajo, es decir, cercano al que tendría si fuera un grafo vacío.

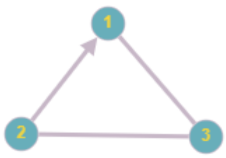
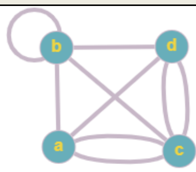
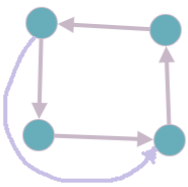
			

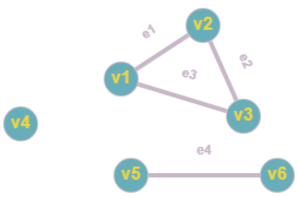
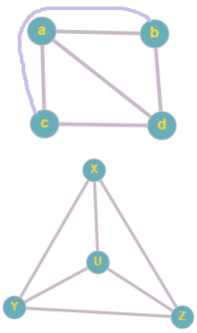
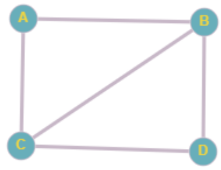
Grafo dirigido:	**Grafo no dirigido:**	**Grafo nulo:**
Un grafo dirigido G, también llamado digrafo es conjunto de vértices y un conjunto de aristas tal que para cada arista perteneciente al conjunto de aristas se asocia con 2 vértices en forma ordenada. En conclusión, se puede afirmar que un grafo dirigido es aquel que tiene uniones unidireccionales que suelen dibujarse con una flecha.	Son aquellos grafos en los cuales los lados no están orientados (no son flechas).	es el grafo cuyos conjuntos de aristas y de vértices están vacíos.
		

Grafo plano:	**Grafo ponderado:**	**Grafo simple:**
es aquel que es posible dibujar en el plano sin que ningún par de aristas se crucen entre sí.	Un grafo ponderado es aquel que asocia un valor o peso a cada arista en el grafo. El peso de un camino en un grafo con pesos es la suma de los pesos de todas las aristas atravesadas. Una etiqueta puede ser un nombre, costo o un valor de cualquier tipo de dato. También a este grafo se le denomina red de actividades, y el número asociado al arco se le denomina factor de peso. Se usa en el modelado de problemas de la vida real; por ejemplo, al tiempo que se tardará en realizar una actividad determinada o la distancia que hay de un lugar a otro.	es un grafo o dígrafo que no tiene bucles, y que no es un multígrafo.
	 Grafo dirigido con costo	

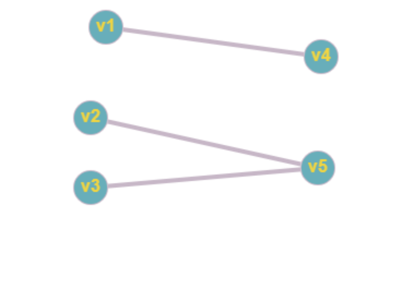
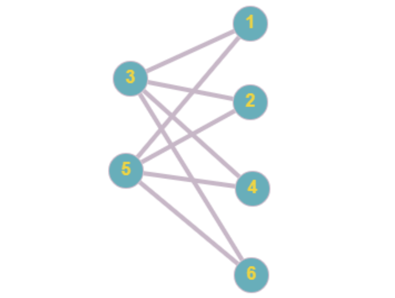
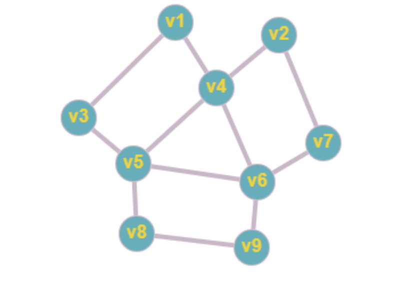
	 Grafo no dirigido con costo	

Grafo no Simple: Grafo no dirigido que tiene lados paralelos y lazos.	**Grafo trivial:** **es aquel** grafo vacío con un único vértice.	**Grafo vacío:** Un grafo vacío es el grafo cuyo conjunto de aristas es vacío.
		

Grafo mixto: Es aquel grafo en el que algunas de sus aristas son dirigidas y otras son no dirigidas.	**Grafo conexo:** Es aquél grafo en que existe camino simple entre cualquier par de vértices. Es decir, desde cualquier vértice v tiene al menos un camino para llegar al vértice w. También es llamado grafo conectado. El grafo de la figura es conexo, pues dados dos vértices cualesquiera v y w existe un camino de v a w.	**Grafo fuertemente conexo:** Es un grafo dirigido que tiene camino entre cualquier par de vértices. Mínimo deberá tener 2 caminos de un vértice a otro.
		

Grafo disconexo: Un grafo G es disconexo, si dos o más de sus nodos no están conectados por caminos simples.	**Grafo regular:** es un grafo cuyos vértices tienen el mismo grado.	**Grafo completo:** un grafo es completo si cada vértice tiene un grado igual a n-1, donde n es el número de vértices que componen el grafo.
		

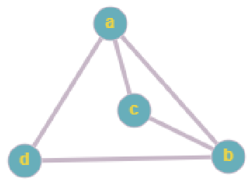
Grafo bipartito: Es cualquier grafo, cuyos vértices pueden ser divididos en 2 conjuntos, tal que no haya aristas entre los vértices del mismo conjunto.	**Grafo Bipartito Completo**. está dividido en conjuntos V1 con m vértices y V2 con n vértices, de los cuales existe una arista entre	**Grafo no bipartito:** Es cuando el conjunto de vértices V no se puede separar en dos o más subconjuntos. El grafo de la figura no es bipartito porque no se puede

	cada par de vértices v1 y v2, donde v1 está en V1 y v2 está en V2. El grafo de la figura es bipartito completo con dos y cuatro vértices (K2, 4) donde V1= {3,5} y V2= {1, 2, 4, 6}.	separar en dos subconjuntos.
		

Representación Matemática de los grafos

Un grafo **G** es un par **(V,E)** donde:

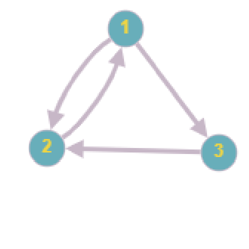
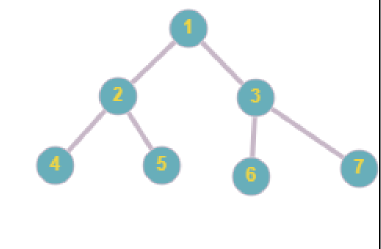
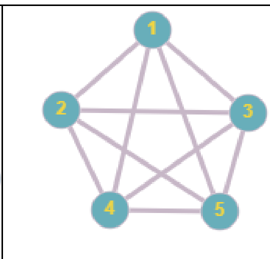
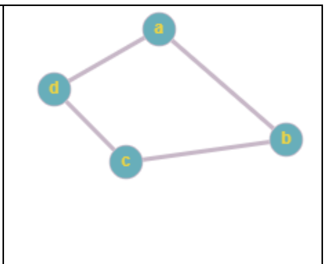
- **V ={v_1,…,v_n}** es un conjunto de vértices
- **E = {e_1,…,e_m}** es un conjunto de aristas,
- Con cada **e_k Î {v_i, v_j}**, con **v_i, v_j Î V**, **$v_i \neq v_j$**



Los vértices se representan como puntos y las aristas como líneas entre vértices. Ejemplo:

- **G = (V,E)**
- **V = {a,b,c,d }**
- **E = {{a,b}, {b,c}, {a,c}, {a,d}, {d,b} }**

V y E que forman un conjunto de pares ordenados o desordenados de vértices o nodos. Los pares de vértices van entre paréntesis y los pares desordenados, se pondrán entre llaves.

			
G1→3 vértices, 4 lados: V = {1,2,3} E={(1,2), (1,3),(2,1),(3,2)}	G2→7 vértices, 6 lados: V={1,2,3,4,5,6,7} E={{1,2},{1,3},{2,4},{2,5},{3,6},{3,7}}	G3→5 vértices, 10 lados:	G4→4 vértices y 4 lados: V={a,b,c,d} E={{a,b},{b,c},{c,d},{d,a}}

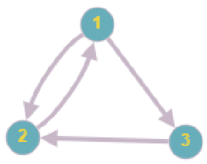
Representación Computacional de los grafos

Representación mediante matrices: La forma más fácil de guardar datos en nodos es mediante la utilización de un array que indique los nodos, de manera que las aristas entre los nodos se puedan ver cómo relaciones entre los índices.

Esta manera de representación permite manipular un grafo utilizando las operaciones que ofrecen las matrices y en consecuencia determinar, por ejemplo, el grado de un grafo, el camino más corto para ir a un vértice, el número de caminos de longitud n, los ciclos, etc.

En vista del orden de los vértices que se requiere para hacer la representación matricial, se utilizarán dígrafos y la matriz cuadrada conocida como *"matriz de adyacencia".*

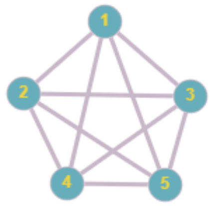
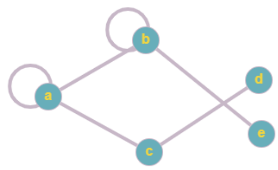
Ejemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>G1→3 vértices, 4 lados:
V = {1,2,3}
E={(1,2), (1,3),(2,1),(3,2)}</td>
<td>Matriz de adyacencia:
$$\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$</td>
<td>El grado entrante del vértice 3 es 1, el vértice 1 tiene grado 2</td>
</tr>
</table>

- ✓ La matriz de adyacencia siempre es simétrica (aij = aji).
- ✓ Cuando se trata de grafos con peso o ponderados en lugar de 1 el valor que tomará será el peso de la arista.
- ✓ Si el grafo es no dirigido hay que asegurarse que se marca con un 1 (o con el peso) tanto la entrada a[i] [j] como la entrada a[j] [i], puesto que se puede recorrer en ambos sentidos.

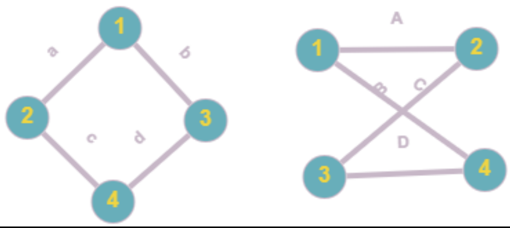
Grado en grafos

- ✓ Se llama grado de un vértice v al número de aristas que tienen.
- ✓ Se designa por d(v) y corresponde al número de aristas incidentes sobre el vértice v.
- ✓ Un vértice aislado tiene grado cero.
- ✓ En los grafos dirigidos, el grado total de un vértice, es la suma del grado entrante más el grado saliente.
- ✓ En los grafos no dirigidos, el grado total de un vértice, es igual al número de aristas que tiene el vértice. Por lo tanto, la suma de los grados de los vértices es igual al doble de las aristas del grafo.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>el vértice 3 del grafo, tiene grado entrante 4, y el vértice 3,tiene grado saliente igual a 4</td>
<td>el vértice a, tiene grado total igual a 3; vértice b, grado 3; vértice c, grado 2; vértice d, grado 1; vértice e, grado 1</td>
</tr>
</table>

Grados isomorfos

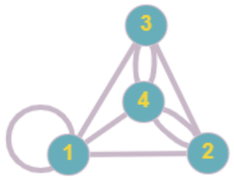
Dos grafos G1 y G2, son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de los grafos, tal que todo par de vértices que son adyacentes en un grafo si y sólo si el correspondiente par de vértices son adyacentes en el otro grafo. Es decir, sean G1 = (V1, E1) y G2 = (V2, E2) grafos simples. Se dice G1 y G2 son isomorfos (la misma forma), si hay una función biyectiva f de V1 a V2 con la propiedad de que a y b son adyacentes en G1 si y solo si f(a) y f (b) son adyacentes en G2, para todo a y b en V1.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>de acuerdo con la definición de isomorfismo, se podría decir que un par cualquiera de nodos, que están unidos por una arista, deben tener los nodos correspondientes en el otro grafo también, unidos por un eje. Asimismo debe existir una correspondencia uno a uno entre los ejes. Por lo tanto, los grafos mostrados en la figura, son isomorfos.</td>
</tr>
</table>

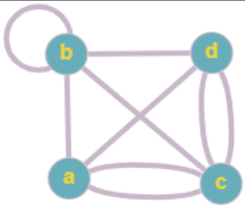
Invariantes de grafos isomorfos. Los invariantes de dos grafos simples isomorfos son tener iguales:

1. El número de vértices;
2. El número de aristas;
3. La correspondencia entre los grados de los vértices.

De tal manera ambos grafos, para alguna ordenación de vértices y lados, sus matrices de adyacencia son iguales. A partir de sus invariantes (*propiedad que los grafos simples deben cumplir),* podremos mostrar cuando 2 grafos no son isomorfos o lo que es lo mismo, cuando 2 grafos no son iguales. Ejemplo: Determinar si los grafos de la figura son isomorfos, utilizando sus matrices de adyacencia.



G1



G2

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

	b	a	d	c
b	1	1	1	1
a	1	0	1	1
d	1	1	0	1
c	1	1	1	0

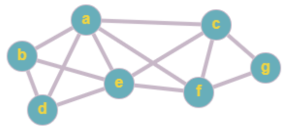
Grafo	Nro vértices	Nro aristas	Grado			
			1	2	3	4
G1	4	9	4	4	4	5

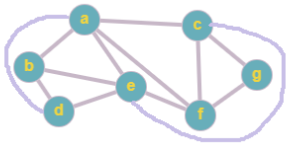
Grafo	Nro vértices	Nro aristas	Grado			
			1	2	3	4
G2	4	9	4	4	4	5

G1 y G2 son isomorfos

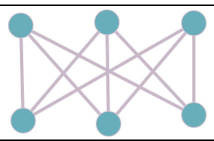
Grafos Planos

Se dice que G es un grafo plano, si puede representarse gráficamente sin la intersección de sus aristas. Es decir, un grafo es plano si puede dividirse en regiones no acotadas.





el grafo de la figura, representa un grafo plano porque puede graficarse sin que se crucen las aristas, como la figura que le sigue. Ambos se consideran iguales.



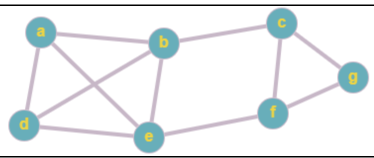
los grafos de las figuras no representan grafos planos.

Grafos Homeomorfos

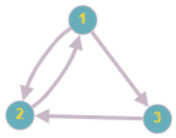
- ✓ Dos grafos G1 y G2 son homeomorfos si pueden reducirse a gráficas isomorfas realizando varias reducciones en serie.
- ✓ La reducción en serie se da cuando en una gráfica G las aristas (v, v1) y (v, v2) están en serie, y al hacer reducción en serie desaparece v y solo queda v1, v2.
- ✓ Los grafos homeomorfos permiten afirmar cuándo una gráfica no es plana.
- ✓ Por consiguiente, si ambos grafos G1 y G2 pueden obtenerse a partir de un mismo grafo, por una sucesión de subdivisiones elementales de aristas, o reducción en serie, se dice que los grafos son homeomorfos.

Trayectoria o camino

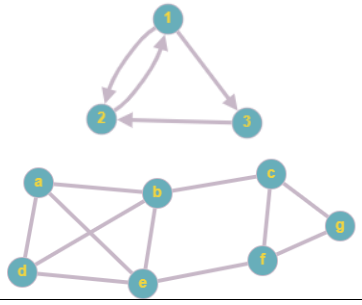
Corresponde a los vértices por los cuales hay que pasar para ir desde un vértice w hacia un vértice v. Es decir, un camino entre dos vértices, es una lista de vértices que están conectados por una arista del grafo. Para que un camino o trayectoria exista, es condición necesaria que las aristas sobre la trayectoria existan sobre el conjunto de aristas que definen el grafo.



El camino abdefgc es un camino que comienza en el vértice a y pasa por los vértices b, d, e, f, g y c. En la figura la trayectoria b-e-d-a-e-c-f-g no es simple, porque se pasa dos veces por el nodo e.



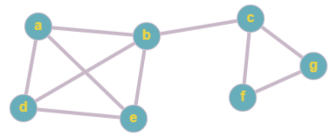
Longitud de una trayectoria:
Corresponde al número de lados de la trayectoria para ir de un vértice a otro. Según el grafo de la figura, para ir desde 3 hasta 1 el camino tiene longitud 2 (pasa por 2 aristas), pero de 1 hasta 3 tiene longitud 1 (sólo tiene 1 arista).



Ciclos.
Un ciclo (también llamado circuito) es un camino simple de longitud mínimo 1 que empieza y termina en el mismo vértice; es decir, es una trayectoria simple en la cual el primero y el último vértices son el mismo.

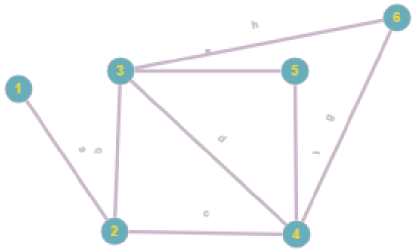
En el primer grafo, la trayectoria 1, 3, 2, 1 es un ciclo.
En el grafo segundo grafo, la trayectoria a-d-b-e-f-g-c-a es un ciclo de longitud 7.

Distancia entre dos vértices:
Sea G un grafo conexo. La distancia entre un par de vértices v y w es la longitud mínima de un camino entre esos vértices y se denota d(v, w).



Punto de Articulación:
Un punto de articulación de un grafo no dirigido G es un nodo v tal que cuando es eliminado de G (junto con las aristas incidentes en el) se divide un componente conexo del grafo en dos o más componentes conexos. El cálculo de los puntos de articulación se basa en un recorrido de profundidad.

En la figura, los vértices a y c son puntos de articulación, pues si falla uno de estos, se pierde la comunicación entre otros nodos. Si este grafo representará una red de computadoras, y si a o c no funcionaran esto causaría que ciertos computadores quedasen incomunicados.



	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0	0	1
4	0	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1

Matriz de Incidencia:
Dado un grafo simple G = (V, E) con n=|V| vértices {v1,. .. , vn} y m=|E| aristas {e1, ..., em}, su matriz de incidencia es la matriz B de orden nxm, B(G)=(bij), donde bij=1 si vi es incidente con ej y bij=0 en caso contrario.

Si la matriz de incidencia sólo contiene ceros y unos (matriz binaria). Como cada arista incide exactamente en dos vértices, cada columna tiene exactamente dos unos. La cantidad de unos que aparece en cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Una fila compuesta sólo por ceros corresponde a un vértice aislado.

Ciclos y Caminos Especiales

Camino de Euler.	Ciclo o circuito de Euler.	Camino de Hamilton.	Ciclo de Hamilton.
Se dice que un grafo G conexo tiene camino de Euleriano si su trayectoria incluye todas las aristas una y solo una vez.	Un grafo G conexo tiene al menos un ciclo Euler si se recorren todas las aristas del grafo G exactamente una vez, excepto la arista inicial y la final (que son las mismas). Es decir, un grafo G tiene un circuito de Euler, si puede pasar por todas las aristas sin repetir arista.	Es aquella trayectoria que contiene cada vértice que lo compone una y solo una vez.	Un ciclo de una gráfica G es Hamiltoniano, si cada vértice del grafo G conexo aparece exactamente una vez, excepto por el vértice inicial y final (que aparece dos veces).