Распределения случайных величин

Преподаватель: Маргарян Ашот Араратович

Открытый урок, 04 июль 2025

1. Определения

Дискретное распределение: случайная величина называется дискретной, если множество её возможных значений конечно или счётно. Распределение задаётся вероятностной функцией:

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \sum_i p_i = 1$$

Непрерывное распределение: случайная величина, принимающая значения из непрерывного диапазона. Вероятность того, что $X \le x$, задаётся **функцией распределения**:

$$F(x) = P(X \le x).$$

Она обладает следующими свойствами:

- $F(x)$ монотонно неубывающая;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1;$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a);$
- Производная $F'(x) = f(x)$ (если существует), обладает свойством:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

  $f(x)$ называется **плотностью распределения** и является неотрицательной функцией.

Непрерывное распределение можно также определить через **плотность распределения** $f(x)$, а функцию распределения вывести из нее следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2. Основные числовые характеристики

- **Математическое ожидание:**

  $$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum x_i p_i, & \text{дискретное} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, & \text{непрерывное} \end{cases}$$

- **Медиана:** значение m, при котором $P(X \le m) \ge \frac{1}{2}$ и $P(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$.

- **Мода:** значение x, при котором достигается максимум вероятности (дискретное) или плотности (непрерывное).

- **Дисперсия:**

$$\mathbb{D}[X] = \begin{cases} \sum (x_i - \mathbb{E}[X])^2 p_i, & \text{дискретное} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx, & \text{непрерывное} \end{cases}$$

- **Среднеквадратичное отклонение:** $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}[X]}$

- **Коэффициент асимметрии:**

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

- **Коэффициент эксцесса:**

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3$$

3. Функция распределения

Функция распределения определяется как:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{x_i \leq x} p_i, & \text{дискретное} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, & \text{непрерывное} \end{cases}$$

4. Распределения и графики

4.1 Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{D}[X] = \sigma^2$, мода = медиана = μ, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$.

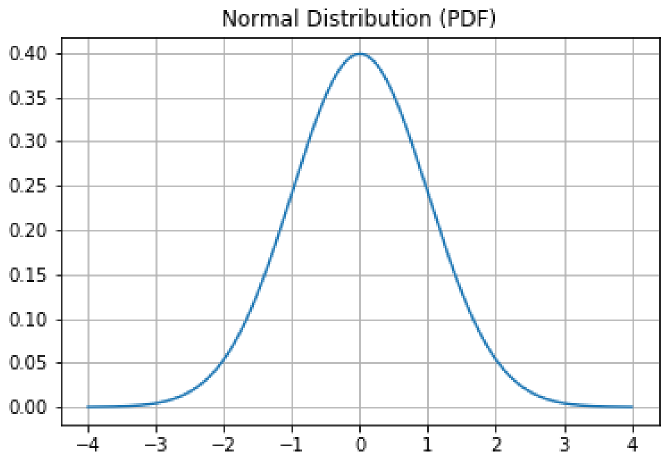

Рис. 1: Плотность нормального распределения

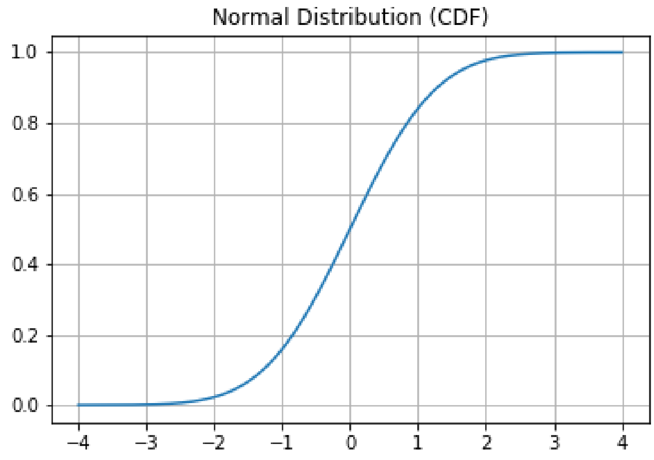

Рис. 2: Функция распределения нормального распределения

4.2 Равномерное распределение $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{D}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1.2$

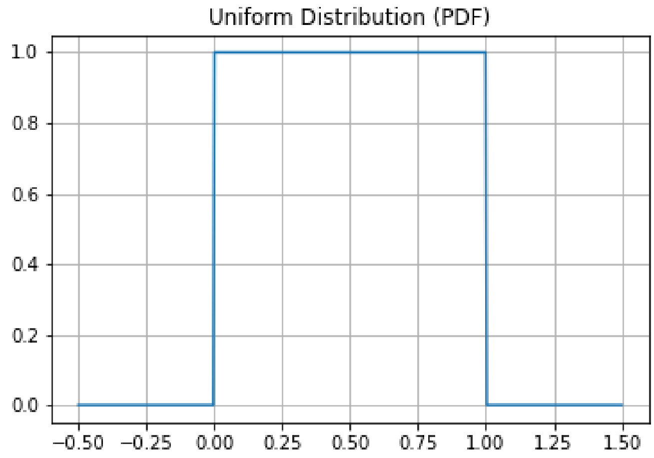

Рис. 3: Плотность равномерного распределения

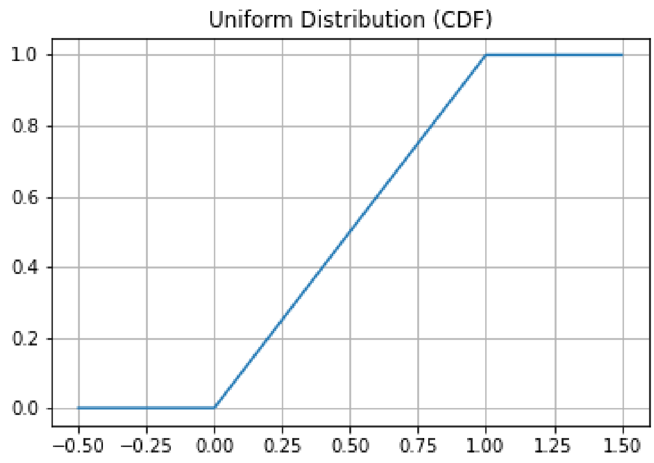

Рис. 4: Функция распределения равномерного распределения

4.3 Распределение Бернулли p

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X]=p$, $\mathbb{D}[X]=p(1-p)$, $\gamma_1=\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$

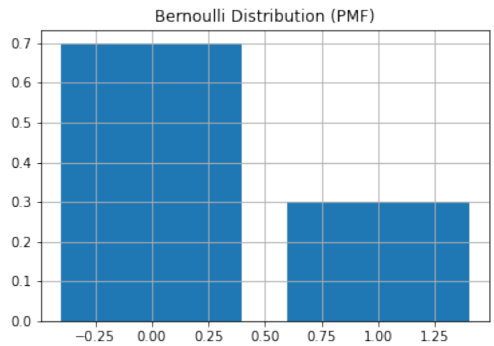

Рис. 5: Функция вероятности распределения Бернулли

4.4 Биномиальное распределение $B(n,p)$

$$P(X=k)=C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X]=np$, $\mathbb{D}[X]=np(1-p)$, $\gamma_1=\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$

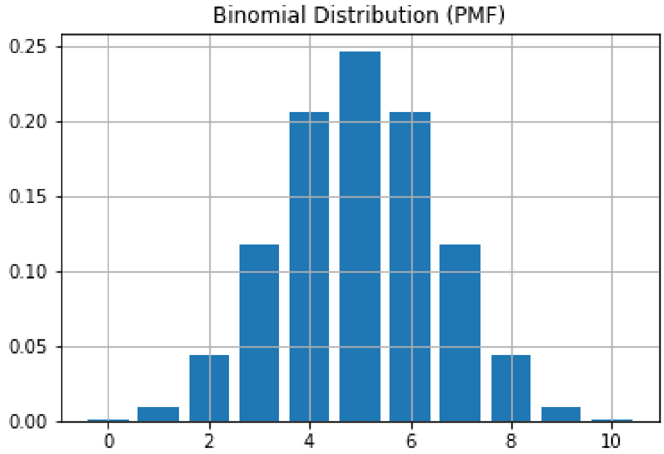

Рис. 6: Функция вероятности биномиального распределения

4.5 Распределение Пуассона λ

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $\mathbb{D}[X] = \lambda$, $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$

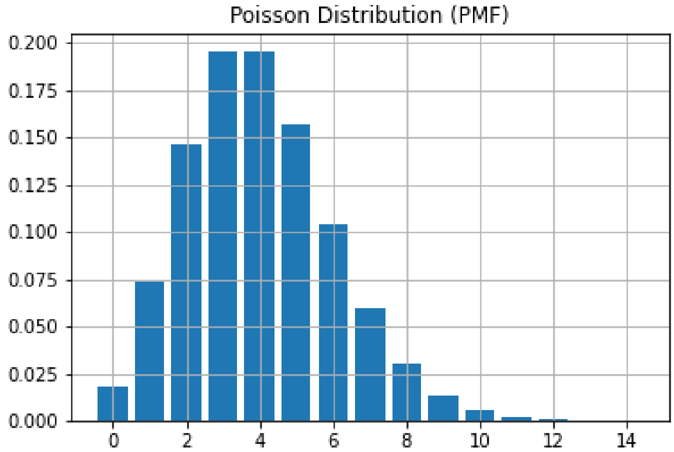

Рис. 7: Функция вероятности распределения Пуассона

4.6 Экспоненциальное распределение λ

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Характеристики: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{D}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 6$

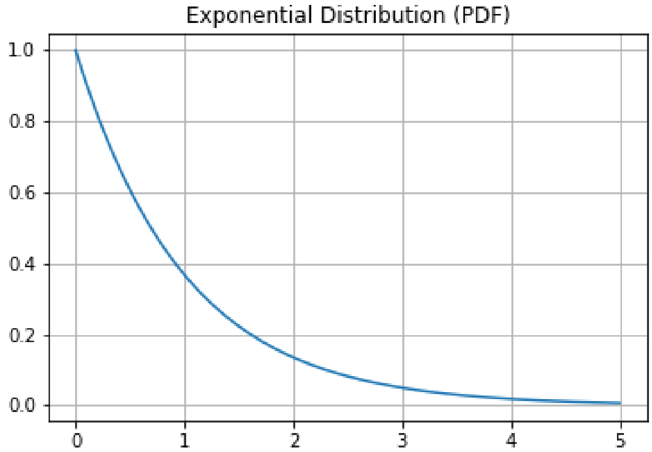

Рис. 8: Плотность экспоненциального распределения

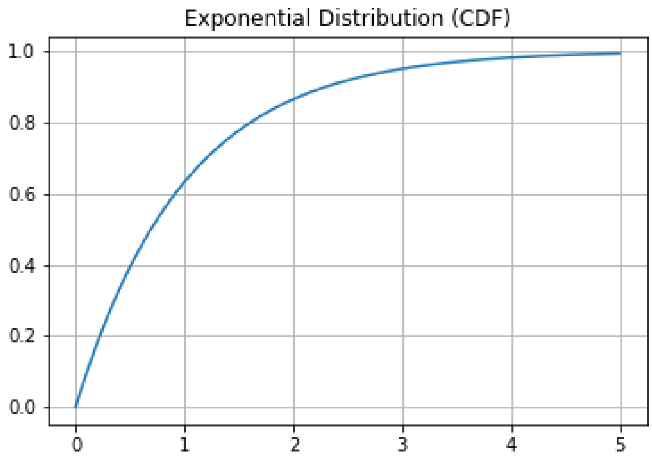

Рис. 9: Функция распределения экспоненциального распределения