Treinamento para Maratona de Programação, Tema: Teoria dos Grafos I

Tanilson Dias dos Santos, Me

Universidade Federal do Tocantins - UFT

16 de Abril de 2016

Roteiro

O que vocês entendem por grafo?

O que vocês entendem por grafo?

1. Grosseiramente, **grafo** é um desenho, onde ligamos pontos e linhas;
2. E a **Teoria dos Grafos**, o que seria?
   - É o ramo da ciência que estuda a relação entre os elementos de um conjunto.
3. O que estuda a **Teoria Espectral dos Grafos**?
   - Estuda o espectro dos grafos.
4. O nome da disciplina é "Teoria e Algoritmos dos grafos", mas o que é **algoritmo**?
   - Algoritmo é uma sequência finita de passos/instruções que podem ser executados maquinalmente com tempo e esforço finito.

Prólogo

1. O desenvolvimento de uma teoria matemática das relações entre elementos de um conjunto é uma conquista recente, se comparada a outros ramos, em particular temos relevantes contribuições de **Newton** e **Leibnitz**, com o cálculo infinitesimal;
2. Na geometria analítica, seu desenvolvedor **Descartes**, permitiu que seu ferramental viesse dar solução de problemas considerados difíceis ou insolúveis;
3. Um dos problemas solucionáveis com auxílio da geometria analítica foi o do "teorema da parábola" que teria exigido 7 anos de trabalho de **Arquimedes**;

Prólogo (cont.)

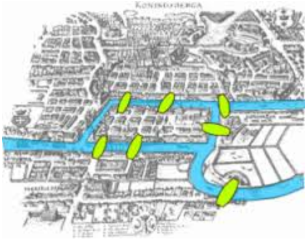
4. Essa "matemática do contínuo" permitiu que **Einstein** formulasse suas teorias restrita e geral da relatividade utilizando análise tensorial, hoje mais conhecida como geometria diferencial;
5. Mesma motivação faltou ao estudo dos **conjuntos discretos** que começou a ter aplicação apenas com **Pascal** no cálculo de probabilidades;
6. As propriedades do conjunto dos números naturais suscitaram curiosidades em muitos matemáticos, muitas vezes sem motivação aplicada, desde o tempo de **Eratóstenes** com contribuições de **Fermat** (cujo "grande teorema" esperou 4 séculos por uma prova formal);

Prólogo (cont.)

7. Nada disso, porém, nos aproxima da topologia, já chamada por **Leibnitz** de "**geometria da posição**", cujo objetivo era o estudo das propriedades geométricas não afetadas por mudanças de forma;
8. O estudo de nós e das superfícies oferece questões difíceis com elevado nível de abstração;
9. A topologia das redes tem origem prática histórica, no século XVIII, com **Euler** ao resolver uma charada matemática da cidade onde vivia;
10. Porém, o desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XX.

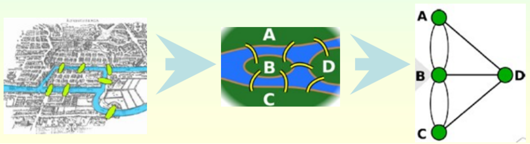
O problema das pontes de Königsberg

- É possível cruzar cada ponte uma única vez e voltar ao ponto inicial de partida?



O problema das pontes de Königsberg

1. Problema resolvido em 1736, por Leonhard Euler;
2. É necessário um modelo para representar o problema;
3. Podemos abstrair os detalhes irrelevantes:
   - Área de cada ilha;
   - Formato de cada ilha;
   - Tipo da ponte, etc.



O problema das pontes de Königsberg

1. Euler demonstrou que o problema das pontes de Königsberg **não tem solução**;
2. Ele usou um modelo simplificado das ligações entre as regiões;
3. Euler usou um raciocínio simples:
   - Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos criando possivelmente o primeiro grafo da história;
   - Percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponto se h**ouvesse no máximo dois pontos de onde saia um número ímpar de caminhos**;
   - A razão de tal coisa é: de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair";

O problema das pontes de Königsberg (cont.)

- Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente.

O problema das pontes de Königsberg

1. Euler estabeleceu um teorema que diz em que condições é possível percorrer cada linha exatamente uma vez e voltar ao ponto inicial (Primeiro teorema da Teoria de Grafos);
2. Como os graus de todos os vértices são ímpares, é fácil verificar que este grafo não apresenta nem um caminho (trilha), nem um circuito (ciclo) euleriano, visto que ele não satisfaz o **Teorema de Euler**, nem mesmo é um **Grafo Atravesável**. Logo, a travessia proposta não é possível.

O problema das pontes de Königsberg (cont.)

Teorema (Teorema de Euler)

Um multigrafo M é euleriano se e somente se M é conexo e cada vértice de M tem grau par.

Teorema (Teorema de Grafo Atravesável)

Um Multigrafo M é atravessável se e somente se M é conexo e tem exatamente dois vértices de grau ímpar. Consequentemente qualquer caminho euleriano de M começa em um dos vértices de grau ímpar e termina em outro vértice de grau ímpar.

A Teoria dos Grafos no Brasil e no Mundo

1. Eventos:
   - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO;
   - Encontro Regional de Pesquisa Operacional da Região Norte - ERPO (2014 foi na UFT!);
   - Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium - LAGOS;
   - Discrete Mathematics Days - DMD;
   - Applied Mathematics and Computation (Revista da Elsevier - Qualis A1);
   - Electronic Notes in Discrete Mathematics;
   - Entre outros.

Warmup: Um pouco de treinamento e prática

1. Encaixa ou Não II.

Conceitos Básicos

[de Abreu et al. 2007]

- Grafo $G = (V, E)$;
- V, conjunto finito e não vazio (elementos são **vértices**);
- Conjunto E de subconjuntos a dois elementos de V (denominados **arestas**);
- $|V| = n$ e $|E| = m$;
- Grafo $k - regular$;
- **Matriz de adjacência** é a matriz $n \times n$, $A(G) = (a_{ij})$
  - $$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j) \in E, i \text{ adjacente } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- **Matriz diagonal** é a matriz $n \times n$ $D(G) = (d_{ij})$
  - $$d_{ij} = \begin{cases} grau(i), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

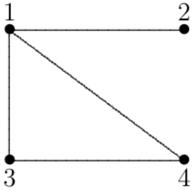


Figura: $G = (V, E)$

- $V = \{1; 2; 3; 4\}, \quad E = \{(1,2); (1,3); (1,4); (3,4)\}$
- $n = 4, \quad m = 4$
- $grau(1) = 3; \quad grau(2) = 1; \quad grau(3) = 2; \quad grau(4) = 2;$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Conceitos Básicos

Notações Iniciais

- A matriz Laplaciana $L(G) = D(G) - A(G)$;
- $L(G)$ é semi-definida positiva;
- $P_L(\lambda) = det(\lambda I - L(G))$;
- $P_L(\lambda)$ possui n autovalores (podem ser repetidos);
- 0 é autovalor de $L(G)$ (0 é raiz de $P_L(\lambda)$);
- Considerando, $n \geq 2$, $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 = \mathbf{a(G)} \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n$ os autovalores de $L(G)$, raízes de $P_L(\lambda)$ a **conectividade algébrica** é o seu segundo menor autovalor e é denotada por $a(G)$, [Fiedler 1973].

Exemplo

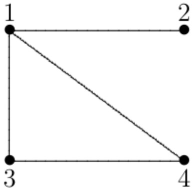


Figura: $G = (V, E)$

$$L = D(G) - A(G)$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

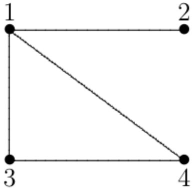


Figura: $G = (V, E)$

- O polinômio característico do grafo G é $P_L(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 19\lambda^2 - 12\lambda$;
- Enumerado em ordem crescente, os autovalores de $L(G)$ são: $\lambda_1 = 0 \leq \mathbf{a(G)} = \boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{1} \leq \lambda_3 = 3 \leq \lambda_4 = 4$

Propriedades do Polinômio - Autovalores

Lema

Seja $P_L(\lambda) = det(\lambda I - L)$ o polinômio característico de L. Então:

1. *Se G é desconexo, $P_L(\lambda)$ é o produto dos polinômios característicos das suas componentes conexas;*
2. *Se G é k-regular, $P_G(\mu)$ é o polinômio característico de $A(G)$ então $P_L(\lambda) = (-1)^n P_G(k - \lambda)$;*
3. *Seja $n \geq 2$. Então $a(K_n) = n$. Além disso de todos os grafos ponderados com n vértices, K_n é o único grafo com maior conectividade algébrica.*
   Se uma aresta e é removida de K_n, então a conectividade algébrica resultante é $n - 2$. Logo, se G é um grafo não-completo com n vértices, então $a(G) \leq n - 2$.

Conectividade algébrica de alguns grafos conhecidos

Tabela: $a(G)$ para alguns grafos

Grafo **G**	Conectividade Algébrica $a(G)$
Grafo completo	$a(K_n) = n$
Caminho	$a(P_n) = 2(1 - cos(\frac{\pi}{n}))$
Ciclo	$a(C_n) = 2(1 - cos(\frac{2\pi}{n}))$
Grafo bipartido completo	$a(K_{p,q}) = min(p, q)$
Estrela $K_{1,q}, q > 1$	$a(K_{1,q}) = 1$
Cubo m-dimensional	$a(Cb_m) = 2$
Grafo de Petersen	$a(P) = 2$

Relembrando: Caminho, Cadeia e Ciclo

- **Cadeias**, **caminhos** e **ciclos**: Uma sequência finita $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de um grafo $G(V, E)$ é dita uma cadeia(walk) de v_1 a v_k quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k-1$. Dizemos que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ é uma **cadeia fechada** (respectivamente, **cadeia aberta**) quando $v_1 = v_k$ (respectivamente, $v_1 \neq v_k$). Um **caminho** (path) é uma **cadeia** em que todos os vértices são distintos. Um caminho fechado é denominado **ciclo**. O **comprimento de um caminho** ou ciclo é o número de arestas que neles ocorrem. O caminho e o ciclo com n vértices são denotados, respectivamente, por P_n e C_n. Em particular, o ciclo C_3 é chamado triângulo

Relembrando: Caminho, Cadeia e Ciclo (cont.)

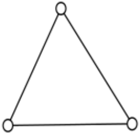


Figura: Ciclo C_3: o Triângulo

Grafos com Pesos nas arestas

1. Um grafo é ponderado quando suas arestas possuem um peso;
2. O que significa isso?
3. Vamos supor que eu queira ir de um lugar pra outro, mas o mais importante pra mim não seja a distância entre eles mas o pedágio que vou ter que pagar para pegar cada aresta (estrada);
4. Nesse caso, o peso de cada aresta seria o custo que eu tenho pra passar pela estrada;
5. Formalmente dizemos que um grafo **ponderado/valorado** é uma estrutura composta por um conjunto de vértices V, um conjunto de arestas E e uma função de peso $f : A \rightarrow \Re$;
6. Encontrar um caminho mínimo, basicamente consiste na minimização do custo de travessia de um grafo entre dois nós.

O que é uma Árvore?

Definição (**Árvore**)

Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. um grafo desconexo e sem ciclos é chamado **floresta**.

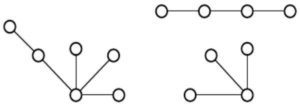


Figura: Uma floresta com 3 Árvores

E árvore geradora, o que seria?

Definição (Árvore Geradora)

Uma **árvore geradora** de um grafo G é um subgrafo que tem os mesmos vértices de G e é uma árvore.

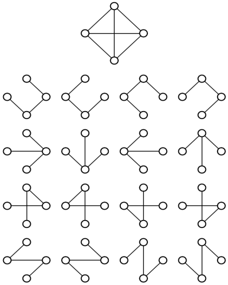


Figura: Grafo K_4 e suas 16 árvores geradoras.

Considerações sobre grafos e árvores geradoras

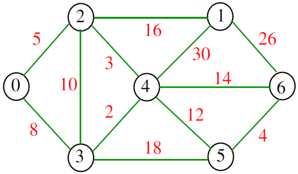
1. Um grafo desconexo não possui árvores geradoras;
2. Todo grafo conexo possui pelo menos uma árvore geradora;
3. Existe um teorema (**Teorema da Matriz-Árvore**) que afirma que o número de árvores geradoras de um grafo é dado por qualquer cofator de sua matriz laplaciana;
4. É fácil calcular uma árvore geradora de um grafo conexo: a **busca em profundidade** e a **busca em largura** fazem isso.

Exercício I

1. Exiba uma árvore geradora do grafo cujas arestas são E = {(0-2); (0-5); (1-2); (3-4); (4-5); (3-5); (1-3)}.
2. Exiba uma árvore geradora em cada componente do grafo definido pelo conjunto de arestas E = {(3-7); (1-4); (7-8); (0-5); (5-2); (3-8); (2-9); (0-6); (4-9); (2-6); (6-4)}.

Considerações sobre o Algoritmo de Prim

1. O algoritmo foi publicado por R. Prim em 1961;
2. Resolve o problema de **encontrar a árvore geradora de custo mínimo** em um grafo ponderado;
3. O problema tem solução se e somente se o grafo é conexo;



Exercícios II - Questão da Seletiva para Maratona de Programação IME 2007

1. Sistema Cipoviário - CIPO.

Referências

Albert-László, B. and Réka, A. (1999).
Emergence of scaling in random networks.
Science, 286(2):509–512.

Atay, F. M., B. T. and Jost, J. (2006).
Synchronization of networks with prescribed degree distributions.
IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications, 53:92–98.

BOHLAND, J. W.; MINAI, A. A. (2000).
Small-world model of associative memory.
IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN'00), 5:5597.

de Abreu, N. M. M. et al. (2007).
Notas em Matemática Aplicada.
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Donetti, L., Neri, F., and Munoz, M. A. (2006).
Optimal network topologies: Expanders, cages, ramanujan graphs, entangled networks and all that.
J. of Stat. Mech, 2:17.

Erdös-Rényi (1959).
On random graphs.
Math Journal, 6:290–297.

Referências (cont.)

Fiedler, M. (1973).
Algebraic connectivity of graphs.
Czechoslovak Mathematical Journal, 23(2):298–305.

Molitierno, J. J. (2012).
Applications of Combinatorial Matrix Theory to Laplacian Matrices of Graphs.
Chapman and Hall/CRC.

Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998).
Collective dynamics of 'small-world' networks.
Nature, 393(6684):440–442.

Wu, C. W. (2007).
Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems.
World Scientific Publishing Company.

Zhan, C., Chen, G., and Yeung, L. F. (2010).
On the distributions of laplacian eigenvalues versus node degrees in complex networks.
Physica A, page 1779–1788.

Treinamento para Maratona de Programação, Tema: Teoria dos Grafos I

Tanilson Dias dos Santos, Me

Universidade Federal do Tocantins - UFT

16 de Abril de 2016