ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК: 512.643

Отчет об исследовательском проекте

на тему: Общие соседи вершин в k-тотальном графе кольца матриц

Выполнил:
Студент группы БПМИ233

Подпись

М. А. Разуваев
И.О.Фамилия

01.04.2025
Дата

Принял:
Руководитель проекта

Максаев Артем Максимович
Имя, Отчество, Фамилия

Доцент Факультета компьютерных наук / Департамента больших данных и информационного поиска, к. ф.-м. н.
Должность, ученое звание

ФКН НИУ ВШЭ
Место работы (Компания или подразделение НИУ ВШЭ)

Дата проверки______2025

Оценка (по 10-ти бальной шкале)

Подпись

Москва 2025

Содержание

Аннотация

Задачи Linear Preserver Problems (LPP) состоят в определении всех линейных операторов, сохраняющих заданные функции или свойства на пространстве матриц. LPP имеет много приложений в различных областях математики и естественных наук. Первым результатом в этой теории считается результат Фробениуса, который получил описание линейных отображений матриц над полем комплексных чисел, сохраняющих определитель. Одним из важных обобщений стал результат Хуа о сохранении смежных матриц (ранг разности которых равен 1). Это тесно связано с изучением соответствующего графа, вершины которого — матрицы, а рёбрами соединяются те из них, ранг разности которых равен k. Такой граф будем называть k-тотальным графом кольца матриц. Цель проекта состоит в его изучении: в частности, в изучении общих соседей его вершин.

Ключевые слова— LPP, k-тотальный граф, общие соседи, автоморфизм

1 Условные обозначения

л.н.з. — линейно независимые векторы
л.з. — линейно зависимые векторы
$M_{m\times n} = M_{m\times n}(\mathbb{F})$ — кольцо матриц $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$
$M_n = M_n(\mathbb{F}) = M_{n\times n}(\mathbb{F})$
$GL_n = GL_n(\mathbb{F})$ — множество обратимых $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$
I — единичная матрица, размер которой вычисляется по контексту
$E_{x,y}$ — матрица, размер которой вычисляется по контексту, и у которой элемент на координате (x, y) равен 1, а остальные элементы равны 0
$rk(X)$ — ранг матрицы X
$d(A, B) = rk(A - B)$
A и B смежные $\iff d(A, B) = 1$
$A \triangle B,\ A, B \in M_{m\times n} \iff d(A, B) = \max(m, n)$
$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ — множество всех подмножеств X
Для $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(M_{m\times n}),\ \mathcal{A}^{\perp_k} = \{X \in M_{m\times n} : \forall A' \in \mathcal{A}\ d(A', X) = k\}$
$G^{(k)}_{m\times n}(\mathbb{F}) = (V^{(k)}_{m\times n}, E^{(k)}_{m\times n})$ — граф, вершинами которого являются всевозможные матрицы размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$, и две матрицы A и B соединены ребром, если $rk(A - B) = k$.
Для произвольного графа $G = (V, E)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(V)$
$N(\mathcal{A}) = \{X \in V : \forall A' \in \mathcal{A}\ (A', X) \in E\}$

2 Введение

В 1945 году Л. К. Хуа определил общий вид автоморфизмов над произвольным кольцом матриц, сохраняющих бинарное отношение смежности между матрицами $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ над произвольным полем $\mathbb{F}$, см. [2]. Результат, полученный Хуа, заключается в том, что все такие автоморфизмы можно описать как $\phi(X) = PX^{\sigma}Q + R$, где $P \in GL_m(\mathbb{F}), Q \in GL_n(\mathbb{F})$ — обратимые матрицы соответствующего размера, $R \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ — любая матрица, A^{σ} — матрица, ко всем элементам которой применён автоморфизм σ поля $\mathbb{F}$. В случае, когда $m = n$, появляется дополнительная возможность $\phi(X) = P(X^{\sigma})^T Q + R$. После этого вышло еще несколько статей по интересующей нас теме, на которые я буду ссылаться в этой статье, в частности, статья 2006 года, написанная

Х. Хавлисек и П. Шемрл, см. [4], обсуждающая автоморфизмы, сохраняющие полный ранг разности двух матриц, и статья 2007 года, написанная М. Лим и Дж. Дж. Тан, см. [3], описывающая все автоморфизмы, сохраняющие бинарное отношение $rk(A - B) \le k$ для фиксированного $0 < k < \min(m, n)$. Обе эти статьи получили одинаковый результат, сведя свои теоремы к результатам, полученным Хуа в 1945 году. Также стоит отметить вклад К. Костара, А. Е. Гутермана, А. М. Максаева и В. В. Промыслова, см. [1], исследовавших автоморфизмы над кольцом матриц, сохраняющие бинарное отношение обратимости суммы двух матриц.

В этой статье я изучил результат применения функции общих соседей множества вершин S k-тотального графа $G^{(k)}_{m\times n}(\mathbb{F})$, в частности, результат применения её квадрата к двум вершинам на этом графе. В начале я изучил поведение данной функции в случае конечного поля при помощи программы на языке Python, см. раздел 4.1. После чего я доказал выдвинутую гипотезу при некоторых ограничениях, см. раздел 4.2.

Приведём доказательство потенциально полезных далее тезисов из статей [4] и [3], для не читавшего их человека:

3 Обзор литературы

Лемма 1. *[4, лемма 2.1] Пусть T, S — два линейных оператора $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $|\mathbb{F}| > 2$ и $\dim(\mathrm{Im}(T)) \ge 2, S \ne 0$. Тогда $\exists$ л.н.з. $x, y \in \mathbb{F}^n : Tx$ и Sy л.н.з.*

Доказательство. Возьмём любой $y \in \mathbb{F}^n : Sy \ne 0$. Рассмотрим множество векторов $\{z : Sy$ и Tz л.з.$\}$ $:= U$. Заметим, что это корректно определённое подпространство $\mathbb{F}^n$, так как $Tz_1 = \alpha Sy, Tz_2 = \beta Sy \implies T(z_1 + z_2) = Tz_1 + Tz_2 = (\alpha + \beta)Sy$ и $Tz = \alpha Sy \implies T(-z) = -\alpha Sy$, и, так как $\dim(\mathrm{Im}(T)) \ge 2 \implies \dim(\ker(T)) \le m-2 \implies$ размерность этого подпространства не больше $n-1 \implies$ вне этого подпространства есть 2 л.н.з. вектора, один из которых независим с y.
Ч.т.д. □

Теорема 2. *[4, предложение 2.2] Для любых $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), |\mathbb{F}| > 2, A \ne B$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *A и B смежны;*
2. *$\exists R \in M_{m\times n}, R \ne A, B : \forall X \in M_{m\times n}, X \triangle R \implies X \triangle A$ или $X \triangle B$.*

Доказательство. Несложно заметить, что оба утверждения не меняют верности при замене A и B на $PAQ+R$ и $PBQ + R$ соответственно, где $P \in GL_m(\mathbb{F}), Q \in GL_n(\mathbb{F})$ — обратимые матрицы соответствующего размера, $R \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ — любая матрица. Тогда теперь мы можем считать, что $A = 0$ и $B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Также заметим, что при транспонировании тоже не меняется ни одно из условий. Поэтому БОО будем считать, что $m \ge n$.

- $1 \implies 2$. Теперь $B = E_{1,1}$. Тогда возьмём $R = 2E_{1,1}$. Теперь докажем, что R удовлетворяет всем условиям. Воспользуемся строчным рангом. Пусть максимальное множество л.н.з. строк $X - R$ — это K. Если в K не входит первая строчка, то строчный ранг $X - 0$ тоже равен n, и теорема доказана. Пусть в него входит первая строчка. Но тогда, если $rk(X) < n$ и $rk(X - 2E_{1,1}) < n$, то мы можем выразить первую строку X и первую строку $X - 2E_{1,1}$ из тех строк, которые входят в K, то несложно заметить, что и первую строку $X - E_{1,1}$ можно из них получить. Противоречие. Ч.т.д.
- $2 \implies 1$. Докажем от противного. Рассмотрим два случая:
  1. $rk(B - R) \ge 2$ или $rk(R) \ge 2$. Тогда по лемме 1 мы можем найти $x, y \in \mathbb{F}^n$ такие, что $Bx - Rx$ и Ry л.н.з. Определим X на $\langle x, y\rangle$ так, чтобы $Xx = Bx$ и $Xy = 0$. Теперь $(X - R)x$ и $(X - R)y$ л.н.з. Отрицание второго пункта можно переписать как $(X - R)$ инъективен, а X и $(X - B)$ — нет. Заметим, что X и $(X - B)$ уже не инъективны, а первое условие можно выполнить, доопределив X вне $\langle x, y\rangle$ так, чтобы он был инъективен, ведь на $\langle x, y\rangle$ оператор уже инъективен. Мы получили противоречие второму пункту, ч.т.д.
  2. $rk(B - R) = rk(R) = 1$. По отрицанию первого пункта $rk(B) \ge 2$. Т.к. $B = R + (B - R) \implies \mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{Im}(B - R) = \{0\}$. Теперь выберем любые л.н.з. x, y такие, чтобы $Ry \ne 0$ и $(B - R)x \ne 0$. Тогда Ry и $(B - R)x$ будут л.н.з., и сможем продолжить доказательство как в первом пункте.

Таким образом, теорема доказана! □

Теорема 3. *[3, лемма 2.2] Пусть $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), |\mathbb{F}| > 2 : d(A,B) = s,\ 2 \le s \le k, 0 < k \le \min(m,n)$. Тогда $\{A,B\}^{\perp_{\le k}\perp_{\le k}} = \{A,B\}$.*

Доказательство. Так как автоморфизм $\phi(X) = A - X$ не меняет расстояние между матрицами, мы можем БОО считать, что $A = 0, B = \sum_{i=1}^{s} e_i \cdot f_i$, где $e_i \in (\mathbb{F}^m)^T, f_i \in \mathbb{F}^n$ (это по факту сумма, которая получается в определении факториального ранга).

Пусть $C \in \{A,B\}^{\perp_{\le k}\perp_{\le k}}$ и $C \ne 0$. Так как очевидно, $0 \in \{A,B\}^{\perp_{\le k}} \implies rk(C) = t \le k$. Теперь докажем, что $t = s$.

1. Пусть $s < t$. Очевидно, что есть матрица D ранга $k - t + 1$, такая, что $rk(C - D) = k + 1$. Но тогда $rk(D) \le k$ и $rk(B - D) \le rk(B) + rk(D) \le k \implies D \in \{A,B\}^{\perp_{\le k}}$. Противоречие.

2. Пусть $s > t$. Пусть тогда $C = \sum_{i=1}^{t} x_i \cdot y_i$. Дополним $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ векторами, так, чтобы все множества остались л.н.з. БОО мы сделаем это векторами

$$\{x_1, \dots, x_t, e_1, \dots, e_{s-t}, z_1, \dots, z_{k-s+1}\}$$
$$\text{и}$$
$$\{y_1, \dots, y_t, f_1, \dots, f_{s-t}, v_1, \dots, v_{k-s+1}\}$$

Обозначим $E = \sum_{i=1}^{s-t}(e_i \cdot f_i) + \sum_{i=1}^{k-s+1}(z_i \cdot v_i)$. Тогда $rk(E) \le k$ и $rk(E - B) \le k$ (получается простой проверкой). Тогда $E \in \{A,B\}^{\perp_{\le k}}$, но $d(E,C) = k + 1$. Противоречие.

Мы доказали, что $s = t$!

Теперь покажем, что $\langle x_1, \dots, x_s\rangle = \langle e_1, \dots, e_s\rangle$. Докажем от противного. Пусть БОО $e_s \notin \langle x_1, \dots, x_s\rangle$. Тогда дополним эти системы до $k + 1$ л.н.з. вектора

$$\{x_1, \dots, x_s, e_s, u_1, \dots, u_{k-s}\}$$
$$\text{и}$$
$$\{y_1, \dots, y_s, w, w_1, \dots, w_{k-s}\}$$

Тогда обозначим $J = \sum_{i=1}^{k-s} w_i \cdot u_i + e_s \cdot w$. Тогда $rk(J) \le k$ и $rk(J - B) \le k \implies J \in \{A,B\}^{\perp_{\le k}}$. Но $rk(J - C) = k + 1$, противоречие. Аналогично показывается, что $\langle y_1, \dots, y_s\rangle = \langle f_1, \dots, f_s\rangle$. Пусть $W = \langle e_1, \dots, e_s\rangle, Z = \langle f_1, \dots, f_s\rangle$. Предположим, что $A \ne B$. Т.к. A и B не смежны, по отрицанию второго пункта из теоремы 2 $\exists G \in W \otimes Z$, такое, что $d(G - C) = s$, но $rk(G) < s, rk(G - B) < s$. Обозначим $K = \sum_{i=s+1}^{k+1} e_i \cdot f_i$, где все e и f л.н.з. Тогда $rk((G - C) + K) = k + 1, rk(G + K) \le k, rk(G + K - B) \le k$. Противоречие. Откуда $C = B$. Ч.т.д. □

4 Основная часть

4.1 Выдвижение гипотезы

В начале исследования для выведения закономерностей поведения функции $N \cdot N$ на исследуемом графе я написал простую программу на языке программирования Python, которая смотрела значение этой функции при $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ при небольших значениях n и m. Первым шагом было написание функции, которая вычисляла расстояние между матрицами и, в частности, ранг матрицы над $\mathbb{Z}_p$:

```
import math
import itertools
import copy


def rank_matrix_mod(matrix, mod):
    rows = len(matrix)
    cols = len(matrix[0])
    rank = 0
    for col in range(cols):
```

```
        pivot_row = -1
        for row in range(rank, rows):
            if matrix[row][col]:
                pivot_row = row
                break
        if pivot_row == -1:
            continue
        matrix[rank], matrix[pivot_row] = matrix[pivot_row], matrix[rank]
        inv_pivot = pow(matrix[rank][col], -1, mod)
        for j in range(cols):
            matrix[rank][j] = (matrix[rank][j] * inv_pivot) % mod

        for row in range(rows):
            if row != rank and matrix[row][col] != 0:
                factor = matrix[row][col]
                for j in range(cols):
                    matrix[row][j] = (matrix[row][j] - factor * matrix[rank][j]) % mod
        rank += 1
    return rank

def d(x, y, mod):
    d = copy.deepcopy(x)
    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(x[0])):
            d[i][j] = (d[i][j] - y[i][j]) % mod
    return rank_matrix_mod(d, mod)
```

После чего прямым перебором я вычислил значение $N \cdot N$ при $A = 0, B = I_t$. Далее, в процессе доказательства будет понятно, почему этот перебор покрывает все различные случаи.

```
mod = int(input("mod: "))
for i in range(2, min(int(math.pow(mod, 0.5)) + 10, mod)):
    if mod % i == 0:
        raise ValueError("mod is not common")
n = int(input("n: "))
m = int(input("m: "))
k = int(input("k: "))


for t in range(1, min(m, n) + 1):
    a = [[0] * n for i in range(m)]
    b = [[0] * n for i in range(m)]
    print(t)
    for i in range(t):
        b[i][i] = 1
    N = []
    for e in itertools.product(range(mod), repeat=m*n):
        c = []
        for i in range(m):
            c.append(list(e[i * n: i * n + n]))
        if d(b, c, mod) == k and d(a, c, mod) == k:
            N.append(c)
    print(len(N))
    for e in itertools.product(range(mod), repeat=m*n):
        c = []
        for i in range(m):
            c.append(list(e[i * n: i * n + n]))
        for i in N:
            if d(i, c, mod) != k:
                break
        else:
            print(c)
```

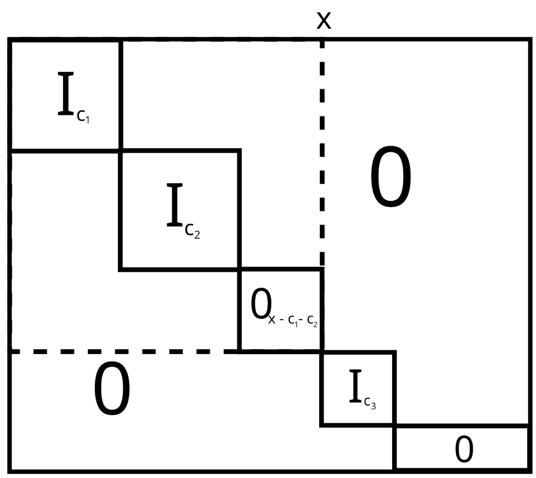
После проведения вычислений значения $N \cdot N$ для $mod = 3, 5$; $k = 1, 2, 3$; $m, n = 2, 3, 4$, результатом которых всегда были 2 изначальные матрицы, мною была выдвинута гипотеза, что ответ всегда такой. В следующем разделе я доказал эту гипотезу при некоторых ограничениях.

4.2 Доказательство полученных результатов

Теорема 4. *Пусть есть две матрицы $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $|\mathbb{F}| > 2$, причём $d(A,B) = x$. Тогда $\forall y, z < \max(m,n)$, таких, что из x, y и z можно составить треугольник (возможно, вырожденный), $\exists C \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) : d(C,A) = z, d(C,B) = y$.*

Доказательство. Заметим, что автоморфизм $\phi(X) = PXQ + R$ над $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, где $P \in GL_m(\mathbb{F}), Q \in GL_n(\mathbb{F})$ — обратимые матрицы соответствующего размера, $R \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ — любая матрица, биективен и не меняет расстояние между матрицами. Поэтому дальше будем считать, что $A = 0$, $B = I_x$.

Будем считать, что матрица C выглядит как



Рассмотрим 4 случая:

1. $y \geq x, y$:

   В этом случае $c_1 = 0, c_2 = z - y + x, c_3 = y - x$.

2. $x \geq y, z$:

   В таком случае $c_1 = x - y, c_2 = y + z - x, c_3 = 0$.

3. $z \geq x, y,\ (x + y + z) \vdots 2$:

   В этой ситуации $c_1 = \frac{x+z-y}{2}, c_2 = 0, c_3 = \frac{y+z-x}{2}$.

4. $z \geq x, y,\ (x + y + z) \not\vdots 2$:

   В данном случае $c_1 = \frac{z+y-x-1}{2}, c_2 = 1, c_3 = \frac{x+z-y-1}{2}$.

Проверка сохранения всех расстояний и корректности размеров матриц (целые неотрицательные числа) очевидна, и остаётся в качестве упражнения любопытному читателю. $\square$

Напомним определение $G^{(k)}_{m\times n}(\mathbb{F}) = (V^{(k)}_{m\times n}, E^{(k)}_{m\times n})$ — это граф, вершинами которого являются всевозможные матрицы размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$, и две матрицы A и B соединены ребром, если $rk(A - B) = k$. Дальнейшие рассуждения будут посвящены этому графу.

Мы будем исследовать функцию $N(\sigma) | \sigma \in \mathcal{P}(V^{(k)}_{m\times n})$ на этом графе, равную $\{X \in V^{(k)}_{m\times n} : \forall Y \in \sigma((X,Y) \in E^{(k)}_{m\times n})\}$ — множество всех вершин, соединённых со всеми из множества.

Теорема 5. *Для $|\mathbb{F}| \geq 4$, $A, B \in G^{(k)}_{m\times n}(\mathbb{F})$, и A и B смежны, $1 < k < \min(m,n)$, $N(N(\{A,B\})) = \{A,B\}$.*

Доказательство. Заметим, что применение автоморфизма $X \to PXQ - R$, где P и Q — обратимые матрицы соответствующего размера, а R — любая матрица $m \times n$, не меняет расстояние между матрицами, поэтому мы можем считать, что $A = 0, B = E_{1,1}$.

Пусть $C \in N(N(\{A,B\})), C \neq 0$, и C выглядит как

$$\left[\begin{array}{c|c} \alpha & C' \\ \hline C_2 & C_1 \end{array}\right].$$

где C_1 имеет размер $(m-1)\times(n-1)$. Докажем, что $C = B$ от противного.

Случай 1: $rk(C) \geq 2$.

Если $C_1 = 0$, то $C' \neq 0$ (иначе ранг C будет равен 1). В таком случае мы можем применить ещё один автоморфизм на графе, который прибавляет первую строку ко второй (он не меняет ранги, поэтому всё хорошо). При этом у нас изменится матрица B, но это, как будет видно дальше, не повлияет на доказательство.

В таком случае мы можем рассмотреть матрицу

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \beta & 0 \\ \hline C_2 & D_1 \end{array}\right].$$

где $\beta \neq 0, 1, \alpha, rk(D_1) = k-1, rk(D_1 - C_1) \geq k$. Тогда несложно заметить, что $D \in N(\{A,B\})$, но $rk(D-C) > k$. Противоречие.

Случай 2: $rk(C) = 1$.

Докажем, что $rk(B-C) \leq 1$. Предположим обратное. Тогда $B = e \cdot f^T$, $C = x \cdot y^T$ (это их скелетное разложение). Тогда по предположению векторы e и x линейно независимы, векторы f и y линейно независимы. Тогда мы можем дополнить сумму $2e \cdot f^T + x \cdot y^T$ $k-2$ слагаемыми до ранга k. Тогда полученная матрица, очевидно, лежит в $N(\{A,B\})$, но $rk(D-C) > k$. Противоречие.

Итак, теперь мы доказали, что $C_1 = 0$ и либо $C_2 = 0$, либо $C' = 0$. Будем считать, что $C' = 0$, второй случай доказывается аналогично. Докажем, что $\alpha = 1$ и $C_2 = 0$ от противного. Дополним C_2 $k-1$ л.н.з. вектором (если $C_2 = 0$, то просто возьмём $k-1$ л.н.з. вектор) и положим их в матрицу D_2 (а остальное место заполним нулями). И рассмотрим матрицу

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right].$$

Тогда мы опять получили $D \in N(\{A,B\})$, но при этом $rk(D-C) = k-1$. Противоречие. Что и требовалось доказать! □

Теорема 6. *Для* $|\mathbb{F}| \geq t+3$, $A, B \in G^{(k)}_{m\times n}(\mathbb{F})$, *и* $d(A,B) \leq k$, $1 < k < \min(m,n)$, $N(N(\{A,B\})) = \{A,B\}$.

Доказательство. Пусть $C \in N(N(\{A,B\})), C \neq 0$ и C выглядит как

$$\left[\begin{array}{c|c} C' & C_1 \\ \hline C_2 & C_3 \end{array}\right],$$

где C' имеет размер $t \times t$.

Лемма 7. *В условиях теоремы 6 покажем, что, если* $A = 0$ *и*

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_t & 0 \\ \hline * & 0 \end{array}\right],$$

то $C_3 = 0$ *от противного.*

Доказательство. Выберем $\alpha \neq 0, 1$ так, чтобы α не было собственным значением C'. Это возможно из-за ограничения на размер $\mathbb{F}$. Также, используя вывод из теоремы 4, выберем D' так, чтобы $rk(D') = d(0, D') = k-t$, $d(C_3, D') > k-t$. Тогда рассмотрим матрицу

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \alpha \cdot I_t & 0 \\ \hline C_2 & D' \end{array}\right].$$

Несложно заметить, что $D \in N(\{A, B\})$, но

$$d(D, C) = rk\left(\left[\begin{array}{c|c} \alpha \cdot I_t - C' & -C_1 \\ \hline 0 & D' - C_3 \end{array}\right]\right) > k.$$

Противоречие.

P.S. Заметим, что одна из размерностей C_1 может быть равна 0. Тогда нужно проделать аналогичное рассуждение с C_2. □

Заметим, что применение автоморфизма $X \to PXQ - R$, где P и Q — обратимые матрицы соответствующего размера, а R — любая матрица $m \times n$, не меняет расстояние между матрицами, поэтому мы можем считать, что $A = 0, B = I_t$.

Мы уже показали, что $C_3 = 0$. Пусть $C_1 \neq 0$. Пусть тогда в C_1 j-я строка не равна нулю. Тогда применим автоморфизм над $M_{m\times n}$, который прибавляет j-ю строку к $t+1$-й. Он, очевидно, не меняет расстояние между матрицами. Тогда мы получаем противоречие с леммой 7. Аналогично $C_2 = 0$.

Пусть теперь C' имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_1 & & K \\ & \ddots & \\ L & & c_t \end{pmatrix}$$

Для начала докажем, что $\forall i\ c_i = 1 \vee c_i = 0$ от противного. Пусть $c_i \neq 1, 0$. тогда рассмотрим матрицу

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} c_i & & 0 \\ & \ddots & \\ L & & c_i \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & I_{k-t} \end{array}\right],$$

Тогда очевидно, что $D \in N(\{A, B\})$, но $rk(D - C) < k$. Получили противоречие.

Теперь покажем, что $K = L = 0$. Опять же от обратного. Пусть $C'_{i,j} \neq 0$. Тогда мы можем применить автоморфизм, который прибавляет j столбец к i с коэффициентом β таким, чтобы $\beta \cdot C'_{i,j} + C'_{i,i} \neq 1, 0$, после чего вычитает из j-й строчки i-ю с коэффициентом β. Очевидно, что он не меняет расстояние между матрицами и переводит A в A и B в B. Но у матрицы, в которую перейдёт C, на диагонали будут не только 1 и 0. Противоречие с предыдущими рассуждениями.

И наконец покажем, что на диагонали C' не может быть нулей. Если они там есть, то, так как $C \neq 0$, в C' если либо блок

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

либо блок

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй случай показывается аналогично, поэтому покажем только первый. Возьмём матрицу $D = 2 \cdot I_k$, но на том месте, где у C' стоит блок с 0 и 1, поставим блок

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $rk(B - D) = rk(0 - D) = k \implies D \in N(\{A, B\})$, но $rk(D - C) = k - 1$. Противоречие. Откуда $C = D$. Что и требовалось доказать! □

5 Заключение

Было проведено исследование функции общих соседей на k-тотальном матричном графе. После симуляции над конечными полями была выдвинута гипотеза, что $N(N(\{A, B\})) = \{A, B\}$. Данная гипотеза была впоследствии доказана при некоторых ограничениях. Несмотря на ограничения, был доказан главный случай — $d(A, B) = 1$, который показал непригодность данного метода для описания общего вида автоморфизмов на данном графе, несмотря на то, что он использовался для нахождения общего вида автоморфизмов на графах со схожей структурой.

В целом результат работы очень интересный и неожиданный, так как было изучено множество крайне похожих случаев, в частности, применение этой функции на матричных графах, в которых вершины были связаны в случае обратимости разности и случай, когда матрицы A и B соединены ребром если $rk(A-B) \leq k$, см. 3 и [1], и во всех них ответ при $d(A, B) = 1$ кардинально отличался от всех остальных случаев, что выделяет полученный мной результат.

Список литературы

[1] A.M. Maksaev C. Costara, A.E. Guterman and V.V. Promyslov. Automorphisms of the total digraph for the ring of square matrices over a field. *Linear Algebra and its Applications*, 666:129–143, 2023.

[2] Loo-Keng Hua. Geometries of matrices. i. generalizations of von staudt's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 57(3):441–481, 1945.

[3] Joshua Juat-Huan Tan Ming-Huat Lim. Preservers of matrix pairs with bounded distance. *Linear Algebra and its Applications*, 422:517–525, 2007.

[4] Hans Havlicek (Wien) and Peter Šemrl (Ljubljana). From geometry to invertibility preservers. *Studia Mathematica*, 174(1):99–109, 2006.