# 2.7 逆矩阵

矩阵代数没定义除法运算，但是它定义了一种乘法的逆（inverse）运算。下面的列表总结了有关逆运算的要点：

1．只有正方形矩阵能做逆运算；所以，当我们说求逆矩阵时是假设我们正在处理的是一个正方形矩阵。

2．一个*n*×*n*矩阵**M**的逆矩阵仍然是一个*n*×*n*矩阵，记作**M**-1。

3．不是所有的正方形矩阵都有逆矩阵。有逆矩阵的正方形矩阵称为可逆（invertible）矩阵，没有逆矩阵的称为单调（singular）矩阵。

4．如果存在逆矩阵，则该逆矩阵是唯一的。

5．将一个矩阵与它的逆矩阵相乘，其结果必定为单位矩阵：**MM**-1=**M**-1**M**=**I**。注意，矩阵与它的逆矩阵的相乘次序可以互换，这是矩阵乘法中的一个特例。

逆矩阵在求解矩阵方程时非常有用。例如，我们给出矩阵方程**p**ʹ=**pM**，已知**p**ʹ和**M**的值，求解**p**。假设**M**是可逆矩阵（即，**M**-1存在），那么我们可以按照如下步骤求解：

|  |  |
| --- | --- |
| **p**ʹ=**pM** |  |
| **p**ʹ**M**-1=**pMM**-1 | 等式两边同时乘以**M**-1。 |
| **p**ʹ**M**-1= **pI** | 由逆矩阵的定义可知**M**-1**M**=**I**。 |
| **p**ʹ**M**-1=**p** | 由单位矩阵的定义可知**pI**=**p**。 |

下面的这个方程可以用来求逆矩阵，本书不会给出证明过程，但是读者可以在任何一本大学线性代数的书籍中找到证明过程，这个方程是用伴随矩阵和行列式的形式给出的：

**（公式2.6）

### 例2.10

找到一个求2×2矩阵的逆矩阵的通用公式，并使用这个公式求出的逆矩阵。

我们已经知道：





所以，



现在用这个公式求的逆矩阵：



我们只需检验**MM**-1=**M**-1**M**=**I**就可以证明结果是否正确：



**注意**：对于小矩阵（4×4矩阵或更小）来说，使用伴随矩阵的方法更有效率。对于更大的矩阵来说，我们可以使用诸如[高斯消元法](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E6%96%AF%E6%B6%88%E5%8E%BB%E6%B3%95)之类的其他方法求逆矩阵。但是，在3D计算机图形中，我们要处理的矩阵具有特定的形式，因此可以事先确定求逆矩阵的方程，这样我们就无需浪费CPU资源去求一般矩阵的逆矩阵了。这样，在代码中我们往往很少用到公式2.6。

在本节结束之前，我们要介绍一个与逆矩阵相乘时非常有用的代数特性：

(**AB**)-1=**B**-1**A**-1

这个特性假设**A**和**B**都是可逆的，它们都是维数相同的正方形矩阵。要证明**B**-1**A**-1是**AB**的逆矩阵，我们只需要证明(**AB**)-1(**B**-1**A**-1)=**I**和(**B**-1**A**-1)(**AB**)=**I**。推导过程如下：

(**AB**)-1(**B**-1**A**-1)=**A**(**BB**-1)**A**-1=**AIA**-1=**AA**-1=**I**

(**B**-1**A**-1)(**AB**)=**B**-1(**A**-1**A**)**B**=**B**-1**IB**=**B**-1**B**=**I**