確率情報理論第 1 回 解答

加藤まる

2020/03/01

キーワード：確率空間, 幾何分布, ファーストサクセス分布,(確率分布),(分布関数)

確率論と情報理論の第 1 回の内容です。

本日の問題解答

1 の目がでる確率が $\frac{1}{2}$ で、他の目については均等な確率であるインチキなサイコロを考える。

(1) このサイコロを 1 個投げるときの確率空間を求めよ。

標本空間 Ω は、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{1}$$

である。次に事象の集合 $\mathscr{F}$ は、

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = \{&\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\},\\ &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\},\\ &\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\},\\ &\{1,2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\},\\ &\{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\},\\ &\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\},\\ &\{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\},\\ &\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\},\\ &\{1,4,5,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{3,4,5,6\},\\ &\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}\}\end{aligned} \tag{2}$$

である。最後に確率測度 P は、

$$P(\{1\}) = \frac{1}{2}, P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{10} \tag{3}$$

(2) このサイコロを 1 個投げたとき、偶数が出る確率を求めよ。

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{10} \tag{4}$$

(3) このサイコロを 2 個投げたとき、２つとも奇数の目が出る確率を求めよ。

まずこのサイコロ 1 個を投げたとき、奇数の目が出る確率は、

$$\begin{aligned}P(\{1, 3, 5\}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\\ &= \frac{7}{10}\end{aligned} \tag{5}$$

である。2つの同時確率を考えるので、

$$\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100} \tag{6}$$

である。

本日の問題解説

確率空間とは $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ の3つの組のこと。それぞれは、

- Ω は考えうる不確実性全体（集合）
- $\mathscr{F}$ は Ω の部分集合族（σ-加法族）
- P は確率測度

のことである。

P の確率測度についてもう少し解説を加える。Ω の部分集合 A を事象と呼ぶ。確率測度とは事象 A にその事象 A が起こる確率 $P(A)$ を対応させる関数（写像）のこと。下のふたつの条件を満たしている。

- 全事象の確率　$P(\Omega)$=1
- 加法性　$A \cap B = \emptyset$（A と B が排反）であるとき、$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ である。

おかわり問題解答

普通のサイコロを何回も投げる。初めて6がでるまでに6以外が出た回数をXとする。また、初めてY回目に6が出たとする。

(1) Xの確率分布 $(P = X)$、Yの確率分布を求めよ。

$$P(X = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k \quad (k = 0, 1, \cdots) \tag{7}$$

$$P(Y = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

(3) $P(X \geq 20), P(X \geq Y < 30)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &= P(X = 20) + P(X = 21) + \cdots \\ &= \sum_{k=20}^{\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{20} \end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
P(20 \leq Y < 30) &= \sum_{k=20}^{29} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{19} - \left(\frac{5}{6}\right)^{29}
\end{aligned} \tag{10}
$$

おかわり問題解説

最初の成功が何回目のトライで起きたかを考える問題は現実でもよくある（死ぬまでに生きた年数、卒業できる年数など)。これを独立ベルヌーイ試行で考えたものが**幾何分布**である。成功確率が p のベルヌーイ試行を独立に何回も行うとき、初めての成功までに失敗した回数を X とすると、$k = 0, 1, 2, \cdots$ として事象 $X = k$ とは k 回の失敗のあとに成功するということなので、$P(X = k) = p(1-p)^k$ となる。この X の確率分布をパラメータ p の幾何分布といい、$X \sim Ge(p)$ で表す。

また、初めて Y 回目に成功するとき、明らかに $Y = X + 1$ であり、$k = 1, 2, \cdots$ として $P(Y = k) = P(X = k-1) = p(1-p)^{k-1}$ である。これをパラメータ p の**ファーストサクセス分布** といい、$Y \sim Fs(p)$ と書く。