確率情報理論第２回 解答

加藤まる

2020/03/02

キーワード：期待値, 分布関数,(同時確率),(条件付き期待値)

確率論と情報理論第２回の内容です。

本日の問題

１～５の数字が書かれたカードがある。それぞれのカードを引く確率が、書かれた数字に比例する場合を考える。($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

(1) 確率関数 $P(X = k)$ を求めよ。

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \tag{1}$$

確率は書かれた数字に比例することから、

$$P(X = k) = \frac{k}{15} \tag{2}$$

(2) $E[X]$ を求めよ。

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15} \\ &= \frac{55}{15} \end{aligned} \tag{3}$$

(3) 確率変数 $X(\omega) = \omega$ の分布関数 $F(X)$ を求めて図示せよ。

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ \frac{1}{15} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{3}{15} & 2 \leq X < 3 \\ \frac{6}{15} & 3 \leq X < 4 \\ \frac{10}{15} & 4 \leq X < 5 \\ \frac{15}{15} & 5 \leq X \end{cases} \tag{4}$$

おかわり問題

裏と表が描かれてるコインがある。表の出る事象を１、裏の出る事象を０とする (確率変数 $Y = \{0, 1\}$)。このとき、上の問題の確率変数 X との同時確率を考えていく。

(1) X と Y の同時確率を求めよ。

表作るの面倒なので我慢してください。

$$
\begin{aligned}
P(X=1,Y=0)=P(X=1,Y=1)&=\frac{1}{30}\\
P(X=2,Y=0)=P(X=2,Y=1)&=\frac{2}{30}\\
P(X=3,Y=0)=P(X=3,Y=1)&=\frac{3}{30}\\
P(X=4,Y=0)=P(X=4,Y=1)&=\frac{4}{30}\\
P(X=5,Y=0)=P(X=5,Y=1)&=\frac{5}{30}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(2) 条件付き期待値 $E[X=k|Y=1]$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
E(X=k|Y=1)&=\sum_{k=1}^{5}k(P(X=k|Y=1))\\
&=\sum_{k=1}^{5}k\times\frac{P(X=k,Y=1)}{P(Y=1)}\\
&=\frac{110}{30}
\end{aligned}
\tag{6}
$$