

確率情報理論第 19 回 解答

加藤まる

2020/03/19

キーワード：

本日の問題解答

集合 $A = \{1, 2\}$ と $B = \{1, 2, 3\}$ に対して、次の表に示す同時確率にしたがい $A \times B$ の要素をとる確率変数 (X, Y) を考える。

- (1) エントロピー $H(X)$ と $H(Y)$ を求めよ。 X と Y の周辺確率をそれぞれ P_X と P_Y とすれば、 $P_X(1) = 1/2$, $P_X(2) = 1/2$, $P_Y(1) = 1/4$, $P_Y(2) = 1/4$, $P_Y(3) = 1/4$ となる。したがって、

$$H(X) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

$$H(Y) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 1.5 \quad (2)$$

- (2) 同時エントロピー $H(X, Y)$ を求めよ。

$$H(X, Y) = -4 \times \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 2.5 \quad (3)$$

- (3) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ と $H(Y|X)$ を求めよ。条件付き確率 $P_{X|Y}$ は

$$P_{X|Y}(1|1) = \frac{1}{2}, \quad P_{X|Y}(2|1) = \frac{1}{2}, \quad P_{X|Y}(1|2) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$P_{X|Y}(2|2) = \frac{1}{2}, \quad P_{X|Y}(1|3) = \frac{1}{2}, \quad P_{X|Y}(2|3) = \frac{1}{2} \quad (5)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \frac{1}{4} H(X|Y=1) + \frac{1}{2} H(X|Y=2) + \frac{1}{4} H(X|Y=3) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

また、条件付き確率 $P_{Y|X}$ は

$$P_{Y|X}(1|1) = \frac{1}{4}, \quad P_{Y|X}(2|1) = \frac{1}{2}, \quad P_{Y|X}(3|1) = \frac{1}{4} \quad (7)$$

$$P_{Y|X}(1|2) = \frac{1}{4}, \quad P_{Y|X}(2|2) = \frac{1}{2}, \quad P_{Y|X}(3|2) = \frac{1}{4} \quad (8)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= \frac{1}{2}H(Y|X=1) + \frac{1}{2}H(Y|X=2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right) \\
 &= 1.5
 \end{aligned} \tag{9}$$

(4) 相互情報量 $I(X;Y)$ を求めよ。 P_{XY} ならびに P_X と P_Y を用いれば、

$$\begin{aligned}
 I(X;Y) &= \frac{1}{8} \log \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} + \frac{1}{8} \log \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \log \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \log \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{8} \log \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} + \frac{1}{8} \log \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$