確率情報理論第3回 解答

加藤まる

2020/03/03

キーワード：期待値, 分布関数,(同時確率),(条件付き期待値)

確率論と情報理論第２回の内容です。

本日の問題

１〜５の数字が書かれたカードがある。それぞれのカードを引く確率が、書かれた数字に比例する場合を考える。$(\Omega = \{1,2,3,4,5\})$

(1) 確率関数 $P(X=k)$ を求めよ。

$$1+2+3+4+5=15 \tag{1}$$

確率は書かれた数字に比例することから、

$$P(X=k)=\frac{k}{15} \tag{2}$$

(2) $E[X]$ を求めよ。

$$\begin{aligned} E[X] &= 1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{5}{15} \\ &= \frac{55}{15} \end{aligned} \tag{3}$$

(3) 確率変数 $X(\omega)=\omega$ の分布関数 $F(X)$ を求めて図示せよ。

$$F(X)=\begin{cases} 0 & X<1 \\ \frac{1}{15} & 1\le X<2 \\ \frac{3}{15} & 2\le X<3 \\ \frac{6}{15} & 3\le X<4 \\ \frac{10}{15} & 4\le X<5 \\ \frac{15}{15} & 5\le X \end{cases} \tag{4}$$

おかわり問題

裏と表が描かれてるコインがある。表の出る事象を１、裏の出る事象を０とする (確率変数 $Y=\{0,1\}$)。このとき、上の問題の確率変数 X との同時確率を考えていく。

(1) X と Y の同時確率を求めよ。

表作るの面倒なので我慢してください。

$$
\begin{aligned}
P(X=1,Y=0) = P(X=1,Y=1) &= \frac{1}{30} \\
P(X=2,Y=0) = P(X=2,Y=1) &= \frac{2}{30} \\
P(X=3,Y=0) = P(X=3,Y=1) &= \frac{3}{30} \\
P(X=4,Y=0) = P(X=4,Y=1) &= \frac{4}{30} \\
P(X=5,Y=0) = P(X=5,Y=1) &= \frac{5}{30}
\end{aligned} \tag{5}
$$

(2) 条件付き期待値 $E[X=k|Y=1]$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
E(X=k|Y=1) &= \sum_{k=1}^{5} k(P(X=k|Y=1)) \\
&= \sum_{k=1}^{5} k \times \frac{P(X=k,Y=1)}{P(Y=1)} \\
&= \frac{110}{30}
\end{aligned} \tag{6}
$$