確率情報理論第 10 回 解答

加藤まる

2020/03/10

キーワード：

本日の問題解答

標本空間 $A = 0, 1$ として、A 上の 2 つの確率分布 P と Q を

$$P(0) = P(1) = 0.5, \quad Q(0) = 0.2, \quad Q(1) = 0.8$$

と定める。このとき、$D(P||Q) \neq D(Q||P)$ を示せ。

$$D(P||Q) = 0.5 \log \frac{0.5}{0.2} + 0.5 \log \frac{0.5}{0.8} \approx 0.3219 \tag{1}$$

$$D(Q||P) = 0.2 \log \frac{0.2}{0.5} + 0.8 \log \frac{0.8}{0.5} \approx 0.2781 \tag{2}$$

よって、$D(P||Q) \neq D(Q||P)$ が示せた。

おかわり問題解答

定数 $0 < a, b < 1$ が与えられたとする。集合 $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ 上の 2 つの二項分布

$$p(r) = {}_nC_r \ a^r (1-a)^{n-r}$$
$$q(r) = {}_nC_r \ b^r (1-b)^{n-r}$$

のカルバック情報量を $D(p||q)$ とすると、a, b の関数 $f(a, b)$ が存在して、

$$D(p||q) = nf(a, b)$$

とかけることを示せ。また、$f(a,b)$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
D(p||q) &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \log \frac{{}_nC_k a^k (1-a)^{n-k}}{{}_nC_k b^k (1-b)^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \log \frac{a^k (1-a)^{n-k}}{b^k (1-b)^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \log \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{1-a}{1-b}\right)^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \left(k \log \left(\frac{a}{b}\right) + (n-k) \log \left(\frac{1-a}{1-b}\right) \right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

分けて考えていく。

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} k \log \left(\frac{a}{b}\right) = \log \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{k=0}^{n} k \ {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \tag{4}
$$

このとき、右辺は二項分布の期待値になっていることから、

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} k \log \left(\frac{a}{b}\right) = na \log \left(\frac{a}{b}\right) \tag{5}
$$

である。次に、

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} (n-k) \log \left(\frac{1-a}{1-b}\right) = \log \left(\frac{1-a}{1-b}\right) \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} (n-k) \tag{6}
$$

である。右辺について分解していくと、

$$
\log \left(\frac{1-a}{1-b}\right) \left(\sum_{k=0}^{n} n \ {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k \ {}_nC_k a^k (1-a)^{n-k} \right) \tag{7}
$$

である。二項定理より、

$$
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^n b^{n-k} \tag{8}
$$

であるから、左側の部分は $b = (1-a)$ と見て 1 になる。右側の部分は二項分布の期待値より na になっている。

以上より、

$$
na \log \frac{a}{b} + \log \frac{1-a}{1-b}(n - na) = n \left(a \log \frac{a}{b} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-b} \right) \tag{9}
$$

よって、

$$
f(a,b) = \left(a \log \frac{a}{b} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-b} \right) \tag{10}
$$