# 確率情報理論第 8 回 解答

加藤まる

2020/03/08

キーワード：

## 本日の問題解答

**マルコフの不等式**

確率変数 $X$ について、$P\{X > 0\} = 1$ であるとき、期待値 $\mu$ を持つならば任意の正数 $\epsilon$ に対して

$$P\{X \geq \epsilon\} \leq \tfrac{\mu}{\epsilon}$$

確率変数 $X$ が指数分布 $Ex(1)$ に従うとき、確率 $P(X \geq 2)$ について、真の値とマルコフの不等式による上からの評価値を比較せよ。（値はかなり異なる）真の値は $e^{-2} = 0.1353$ である。

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

であるから、マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} P\{X \geq \epsilon\} &\leq \frac{\mu}{\epsilon} \\ P\{X \geq 2\} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

よって評価値は 0.5 である。

## 本日の問題解説

マルコフの不等式はチェビシェフの不等式の証明に用いられる。

## おかわり問題解答

イェンセンの不等式

$g$ が 2 回微分可能で下に凸 $(g''(x) \geq 0)$ であるなら、

$$g(E[X]) \leq E(g(X))$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$ として、イェンセンの不等式を用いて $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_3}$ を示せ。

$P(X = a_i) = \dfrac{1}{n}(i = 1, 2, \cdots, n)$ とし、$g(x) = -\log x$ とする。イェンセン不等式より、

$$\begin{aligned} g(E[X]) &= -\log\left(\frac{a_1, a_2, \cdots, a_n}{n}\right) \\ &\leq E[g(X)] \\ &= -\frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n}{n} \\ &= -\log(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) \end{aligned} \tag{3}$$

よって、$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}$ である。
（等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$）