

確率情報理論第4回 解答

加藤まる

2020/03/04

キーワード：連続確率分布, 標準正規分布, 期待値, 分散, (正規分布)

本日の問題解答

確率変数 X が標準正規分布に従うとき、以下を求めよ。

- (1) $f_X(x)$ X が標準正規分布に従うとき、 $f_X(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$ (c は定数) となる。このとき、 c について求めると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-u} \sqrt{2} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \quad (x = \sqrt{2}u) \\ &= \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}\tag{1}$$

よって、 $\sqrt{2\pi}c = 1$ となることから、

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tag{2}$$

より、

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\tag{3}$$

- (2) $E[X]$
 $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ が奇関数であることを利用する。

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

- (3) $V[X]$

$V[X] = E(X^2) - (E(X))^2$ を利用する。

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2u) e^{-u} \sqrt{2} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

よって、

$$\begin{aligned} V[X] &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 1 - 0^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

本日の問題解説

標準正規分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

正規分布

$Y = \mu + \sigma X$ とすると、

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ガンマ関数

定義 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0)$

(また、 $e^{-x} = u$ と置換すると、 $\Gamma(s) = \int_0^1 (-\log u)^{s-1} du$ となる。)

標準正規分布と正規分布は暗記さえすれば期待値と分散がわかればすぐに密度関数を求められる。解答にあるように標準正規分布から正規分布を求めることもできるので、一度はガンマ関数を用いて求めてみてもよいと思う。

おかわり問題解答

確率変数 A, B がそれぞれ $A \sim N(0, 1)$, $B \sim (N2, 5)$ となっている。このことを用いて以下を求めよ。

(1) $E[A^{99}]$ 奇関数の定積分は 0 であることから、

$$\begin{aligned} E(C^{99}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{99} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(2) $f_B(x)$

$$\begin{aligned} F_B(x) &= P(B \leq x) \\ &= P(2 + \sqrt{5}A \leq x) \\ &= P\left(A \leq \frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

両辺を x で微分して、

$$\begin{aligned} f_B(x) &= \Phi'\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{10}} \end{aligned} \tag{9}$$

(補足： $\Phi(x) = P(N(0, 1) \leq x)$ は標準正規分布の分布関数)

おかわり問題解説

(2) は正規分布の公式を暗記していれば計算 0 ですぐ答えが出る。ここでは実際に標準正規分布から計算を行う方法を用いた。 $B = 2 + \sqrt{5}A$ であることから分布関数を経由して求めた。正規分布は式が面倒であるため、 $\Phi(x)$ という形で整理してから計算を行うとミスが少ないと思う (体感)。