

確率情報理論第3回 解答

加藤まる

2020/03/03

キーワード：期待値, 分布関数, (同時確率), (条件付き期待値)
確率論と情報理論第2回の内容です。

本日の問題解答

1～5の数字が書かれたカードがある。それぞれのカードを引く確率が、書かれた数字に比例する場合を考える。 $(\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\})$

(1) 確率関数 $P(X = k)$ を求めよ。

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad (1)$$

確率は書かれた数字に比例することから、

$$P(X = k) = \frac{k}{15} \quad (2)$$

(2) $E[X]$ を求めよ。

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15} \\ &= \frac{55}{15} \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 確率変数 $X(\omega) = \omega$ の分布関数 $F(X)$ を求めて図示せよ。

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ \frac{1}{15} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{3}{15} & 2 \leq X < 3 \\ \frac{6}{15} & 3 \leq X < 4 \\ \frac{10}{15} & 4 \leq X < 5 \\ \frac{15}{15} & 5 \leq X \end{cases} \quad (4)$$

おかわり問題解答

裏と表が描かれてるコインがある。表の出る事象を1、裏の出る事象を0とする (確率変数 $Y = \{0, 1\}$)。このとき、上の問題の確率変数 X との同時確率を考えていく。

(1) X と Y の同時確率を求めよ。

表作るのが面倒なので我慢してください。

$$\begin{aligned}
P(X=1, Y=0) &= P(X=1, Y=1) = \frac{1}{30} \\
P(X=2, Y=0) &= P(X=2, Y=1) = \frac{2}{30} \\
P(X=3, Y=0) &= P(X=3, Y=1) = \frac{3}{30} \\
P(X=4, Y=0) &= P(X=4, Y=1) = \frac{4}{30} \\
P(X=5, Y=0) &= P(X=5, Y=1) = \frac{5}{30}
\end{aligned} \tag{5}$$

(2) 条件付き期待値 $E[X=k|Y=1]$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
E(X=k|Y=1) &= \sum_{k=1}^5 k(P(X=k|Y=1)) \\
&= \sum_{k=1}^5 k \times \frac{P(X=k, Y=1)}{P(Y=1)} \\
&= \frac{110}{30}
\end{aligned} \tag{6}$$