確率情報理論第 15 回 解答

加藤まる

2020/03/15

キーワード：

本日の問題解答

$f_x(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad (x > 0)$ とし、X に従う母集団から n 個の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとる。母パラメータ θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ を求めよ。

尤度関数は、

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n|\theta) = 2^n \theta^n x_1 x_2 \cdots x_n e^{-\theta(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \tag{1}$$

となることから、

$$\log L = n\log 2 + n\log\theta + n\log(x_1 x_2 \cdots x_n) - \theta(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \tag{3}$$

よって、$\hat{\theta} = \dfrac{n}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ である。

おかわり問題解答

$Exp(\frac{1}{\lambda})$ 母集団（平均 λ）での母平均 λ の最尤推定値 $\hat{\lambda}$ を求めよ。

尤度関数は

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n|\lambda) = \lambda^{-n} e^{-\frac{x_1, x_2, \cdots, x_n}{\lambda}} \tag{4}$$

よって、$\log L = -n\log\lambda - \lambda^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である。つまり、

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(-n\log\lambda - \lambda^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\ &= -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{5}$$

よって、求める最尤推定値 $\hat{\lambda}$ は、

$$\hat{\lambda} = \frac{x_1, x_2, \cdots, x_n}{n} = \bar{x} \tag{6}$$