確率情報理論第 12 回 解答

加藤まる

2020/03/12

キーワード：

本日の問題解答

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの n 個の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とその標本平均 $\bar{X}$、不偏標本分散 $\hat{S}^2$ について、次を求めよ。

(1) $E[\bar{X}]$ 期待値の線形性から

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu \tag{1}$$

(2) $V[\bar{X}]$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{2}$$

(3) $\bar{X}$ の分布

(1),(2) と正規分布の再現性より、$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(4) $E[\hat{S}^2]$

$$\begin{aligned}
E(\hat{S}^2) &= \frac{1}{(n-1)} E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}(nE(X_1^2) - 2nE(\bar{X}^2) + nE(\bar{X}^2)) \\
&= \frac{1}{n-1}(n(V(X_1) + E(X_1)^2) - n(V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2)) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2
\end{aligned} \tag{3}$$

おかわり問題解答

おかわり問題出典：http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/ yasuda/statEN2/107to120.pdf

平均 μ, 分散 σ^2 の母集団からとった 2 個の無作為標本を X_1, X_2 とするとき,$aX_1 + bX_2$ が μ の不偏推定量で, かつ有効推定量となるような a, b の値を求めよ。

X_1, X_2 は無作為標本だから、

$$E(X_1) = E(X_2) = \mu, \quad V(X_1) = V(X_2) = \sigma \tag{4}$$

$aX_1 + bX_2$ の期待値は

$$E(aX_1 + bX_2) = \mu \qquad \therefore a + b = 1 \tag{5}$$

$$V(aX_1 + bX_2) = a^2V(X_1) + b^2V(X_2) \tag{6}$$

X_1, X_2 は独立だから、

$$V(aX_1 + bX_2) = (a^2 + b^2)\sigma^2 \tag{7}$$

$V(aX_1 + bX_2)$ を最小にする a,b の値は

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a^2 + (1-a)^2 \\ &= 2a^2 - 2a + 1 \\ &= 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

より、$a = \frac{1}{2}, b = 1 - a = \frac{1}{2}$ である。
よって、標本平均 $\frac{X_1+X_2}{2}$ は μ の不偏で、かつ有効な推定量である。