確率情報理論第 16 回 解答

加藤まる

2020/03/16

キーワード：

本日の問題解答

$U(0,\theta)$ に従う母集団での母パラメータ θ の不偏推定量 $T=2X, T'=\frac{n+1}{n}\ max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ のどちらがより有効であるか調べよ。なお、分散が小さいほどより有効であるとする。

$$V(T)=\frac{4}{n^2}V(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{4}{n}(U(0,\theta))=\frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta}{3n} \tag{1}$$

また、

$$f_{max(X_1,X_2,\cdots,X_n)}(x)=\frac{nx^{x-1}}{\theta^n} \quad (0<x<\theta) \tag{2}$$

より、

$$E(T^2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\int_0^\theta x^2\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2 \tag{3}$$

つまり、$V(T')=E(T'^2)-E(T')^2=\frac{1}{n(n+2)\theta^2}$ である。
よって、$n\leq 2$ なら、T' のほうが T より有効である。また、$n=1$ なら $T'=T$ つまり $V(T')=V(T)$ である。

おかわり問題解説

(1) の式変形では

$$V(U(a,b))=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{4}$$

を思い出すと良い。
(2) の式は標準一様分布の確率密度関数を思い出すと良い。

おかわり問題解答

$Exp(\frac{1}{\lambda})$ に従う母集団において、母平均 λ の不偏推定量 $\bar{X}$ と $T=c_n\ min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ を考える。

(1) c_n を求めよ。x¿0 として、

$$P(min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x)=P(X_1>x)\cdots P(X_n>x)=(e^{-\frac{x}{\lambda}})^n=e^{\frac{-nx}{\lambda}} \tag{5}$$

よって、

$$f_{min(X_1,X_2,\cdots,X_n)}(x) = -\frac{d}{dx}P(min(X_1,X_2,\cdots,X_n) > x) = \frac{n}{\lambda}e^{-\frac{n}{\lambda}x} \tag{6}$$

つまり、$min(X_1,X_2,\cdots,X_n) \sim Exp\left(\frac{n}{\lambda}\right)$ である。
よって、$E(min(X_1,X_2,\cdots,X_n)) = \frac{\lambda}{n}$、つまり、$c_n = n$ である。

(2) $\bar{X}$ と T のどちらがより有効か調べよ。

$$V(\bar{X}) = \frac{\lambda^2}{n} \tag{7}$$

であるから、

$$V(\bar{T}) = V\left(nExp\left(\frac{n}{\lambda}\right)\right) = n^2\frac{n^2}{\lambda^2} = \lambda^2 \tag{8}$$

つまり、$\bar{X}$ のほうがより有効である。

(3) $\bar{X}$ のフィッシャー情報量を求め、クラメール＝ラオの不等式の下限と一致することを確かめ、有効推定量であることを示せ。

$$\frac{\partial \log f_{Exp(1/\lambda)}(x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\log\lambda - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} \tag{9}$$

より、フィッシャー情報量は

$$I(\lambda) = V\left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{X}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^4}(\lambda^2) = \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

である。また、

$$V(\bar{X}) = \frac{\lambda^2}{n} = \frac{1}{nI(\lambda)} \tag{11}$$

となり、クラメール＝ラオの不等式の下限と一致する。

おかわり問題解説

(7) の式では

$$V(Exp(\mu)) = \frac{1}{\mu^2} \tag{12}$$

を用いた。