確率情報理論第 18 回 解答

加藤まる

2020/03/18

キーワード：

本日の問題解答

平均情報量 (エントロピー)$H(P) = -\sum_{A\in\Omega} P(A)\log P(A)$ である。

(1) 公平なサイコロを振って出た目を表す確率変数 X の平均情報エントロピーを求めよ。
公平なサイコロでは 1 から 6 までの目が当確率 1/6 で生じるので、

$$A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_6 = 6\} \tag{1}$$

$$p_i = \frac{1}{6} \quad k = 1, 2, \cdots, 6 \tag{2}$$

となり、

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{6} p_i \log p_i = \log 6 \approx 0.77815 \tag{3}$$

(2) $p_1 = p_6 = \frac{1}{3}$ でそれ以外は公平にでるサイコロがある。このサイコロを振って出た目を表す確率変数 Y の平均情報エントロピーを求めよ。
このサイコロでは、

$$p_1 = p_6 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{12} \tag{4}$$

となっている。よって、

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{k=1}^{6} p_i \log p_k \\ &= -1 \times \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - 4 \times \frac{1}{12}\log\frac{1}{12} \\ &\approx 2.252 \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

本日の問題解説

情報量（エントロピー）とはその事象が起こったときに得られる情報の量のこと。確率 p で起こる事象の情報量は、$-\log p$ で表される。(1)(2) より出る目に偏りのあるサイコロの方が、公平なサイコロよりもエントロピーが小さくなることがわかる。

おかわり問題解答

同時エントロピー $H(X,Y) = -\sum_{x\in A}\sum_{x\in B} P(x,y)\log P(x,y)$ である。
公平なコインを 2 回振ることを考える。

(1) 最初の結果を表す確率変数を X, 2 回目の結果を表す確率変数を Y とする。この時の同時エントロピー H(X,Y) を求めよ。このとき、(X,Y) の標本空間は

[表, 裏]× [表, 裏] = (表, 表),(表, 裏),(裏, 表),(裏, 裏)

である。これらの事象はすべて等確率 1/4 で生じる。したがって、

$$H(X,Y) = -4 \times \frac{1}{4} log \frac{1}{4} = 2\log 2 \tag{6}$$

となる、

(2) 表が出た回数を Z, 裏が出た回数を U とする。このとき、同時エントロピー H(Z,U) を求めよ。
表と裏の出る回数はそれぞれ 0 回から 2 回までなので,(Z,U) の標本空間は

0,1,2×0,1,2=(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)

となる。ここで、表がでた回数と裏が出た回数の和は 2 でなければならない。これらのことから、(Z,U) の事象の確率分布は、

P(0,2)=(裏, 裏) が出る確率=$\frac{1}{4}$
P(2,0)=(表, 表) が出る確率=$\frac{1}{4}$
P(1,1)=(表, 裏) あるいは (裏, 表) が出る確率=$\frac{1}{2}$
P(0,0)=P(0,1)=P(1,0)=P(1,2)=P(2,1)=P(2,2)=0

となる。したがって、

$$H(Z,U) = -2 \times \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 0.4515 \tag{7}$$

である。

おかわり問題解説

確率論での期待値や同時確率などの情報量版と考えるとよいと思う。本日の問題解説にある通り、情報量の定義をイメージしながら考えるとよい。