Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden

Semana 02: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Identificar** si una ED es lineal.
- **Resolver** una ED lineal de primer orden usando el factor integrante.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES, FACTOR INTEGRANTE

1

Logros

- **Identifica** si una ED es lineal (L.2.2.1.3).
- **Resuelve** una ED lineal de primer orden usando el factor integrante (L.2.2.1.4).

Ecuaciones lineales de primer orden

Sea la ecuación

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

donde la variable dependiente es $y = y(x)$.

Definición

Cuando $g(x) = 0$ se dice que la ecuación diferencial es **homogénea**; de lo contrario es **no homogénea**.

Dividiendo la ecuación (1) entre $a_1(x)$, se obtiene

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)},$$

resultando

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Resolución de una ED lineal de primer orden

- **Paso 1:** Debemos llevar la ecuación a su forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- **Paso 2:** Identificar $P(x)$ y $Q(x)$
- **Paso 3:** Obtener el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad \text{se observa que:} \quad \mu'(x) = \mu(x)P(x)$$

- **Paso 4:** Se multiplica la ecuación del paso 1 por $\mu(x)$ (factor integrante)

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu'(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)Q(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)dx \quad \Rightarrow \quad y = f(x, c)$$

Fórmula directa para hallar la solución

Del paso 3, ya habiendo determinado el factor integrante, se puede utilizar la siguiente fórmula para obtener la solución directamente:

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) Q(x) dx} \tag{2}$$

Ejercicios

1. Determine la solución de la siguiente EDO: $\frac{dy}{dx} + 3y = x$.

   Solución:

   - **Paso 1:** Ya está en la forma estándar
   - **Paso 2:** $P(x) = 3$ y $Q(x) = x$
   - **Paso 3:** Obtener el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int 3dx} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{3x}$$

   - **Paso 4:** Se multiplica la ecuación del paso 1 por $\mu(x) = e^{3x}$:

$$\left(e^{3x}\right)\frac{dy}{dx} + 3\left(e^{3x}\right)y = \left(e^{3x}\right)x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[e^{3x}y\right] = x\left(e^{3x}\right)$$

$$\Rightarrow e^{3x}y = \int xe^{3x}dx \quad \Rightarrow \quad e^{3x}y = \frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{9}(3x-1) + ce^{-3x} \quad \Rightarrow \quad y = f(x,c)$$

2 Determine la solución de la siguiente EDO $x^3y' + 3x^2y = x$.

Solución:

- **Paso 1:** Dividiendo la ED entre x^3, se tiene: $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}$
- **Paso 2:** $P(x) = \frac{3}{x}$ y $Q(x) = \frac{1}{x^2}$
- **Paso 3:** Obtener el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x^3$$

- **Paso 4:** Usamos la fórmula (2):

$$y = \frac{1}{x^3}\int x^3 \frac{1}{x^2}dx$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2}{2} + c\right] = \frac{1}{2x} + \frac{C}{x^3}$$

3 Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$$

Solución:

- **Paso 1:** Forma estándar (dividir entre $\cos(x)$): $y' + \tan(x)y = \frac{1}{\cos(x)}$
- **Paso 2:** $P(x) = \tan(x)$ y $Q(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$
- **Paso 3:** Obtener el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{-\ln|\cos(x)|} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$$

- **Paso 4:** Usamos la fórmula (2):

$$\sec(x)y = \int \sec(x)\sec(x)dx$$

$$\sec(x)y = \tan(x) + C, \quad \Rightarrow \quad y = \sin x + C\cos x$$

4 Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal: $x^2 dy + (3xy - 4x^3)dx = 0$
Solución:
Primero, vamos a dividir todo por dx:

$$x^2 y' + 3xy - 4x^3 = 0 \tag{3}$$

- **Paso 1:** Forma estándar (dividir entre x^2): $y' + \frac{3}{x} y = 4x$
- **Paso 2:** $P(x) = \frac{3}{x}$ y $Q(x) = 4x$
- **Paso 3:** Obtener el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln(x)} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = x^3$$

- **Paso 4:** Usamos la fórmula (2):

$$x^3 y = \int x^3 (4x) dx$$

$$x^3 y = \frac{4x^5}{5} + C \quad \Rightarrow y = \frac{4x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$$

Ejercicios Propuestos

Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^{-3}e^{x}$
2. $x^2\frac{dy}{dx} = -2xy + 3e^{3x}$
3. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)y + x^3$
4. $(x^2+1).\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3 + x$

Respuestas:

1. $y = \frac{e^x}{x^4} + \frac{c}{x^4}$
2. $y = \frac{e^{3x}}{x^2} + \frac{c}{x^2}$
3. $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + Cx^2 + C$
4. $y = \frac{x^4+2x^2+c}{4(x^2+1)}$

Conclusiones

1. Es importante determinar la linealidad de una ED de primer orden. Para el caso de ecuaciones lineales el factor integrante transforma la ecuación en una de variables separables.
2. Las ecuaciones diferenciales lineales se pueden resolver directamente usando la ecuación

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) Q(x) dx,$$

pero hay que saber reconocer P y Q en la ecuación, para esto, la ecuación debe estar en su forma estándar.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA