

Ecuaciones Diferenciales 2025-1

Sistemas masa-resorte
Semana 11: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca

Sergio Quispe Rodríguez

Patricia Reynoso Quispe

Cristina Navarro Flores

Daniel Camarena Pérez

Reinventamos el mundo



Profesores: Utec-Ciencias

Índice

1 Sistemas masa-resorte



Objetivos

- 1 **Modelar** sistemas masa-resorte en diferentes configuraciones.
- 2 **Analizar** y **resolver** un sistema de dos resortes - una masa y un sistema de tres resortes - dos masas.

SISTEMAS MASA-RESORTE

1



Logros

- **Modela** sistemas masa-resorte en diferentes configuraciones. (L.7.11.1.1)
- **Analiza y resuelve** un sistema de dos resortes - una masa y un sistema de tres resortes - dos masas. (L.7.11.1.2)

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.

Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.

Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:



Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.

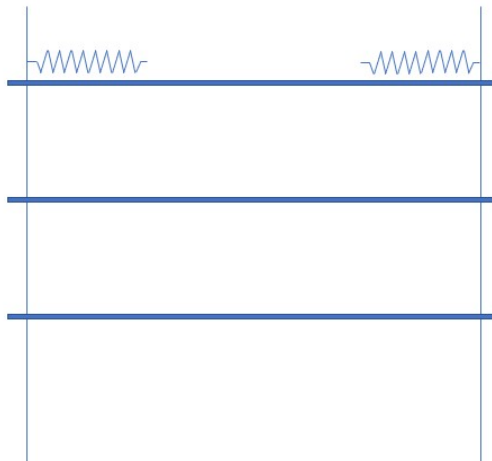
Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:



Se colocará un bloque en medio, de tal manera de que ambos resortes serán estirados hasta llegar a una posición de equilibrio.

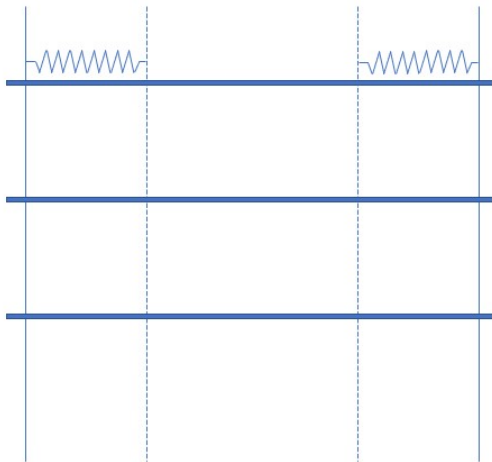
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



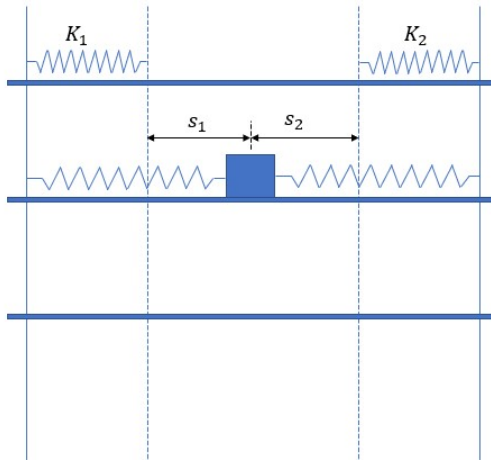
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



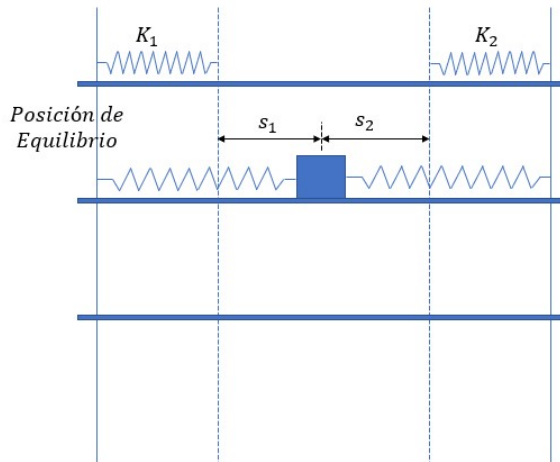
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



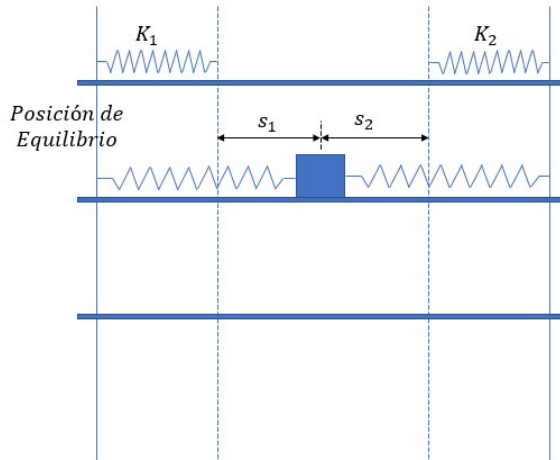
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



DCL

The free body diagram shows a blue square mass with two horizontal arrows representing forces. The left arrow is labeled $K_1 s_1$ and the right arrow is labeled $K_2 s_2$.

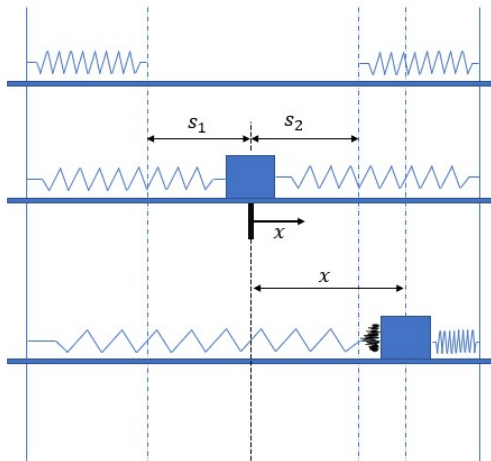
$$K_1 s_1 = K_2 s_2$$

Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:

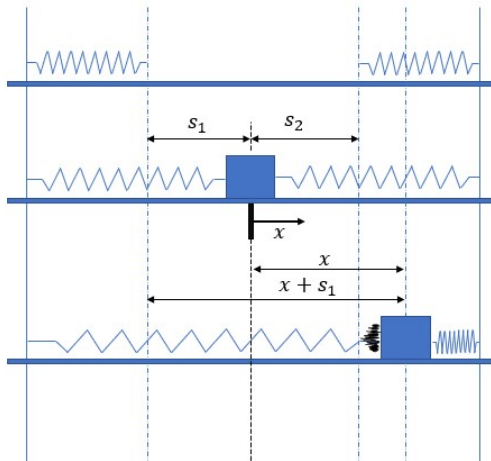
Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



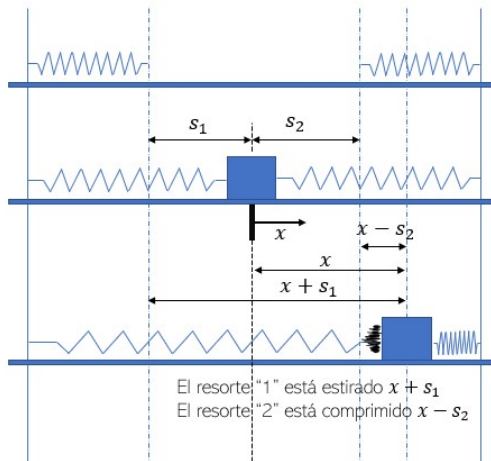
Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



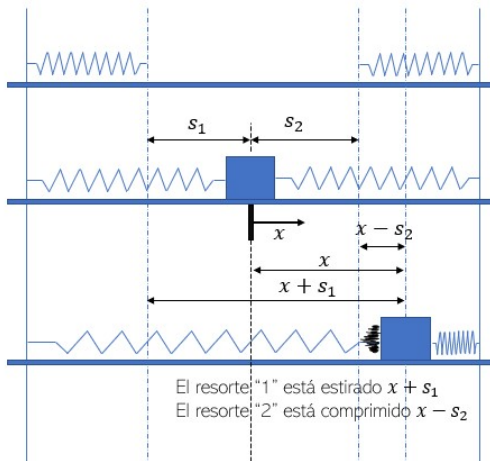
Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



DCL



$$mx'' = -K_1(x + s_1) - K_2(x - s_2)$$

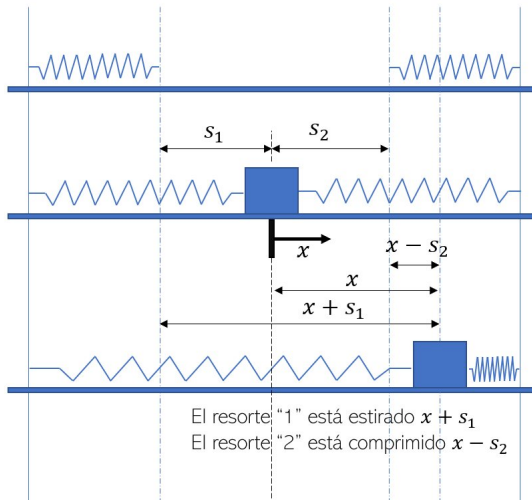
$$mx'' + (K_1 + K_2)x = 0$$

Dos resortes y una masa

Cuando el sistema es amortiguado (con constante c) se obtiene lo siguiente:

Dos resortes y una masa

Cuando el sistema es amortiguado (con constante c) se obtiene lo siguiente:



DCL



$$mx'' = -K_1(x + s_1) - K_2(x - s_2) - cx'$$

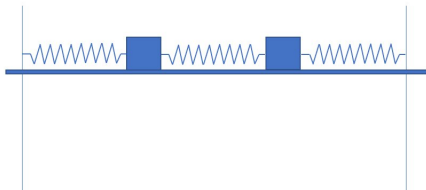
$$mx'' + cx' + (K_1 + K_2)x = 0$$

Ejemplo

Se tiene un sistema horizontal con dos resortes, las constantes de los resortes son $K_1 = 6N/m$ y $K_2 = 4N/m$. Se coloca un objeto de masa $m = 1\text{ kg}$ en medio hasta ubicarla en su posición de equilibrio. Se nota que, en esta posición, el resorte 1 (de la izquierda) se ha estirado 1 m . Se sabe que el medio ofrece una resistencia igual a 2 veces la velocidad de la masa. Si se lanza el bloque a la derecha desde la posición de equilibrio con velocidad de $3m/s$. Describa el movimiento del objeto, defina qué tipo de amortiguamiento es y su gráfica.

Tres resortes y dos masas

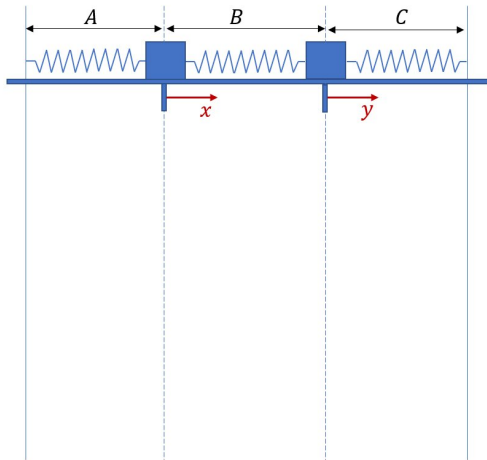
Ahora se busca resolver el siguiente sistema:



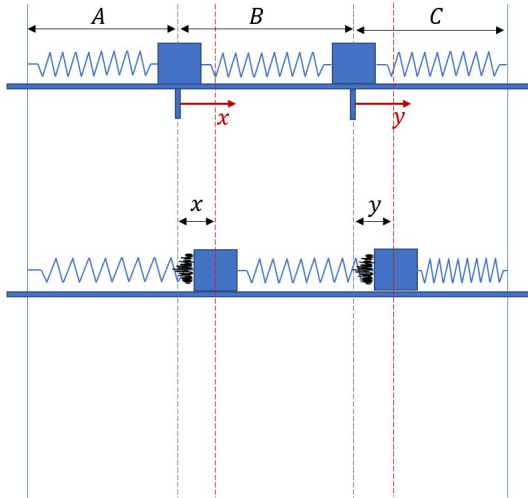
El problema consiste en determinar la posición de los bloques en cualquier instante.

Tres resortes y dos masas

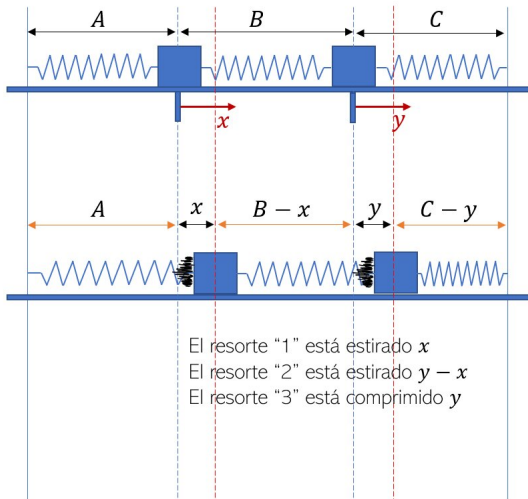
Las posiciones son medidas respecto de la posición de equilibrio:



Tres resortes y dos masas



Tres resortes y dos masas



Resorte "1":

Al inicio medía: A

Ahora mide: $A + x$

Resorte "2":

Al inicio medía: B

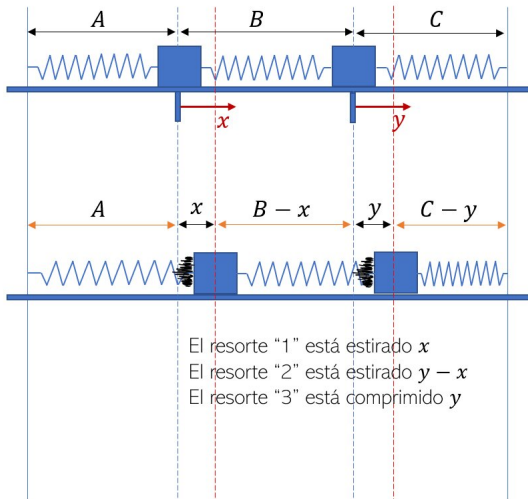
Ahora mide: $B - x + y$

Resorte "3":

Al inicio medía: C

Ahora mide: $C - y$

Tres resortes y dos masas

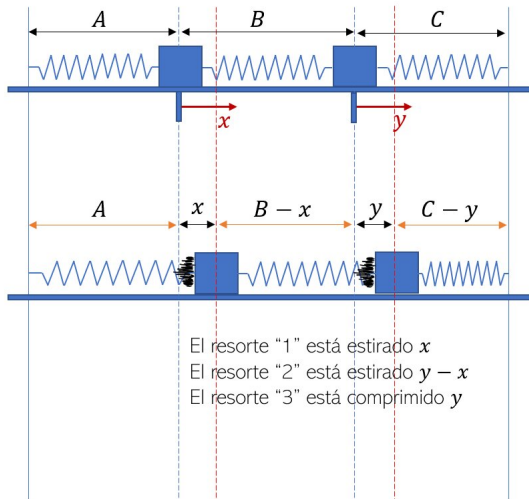


DCL (x)



$$\begin{aligned} mx'' &= K(y - x) - Kx \\ mx'' + 2Kx - Ky &= 0 \end{aligned}$$

Tres resortes y dos masas

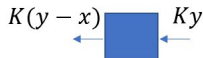


DCL (x)



$$\begin{aligned} mx'' &= K(y - x) - Kx \\ mx'' + 2Kx - Ky &= 0 \end{aligned}$$

DCL (y)



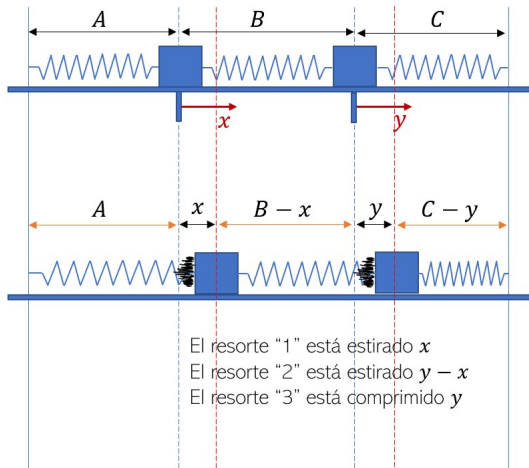
$$\begin{aligned} my'' &= -K(y - x) - Ky \\ my'' + 2Ky - Kx &= 0 \end{aligned}$$

Tres resortes y dos masas

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:

Tres resortes y dos masas

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:

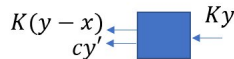


DCL (x)



$$\begin{aligned} mx'' &= K(y - x) - Kx - cx' \\ mx'' + cx' + 2Kx - Ky &= 0 \end{aligned}$$

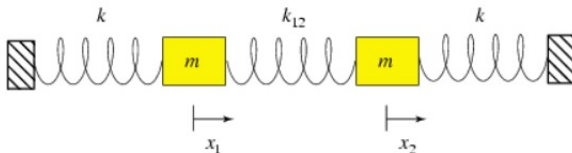
DCL (y)



$$\begin{aligned} my'' &= -K(y - x) - cy' - Ky \\ my'' + cy' + 2Ky - Kx &= 0 \end{aligned}$$

Para el alumno

Consideremos tres resortes en paralelo, con dos de los resortes con constante elástica k y sujetos a dos paredes en cada extremo, y el tercer resorte de constante elástica k_{12} colocado entre las dos masas iguales m .



Determine las ecuaciones que modela las posiciones de los bloques.

Respuesta:

$$m x_1'' = -(k + k_{12})x_1 + k_{12}x_2$$

$$m x_2'' = k_{12}x_1 - (k + k_{12})x_2$$

Conclusiones

- 1 Es posible analizar diferentes configuraciones de sistemas masa-resorte aplicando los mismos principios físicos que para un resorte con una masa.
- 2 En general, los principios físicos nos ayudan a determinar las ecuaciones diferenciales que modelan un sistema.

Gracias

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

