Ecuaciones diferenciales

Modelamiento con EDOs de primer orden

Semana 04: Auditorio

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Modelar** el problema de la ecuación logística.
- **Modelar** el problema de circuitos eléctricos RC.
- **Resolver** el problema de la ecuación logística como una EDO.
- **Resolver** el problema de circuitos eléctricos RC como una EDO.

Ecuación Logística

1

Logro

- **Modela** el problema de la ecuación logística. (L.3.4.1.9)
- **Resuelve** el problema de la ecuación logística como una EDO. (L.3.4.1.11)

Ecuación logística

Alrededor de 1840 P.F. Verhulst, matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países, una de las ecuaciones que estudió fue la ecuación logística:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \qquad a > 0, b > 0$$

cuya solución es la función logística. Usando el método de separación de variables, se obtiene:

$$\int \frac{dP}{P(a - bP)} = \int dt + C \qquad \text{Use fracciones parciales}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a} \ln |P| - \frac{1}{a} \ln |a - bP| = t + c \qquad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{P}{a - bP} \right| = at + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{a - bP} = c_2 e^{at} \qquad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{ac_2}{bc_2 + e^{-at}}$$

Usando la condición inicial $P(0) = P_0$ entonces $c_2 = P_0/(a - bP_0)$. Por lo tanto

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

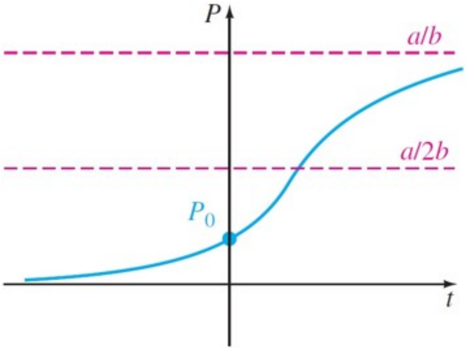


Figure: Se ha comprobado que las curvas logísticas predicen con bastante exactitud el crecimiento de cierto tipo de bacterias, protozoarios, pulgas de agua y moscas de la fruta.

Ejercicios

1 Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que con la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados. Determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de 4 días hay 50 estudiantes infectados.

Solución: Sea $x(t)$ el número de infectados en el día t, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000-x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x(1000-x)} = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x(1000-x)} = kt + c_1$$

Usando fracciones parciales

$$\frac{1}{1000} \ln\left|\frac{x}{1000-x}\right| = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1000c_2}{c_2 + e^{-1000kt}}$$

¿Cuál es la condición inicial? ¿Cómo calculamos el valor de k? Termine de resolver el problema.

2 La población $P(t)$ de bacterias de una placa de Petri satisface la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = 2P\left(6 - \frac{P}{8000}\right)$$

donde t está medida en horas y la población inicial es de 700 bacterias.

a) ¿Cuál es la capacidad de carga de la población?

b) ¿Cuál es el tamaño de la población cuando esta crece más rápido?

Solución: Resolvemos la ecuación usando separación de variables:

$$P(t) = \frac{48000A}{A + e^{-12t}}$$

Usando la condición inicial $P(0) = 700$, se obtienes que $A = 7/473$

Para la pregunta a) la capacidad de carga se calcula como sigue

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{1/8000} = 48000.$$

Para la pregunta b), de la ecuación buscar P tal que $\dfrac{dP}{dt}$ es máximo.

UTEC

2

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Logro

- **Modela** el problema de circuitos eléctricos RC. (L.3.4.1.10)
- **Resuelve** el problema de circuitos eléctricos RC como una EDO. (L.3.4.1.12)

Circuitos eléctricos

El diagrama de un circuito RC en serie consiste en un resistor y un capacitor como se muestra en la siguiente figura.

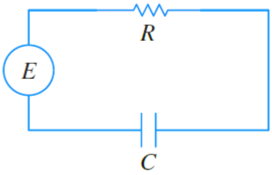


Figure: Circuito RC en serie

En este tipo de problemas, el objetivo es calcular la corriente I que circula por la malla, aunque lo primero que se halla es la carga. $I = \dfrac{dQ}{dt}$

- Para plantear la ecuación, primero debemos conocer la caída de voltaje de cada componente eléctrico.
- Utilizando la ley de mallas de Kirchoff, se plantea que

$$V(t) - V_R(t) - V_C(t) = 0$$

Por lo tanto,

$$V(t) - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

Finalmente, se obtiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

Resistor
resistencia R: ohms (Ω)
caída de voltaje: iR

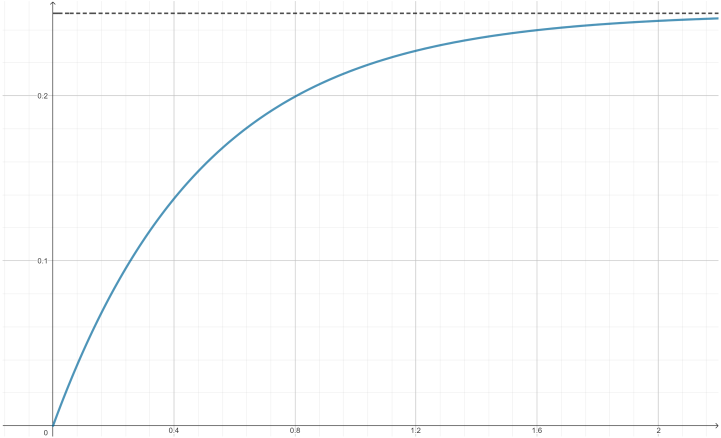
Capacitor
capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje: $\frac{1}{C}q$

Ejercicio

1. Halle la carga en un circuito RC en serie donde $R = 100\ \Omega$ y $C = 500 \times 10^{-3}\ f$. Considere que inicialmente no hay carga en el condensador y $V(t) = 50\ V$.
   Solución
   En este circuito no hay un inductor, $L = 0$, por lo tanto, la ecuación de la carga está dado por
   $$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$
   Reemplazando valores
   $$100\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{5 \times 10^{-3}}Q = 50 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{500 \times 10^{-3}}Q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + 2Q = \frac{1}{2}$$
   Por lo tanto
   $$Q(t) = \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$$

Usando la condición inicial, $Q(0) = 0$, se obtiene que $C = -\frac{1}{4}$. Con lo cual

$$Q(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$



Conclusiones

1. Se demostró que la ecuación diferencial no lineal que estudia la población logística tiene un límite de crecimiento.
2. Por medio de las EDOs de primer orden se puede calcular la carga eléctrica de un circuito RC en serie.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA