Ecuaciones diferenciales

Coeficientes Indeterminados: Método del anulador.

Semana 06: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Identificar** el operador diferencial que anula a una función determinada.
- **Aplicar** el método de coeficientes indeterminados - método del anulador, en la resolución de EDOs lineales no homogéneas de coeficientes constantes.

COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DEL ANULADOR

1

Logros

- **Identifica** el operador diferencial que anula a una función de la forma determinada. (L.4.6.1.7)
- **Aplica** el método de coeficientes indeterminados - método del anulador, en la resolución de ED lineales no homogéneas de coeficientes constantes. (L.4.6.1.8)

Operador anulador

Definición: Operador anulador

Considere L un operador lineal con coeficientes constantes y f una función suficientemente derivable. Se dice que el operador L es un anulador de la función f, si

$$L(f) = 0$$

Ejemplo: Operador derivada $D = \frac{d}{dx}$

- El operador D anula a la constante k porque $D(k) = \frac{d}{dx}(k) = 0$.
- El operador D^2 anula a la función x porque $D^2(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x) = 0$.
- El operador D^3 anula a la función x^2 porque $D^3(x^2) = \frac{d^3}{dx^3}(x^2) = 0$

En general, el operador D^n anula a las funciones: $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}\}$

Ejemplo: Operador diferencial $(D-\alpha)$

- El operador $(D-\alpha)$ anula a la función $e^{\alpha x}$ porque

$$(D-\alpha)e^{\alpha x} = D(e^{\alpha x}) - \alpha e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0$$

- El operador $(D-\alpha)^2$ anula a la función $xe^{\alpha x}$ porque

$$(D-\alpha)^2 \left(xe^{\alpha x}\right) = 0$$

- El operador $(D-\alpha)^3$ anula a la función $x^2e^{\alpha x}$ porque

$$(D-\alpha)^3 \left(x^2e^{\alpha x}\right) = 0$$

En general, el operador $(D-\alpha)^n$ anula a las funciones: $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, x^3e^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\}$.

Ejemplo: $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]$

- El operador $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]$ anula a las funciones: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
- El operador $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]^2$ anula a las funciones: $xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x)$
- El operador $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]^3$ anula a las funciones: $x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

En general, el operador $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]^n$ anula a las funciones:

$$\{e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x),$$
$$x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$$

Ejercicios

Encuentre un operador diferencial que anule las funciones dadas:

a) $f_1(x) = a + bx + cx^2$, donde a, b y c son constantes
Respuesta: D^3

b) $f_2(x) = e^{-3x} + e^{2x}$
Respuesta: $(D+3)(D-2)$

c) $f_3(x) = 4e^{2x} - 10xe^{2x}$
Respuesta: $(D-2)^2$

d) $f_4(x) = 5e^{-x}\cos(2x) - 9e^{-x}\sin(2x)$
Respuesta: $D^2 + 2D + 5$

Veamos, a través de ejemplos, cómo podemos utilizar lo que sabemos sobre el operador anulador para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas.

¿Cómo aplicar el operador anulador a la resolución de una EDO?

1. Resolver la EDO: $y'' + y' - 6y = 5 - x + 3x^2$

Solución

Paso 1: Resolver la ecuación homogénea asociada: $y'' + y' - 6y = 0$:

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \tag{1}$$

Paso 2: Escribir la ecuación en términos de operadores:

$$(D^2 + D - 6)y = 5 - x + 3x^2.$$

Factorizando:

$$(D+3)(D-2)y = 5 - x + 3x^2$$

Paso 3: Hallamos el operador que anula a la función $g(x) = 5 - x + 3x^2$ y lo aplicamos a ambos lados de la ecuación anterior. En este caso, el operador anulador es D^3:

$$D^3(D+3)(D-2)y = D^3(5 - x + 3x^2) = 0$$

Resolvemos la ecuación homogénea resultante. Notar que la ecuación auxiliar para este caso es:

$$r^3(r+3)(r-2)=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=r_2=r_3=0,\ r_4=-3,\ r_5=2.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea resultante es:

$$y_G(x)=\underbrace{c_1+c_2x+c_3x^2}_{y_p}+\underbrace{c_4e^{-3x}+c_5e^{2x}}_{y_H}$$

donde la ecuación (1) permite identificar la parte y_H y la parte y_p de la ecuación general.

Paso 4: Ahora que conocemos la forma de $y_p(x)$ podemos usar el método de coeficientes indeterminados - método de superposición para determinar el valor de las constantes $c_1,\ c_2,\ c_3$:

$$y_G(x)=-1-\frac{x^2}{2}+c_4e^{-2x}+c_5e^{-x}$$

2 Resolver la EDO: $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin(x)$

Solución

Paso 1: Resolver la ecuación homogénea asociada: $y'' - 3y' = 0$:

$$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{3x} \tag{2}$$

Paso 2: Escribir la ecuación en términos de operadores:

$$D^2 y - 3Dy = 8e^{3x} + 4\sin(x).$$

Factorizando:

$$D(D-3)y = 8e^{3x} + 4\sin(x) \tag{3}$$

Paso 3: Hallamos el operador que anule a la función $g(x) = 8e^{3x} + 4\sin(x)$:

$$(D-3) \text{ anula a } e^{3x} \quad \text{y} \quad (D^2+1) \text{ anula a } \sin(x).$$

Por lo tanto el operador anulador es $(D-3)(D^2+1)$. Aplicamos este operador a ambos lados de la ecuación (3):

$$(D-3)(D^2+1)D(D-3)y = (D-3)(D^2+1)(8e^{3x} + 4\sin(x)) = 0$$

Resolvemos la ecuación homogénea resultante. Notar que la ecuación auxiliar para este caso es:

$$(r^2+1)r(r-3)^2=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=0,\ r_2=3,\ r_3=3,\ r_4=+i,\ r_5=-i.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea resultante es:

$$y_G(x)=\underbrace{c_1+c_2e^{3x}}_{y_H}+\underbrace{c_3xe^{3x}+c_4\sin(x)+c_5\cos(x)}_{y_p}$$

donde la ecuación (2) permite identificar la parte y_H y la parte y_p de la ecuación general.

Paso 4: Usamos el método de coeficientes indeterminados para calcular $c_3,\ c_4,\ c_5$:

$$y_G(x)=c_1+c_2e^{3x}+\frac{8}{3}xe^{3x}-\frac{2}{5}\sin(x)+\frac{6}{5}\cos(x)$$

Para el alumno

1. Resolver (usando el método anulador) la EDO:
$$y'' + 25y = 20\sin(5x)$$
Respuesta: $c_1\cos(5x) + c_2\sin(5x) - 2x\cos(5x)$
2. Resolver la EDO:
$$y'' - 4y' - 12y = x - 6$$
Respuesta: $y = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{12} + \frac{19}{36}$
3. Se tiene la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x} - x + 9$$
Hallar la solución particular $y_p(x)$ usando el método del anulador.
Respuesta: El operador anulador asociado a la solución particular es $D^2(D-2)$, recuerde verificar la solución homogénea, luego:
$y_p = -\frac{1}{7}e^{2x} + \frac{1}{3}x - \frac{31}{9}$

Conclusiones

1. El método del operador anulador es la generalización del método de coeficientes indeterminados. Este método permite justificar las tablas con las formas de las soluciones particulares de acuerdo a la forma de $g(x)$.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA