Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Semana 05: Auditorio

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Resolver** EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes de orden superior utilizando la ecuación auxiliar

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

1

Logro

- **Resuelva** EDOs lineales homogéneas de coeficientes constantes de orden superior utilizando la ecuación auxiliar. (L.4.5.1.4)

Solución general de una EDO lineal homogénea

Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden en el intervalo I,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{1}$$

entonces la **solución general** de esta ecuación en el intervalo I es.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{2}$$

siendo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes arbitrarias.

¿Por qué La función (2) es solución de la ecuación (1)?

Método de resolución

Se explicará el método con una ED de 2do orden; sin embargo, este puede aplicarse a una ecuación homogénea de coeficientes constantes de cualquier orden.
Dada la ecuación

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{3}$$

donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$, se busca hallar soluciones de la forma

$$y(x) = e^{rx}. \tag{4}$$

Reemplazando (4) en la ecuación (3), se obtiene

$$\begin{aligned} ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ \Rightarrow \quad (ar^2 + br + c)e^{rx} &= 0 \end{aligned}$$

Como e^{rx} nunca es cero se debe cumplir que

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{5}$$

resultado que se conoce como **ecuación auxiliar**. Las raíces de la ecuación auxiliar determinarán las soluciones de la forma (4).

Ecuación de segundo grado

Para este caso las soluciones de la ecuación auxiliar son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Definiendo $\Delta = b^2 - 4ac$, se tiene los siguientes casos

- Caso 1: $\Delta > 0$, existen dos raíces diferentes $r_1 \neq r_2$, obteniéndose dos soluciones

  $$y_1(x) = e^{r_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

  Para que estas funciones formen un conjunto fundamental se debe verificar que son LI (¡Verifique!). Por lo tanto, la solución general de (3) es

  $$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

- Caso 2: $\Delta = 0$, existen dos raíces iguales $r_1 = r_2 = r$, obteniéndose sólo una solución:

$$y_1(x) = e^{rx}.$$

Se puede demostrar que la segunda solución está dado por:

$$y_2(x) = xe^{rx}.$$

Verifique que estas dos funciones son LI. Por lo tanto, la solución general de (3) es

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

En general, si la ecuación auxiliar tiene una raíz r de multiplicidad k, originará k soluciones, dadas por:

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2 e^{rx},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{rx}$$

- Caso 3: $\Delta < 0$, las raices son conjugadas complejas $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Por lo tanto la solución general de (3) es

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Usando la fórmula de Euler, se obtiene,

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right] + c_2 e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right] \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (ic_1 - ic_2) e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ &= C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}$$

Como $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ son LI (¡Verifique!), se concluye que la solución general de la ecuación (3) para este caso resulta ser

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Ejercicios

1. Resuelva la siguiente ecuación: $2y'' - 5y' - 3y = 0$
   Solución: Hallamos su ecuación auxiliar:

   $$2r^2 - 5r - 3 = 0$$

   Factorizamos: $(2r + 1)(r - 3) = 0$
   De aquí se tiene: $r = -1/2$ y $r = 3$
   Luego, la solución general de esta homogénea es:

   $$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{3x}$$

2 Resuelva la siguiente ecuación: $y'' - 10y' + 25y = 0$
Solución: Hallamos su ecuación auxiliar:

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

Factorizamos: $(r-5)^2 = 0$
De aquí se tiene: $r = 5$ multiplicidad 2
Luego, la solución general de esta homogénea es:

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

3 Resuelva la siguiente ecuación: $y'' + 4y' + 7y = 0$
Solución: Hallamos su ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 7 = 0$$

Resolviendo:

$$r_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{3}i}{2} = -2 + \sqrt{3}i$$
$$r_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}i}{2} = -2 - \sqrt{3}i$$

Luego, la solución general de esta homogénea es:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

4 Resuelva la siguiente ecuación: $y''' + 3y'' - 4y = 0$
Solución: Hallamos su ecuación auxiliar:

$$r^3 + 3r^2 - 4 = 0$$

Factorizando: $(r-1)(r+2)^2 = 0$
Se obtiene: $r = 1$ y además $r = -2$ con multiplicidad 2.
Luego, la solución general de esta homogénea es:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$$

Ejercicios adicionales para alumnos

Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $y'' - 3y' - 10y = 0$
   Respuesta: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}$
2. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$
   Respuesta: $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$
3. $y''' + 3y'' + 3y' + 3y = 0$
   Respuesta: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$
4. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
   Respuesta: $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \cos(2x) + c_4 e^{-x} \sin(2x)$
5. Halle una ED lineal homogénea, tal que su solución general sea $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3$
   Respuesta: $y''' - 4y'' + 4y' = 0$
6. Obtener una ecuación diferencial de menor orden posible, tal que su solución general sea $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$
   Respuesta: $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

Conclusiones

1. El método de solución para ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes se basa en asumir que la solución es una función exponencial. Esto nos lleva a una ecuación algebraica llamada ecuación auxiliar.
2. Cuando la raíz se repite se multiplica por x a la solución, si se vuelve a repetir se multiplica por x^2 a la siguiente y así sucesivamente.
3. Si las raíces son complejas, mediante la fórmula de Euler, se transforman las soluciones en senos y cosenos.
4. Este método sólo se aplica cuando los coeficientes son constantes, si no lo fueran, se debe usar otros métodos.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA