Ecuaciones diferenciales

Modelamiento con EDOs de primer orden

Semana 03: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Modelar** el problema de mezcla en tanques en cascada como una EDO.
- **Resolver** el problema de mezcla en tanques en cascada como una EDO.
- **Modelar** el problema del vaciado de un tanque como una EDO.
- **Resolver** el problema del vaciado de un tanque como una EDO.

MEZCLA EN TANQUES INTERCONECTADOS

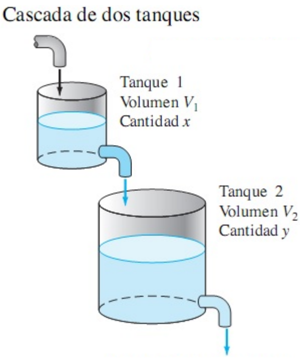
1

Logro

- **Modela** el problema de mezcla en tanques en cascada como una EDO. (L.3.3.2.5)
- **Resuelve** el problema de mezcla en tanques en cascada como una EDO. (L.3.3.2.6)

Mezcla de dos soluciones

Diagrama general del problema



Estamos interesados en encontrar la cantidad de sal en cada tanque.

- La solución que sale del tanque 1 sirve como solución que entra al tanque 2.
- No hay retroalimentación, es decir, la solución contenida en el tanque 2 no vuelve al tanque 1.
- Primero resolvemos el tanque 1. Con los resultados resolvemos el tanque 2.
- En resumen, sólo debemos resolver el problema de un tanque dos veces.

Ejercicio

1. Dos recipientes están conectados mediante una cañería como se muestra en la figura anterior. Inicialmente, cada uno contiene $50\ litros$ de salmuera, con $10\ g$ y $5\ g$ de sal en el tanque 1 y 2 respectivamente. Si empieza circular liquido por cada cañería a razón de $2\ litros/min$ y por la primera tubería ingresa agua pura, encuentre la cantidad de sal en ambos recipientes después de $30\ minutos$. Considere que las soluciones son homogéneas.

Solución:

- Resolvemos el tanque 1: Si x representa la cantidad de sal en el tanque 1, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = R_{in} - R_{out} = \left[2\frac{L}{min}\right]\left[0\frac{g}{L}\right] - \left[2\frac{L}{min}\right]\left[\frac{x}{50}\frac{g}{L}\right] = -\frac{1}{25}x.$$

Así, la EDO que modela la cantidad de sal contenida en el tanque 1 está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{25}x \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{x}dx = -dt,$$

sujeto a $x(0) = 10$. Podemos usar integrales definidas haciendo uso de la condición inicial.

$$25\int_{10}^{x}\frac{dx}{x} = -\int_{0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad 25\left[\ln(x) - \ln(10)\right] = -t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 10e^{-t/25} \tag{1}$$

Por lo tanto, la concentración de salmuera que llega al tanque 2 está dado por la cantidad de sal $x(t)$ dividido entre el volumen del tanque 1.

- Resolvemos el tanque 2: Si y representa la cantidad de sal en el tanque 2, entonces,

$$\frac{dy}{dt} = R_{in} - R_{out} = \left[2\frac{L}{min}\right]\left[\frac{10e^{-t/25}}{50}\frac{g}{L}\right] - \left[2\frac{L}{min}\right]\left[\frac{y}{50}\frac{g}{L}\right] = \frac{2}{5}e^{-t/25} - \frac{1}{25}y$$

Así, la EDO que modela la cantidad de sal contenida en el tanque 2 está dado por:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{25}y = \frac{2}{5}e^{-t/25}$$

sujeto a $y(0) = 5$.

Como obtenemos una ecuación lineal de primer orden, podemos calcular el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{25} dt} = e^{\frac{t}{25}},$$

Por lo tanto,

$$d\left(e^{\frac{t}{25}} y\right) = \left(e^{\frac{t}{25}}\right)\left(\frac{2}{5} e^{-\frac{t}{25}}\right) dt \quad \Rightarrow \quad \int d\left(e^{\frac{t}{25}} y\right) = \int \frac{2}{5} dt$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-\frac{t}{25}}\left(\frac{2}{5} t + c\right).$$

Usando la condición inicial para el tanque 2 se tiene $c = 5$. De este modo

$$y(t) = e^{-\frac{t}{25}}\left(\frac{2}{5} t + 5\right). \tag{2}$$

Finalmente, de las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$x(30) = 3.01 \; gramos$$
$$y(30) = 5.12 \; gramos$$

Para el alumno

Analice las siguientes situaciones

- ¿Qué pasaría si la velocidad a la que ingresa salmuera al tanque 1 es diferente a la cantidad que sale de éste? ¿Y para el tanque 2, se obtiene el mismo resultado? Plantee las ecuaciones e intente resolver ¿Se obtiene una solución explícita? Considere los casos cuando aumenta y disminuye el volumen.
- ¿Qué pasaría si hubiese retroalimentación, es decir, si la salmuera del tanque 2 ingresa al tanque 1? Plantee las ecuaciones para las cantidades de sal en cada tanque, ¿Puede resolver estas ecuaciones con los métodos estudiados hasta ahora? ¿Por qué?

VACIADO DE UN TANQUE

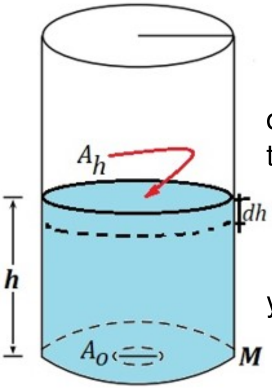
2

Logro

- **Modela** el problema del vaciado de un tanque como una EDO. (L.3.3.2.7)
- **Resuelve** el problema del vaciado de un tanque como una EDO. (L.3.3.2.8)

Tiempo de vaciado de un tanque

Se tiene un tanque de alguna forma geométrica, el cual contiene agua, además tiene un hoyo por cual sale el agua. Se busca determinar el tiempo de vaciado.



Haciendo uso del principio de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho g h_2.$$

donde P_1, P_2 son las presiones en los puntos 1 y 2 respectivamente, ρ es la densidad del fluido. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad 2gh = v_2^2 - v_1^2 \tag{3}$$

y a partir de la ecuación de continuidad

$$A_h v_1 = A_0 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_h}{A_0} v_1 \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (3)

$$v_1^2\left(\frac{A_h^2}{A_0^2}-1\right)=2gh \quad \Rightarrow \quad v_1=\sqrt{\frac{A_0^2}{A_h^2-A_0^2}}\sqrt{2gh}.$$

Además, como $v_1=-\frac{dh}{dt}$ (¿Por qué?), entonces

$$\frac{dh}{dt}=-\sqrt{\frac{A_0^2}{A_h^2-A_0^2}}\sqrt{2gh}$$

y como el área del orificio es pequeña entonces se puede hace la aproximación $A_h^2-A_0^2\approx A_h^2$, obteniendo:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2gh}$$

Si se tienen en cuenta la fricción y la contracción del agua en el orificio, entonces se plantea

$$\frac{dh}{dt}=-c\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2gh}, \qquad \text{siendo } c \text{ es una constante}$$

Ejercicios

1 Un tanque con forma de cilindro recto contiene agua con profundidad de 9 pies. Si se le quita el tapón del fondo $t = 0$ (en horas) y después de 1 hora la profundidad del agua ha disminuido a 4 pies, ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse?
Solución: Haciendo la aproximación de un orificio pequeño, se tiene la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad h^{-0.5}dh = -\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2g}dt$$

integrando, la solución está dada por

$$2h^{0.5} = -\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2g}t + C$$

Usando la condición inicial $h(0) = 9$, se obtiene que $C = 6$. Ahora, usando la condición adicional de que $h(1) = 4$, entonces

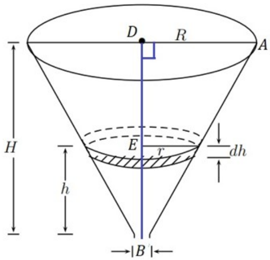
$$2(2) = -\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2g} + 6 \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2g} = -2$$

Por lo tanto, la altura en función del tiempo está dado por

$$h(t) = (-t + 3)^2 \qquad \text{¿Cómo calcula el tiempo de vaciado?}$$

2 Un tanque con forma de cono recto con el vértice hacia abajo, está sacando agua por un agujero circular en su fondo. Suponga que el tanque tiene $20\ pies$ de altura y un radio de $8\ pies$, el agujero circular mide $2\ pulgadas$ de radio, si $c = 0.6$ y $g = 32\ pies/s^2$, y además se sabe que el tanque al principio estaba lleno, ¿Cuánto tarda en vaciarse? (12 pulgadas = 1 pie)

Solución: De la figura



$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{Rh}{H}$$

$$\Rightarrow \quad A_h = \pi r^2 = 0.16\pi h^2$$

La EDO es:

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2gh}$$

Reemplazando valores

$$\frac{dh}{dt} = -0.827h^{-3/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}h^{5/2} = -0.827t + c$$

Usando el valor inicial $h(0) = 20$, entonces $c = 715.542$. Obteniéndose el comportamiento de la altura respecto al tiempo.

$$h(t) = (-2.067t + 1788.855)^{2/5}$$

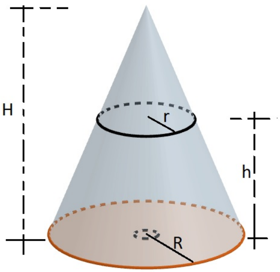
¿Cómo calculamos el tiempo de vaciado?, ¿Qué condición se debe cumplir?

$$\text{Si} \quad h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 865.4\ s$$

El tiempo que tarda en vaciarse es de $865.4\ s$.

Para el alumno

1 Se tiene un tanque cónico de radio $R = 2\ m$ y altura $H = 10\ m$. En el centro de la base del cono se hace un agujero de área $A_0 = 2\pi \times 10^{-3}\ m^2$. Si inicialmente el volumen del tanque está lleno de agua hasta una altura de $7\ m$. Determine el tiempo de vaciado del agua contenida. Considere $g = 10\ m/s^2$ y la constante del orificio $c = 1$. Observación: el vértice del cono está apuntando hacia arriba.



Respuesta: Tiempo de vaciado 1494 segundos

2. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque está inicialmente lleno de agua y en el fondo tiene un orificio de 1 pulgada de diámetro. Calcular el tiempo de vaciado. Recuerde que 1 pie = 12 pulgadas, considere que la constante del orificio es $c = 1$ y $g = 32\ pies/s^2$
   Respuesta: $t = 67.20\ s$
3. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en las que están disueltas $25\ Kg$ de sal. Comenzando en el tiempo $t = 0$, entra agua al depósito a razón de $2\ galones/minuto$ y la mezcla sale al mismo ritmo para entrar a un segundo depósito que contenía inicialmente $50\ galones$ de agua pura. La salmuera sale de este depósito a la misma velocidad. ¿En qué tiempo contendrá el segundo depósito la mayor cantidad de sal?
   Respuesta: Cuando $t \geq 25\ minutos$

Conclusiones

1. El problema de tanques en cascada consiste en resolver el problema de mezclas en un tanque dos veces, en orden consecutivo.
2. Se mostró que el drenaje de los tanques depende de la forma del recipiente.
3. Se mostró que el drenaje de los tanques está asociado al tamaño del hueco de salida.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA