Ecuaciones Diferenciales 2025-1

Transformada de Laplace

Semana 12: Auditorio

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

1 Preliminares
2 Transformada de Laplace

Objetivos

- **Determinar** la transformada de Laplace de una función mediante definición y reconocer la linealidad de la transformada.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

1

PRELIMINARES

Integrales impropias

Dada una función continua definida en $[a, +\infty]$, podemos definir la *integral impropia*:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{K\to\infty} \int_a^K f(t)\,dt$$

siempre que dicho límite exista.
La integral impropia goza de las siguientes propiedades:

$$\int_a^\infty [f(t) \pm g(t)]\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt \pm \int_a^\infty g(t)\,dt$$
$$\int_a^\infty c \cdot f(t)\,dt = c \cdot \int_a^\infty f(t)\,dt$$

siempre y cuando todas las integrales involucradas existan.

Algunos límites conocidos

En esta sección recordaremos algunos límites que nos serán de utilidad en el desarrollo del tema que veremos hoy.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > 0$, se tiene:

$$\lim_{K \to \infty} K^n e^{-sK} = \lim_{K \to \infty} \frac{K^n}{e^{sK}} = 0$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s < 0$, se tiene:

$$\lim_{K \to \infty} K^n e^{-sK} = +\infty$$

- Sea f una función acotada y $s > 0$, entonces:

$$\lim_{K \to \infty} e^{-sK} f(K) = \lim_{K \to \infty} \frac{f(K)}{e^{sK}} = 0$$

  La mayoría de funciones básicas $f(t)$ satisfacen este límite: por ejemplo, tenemos polinomios, $\sin, \cos, \ldots$

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

2

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Logro

- **Determina** la transformada de Laplace de una función mediante definición y reconocer la linealidad de la transformada. (L.8.12.1.1)

La transformada de Laplace

Definición

Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$. Definimos la **transformada de Laplace** de $f(t)$, denotado por $\mathscr{L}\{f(t)\}$, como la siguiente función:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\text{El valor de esta integral es una expresión en } s} \tag{1}$$

siempre que la integral exista.

De la definición notemos que para cada valor de s la integral (1) puede o no existir, en ese sentido, la transformada de Laplace de f está definida solo para ciertos valores de s.

Observación: Usualmente denotaremos con letras minúsculas las funciones y con mayúsculas sus respectivas transformadas. Es decir:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= F(s) \\ \mathscr{L}\{g(t)\} &= G(s) \\ \mathscr{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Ejemplo

Determine $\mathscr{L}\{1\}$.

Solución: De la definición tenemos:

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{K\to\infty} \int_0^{K} e^{-st} dt = \lim_{K\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=K}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \left[-\frac{e^{-Ks}}{s} + \frac{1}{s} \right] = -\lim_{K\to\infty} \frac{e^{-Ks}}{s} + \lim_{K\to\infty} \frac{1}{s}$$

De donde, si $s > 0$ entonces $\lim_{K\to\infty} \frac{e^{-Ks}}{s} = 0$ y por lo tanto:

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad s > 0.$$

En adelante, adoptaremos la siguiente notación:

$$\lim_{K\to\infty} h(t)\Big|_{t=0}^{t=K} = h(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

Ejemplo

Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3 \\ 6, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t < \infty \end{cases}$$

Solución: De la definición

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

La integral se debe expresar en 3 partes:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^3 e^{-st}(2)\, dt + \int_3^4 e^{-st}.6)\, dt + \int_4^\infty e^{-st}(0)\, dt$$

Luego se calcula cada integral:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \left.\frac{2e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=3} + \left.\frac{6e^{-st}}{-s}\right|_{t=3}^{t=4} + 0 \\ &= -\frac{2e^{-3s} - 2e^{0}}{s} - \frac{6e^{-4s} - 6e^{-3s}}{s}\end{aligned}$$

efectuando, se obtiene:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{2 + 4e^{-3s} - 6e^{-4s}}{s}$$

TL de algunas funciones elementales

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$

Linealidad de la transformada

$\mathscr{L}$ es una transformación lineal

$$\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathscr{L}\{f(t)\}+b\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

Ejemplo

Evalúe $\mathscr{L}\{(e^{t}+e^{-t})(e^{t}-e^{-t})\}$

Solución:
Usando diferencia de cuadrados:

$$\mathscr{L}\{e^{2t}-e^{-2t}\}$$

Por linealidad:

$$\mathscr{L}\{e^{2t}-e^{-2t}\}=\mathscr{L}\{e^{2t}\}-\mathscr{L}\{e^{-2t}\}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}$$

Ejemplo

Evalúe $\mathscr{L}\{2e^{3t+\pi} + (t-3)^2\}$

Solución:

Desarrollando:

$$\mathscr{L}\{2e^{3t}e^{\pi} + (t^2 - 6t + 9)\}$$

Aquí se usa la propiedad de linealidad:

$$2e^{\pi}\mathscr{L}\{e^{3t}\} + \mathscr{L}\{t^2\} - 6\mathscr{L}\{t\} + \mathscr{L}\{9\}$$

y haciendo uso de la tabla de transformadas, se obtiene:

$$2e^{\pi}\frac{1}{s-3} + \frac{2!}{s^3} - 6\frac{1}{s^2} + \frac{9}{s}$$

Ejercicios para el alumno

- Calcule $\mathscr{L}\{t\}$

Solución: De la definición

$$\mathscr{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t \, dt \tag{2}$$

Recordemos la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

En nuestro problema, escogemos:

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

y de esa manera la integral (2) queda:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt &= -\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} - \left(-\int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s}\, dt\right)\\ &= -\lim_{K\to\infty} \frac{Ke^{-sK}}{s} - \left(-\frac{0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s}\right) + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt}_{\mathscr{L}\{1\}}\end{aligned}$$

Si consideremos $s > 0$, tenemos $\lim\limits_{K\to\infty} \frac{Ke^{-sK}}{s} = 0$ y así:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt = 0 + 0 + \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}\ (s > 0)$$

- Evalúe $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}$

Solución: Tenemos:

$$\mathscr{L}\{\sin(2t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin(2t)\,dt$$

Nuevamente utilizamos integracion por partes, tomando $u = \sin(2t)$ y $dv = e^{-st}$, luego:

$$u = \sin(2t) \Rightarrow du = 2\cos(2t)$$
$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}\,dt$$

De esta manera, la integral pedida queda:

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(2t)\,dt = -\left.\frac{e^{-st}\sin(2t)}{s}\right|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} - \left.\frac{e^{-st}\sin 2t}{s}\right|_0^\infty - \left(-\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt\right)$$

$$= -\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\sin 2K}{s} + \frac{\sin 0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s} + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

Considerando $s>0$, $\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\sin 2K}{s}=0$, luego:

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = 0+0+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt = \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t \tag{3}$$

De esta manera, para completar el ejercicio necesitamos calcular la integral en azul. Para ello, utilizamos una vez más integración por partes con $u=\cos 2t$ y $dv=e^{-st}$:

$$u=\cos 2t \Rightarrow du = -2\sin 2t$$

$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t = -\left.\frac{e^{-st}\cos 2t}{s}\right|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t$$

$$= -\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\cos 2K}{s} + \frac{\cos 0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s} - \frac{2}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t}_{\mathscr{L}\{\sin 2t\}}$$

Para $s>0$, tenemos $\lim\limits_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\cos 2K}{s}=0$ y luego:

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t = 0+\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{s}-\frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\} \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (3) :

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s}\left[\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\}\right]$$

$$= \frac{2}{s^2+4}$$

Halle las siguientes transformadas:

- $\mathscr{L}\{\sqrt{t^4+4t^2+4}+\sqrt{e^{4t}}\}$, **Respuesta**: $\frac{6}{s^3}+\frac{2}{s}+\frac{1}{s-2}$
- $\mathscr{L}\{6\,\text{sin}(2t)cos(2t)-(3t)^3\}$, **Respuesta**: $\frac{12}{s^2+16}-\frac{162}{s^4}$

Halle las siguientes transformadas inversas:

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s^2-4s+2}{s^6}\right\}$, **Respuesta**: $t^3-\frac{t^4}{6}+\frac{t^5}{60}$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+9}{s^2-9}\right\}$, **Respuesta**: $2\,\text{cosh}(3t)+3\,\text{sinh}(3t)$

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA