Ecuaciones Diferenciales

Examen Parcial 2024-1. Tiempo: 100 minutos

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1

(a) (**3 ptos**) Se tiene un sistema de dos tanques, A y B, conectados en cascada. Inicialmente, en el tanque A hay 100 galones de una mezcla de sal y agua, la cual contiene 50 gramos de sal por cada galón, mientras que en el tanque B hay 100 galones de agua pura. Una mezcla adicional de salmuera con una concentración de 4 gramos de sal por galón entra al tanque A a una tasa de 10 galones por minuto. La mezcla bien agitada fluye hacia el tanque B a razón de 12 galones por minuto. La mezcla del tanque B se drena a una velocidad de 10 galones por minuto. Escriba las ecuaciones diferenciales que modelan la cantidad de sal en cada tanque. Indique las condiciones iniciales.

Solución. Sean $x_A(t)$ y $x_B(t)$ las cantidades de sal diluida en los tanques A y B respectivamente. Notemos también que en ambos tanques la velocidad de entrada es diferente a la velocidad de salida, por lo tanto el volumen de cada tanque varía con respecto al tiempo, luego:

- Volumen de mezcla en el tanque A para un tiempo t: $[100 + (10 - 12)t]\,\text{gal}$
- Volumen de líquido en el tanque B para un tiempo t: $[100 + (12 - 10)t]\,\text{gal}$.

Luego, las ecuaciones asociadas a este modelo son:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_A}{dt} &= \left(10\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(4\frac{\text{g}}{\text{gal}}\right) - \left(12\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_A}{100-2t}\frac{\text{g}}{\text{gal}}\right) \\
&= 40 - \frac{12x_A}{100-2t}, \\
\frac{dx_A}{dt} &= \left(12\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_A}{100-2t}\frac{\text{g}}{\text{gal}}\right) - \left(10\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{x_B}{100+2t}\frac{\text{g}}{\text{gal}}\right) \\
&= \frac{12x_A}{100-2t} - \frac{10x_B}{100+2t},
\end{aligned}$$

donde $x_A(0) = 50 \times 100 = 5000$, $x_B(0) = 0$

(b) (**3 ptos**) Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(y^2 + 3xy^3)dx + (1 - xy)dy = 0$$

Compruebe que al multiplicar la ecuación anterior por y^{-3} se obtiene una exacta. Obtenga la solución general de la ecuación exacta resultante.

Solución. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por y^{-3}, obtenemos:

$$\underbrace{(y^{-1} + 3x)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(y^{-3} - xy^{-2})}_{Q(x,y)}dy = 0$$

Notamos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -y^{-2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo tanto la EDO es exacta. Luego, existe una función diferenciable $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \tag{1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2}$$

Ahora integramos la ecuación (1):

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\, dx = \int (y^{-1} + 3x)\, dx$$
$$F(x, y) = y^{-1}x + \frac{3x^2}{2} + \Omega(y)$$

Derivamos con respecto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xy^{-2} + \Omega'(y)$$

Luego, por (2):

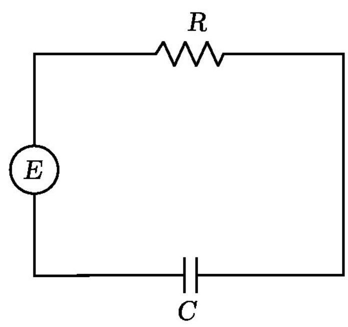
$$\begin{aligned} -xy^{-2} + \Omega'(y) &= y^{-3} - xy^{-2} \\ \Omega'(y) &= y^{-3} \\ \Rightarrow \Omega(y) &= \int y^{-3}\, dy \\ &= -\frac{y^{-2}}{2} \end{aligned}$$

Finalmente la curva solución es:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C \\ y^{-1}x + \frac{3x^2}{2} - \frac{y^{-2}}{2} &= C \end{aligned}$$

Problema 2

Se tiene un circuito RC, en el cual $R = 2\Omega$ y $C = 0{,}5F$, tal como se muestra en la figura siguiente:



(a) (**3 ptos**) Determine una ecuación diferencial que permita encontrar la carga $q(t)$ en el circuito, considerando que $E = 16e^{-t}\,\text{sen}(4t)$, además $q(0) = 2$.
Solución. Tenemos un circuito RC en serie, así la ecuación diferencial asociada es:

$$\begin{aligned} R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= E(t) \\ 2\frac{dq}{dt} + \frac{q}{5\times 10^{-1}} &= 16e^{-t}\sin(4t) \\ 2\frac{dq}{dt} + 2q &= 16e^{-t}\sin(4t) \\ \frac{dq}{dt} + q &= 8e^{-t}\sin(4t) \end{aligned}$$

(b) (**3 ptos**) Obtenga la carga en función de t, del circuito anterior.
Solución. Resolveremos mediante el método de factor integrante, para ello calculemos $\mu(t) = e^{\int 1\,dt} = e^t$, luego la solución general será:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)8e^{-t}\sin(4t)\,dt \\ &= e^{-t}\int 8\sin(4t)\,dt \\ &= e^{-t}\left(-2\cos(4t) + C\right) \\ &= -2e^{-t}\cos(4t) + Ce^{-t} \end{aligned}$$

Además, de la condición inicial:

$$\begin{aligned} q(0) &= 2 \\ -2 + C &= 2 \\ C &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la carga en función del tiempo: $q(t) = -2e^{-t}\cos(4t) + 4e^{-t}$.

Problema 3

(a) (**2 ptos**) Determine si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes. Justifique.

$$f(x) = 2x^2, \quad g(x) = (x+2)^2, \quad h(x) = x + 1$$

Solución. Las funciones son **linealmente dependientes**, es decir existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, no todos iguales a cero, tales que:

$$a\cdot f(x) + b\cdot g(x) + c\cdot h(x) = 0 \quad \text{, para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Basta tomar $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = -4$.

(b) (**3 ptos**) Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando el operador anulador.

$$y'' + 4y = 5e^{-x} + 5e^{x} + 3\sin(x) \tag{3}$$

Solución. Primero resolvamos la EDO homogénea:

$$y'' + 4y = 0$$

Luego, la ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$ y las soluciones de esta ecuación son $r_1 = -2i$, $r_2 = 2i$. Así, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

Por otro lado, notemos que el operador que anula el término $5e^{-x}+5e^{x}$ es

$$(D+1)(D-1)\,,$$

mientras que el término $3\sin(x)$ es anulado por

$$(D^2+1)$$

Además podemos escribir la EDO original en términos del operador diferencial:

$$\begin{aligned} (D^2+4)y &= 5e^{-x}+5e^{x}+3\sin(x) \\ \boldsymbol{(D+1)(D-1)(D^2+1)}(D^2+4)y &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

La solución de (4) es $C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos(x)+C_4\sin(x)+C_5\cos(2x)+C_6\sin(2x)$, pero los dos últimos términos corresponden a y_h, por lo tanto la solución particular de la EDO no homogénea será:

$$y_p = Ae^{-x}+Be^{x}+C\cos(x)+D\sin(x)$$

Calculemos:

$$\begin{aligned} y_p' &= -Ae^{-x}+Be^{x}-C\sin(x)+D\cos(x) \\ y_p'' &= Ae^{-x}+Be^{x}-C\cos(x)-D\sin(x) \end{aligned}$$

Reemplazando en (3) y simplificando:

$$5Ae^{-x}+5Be^{x}+3C\cos(x)+3D\sin(x) = 5e^{-x}+5e^{x}+3\sin(x)$$

Luego, igualando ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned} 5A &= 5 \\ 5B &= 5 \\ 3C &= 0 \\ 3D &= 3 \end{aligned}$$

Es decir $A=B=D=1, C=0$. Finalmente la solución general de nuestra EDO no homogénea es:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x)+y_p(x) \\ &= C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)+e^{-x}+e^{x}+\sin(x)\,. \end{aligned}$$

(c) (**3 ptos**) Usando el método de variación de parámetros, obtenga una solución particular de la ecuación

$$2y''+2y+\sec(x)=0$$

Sugerencia: $\int \tan(x)dx = \ln|\sec(x)|+C$
Solución. Reescribimos la EDO como sigue:

$$y''+y = -\frac{1}{2}\sec(x)$$

Ahora, resolvemos la EDO homogénea:

$$y''+y=0$$

Luego, la ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ y las soluciones de esta ecuación son $r_1 = -i$, $r_2 = i$. Así, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Identificamos $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$. Sea $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ la solución particular, entonces:

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ -\frac{1}{2}\sec(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sec(x)\sin(x)}{1} \\
&= \frac{1}{2}\tan(x) \qquad (5) \\
u_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & -\frac{1}{2}\sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & 2\cos(x) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\sec(x)\cos(x)}{1} \\
&= -\frac{1}{2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Luego de resolver las EDOs (5) y (6) obtenemos:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{\ln|\sec(x)|}{2} \\
u_2(x) &= -\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente la solución general será:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\
&= C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \frac{\ln|\sec(x)|\cos(x)}{2} - \frac{x\sin(x)}{2}\,.
\end{aligned}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**1.5 ptos**) Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
x'(t) &= 2x + 3y \\
y'(t) &= x
\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 8, y(0) = 0$. Resuelva este sistema mediante el método de eliminación sistemática.

Solución. Escribimos el sistema en términos del operador diferencial y reordenamos:

$$\begin{aligned}
(D-2)x - 3y &= 0 \\
-x + Dy &= 0
\end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el operador D a la primera ecuación y multiplicamos la segunda ecuación por tres:

$$\begin{aligned}
D(D-2)x - 3Dy &= 0 \\
-3x + 3Dy &= 0
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} D(D-2)x - 3x &= 0 \\ (D^2 - 2D)x - 3x &= 0 \\ x'' - 2x' - 3x &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

La ecuación auxiliar asociada a (7) es $r^2 - 2r - 3 = 0$, de donde se obtienen las soluciones $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Por lo tanto:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

Además, de la primera ecuación del sistema tenemos que $y = \dfrac{x' - 2x}{3}$, entonces:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x'(t) - 2x(t)}{3} \\ &= \frac{-C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t})}{3} \\ &= -C_1 e^{-t} + \frac{C_2 e^{3t}}{3} \end{aligned}$$

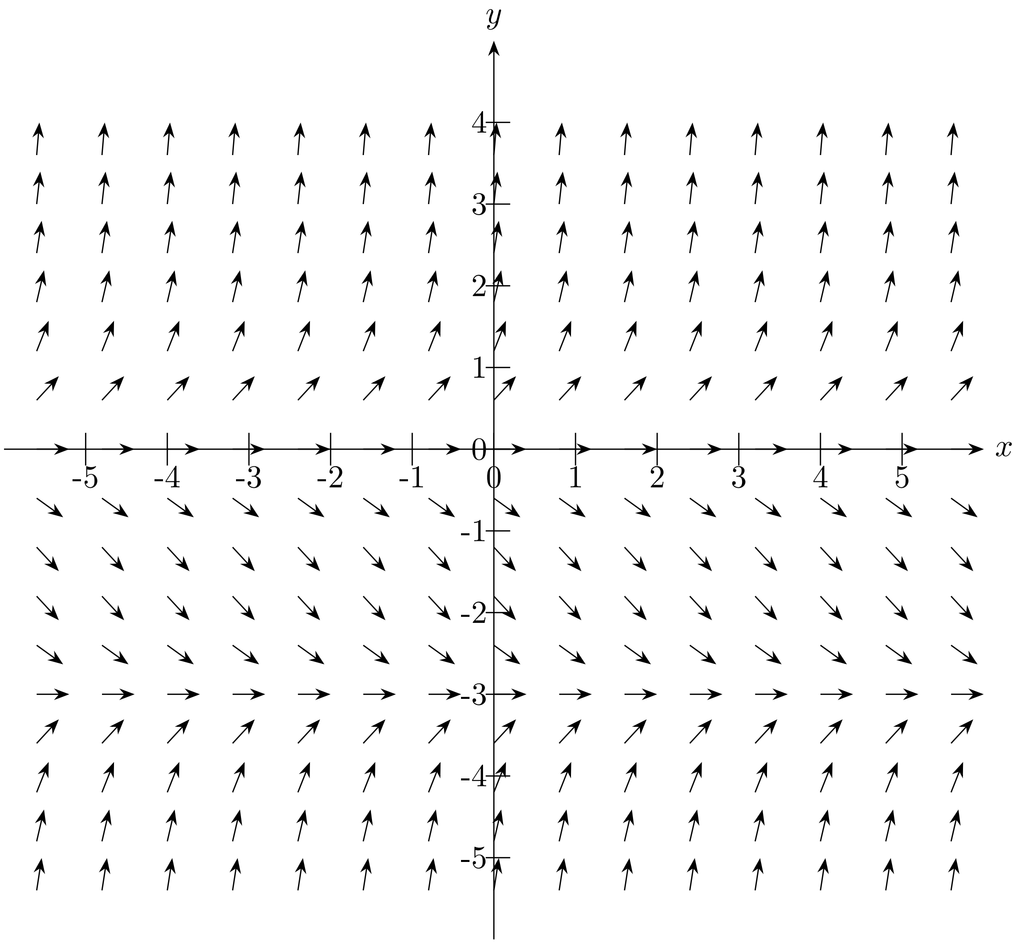
Considerando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) = 8 &\Rightarrow C_1 + C_2 = 8 \\ y(0) = 0 &\Rightarrow -C_1 + \frac{C_2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Así, resolviendo el sistema tenemos $C_1 = 2, C_2 = 6$. Finalmente la solución del SED es:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-t} + 6e^{3t} \\ y(t) &= -2e^{-t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

(b) (**1.5 ptos**) En el gráfico siguiente se muestra el campo de direcciones en el plano XY de una ecuación diferencial:



Según la figura, indique un punto que sea asintóticamente estable. Justifique su respuesta.
Solución. Sea

$$y' = f(x, y)$$

la EDO asociada al campo de direcciones dado en el gráfico. Recordemos que las soluciones de esta ecuación son curvas cuya gráfica en cada punto es tangente a las direcciones dadas por el campo. A partir de esto, podemos identificar dos soluciones estacionarias $y_1 = 0$ e $y_2 = -3$. Además las soluciones con condición inicial cerca de 0 se alejan de y_1 conforme $t \to +\infty$, mientras que las soluciones con condición inicial cerca de -3 tienden a y_2 cuando $t \to +\infty$.

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Inestable} \\ y = -3 \quad &\Rightarrow \quad \text{Asintóticamente estable} \end{aligned}$$