Ecuaciones Diferenciales

Examen Parcial 2024-1. Tiempo: 100 minutos

Indicaciones

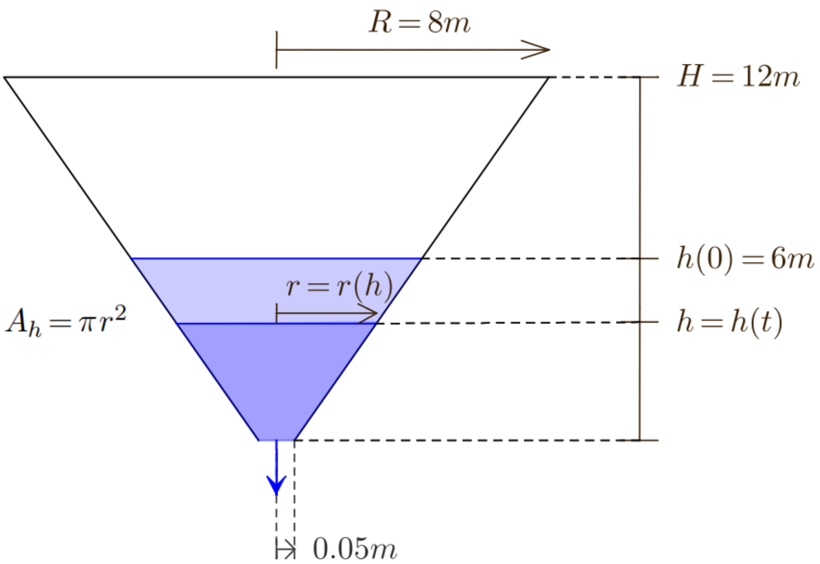
1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1

(a) (**4 ptos**) Un tanque cónico de 12 m de altura y 8 m de radio está lleno de agua hasta la mitad de su altura. El tanque tiene un agujero de radio 0,05 m en su vértice, por donde va escapando el agua. El coeficiente de descarga es $c = 0{,}5$. ¿En cuanto tiempo quedará vacío dicho tanque? Considere $g = 10m/s^2$.

Solución:



Guiándonos de la figura, trabajaremos con las siguientes cantidades:

- A_0: el área del agujero en el vértice del cono. Como, por dato, el radio de dicho agujero es $0{,}05m$ entonces $A_0 = \pi(0{,}05)^2 = 25\pi \times 10^{-4}m^2$.
- $r = r(h)$: el radio de la sección transversal del cono correspondiente a la altura h del nivel del agua medida desde el vértice del cono. Por similitud de triángulos tenemos que

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto

$$r = r(h) = \frac{2h}{3} \quad \text{metros.}$$

- A_h: el área de la sección transversal del cono a la altura h. Como la sección transversal del cono será un círculo de radio $r(h)$ entonces

$$A_h = \pi r^2 = \frac{4\pi}{9}h^2.$$

Sabemos que la altura h obedece la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -c\frac{A_0}{A_h}\sqrt{2gh}$$

Reemplazamos las fórmulas y datos que tenemos en dicha ecuación, así

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -0{,}5\frac{25\pi \times 10^{-4}}{\frac{4\pi}{9}h^2}\sqrt{20h} = -0{,}01257788\frac{\sqrt{h}}{h^2} = -0{,}01257788h^{-3/2}\\ \frac{dh}{dt} &= -0{,}01257788h^{-3/2}.\end{aligned}$$

Reconocemos que la EDO es autónoma, así que la resolvemos por separación de variables, así:

$$h^{3/2}dh = -0{,}01257788dt.$$

Integramos ambos lados y obtenemos

$$\frac{2}{5}h^{5/2} = -0{,}01257788t + c,$$

donde c es una constante real por determinar. Despejamos h y obtenemos:

$$h(t) = (c' - 0{,}03144471t)^{2/5},$$

donde $c' = 5c/2$ es una constante real por determinar. Para determinarla usamos la condición inicial:

$$6 = h(0) = (c' - 0{,}03144471 \times 0)^{2/5} = c'^{2/5},$$
$$c' = 6^{5/2} = 88{,}1816307$$

Por lo tanto,

$$h(t) = (88{,}1816307 - 0{,}03144471t)^{2/5}.$$

Para saber cuándo se vacía por completo el tanque (es decir, cuando la altura se vuelve cero indicando que el nivel del agua es cero) resolvemos la siguiente ecuación:

$$0 = h(t) = (88{,}1816307 - 0{,}03144471t)^{2/5}$$
$$0 = 88{,}1816307 - 0{,}03144471t$$
$$t = 2804{,}34.$$

segundos

(b) (**2 ptos**) Halle el factor integrante de la ecuación diferencial

$$x^2y' + (x^2 + x)y = e^{-x}.$$

Luego obtenga la solución general.

Solución:
Ponemos la EDO lineal de primer orden en forma normal:

$$y' + \frac{x^2 + x}{x^2}y = \frac{1}{x^2}e^{-x}$$

Identificamos $P(x) = \frac{x^2+x}{x^2} = 1 + x^{-1}$ y $Q(x) = x^{-2}e^{-x}$.

Hallamos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \left(1+x^{-1}\right)dx} = e^{\int 1dx + \int x^{-1}dx} = e^{x+\ln|x|} = e^x \times e^{\ln|x|} = xe^x.$$

Calculamos la solución general:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \int Q(x)\mu(x)dx \\ &= x^{-1}e^{-x} \int x^{-2}e^{-x}xe^x dx \\ &= x^{-1}e^{-x} \int x^{-1}dx \\ &= x^{-1}e^{-x}(\ln|x| + c) \\ y(x) &= x^{-1}e^{-x}\ln|x| + cx^{-1}e^{-x}, \end{aligned}$$

donde c es una constante real indeterminada.

Problema 2

Un circuito en serie RC tiene una resistencia de R ohmios y un capacitor de capacidad de C Faradios. Si la fuente genera un voltaje constante v, tal que $RC = vC = 10$ e inicialmente el condensador está totalmente descargado.

(a) (**3 ptos**) Encuentre la ecuación diferencial que modela la carga $q(t)$. Indique la condición inicial.

Solución:
La EDO que modela el circuito eléctrico RC es

$$Rq' + \frac{1}{C}q = v$$

$$RCq' + q = vC$$

$$10q' + q = 10$$

La condición inicial nos la da el enunciado al decir que 'inicialmente el condensador está totalmente descargado', es decir,

$$q(0) = 0.$$

(b) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial del ítem anterior.

Solución:
Ponemos la EDO lineal de primer orden y coeficientes constantes en su forma normal:

$$q' + 0{,}1q = 1$$

Identificamos $P(t) = 0{,}1$ y $Q(t) = 1$.

Hallamos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 0{,}1dt} = e^{0{,}1t}.$$

Hallamos la solución general a la EDO:

$$\begin{aligned}
q(t) &= \frac{1}{\mu(x)}\int Q(x)\mu(x)dt \\
&= e^{-0,1t}\int e^{0,1t}dt \\
&= e^{-0,1t}(\frac{1}{0,1}e^{0,1t}+c) \\
&= e^{-0,1t}(10e^{0,1t}+c) \\
q(t) &= 10+ce^{-0,1t},
\end{aligned}$$

donde c es una constante real indeterminada.

Para determinar la constante usamos la condición inicial, así:

$$0 = q(0) = 10 + ce^{-0,1\times 0} = 10 + c$$

$$c = -10$$

Por lo tanto,

$$q(t) = 10 - 10e^{-0,1t}.$$

Problema 3

(a) (**2 ptos**) Considere la ecuación diferencial $y''' - 2y'' = 0$. Encuentre tres soluciones que sean linealmente independientes. Utilice el criterio del Wronskiano para verificar la independencia. Luego escriba la solución general de la ecuación.

Solución:

Identificamos la EDO como lineal de coeficientes constantes y homogénea. Escribimos el polinomio asociado a la EDO:

$$r^3 - 2r^2$$

Tiene las raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = 2$, donde r_1 es raíz doble. Es decir,

$$r^3 - 2r^2 = r^2(r-2).$$

- La raíz $r_1 = 0$ determina las soluciones a la EDO: $y_1 = e^{0\times x} = 1$ y $y_2 = xe^{0\times x} = x$. Determina dos soluciones por ser raíz doble.
- La raíz $r_2 = 2$ determina la solución a la EDO: $y_3 = e^{2\times x}$.

Por lo tanto las tres soluciones a la EDO son:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = e^{2x}.$$

Para determinar su independencia lineal utilizamos el wronskiano:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & e^{2x} \\ 0 & 1 & 2e^{2x} \\ 0 & 0 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 1\times 1\times 4e^{2x} = 4e^{2x} \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

(Recordar: la determinante de una matriz triangular, inferior o superior, es igual a la multiplicación de los elementos de su diagonal.)

Como $W \neq 0$, entonces y_1, y_2, y_3 son linealmente independientes.

La solución general de la EDO homogénea sería la combinación lineal arbitraria de y_1, y_2, y_3, es decir:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x},$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes reales arbitrarias.

(b) (**3 ptos**) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea

$$y''' - 2y'' = 2xe^x + 3e^{2x}$$

Solución:
Sabemos que $2xe^x$ genera una solución particular de la forma

$$(Ax + B)e^x,$$

donde A, B.

Por otro lado, dado que e^{2x} es una solución de la EDO homogénea asociada (como se puede apreciar del ítem (a)) entonces $3e^{2x}$ genera una solución particular de la forma

$$axe^{2x},$$

donde a es una constante real por determinar. Entonces, la solución particular a la EDO no-homogénea tendrá la forma

$$y_p = (Ax + B)e^x + axe^{2x}.$$

Trabajemos con este y_p. Primero hallamos una fórmula para su primera derivada:

$$\begin{aligned}
y_p' &= [(Ax + B)e^x]' + [axe^{2x}]' \\
&= [(Ax + B)'e^x + (Ax + B)(e^x)'] + [(ax)'e^{2x} + ax(e^{2x})'] \\
&= [Ae^x + (Ax + B)e^x] + [ae^{2x} + 2axe^{2x}] \\
y_p' &= (Ax + A + B)e^x + (2ax + a)e^{2x}
\end{aligned}$$

Luego, derivando esta nueva fórmula, hallamos una fórmula para la segunda derivada de y_p.

$$\begin{aligned}
y_p'' = (y_p')' &= [(Ax + A + B)e^x]' + [(2ax + a)e^{2x}]' \\
&= [(Ax + A + B)'e^x + (Ax + A + B)(e^x)'] + [(2ax + a)'e^{2x} + (2ax + a)(e^{2x})'] \\
&= [Ae^x + (Ax + A + B)e^x] + [2ae^{2x} + 2(2ax + a)e^{2x}] \\
y_p'' &= (Ax + 2A + B)e^x + (4ax + 4a)e^{2x}
\end{aligned}$$

Luego, derivando esta nueva fórmula, hallamos una fórmula para la tercera derivada de y_p.

$$\begin{aligned}
y_p''' = (y_p'')' &= [(Ax + 2A + B)e^x]' + [(4ax + 4a)e^{2x}]' \\
&= [(Ax + 2A + B)'e^x + (Ax + 2A + B)(e^x)'] + [(4ax + 4a)'e^{2x} + (4ax + 4a)(e^{2x})'] \\
&= [Ae^x + (Ax + 2A + B)e^x] + [4ae^{2x} + 2(4ax + 4a)e^{2x}] \\
y_p''' &= (Ax + 3A + B)e^x + (8ax + 12a)e^{2x}
\end{aligned}$$

Luego, apoyándonos en las ecuaciones obtenidas y la forma de la EDO, hacemos los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned}
2xe^x + 3e^{2x} &= y_p''' - 2y_p'' \\
&= [(Ax + 3A + B)e^x + (8ax + 12a)e^{2x}] - 2[(Ax + 2A + B)e^x + (4ax + 4a)e^{2x}] \\
&= [(Ax + 3A + B)e^x + (8ax + 12a)e^{2x}] + [(-2Ax - 4A - 2B)e^x + (-8ax - 8a)e^{2x}] \\
&= (Ax + 3A + B - 2Ax - 4A - 2B)e^x + (8ax + 12a - 8ax - 8a)e^{2x} \\
2xe^x + 3e^{2x} &= (-Ax - A - B)e^x + 4ae^{2x}
\end{aligned}$$

(Observación: Nótese como se colectan/agrupan términos similares para facilitar, al final, la comparación del lado izquierdo de la ecuación con el derecho. También, se procura mantener el orden de A va primero, luego B. No es obligatorio, pero ayuda.)

Comparando coeficientes, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas A, B, a:

$$\begin{aligned} 2 &= -A, \\ 0 &= -A - B, \\ 3 &= 4a. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema llegamos a que $A = -2$, $B = 2$, $a = 3/4$. Finalmente, reemplazando esta información en la fórmula que define a y_p llegamos a que una solución particular a la EDO es

$$y_p(x) = (-2x + 2)e^x + \frac{3}{4}xe^{2x}.$$

(c) (**3 ptos**) Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec(x)$$

Sugerencia: $\int \tan(x)dx = \ln|\sec(x)| + C$

Solución:
Usamos el método de variación de parámetros para resolver la EDO lineal de coeficientes constantes no-homogénea.

Primero hallamos la solución general a la EDO homogénea asociada:

$$3y'' - 6y' + 6y = 0$$

Conviene re-escribirla en su forma normal

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Vemos que su ecuación polinomial asociada $r^2 - 2r + 2$ tiene dos raíces complejas conjugadas: $r = 1 \pm \sqrt{-1}$. Por lo tanto la solución a la EDO homogénea está generada por $y_1 = e^x \cos x$ y $y_2 = e^x \sin x$.

Recordar: La ecuación diferencial inicial se debe escribir en su forma normal, entonces

Sea $f(x) = \frac{1}{3}e^x \sec x$. Ahora calculamos las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\cos x + \sin x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}(\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x)) - e^{2x}(\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)) \\ &= e^{2x}(\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) - \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)) \\ &= e^{2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e^x \sin x \\ \frac{1}{3}e^x \sec x & e^x(\cos x + \sin x) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}e^{2x} \tan x. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e^x \cos x & 0 \\ e^x(\cos x - \sin x) & \frac{1}{3}e^x \sec x \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}e^{2x}
\end{aligned}
$$

Sabemos, del método de variación de parámetros, que la solución particular que estamos buscando está dada por la fórmula

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

donde

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}e^{2x}\tan x}{e^{2x}}dx = -\int \frac{1}{3}\tan x dx = -\frac{1}{3}\ln|\sec(x)|$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{\frac{1}{3}e^{2x}}{e^{2x}}dx = \int \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}x$$

(Observación: en este caso no es necesario poner las constantes de integración.)

Por lo tanto,

$$y_p = -\frac{1}{3}\ln|\sec x|e^x \cos x + \frac{1}{3}xe^x \sin x.$$

Finalmente, la solución general a la EDO es

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1y_1 + c_2y_2 + y_p \\
&= c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x - \frac{1}{3}\ln|\sec x|e^x \cos x + \frac{1}{3}xe^x \sin x,
\end{aligned}
$$

donde c_1, c_2 son constantes reales indeterminadas.

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**1.5 ptos**) Indique la ecuación diferencial que genera el campo de direcciones dado en el gráfico.

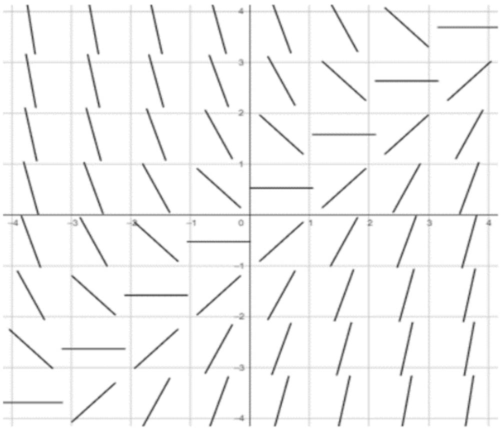
i. $y' = y$

ii. $y' = x + y$

iii. $y' = x - y$

iv. $y' = xy$

Justifique.



Solución:
Recordamos que cada segmento de recta en el plano XY que pasa por el punto (x, y) tiene inclinación igual a $f(x, y)$. Si nos enfocamos en el primer cuadrante vemos que hay segmentos de recta horizontales, i.e. con inclinación cero; en el primer cuadrante, $y > 0$, $x + y > 0$ y $xy > 0$, así que la única opción restante es $x - y$ que sí se puede anular en el primer cuadrante (lo hace en la curva recta $y = x$). Por lo tanto, la opción **(iii)** es la correcta.

(b) (**1.5 ptos**) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = x$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

hallando autovalores y autovectores.

Solución:
Re-escribimos el sistema de EDOs en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$$

De aquí vemos que $p(\lambda)$ tiene dos raíces reales distintas: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Estos son los auto-valores de A.

Sea $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ el auto-vector asociado al autovalor λ. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)v_1 \\ v_1 + (-1-\lambda)v_2 \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda = \lambda_1 = -1$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ v_1 + (0)v_2 \end{pmatrix}.$$

De lo que deducimos que $v_1 = 0$ y v_2 es libre, es decir $v = v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y el vector propio asociado a λ_1 se puede tomar como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = \lambda_2 = 1$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0v_1 \\ v_1 - 2v_2 \end{pmatrix}.$$

  De lo que deducimos que $v_1 = 2v_2$ y v_2 es libre, es decir $v = v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y el vector propio asociado a λ_1 se puede tomar como

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución general al sistema de EDOs es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} 2c_2e^t \\ c_1e^{-t} + c_2e^t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son constantes reales indeterminadas.