

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales
de orden superior. Parte I
Semana 04: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca

Sergio Quispe Rodríguez

Patricia Reynoso Quispe

Cristina Navarro Flores

Daniel Camarena Pérez

➤ Reinventa el mundo ◀



Profesores: Utec-Ciencias

Índice

- 1 **Caída de objetos con resistencia del aire**
- 2 **Ecuaciones lineales de orden superior**
- 3 **Dependencia e independencia lineal**



Objetivos

- **Modelar** el problema de caída de objetos con resistencia del aire.
- **Resolver** el problema de caída de objetos con resistencia del aire usando EDO.
- **Identificar** EDOs lineales homogéneas de orden superior.
- **Expresar** EDOs lineales de orden superior en términos de operadores diferenciales.
- **Determinar** si las soluciones de una EDO homogénea son linealmente independientes (LI) utilizando el Wronskiano

CAÍDA DE OBJETOS CON RESISTENCIA DEL AIRE

1



Logro

- **Modelar** el problema de caída de objetos con resistencia del aire. (L.3.4.2.13)
- **Resolver** el problema de caída de objetos con resistencia del aire usando EDO. (L.3.4.2.14)

Resistencia no lineal del aire

Supongamos que un objeto de masa m se suelta de una altura H . Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea del cuerpo, se tiene:

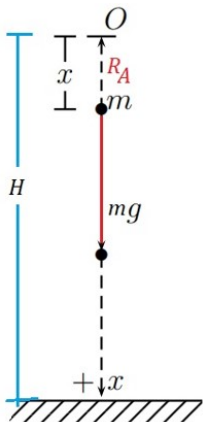
Dónde

- v : velocidad del objeto
- g : gravedad
- $R_A = kv^2$

Usando la segunda ley de Newton, se tiene

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - R_A \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m} v^2 \quad \text{EDO no lineal} \end{aligned}$$

Podemos resolver esta ecuación por separación de variables



$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int dt = t + C$$

La integral de la izquierda puede resolverse usando fracciones parciales

$$\frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{2\left(g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)} + \frac{1}{2\left(g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}$$

por lo tanto

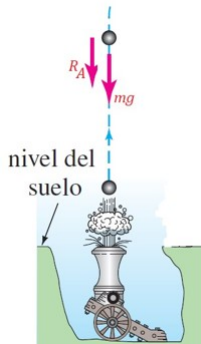
$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{2} \ln \left| g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v \right| + \frac{1}{2} \ln \left| g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v}{g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v} \right)$$

Suponiendo que el objeto parte del reposo: $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{(e^{2t} - 1)}{(1 + e^{2t})}$$

Para el alumno

1. Una pequeña bala de cañón que pesa 16 *libras* se dispara verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 300 *pies/s*, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, siendo la constante de proporcionalidad $k = 0.0003$ y $g = 32$ *pies/s*²,
 - a) Encuentre la velocidad de la bala en un instante t .
 - b) Determine la altura máxima que alcanza la bala.



ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

2



Logro

- **Identifica** EDOs lineales homogéneas de orden superior. (L.4.4.2.1)
- **Expresa** EDOs lineales de orden superior en términos de operadores diferenciales. (L.4.4.2.2)

Ecuaciones lineales homogéneas

Una EDO lineal de n -ésimo orden de la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

se dice que es homogénea si es de la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (1)$$

es decir, $g(x) = 0$. Si $g(x) \neq 0$ la EDO es no homogénea.

A su vez estas ecuaciones se separan en dos grupos: ecuaciones con **coeficientes constantes** y ecuaciones con **coeficientes variables**.

Operadores diferenciales

Llamamos a D **operador diferencial** puesto que convierte una función en su derivada:

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo

$$\text{Sea: } y(x) = 3 \cos(5x) \quad \Rightarrow \quad Dy = -15 \sin(5x)$$

$$\text{Sea: } y(x) = 2x^3 - 6x^2 \quad \Rightarrow \quad Dy = 6x^2 - 12x$$

Las derivadas de orden superior se escriben, en función del operador D , como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = D^2y$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

Así, la expresión

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

se escribe como

$$a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y$$

Más aún, podemos definir el operador diferencial polinomial L como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x),$$

el cual es un operador lineal

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\} \quad \text{¡Verifique!}$$

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial,

$$4y''' - 3y'' + 2y' - 7y = 3\cos(x) + x^2 - x$$

Se puede escribir como,

$$(4D^3 - 3D^2 + 2D - 7)y = 3\cos(x) + x^2 - x$$

En general, una ecuación no homogénea se puede escribir como

$$Ly = g(x)$$

Mientras que una ecuación homogénea se escribe como

$$Ly = 0$$

Teorema: Principio de superposición

Sean y_1, y_2, \dots, y_k soluciones de una EDO lineal de n -ésimo orden. Entonces, la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k,$$

también es una solución de la ecuación siendo c_i constantes arbitrarias.

Ejemplo

Las funciones $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{7x}$ son soluciones de la ecuación $y'' - 9y' + 14y = 0$. Por el principio de superposición, la función

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$$

también es solución de la EDO.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

3



Logro

- **Determina** si las soluciones de una EDO homogénea son linealmente independientes (*LI*) utilizando el Wronskiano. (L.4.4.2.3)

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$ es **linealmente dependiente** sobre un intervalo I si existen ciertas constantes c_1 , c_2 , \dots , c_n **no todas nulas**, tal que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

Si el conjunto no es linealmente dependiente, entonces es **linealmente independiente**.

Definición: Funciones linealmente independientes

Un conjunto de funciones es linealmente independiente (*LI*) si, la ecuación

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ejemplo

$$f_1(x) = x^{1/2} + 5$$

$$f_2(x) = x^{1/2} + 5x$$

$$f_3(x) = x - 1$$

$$f_4(x) = x^2$$

son linealmente dependientes en el intervalo $(0, +\infty)$. En efecto:

$$1f_1 - 1f_2 + 5f_3 + 0f_4 = 0$$

Ejemplo

¿Las funciones $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$?

Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$ posee al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Se llama **Wronskiano** de las funciones. El Wronskiano nos permitirá determinar si un conjunto de funciones son *LI*.

Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_n(x)$ soluciones de una EDO homogénea de n -ésimo orden en un intervalo I . Este conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

para todo x en el intervalo I .

Definición: Conjunto fundamental de soluciones

Todo conjunto $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_n(x)$ de n soluciones linealmente independientes de una EDO homogénea de n -ésimo orden se llama conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo

Las funciones $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de

$$y'' - 9y = 0; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Se observa que

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Por lo tanto, las soluciones son *LI*.

Ejemplo

Las funciones $y_1(x) = e^x \sin(x)$, $y_2(x) = e^x \cos(x)$ ¿Son linealmente independientes? Se observa que

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^x \sin(x) & e^x \cos(x) \\ e^x \sin(x) + e^x \cos(x) & e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \end{vmatrix} \\ &= -e^{2x} \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones son *LI* en $(-\infty, +\infty)$.

Para el alumno

Compruebe que las funciones

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = e^{4x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

forman un conjunto fundamental de la ecuación

$$y'' - y' - 12y = 0.$$

Sugerencia: Debe demostrar que las funciones son soluciones y que son LI .

Conclusiones

- 1 Se determinó la solución de una ecuación diferencial para el modelo de la caída de un objeto con resistencia del aire y se analizó la influencia en el tiempo de caída.
- 2 Las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior se pueden clasificar como homogéneas y no homogéneas.
- 3 El Wronskiano ayuda a determinar si un conjunto de funciones son LI .
- 4 El orden de una EDO lineal determina la cantidad de funciones de su conjunto fundamental.

Gracias

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

