Ecuaciones diferenciales

ED exactas y modelos de primer orden

Semana 02: Teoría

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

UTEC

Índice

Objetivos

- **Identificar** una ecuación diferencial exacta.
- **Resolver** una ecuación diferencial exacta.
- **Identificar** modelos de problemas reales expresados como ED lineales de primer orden.
- **Resolver** modelos de problemas reales expresados como ED lineales de primer orden usando el método de variables separables.

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1

Logros

- **Identifica** una ecuación diferencial exacta. (L.2.2.2.5)
- **Resuelve** una ecuación diferencial exacta. (L.2.2.2.6)

Conceptos preliminares

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces su diferencial está dado por la expresión

$$dz = d(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si en particular $f(x, y) = C$, donde C es una constante, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{1}$$

Por otro lado, dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

Podemos hacer una comparación entre las ecuaciones (1) y (2).

Ecuaciones exactas

Dada la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

Se puede argumentar que, de forma general, la solución está definida implícitamente por $f(x,y) = C$, siendo C una constante. Calculando el diferencial de esta última expresión, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{4}$$

Por lo tanto, si se cumple que

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \tag{5}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \tag{6}$$

entonces la expresión $f(x,y) = C$ define la solución de (3).

Derivando (5) y (6) respecto de y y x, respectivamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

¡Condición importante!

Algunos comentarios

- La condición importante es una consecuencia de suponer que la solución de la ecuación (3) es de la forma $f(x, y) = C$.
- ¿Será posible aplicar este método a cualquier ecuación de la forma dada por (3)?
- Dada una ecuación como (3), ¿Cómo hallamos la función $f(x, y)$?

Definición

La ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

es **exacta** si se satisface que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \leftarrow \text{Condición importante}$$

Solución de una ecuación exacta: Si encontramos una función $f(x,y)$, que cumple con

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \tag{8}$$

Entonces, la solución de la ecuación (7) está dada por $f(x,y) = C$.
Siempre que la ecuación sea exacta, es posible hallar $f(x,y)$ a partir de las ecuaciones (8).

Ejercicios

1. Resolver la siguiente ED:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}, \qquad y(0) = 2$$

Solución:

- **Paso 1:** Llevamos la ecuación a una forma equivalente e identificamos $M(x,y)$ y $N(x,y)$

$$(\cos(x)\sin(x) - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad M(x,y) = \cos(x)\sin(x) - xy^2$$
$$\Rightarrow \quad N(x,y) = y(1-x^2)$$

- **Paso 2:** Verificamos si es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x)\sin(x) - xy^2) = -2xy$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y(1-x^2)\right] = -2xy$$

La ecuación es exacta.

- **Paso 3:** Debido a que la ecuación es exacta, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \cos(x)\sin(x) - xy^2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = y(1 - x^2) \tag{10}$$

- **Paso 4:** Integramos la ecuación (9) respecto de x:

$$f(x,y) = \int (\cos(x)\sin(x) - xy^2)dx + g(y) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y) \tag{11}$$

- **Paso 5:** Derivamos la ecuación (11) respecto de y y usamos la ecuación (10):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)\right] = -x^2y + \frac{dg(y)}{dy} = y - x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dg(y)}{dy} = y$$

- **Paso 6:** Hallamos $g(y)$ integrando respecto de y:

$$g(y) = \frac{y^2}{2} \tag{12}$$

- **Paso 7:** Reemplazando (12) en (11) obtenemos $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2}$$

Finalmente, la solución del problema es

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

- **Paso 8:** Usamos la condición inicial

$$\frac{1}{2}\sin^2(0) - \frac{1}{2}(0)^2(2)^2 + \frac{2^2}{2} = C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Resultando la solución

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = 2$$

2. Resolver la siguiente ED:

$$\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)\, dy = 0$$

Solución:

- **Paso 1:** Se cumple que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$. Luego, la ED es Exacta.
- **Paso 2:** Escogemos una de las funciones, M o N. En este caso escogeremos M y la integramos respecto de x:

$$f(x,y) = \int \left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx = y \ln x + 3x^2 + h(y)$$

- **Paso 3:** Recordamos que $h(y)$ es constante para x. Luego, derivamos esta función $f(x,y)$ respecto a la variable y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln x - 2 = N$$

- **Paso 4:** Recordamos que esta derivada parcial en función a y es igual a N.

$$\ln x + h'(y) = \ln x - 2 \quad \Rightarrow \quad h(y) = \int -2dy = -2y$$

$$\text{Luego:} \quad f(x,y) = y\ln x + 3x^2 - 2y = C$$

Ejercicios Propuestos

Determine la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$
2. $(4x^3y - 15x^2 - y)dx + (x^4 + 3y^2 - x)dy = 0$
3. $(2y^2 + 3x)dx + (4xy + 3y^2)dy = 0$
4. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + y^6)dy = 0$

Respuestas:

1. $c = x^3y + xe^y - y^2$
2. $c = x^4y - 5x^3 - xy + y^3$
3. $c = 2xy^2 + \frac{3}{2}x^2 + y^3$
4. $c = y^2 senx - x^3y - x^2 + \frac{y^7}{7}$

MODELOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

2

Logros

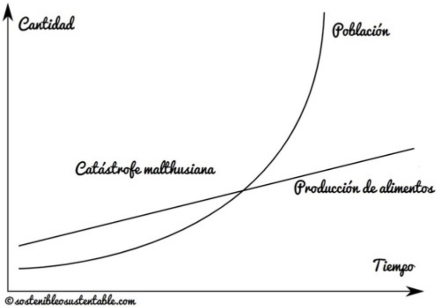
- **Identifica** modelos de problemas reales expresados como EDOs. (L.3.2.2.1)
- **Resuelve** modelos de problemas reales expresados como EDOs usando el método de variables separables. (L.3.2.2.2)

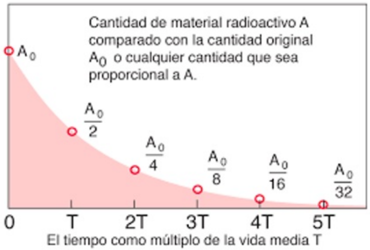
Dinámica Poblacional y Decaimiento Radiactivo

- El modelo de dinámica poblacional propuesto por el inglés Tomás Malthus indica que la tasa de crecimiento de una población (que no se ve afectada por algún medio externo) es proporcional a la población existente en un determinado momento (bacterias que crecen en una placa de Petri, por ejemplo).
- El modelo de decaimiento radiactivo supone que la velocidad dA/dt a la que se desintegran los núcleos de una sustancia es proporcional a la cantidad (más exactamente, al número de núcleos) $A(t)$ de la sustancia que queda en el tiempo t:

Dinámica Poblacional	Decaimiento Radiactivo
$\frac{dP}{dt} = kP$	$\frac{dA}{dt} = kA$
La constante "k" es positiva	*La constante "k" es negativa*

- En la gráfica de la izquierda se ve el crecimiento de una población determinada sin ninguna restricción ni agente externo que afecte su crecimiento.
- En la gráfica de la derecha se ve la cantidad de material radiactivo en el transcurso del tiempo.





Ejercicios

1. La población de un pueblo crece con una razón proporcional a dicha población en el instante t. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?.

   Solución:

   - **Paso 1:** Construir la ecuación diferencial

   $$\frac{dP}{dt} = kP$$

   - **Paso 2:** Identificar la condición inicial y el dato adicional

   $$P(0) = 500 \qquad P(10) = 500 + 15\%(500) = 575$$

   - **Paso 3:** Separar las variables

   $$\frac{dP}{P} = kdt$$

   - **Paso 4:** Aplicar integrales

   $$\int \frac{1}{P} dP = \int kdt \quad \Rightarrow \quad P = Ae^{kt}$$ *Continuar...*

2 El isótopo radioactivo del plomo Pb-209 decae con una razón proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90%?

Solución:

- **Paso 1:** Construir la ecuación diferencial: $\frac{dX}{dt} = kX$
- **Paso 2:** Identificar la condición inicial y el dato adicional: $X(0) = 1, X(3.3) = 0.5$
- **Paso 3:** Separar las variables y aplicar integrales:

$$\int \frac{1}{X} dX = \int k dt \quad \Rightarrow \quad \ln|X| = kt + C_1$$

$$\Rightarrow e^{ln|X|} = e^{kt+C_1} \quad \Rightarrow \quad |X| = e^{kt+C_1}$$

$$\Rightarrow \quad X = Ae^{kt}$$

- **Paso 4:** Usar las condiciones del paso 2:

$$X(0) = Ae^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$X(3.3) = e^{3.3k} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3.3} \ln(0.5) = -0.21$$

$$\Rightarrow \quad X(t) = e^{-0.21t}$$

- **Paso 5:** Se busca el tiempo t tal que la masa $X(t)$ de plomo en ese instante se el 10% de la cantidad inicial (decae el 90%).

$$\begin{aligned} 0.1 = e^{-0.21t} \quad &\Rightarrow \quad \ln(0.1) = \ln\left(e^{-0.21t}\right) \\ \ln(0.1) = -0.21t \quad &\Rightarrow \quad t = 10.96 \end{aligned}$$

Finalmente, debe transcurrir aproximadamente 11 horas para que decaiga el 90% del plomo inicial.

3 **Datado mediante C-14.** Este procedimiento se basa en el hecho de que el isótopo C-14 se va desintegrando de un cuerpo desde el día de su fallecimiento. El modelo de decaimiento radioactivo que se basa en el modelo de Malthus nos indica que la tasa de desintegración del C-14 es proporcional a la cantidad de C-14 presente en ese instante y se sabe que la vida media del C-14 es igual a 5730 años.
Si se encuentra un hueso fosilizado que contiene 0.1% de su cantidad original de C-14, determine la edad del fósil.

Solución:

- **Paso 1:** Identificar el modelo. De acuerdo con el enunciado y el resultado del ejercicio anterior, la masa del C-14 está dado por

$$A(t) = A_0 e^{kt}, \qquad \text{donde } k \text{ es la constante de decaimiento}$$

- **Paso 2:** Determinar el valor de k. A partir del dato de vida media del C-14,

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{5730k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{5730k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{5730} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

- **Paso 3:** Se busca el tiempo "t" tal que la masa $A(t)$ del C-14 en ese instante sea el 0.1% de la cantidad inicial A_0:

$$\frac{0.1}{100}A_0 = A_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{5730}t}$$
$$\Rightarrow t = \frac{5730}{\ln(0.5)} \ln\left(\frac{0.1}{100}\right) = 57104$$

Finalmente, se obtiene que la edad del fósil es de 57104 años, aproximadamente.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

La velocidad a la que cambia la temperatura de un cuerpo **es proporcional** a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio circundante, la llamada temperatura ambiente.

Si $T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, T_m la temperatura del ambiente y dT/dt la razón con la cual la temperatura del cuerpo cambia, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{13}$$

Para analizar:

En cualquier caso, enfriamiento o calentamiento, si T_m es una constante se tiene que $k < 0$.

Ejemplo

Un cuerpo que tiene una temperatura de $70^\circ F$ es depositado (en el instante $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $40^\circ F$. Después de 3 minutos, la temperatura del cuerpo ha disminuido a $60^\circ F$.

- ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos?
- ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga $50^\circ F$ de temperatura?

Solución:

- **Paso 1:** Se plantea la ecuación diferencial que rige este fenómeno.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

- **Paso 2:** Identificar la condición inicial y los datos adicionales.

$$T(0) = 70^\circ F, \qquad T_m = 40^\circ F, \qquad T(3) = 60^\circ F$$

- **Paso 3:** Resolver la ecuación del paso 1. Sugerencia: Use separación de variables.

$$T(t) = Ce^{kt} + T_m$$

- **Paso 4:** Utilizar los datos del paso 2.

$$T(t) = Ce^{kt} + 40$$
$$\Rightarrow T(0) = C + 40 = 70 \quad \Rightarrow \quad C = 30$$

Además

$$T(3) = 30e^{3k} + 40 = 60$$
$$\Rightarrow 30e^{3k} = 20 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{20}{30}\right) = -0.1352$$

Por lo tanto, la temperatura del cuerpo está dado por:

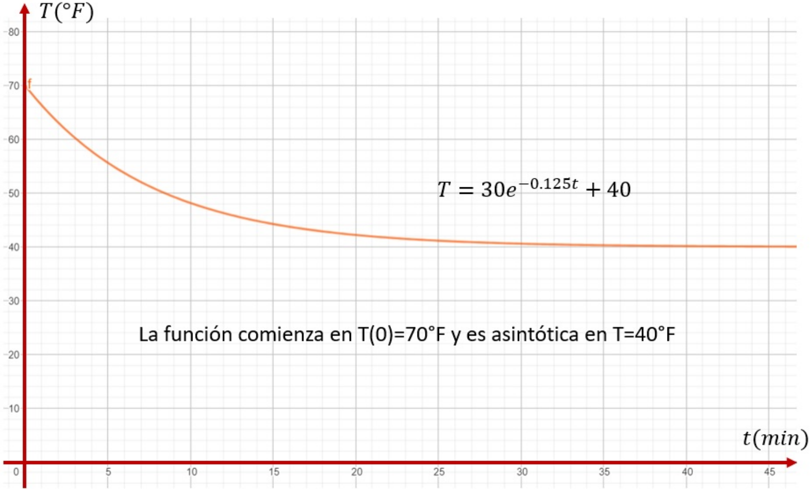
$$T(t) = 30e^{-0.1252t} + 40$$

- **Paso 5:** Responda las preguntas.

$$T(5) = 55.26^{\circ}F$$

$$T(t) = 50 \quad \Rightarrow \quad t = 8.13 \text{ min}$$

Solución



$T(°F)$
80
70
60
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
$T = 30e^{-0.125t} + 40$
La función comienza en T(0)=70°F y es asintótica en T=40°F
$t(min)$

Conclusiones

1. Si se reconoce que una ecuación diferencial es exacta siempre se puede obtener una solución a la ecuación, en la mayoría de casos la solución es implícita.
2. Existen varios modelos de problemas reales que pueden ser expresados como ecuaciones diferenciales
3. Los modelos vistos hasta ahora, como el crecimiento poblacional o el enfriamiento de Newton, pueden ser resueltos usando separación de variables.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA