Ecuaciones diferenciales

Campos direccionales

Método de variables separables

Semana 01: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca

Sergio Quispe Rodríguez

Patricia Reynoso Quispe

Cristina Navarro Flores

Daniel Camarena Pérez

Índice

1 Campos direccionales
2 ED de primer orden autónomos
3 Variables separables

Objetivos

- **Determinar** el campo direccional de ecuaciones diferenciales.
- **Graficar** campos direccionales.
- **Identificar** la curva solución conociendo el campo de direcciones.
- **Identificar** y resolver ecuaciones diferenciales autónomos.
- **Identificar** si una ED es de variable separable.
- **Resolver** una ED de variables separable.

1

CAMPOS DIRECCIONALES

Logros

- **Determina** el campo direccional de ecuaciones diferenciales. (L.1.1.2.3)
- **Grafica** campos direccionales. (L.1.1.2.4)
- **Identifica** la curva solución conociendo el campo de direcciones. (L.1.1.2.5)

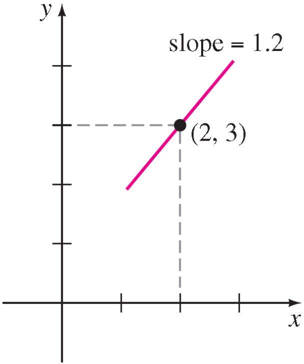
Campo direccional

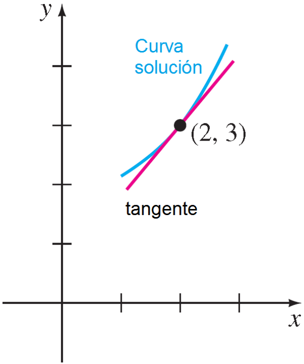
- **Introducción:**
  Iniciamos nuestro estudio de las ED de primer orden analizando una ED *cualitativamente.*
- **Pendiente:**
  La derivada $\frac{dy}{dx}$ de $y = y(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente en un punto.

Elemento lineal: Supongamos que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)).$$

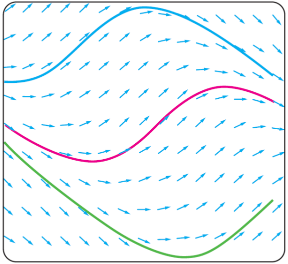
El valor de la función $f(x, y)$ representa la pendiente de la recta, visualizada como un segmento de recta llamado **elemento lineal.**





- Si evaluamos f sobre una malla rectangular de puntos, y dibujamos un elemento lineal en cada punto (x, y) con pendiente $f(x, y)$, entonces la colección es llamada **campo direccional** o **campo pendiente** de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$



Ejemplo

Usando un CAS dibuje el campo direccional de $\dfrac{dy}{dx} = 0.2xy$

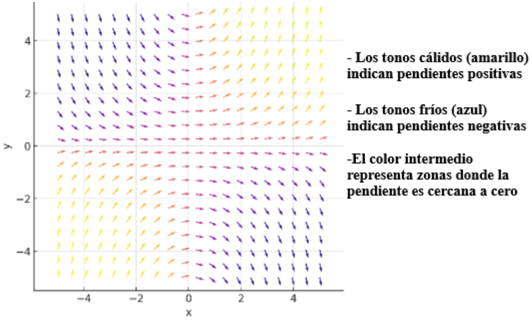


Figure: Campo direccional

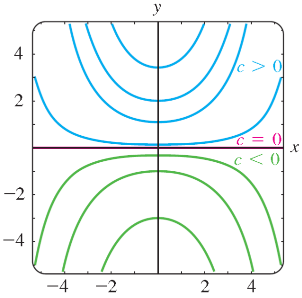


Figure: Familia de soluciones: $y = ce^{0.1x^2}$

Ejercicio - Instrucciones para graficar sin CAS

Utilice el campo direccional para dibujar una curva solución aproximada para el problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = \sin(y), \quad y(0) = -\frac{3}{2}$.

- Trabajaremos con la ecuación diferencial:

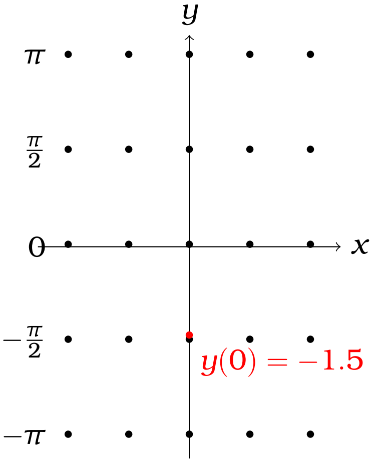
$$\frac{dy}{dx} = \sin(y)$$

- Elige una cuadrícula de puntos con valores de y representativos:

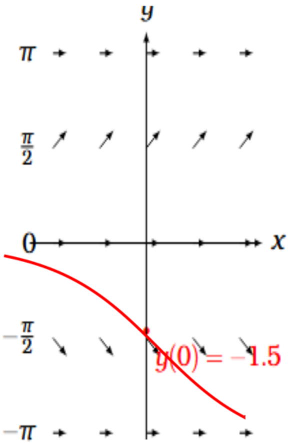
$$y = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

- Calcula $\sin(y)$ para cada valor:
  - $\sin(-\pi) = 0 \Rightarrow$ pendiente horizontal
  - $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \Rightarrow$ pendiente negativa
  - $\sin(0) = 0 \Rightarrow$ pendiente horizontal
  - $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow$ pendiente positiva
  - $\sin(\pi) = 0 \Rightarrow$ pendiente horizontal
- Dibuja segmentos con esa pendiente en cada punto de la malla

Cuadrícula para graficar el campo direccional



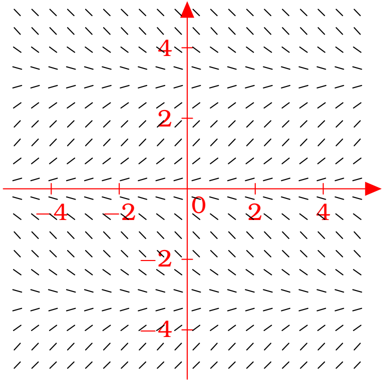
Cuadrícula para graficar el campo direccional



Curva solución aproximada $y(0) = -\frac{3}{2}$

Ejercicio

Utilice el campo direccional para dibujar una curva solución aproximada para el problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = \sin(y), \quad y(0) = -\frac{3}{2}$.



ED DE PRIMER ORDEN AUTÓNOMAS

2

Logro

- **Identifica** y **resuelve** ecuaciones diferenciales autónomas. (L.1.1.2.6)

ED autónomas

Una ED

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(y) \tag{1}$$

libre de la variable independiente es denominada **autónoma** (Si $x = t$ significa independiente del tiempo).

Ejemplos

- Autónoma

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

- No autónoma

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

Ejemplos de ecuaciones autónomas

- $\dfrac{dA}{dt} = kA,$ Decaimiento radioactivo
- $\dfrac{dx}{dt} = kx(n+1-x),$ Propagación de una enfermedad
- $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right),$ Ley de enfriamiento de newton
- $\dfrac{dA}{dt} = 6 - \frac{1}{100}A,$ Mezclas.

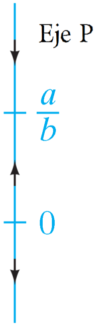
Puntos críticos

- Los ceros en f en (1) son importantes. Si $f(c) = 0$, entonces c es un **punto crítico, punto de equilibrio** o **punto estacionario.**
- Si substituimos $y(x) = c$ en (1), entonces tenemos $0 = f(c) = 0$.
- Entonces: Si c es un punto crítico, entonces $y(x) = c$ es una solución de (1)
- Una solución constante $y(x) = c$ de (1) es llamada **solución de equilibrio**.

Ejemplo

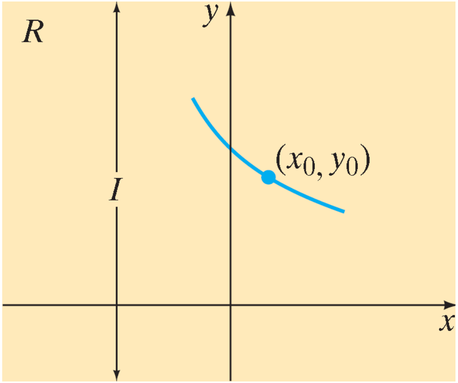
Analizar las soluciones de equilibrio de la siguiente ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

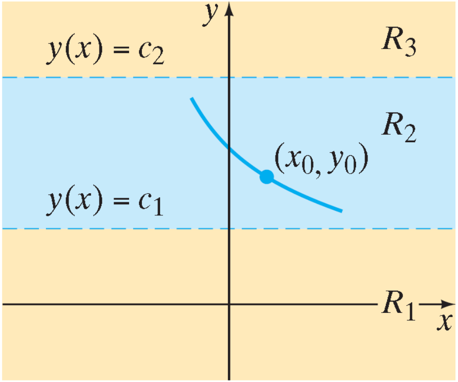


Algunas discusiones sin prueba

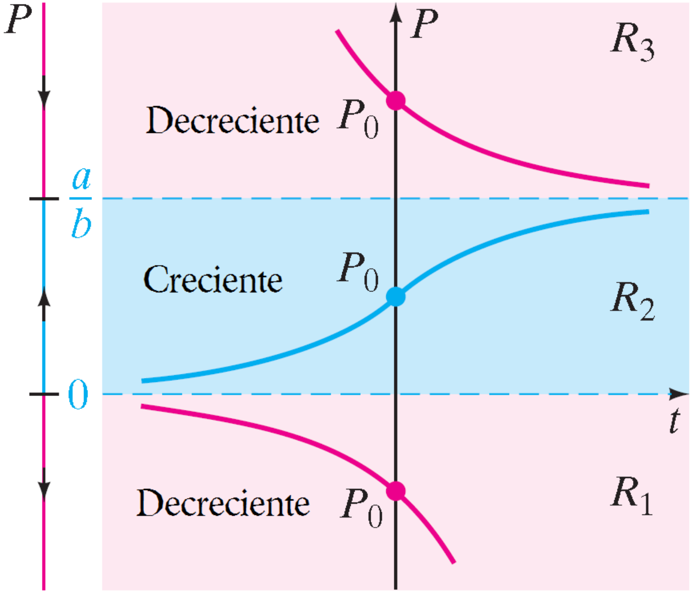
- Si garantizamos la existencia y unicidad de (1) en cualquier punto (x_0, y_0) en $\mathcal{R}$, entonces existe una única curva solución.



- Si (1) posee exactamente dos puntos críticos c_1 y c_2 $(c_1 < c_2)$, las soluciones $y(x) = c_1$, $y(x) = c_2$ dividen $\mathcal{R}$ en tres regiones



- Si (x_0, y_0) está en R_i, $i = 1, 2, 3$, la solución $y(x)$ que pasa por (x_0, y_0), permanecerá en la misma subregión.
- Por continuidad de f, $f(y)$ no puede cambiar de signo en una subregión
- Puesto que $\frac{dy}{dx} = f(y(x))$ es o positivo o negativo en R_i, una solución $y(x)$ es **monótona.**
- Si $y(x)$ está acotado por c_1 ($y(x) < c_1$), la gráfica de $y(x)$ se aproximará a $y(x) = c_1$. Si $c_1 < y(x) < c_2$, se aproximará a $y(x) = c_1$ y $y(x) = c_2$; Si $c_2 < y(x)$, se aproximará a $y(x) = c_2$.



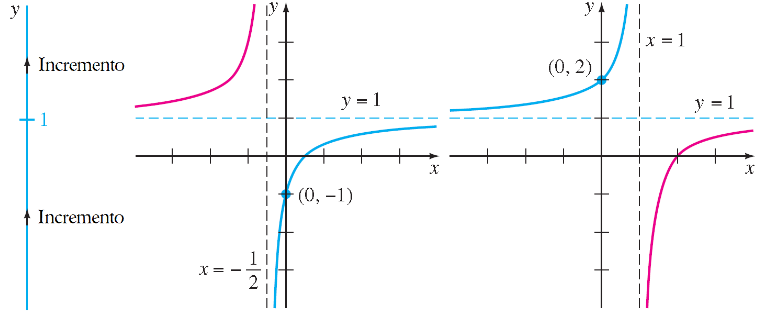
P
P
R_3
Decreciente
P_0
$\frac{a}{b}$
Creciente
P_0
R_2
0
t
Decreciente
P_0
R_1

Ejemplo

Analice la solución de la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2 \,, \quad y(0) = y_0$$

Solución:

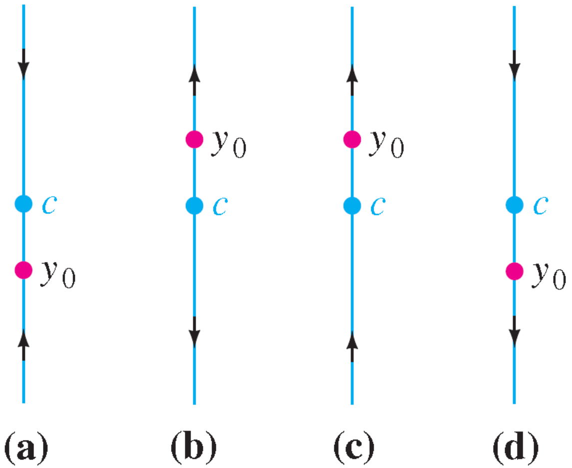


(a) linea de fase

(b) plano xy $y(0) < 1$

(c) plano xy $y(0) > 1$

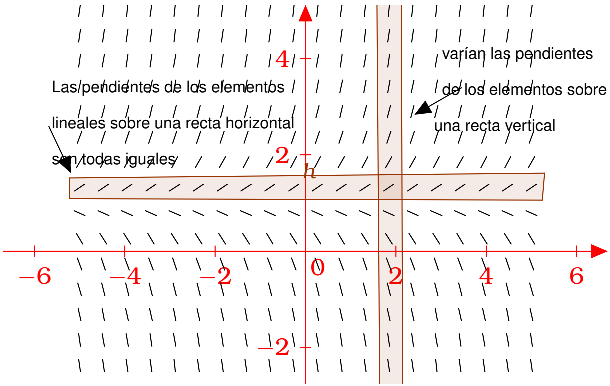
Atractores y repulsores



Atractores y repulsores

- En la figura (a) cuando y_0 yace sobre uno de los lados de c, $y(x)$ se aproximará a c. Esta clase de puntos críticos se llama **asintóticamente estable.**
- En la figura (b), cuando y_0 yace a una lado de c, $y(x)$ se moverá lejos de c. Esta clase de puntos críticos se llama **inestable**, o **repulsores.**
- En la figura (c) y (d), cuando $y_0$yace sobre uno de los lados de c, la solución será atraida a c y repelida del otro lado. Esta clase de puntos críticos es llamado **semiestable**

ED autónomas y campos direccionales

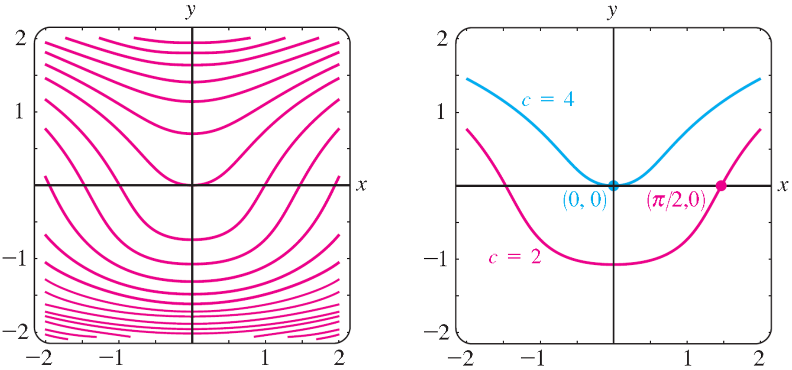


Uso de la computadora

Al resolver la ecuación

$$\left(e^{2y}-y\right)\cos(x)\frac{dy}{dx}=e^{y}\sin(2x)$$

encontramos que la solución está dada por $G(x,y)=e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}+2\cos(x)=c$.
Usando un software, podemos dibujar las curvas de nivel de $G(x,y)=c$.



UTEC

VARIABLES SEPARABLES

3

Logros

- **Identifica** si una ED es de variable separable. (L.2.1.2.1)
- **Resuelve** una ED de variables separable. (L.2.1.2.2)

ED de variables separables

Una ED de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

se dice que es separable o tiene variables separables.

Ejemplos. ¿Las siguientes ecuaciones son de variable separable?

- $\dfrac{dy}{dx} = y^2xe^{3x+4y}$
- $\dfrac{dy}{dx} = y + \sin(x)$

Procedimiento de solución

Dada la ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

para resolverla se debe hacer lo siguiente:

- **Paso 1:** Separar las variables

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

- **Paso 2:** Aplicar integrales en ambas partes de la ecuación anterior

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

- **Paso 3:** Integrar. La solución general está dada por las antiderivadas, es decir,

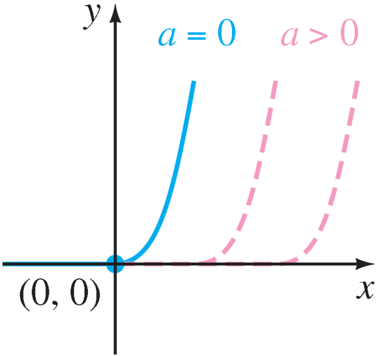
$$H(y) = G(x) + C$$

Ejemplo

Dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = a$$

La solución es: $y(x) = \frac{x^4}{16} + c\frac{x^2}{4} + \frac{c^2}{4}$. Por lo tanto, el gráfico resultante es



Ejercicios

Resolver las ecuaciones

- $$(1+x)dy - ydx = 0$$
- $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Pérdida de una solución

Dada la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Cuando r es cero de $h(y)$, entonces $y = r$ es también una solución de la ecuación. Sin embargo, esta solución no aparecerá en la integración. Esta es llamada **solución singular.**

Ejemplos

Indicar, en caso haya, las soluciones singulares de la siguientes ecuaciones

- $$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$
- $$\left(e^{2y} - y\right)\cos(x)\frac{dy}{dx} = e^{y}\sin(2x).$$

Soluciones definidas por integrales

Si g es una función continua en un intervalo abierto I que contiene a x_0, entonces el PVI

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene por solución a

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Para el alumno

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-x^2}, \quad y(3) = 5$$

Solución:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 5 + \frac{1}{2}e^{-9}$$

Conclusiones

1. El campo direccional de una ecuación de la forma $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ permite conocer el comportamiento de la solución.
2. Encontrar puntos críticos resulta equivalente a hallar soluciones constantes. En ciertos casos es de interés analizar el comportamiento de la solución alrededor de los puntos críticos.
3. Las ecuaciones de variables separables se resuelven integrando a cada lado de la ecuación.

Bibliografía

- Dennis G. Zill (2015). *Ecuaciones diferenciales con con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning. 10ma ed.
- Edwards, Jr. Penny David (2008). *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Pearson College.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA