# Ecuaciones Diferenciales

**Examen Parcial 2024-1. Tiempo: 100 minutos**

---

## Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

# 1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

## Problema 1

Un mezcla salina en un tanque inicialmente contiene 50 *gramos* de sal en 4 *litros* de agua, si se agrega otra mezcla salina a una velocidad de 3 *litros* por *minuto*, con una concentración de 8 *gramos* por *litro*. Además esta mezcla bien agitada se drena a una velocidad de 1 *litro* por *minuto*.

(a) (**3 ptos**) Determine las ecuaciones diferenciales para el volumen y para la cantidad de sal en función del tiempo. Indique la cantidad inicial de sal en el tanque.
**Solución.** Como las velocidades de entrada y de salida son diferentes, el volumen de solución dentro del tanque $V(t)$ para un tiempo $t$, varía de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \text{vel. de entrada} - \text{vel. de salida}\\ &= 3 - 1 = 2\,,\end{aligned}$$

donde $V(0) = 4$.
Por otro lado, sea $A(t)$ la cantidad de sal(en gramos) dentro del tanque para un tiempo $t$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \left(8\frac{\text{g}}{\text{lt}}\right)\left(3\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{A}{V}\frac{\text{g}}{\text{lt}}\right)\left(1\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right)\\ &= 24 - \frac{A}{V} \qquad (1)\end{aligned}$$

con $A(0) = 50$.

(b) (**3 ptos**) Resuelva las ecuaciones diferenciales, determinando una expresión para el volumen y la sal en función del tiempo $t$.
**Solución.** Para la ecuación del volumen, resolvemos mediante separación de variables:

$$\begin{aligned}dV &= 2dt\\ \int dV &\int 2dt\\ V &= 2t + C\end{aligned}$$

Como $V(0) = 4$, obtenemos $C = 4$ y así $V(t) = 4 + 2t$.
Escribimos la EDO (1) en su forma estándar:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{4+2t} = 24$$

Vamos a resolver con el método de factor integrante, para ello calculemos:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int \frac{1}{4+2t} dt}\\ &= e^{\frac{1}{2}\ln(4+2t)}\\ &= (4+2t)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Luego, la solución general es:

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{1}{\mu(t)} \int 24\mu(t)\, dt\\ &= 24(4+2t)^{-\frac{1}{2}} \int (4+2t)^{\frac{1}{2}}\, dt\\ &= 24(4+2t)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{6}(4+2t)^{\frac{3}{2}} + C\right]\\ &= 8(4+2t) + 24C(4+2t)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Sabemos que $A(0) = 50$, entonces:

$$\begin{aligned}50 &= 8(4) + 24C(4)^{-\frac{1}{2}}\\ C &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos:

$$A(t) = 8(4+2t) + 36(4+2t)^{-\frac{1}{2}}$$

## Problema 2

Se tiene agua purificada en un bidón de 20 litros. Se sabe que la razón con la que se consume el agua ($litro/dia$) es directamente proporcional tanto a la cantidad consumida como a la cantidad no consumida hasta ese instante. Además se observó que la cantidad consumida en el primer día fue de 3 $litros$.

(a) (**3 ptos**) Encuentre la ecuación diferencial que modela el problema de consumo $C(t)$ donde $t$ es el tiempo en días. Indique la condición inicial del problema.
**Solución.** Sea $C(t)$ la cantidad de agua consumida hasta el tiempo $t$ (dias). En base a la información brindada en el ejercicio, se tiene la siguiente EDO:

$$\frac{dC}{dt} = K \cdot C \cdot (20 - C)\,,$$

donde $C(1) = 3$ y $K$ es una constante de proporcionalidad.

(b) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación del ítem anterior.
**Solución** Resolveremos mediante el método de variables separables:

$$\frac{dC}{C(20-C)} = K dt$$

Utilizamos fracciones parciales para descomponer $\dfrac{1}{C(20-C)}$, es decir:

$$\frac{1}{C(20-C)} = \frac{A}{C} + \frac{B}{20-C}\,.$$

De donde $A = B = \dfrac{1}{20}$, luego:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{20C} + \frac{1}{20(20-C)}\right) dC &= K dt \\
\int \left(\frac{1}{20C} + \frac{1}{20(20-C)}\right) dC &= \int K dt \\
\frac{1}{20}\ln|C| - \frac{1}{20}\ln|20-C| &= Kt + M \\
\ln\left|\frac{C}{20-C}\right| &= 20Kt + 20M \\
\frac{C}{20-C} &= \overline{M}e^{20Kt}
\end{aligned}$$

Por la condición inicial, sabemos que $C(1) = 3$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{20-3} &= \overline{M}e^{20K} \\
\overline{M} &= \frac{3e^{-20K}}{17}
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos: $C(t) = \dfrac{20\overline{M}e^{20Kt}}{1+\overline{M}e^{20Kt}} = \dfrac{60e^{20K(t-1)}}{17+3e^{20K(t-1)}}$ .

## Problema 3

(a) (**2 ptos**) Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$ que tiene como conjunto fundamental $\{e^x \cos 2x,\ e^x \sin 2x\}$. Determine si las funciones fundamentales son linealmente independientes. Use el criterio del Wronskiano.

**Solución.** Definimos las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^x \cos(2x) \\
f_2(x) &= e^x \sin(2x)
\end{aligned}$$

luego el wronskiano será:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \left|\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} e^x\cos(2x) & e^x\sin(2x) \\ e^x[\cos(2x) - 2\sin(2x)] & e^x[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \end{pmatrix}\right| \\
&= e^{2x}[\sin(2x)\cos(2x) + 2\cos^2(2x)] - e^{2x}[\sin(2x)\cos(2x) - 2\sin^2(2x)] \\
&= 2e^{2x} \neq 0\,, \text{para todo } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego, las funciones $f_1$ y $f_2$ son linealmente independientes.

(b) (**3 ptos**) Resuelve la ecuación diferencial usando el Método de los coeficientes indeterminados – Método del anulador

$$y'' - 2y' - 3y = 16xe^{3x} + 4e^{-x} \tag{2}$$

**Solución.** Primero resolvamos la EDO homogénea:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Luego, la ecuación auxiliar es $r^2 - 2r - 3 = 0$ y las soluciones de esta ecuación son $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Así, la solución homogénea es:

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

Por otro lado, notemos que el operador que anula el término $16xe^{3x}$ es

$$(D-3)^2\,,$$

mientras que el término $4e^{-x}$ es anulado por

$$(D+1)$$

Además podemos escribir la EDO original en términos del operador diferencial:

$$(D+1)(D-3)y = 16xe^{3x} + 4e^{-x}$$
$$\boldsymbol{(D-3)^2(D+1)}(D+1)(D-3)y = 0 \tag{3}$$

La solución de (3) es $C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{3x}+C_4xe^{3x}+C_5x^2e^{3x}$, pero el primer y tercer término corresponden a $y_h$, por lo tanto la solución particular de la EDO no homogénea será:

$$y_p = Axe^{-x} + Bxe^{3x} + Cx^2e^{3x}$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
y_p' &= A(e^{-x} - xe^{-x}) + B(e^{3x} + 3xe^{3x}) + C(2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}) \\
&= Ae^{-x} + Be^{3x} - Axe^{-x} + (3B+2C)xe^{3x} + 3Cx^2e^{3x} \\
y_p'' &= -Ae^{-x} + 3Be^{3x} - A(e^{-x} - xe^{-x}) + (3B+2C)(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 3C(2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}) \\
&= -2Ae^{-x} + (6B+2C)e^{3x} + Axe^{-x} + (9B+12C)xe^{3x} + 9Cx^2e^{3x}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2) y simplificando:

$$-4Ae^{-x} + (4B+2C)e^{3x} + 8Cxe^{3x} = 16xe^{3x} + 4e^{-x}$$

Luego, igualando ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-4A &= 4 \\
8C &= 16 \\
4B + 2C &= 0
\end{aligned}$$

Es decir $A = -1, B = -1, C = 2$. Finalmente la solución general de nuestra EDO no homogénea es:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\
&= C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - xe^{-x} - xe^{3x} + 2x^2e^{3x}
\end{aligned}$$

(c) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$
**Solución.** Calculemos la solución homogénea, para ello resolvamos:

$$y'' + 4y + 4 = 0$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 4 = 0$, de donde se obtiene la solución $r = -2$ con multiplicidad dos. Así la solución homogénea es,

$$y_h = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$$

Identificamos $y_1(t) = e^{-2t}$ , $y_2(t) = te^{-2t}$. Sea $y_p(t) = u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$ la solución particular, luego:

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{-2t} \\ t^{-2}e^{-2t} & (e^{-2t} - 2te^{-2t}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (e^{-2t} - 2te^{-2t}) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-t^{-1}e^{-4t}}{e^{-4t}} \\
&= -t^{-1} \qquad (4) \\
u_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & t^{-2}e^{-2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (e^{-2t} - 2te^{-2t}) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{t^{-2}e^{-4t}}{e^{-4t}} \\
&= t^{-2} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Luego de resolver las EDOs (4) y (5) obtenemos:

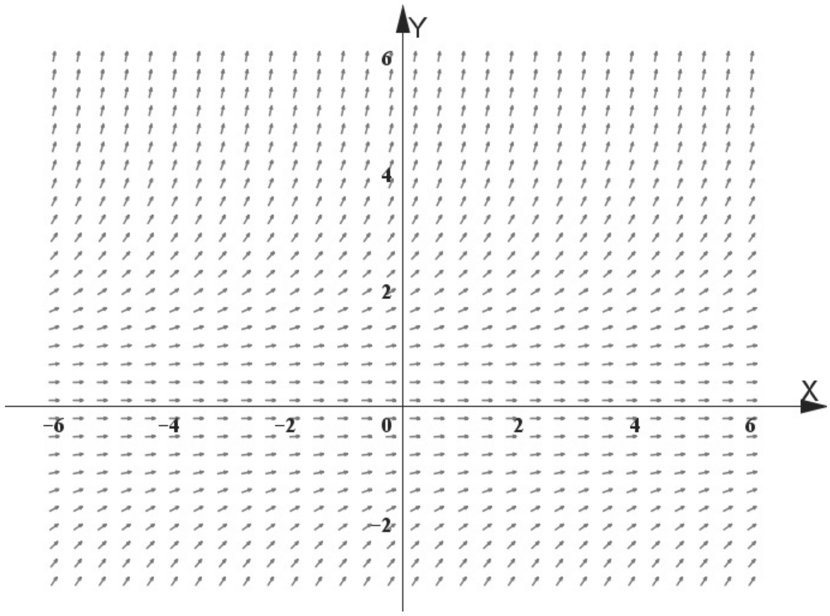
$$\begin{aligned}
u_1(t) &= -\ln|t| \\
u_2(t) &= -\frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Finalmente la solución general de la EDO es:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\
&= C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} - \ln|t|e^{-2t} - e^{-2t}
\end{aligned}$$

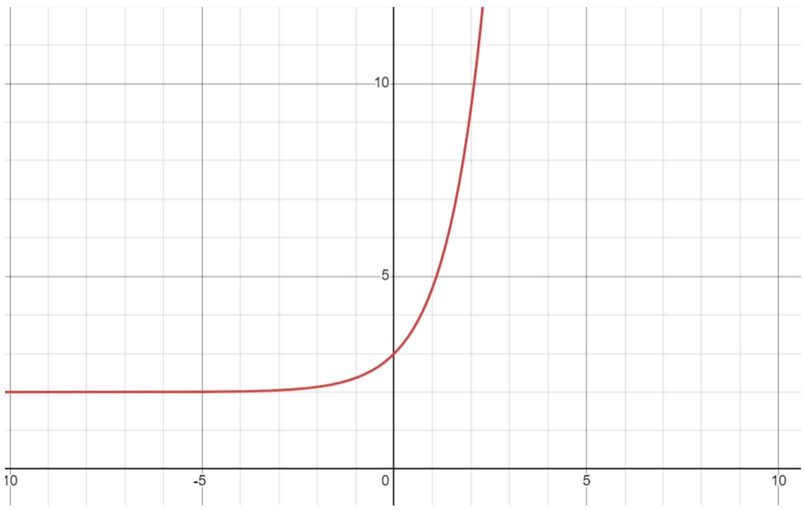
## 2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**1.5 ptos**) Para el siguiente campo de direcciones de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$




Trace la curva que pasa por el punto $y(2) = 4$ ¿La ecuación diferencial tiene soluciones estacionarias? Justifique.

**Solución.** Recordemos que las soluciones de esta ecuación son curvas cuya gráfica en cada punto es tangente a las direcciones dadas por el campo. Teniendo eso en cuenta, proponemos el siguiente bosquejo:




Recordemos que las soluciones estacionarias son aquellas que en cada punto tienen dirección únicamente horizontal dada por el campo. A partir de esto, una solución estacionaria es $y = 0$.

(b) (**1.5 ptos**) Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación sistemática.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y$$

**Solución.** Escribimos el sistema en términos del operador diferencial y reordenamos:

$$(D - 2)x - 2y = 0$$
$$-x + (D - 3)y = 0$$

Ahora, aplicamos el operador $(D-2)$ a la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}(D-2)x - 2y &= 0\\ -(D-2)x + (D-2)(D-3)y &= 0\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}(D-2)(D-3)y - 2y &= 0\\ y'' - 5y' + 4y &= 0 \qquad (6)\end{aligned}$$

La ecuación auxiliar asociada a (6) es $r^2 - 5r + 4 = 0$, de donde se obtienen las soluciones $r_1 = 1$, $r_2 = 4$. Por lo tanto:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$$

Además, de la segunda ecuación del sistema tenemos que $x = y' - 3y$, entonces:

$$\begin{aligned}x(t) &= y'(t) - 3y(t)\\ &= C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} - 3(C_1 e^t + C_2 e^{4t})\\ &= -2C_1 e^t + C_2 e^{4t}\end{aligned}$$