Ecuaciones Diferenciales

Examen Parcial 2024-1. Tiempo: 100 minutos

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1

Un tanque contiene inicialmente 500 litros de agua pura. Se empieza a bombear, hacia el tanque, una solución salina con una concentración de 0,04 kg/l a una velocidad de 10 l/min. La mezcla resultante se bombea fuera del tanque a la misma velocidad.

(a) (**2 ptos**) Escriba la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo. Defina las variables y sus unidades. Indique la condición inicial.

Solución:
Para el planteamiento del problema tenemos los siguientes datos:

- Volumen inicial del tanque: $V_0 = 500$ litros.
- Concentración de la solución que entra: 0,04 kilogramos/litros.
- Velocidad de entrada: 10 litros/minuto.
- Velocidad de salida: 10 litros/minuto.

En este caso el volumen del tanque será *constantes* debido a que la velocidad de entrada y la velocidad de salida son iguales.

Para la ecuación diferencial para la cantidad de Sal anotamos:

- Razón de entrada de sal:
$$10 \times 0{,}04 = 0{,}4 \quad \text{kg/min.}$$
- Razón de salida de sal depende de la concentración de la mezcla (en el instante t) y la velocidad de salida:
$$10 \times \frac{A(t)}{V(t)} = \frac{10A(t)}{V_0} = \frac{V(t)}{50} \quad \text{kg/min}$$

La ecuación diferencial que modela la cantidad de sal en el tanque es:

$$\frac{dA}{dt} = \text{razón de entrada} - \text{razón de salida}$$

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}4 - \frac{A(t)}{50}$$

Inicialmente, el tanque contiene agua pura, por lo que la cantidad inicial de sal es cero kilogramos. Por lo tanto, la ecuación diferencial con condición inicial (o Problema de Valor Inicial PVI) que modela la cantidad de sal en el tanque es

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}4 - \frac{A(t)}{50}$$
$$A(0) = 0$$

(b) (**2 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial y encuentre la cantidad de sal en el tanque después de 15 minutos.

Solución:
Vemos que la EDO planteada es lineal, de coeficientes constantes, y de orden uno. Procedemos a resolverla por el método del factor integrante. Primero, re-escribimos la EDO en su forma normal, así:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A(t) = 0{,}4.$$

Hallamos el factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}dt} = e^{t/50}.$$

Luego, aplicamos la fórmula para la solución general de la EDO:

$$A(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int 0{,}4\mu(t)dt = e^{-t/50}\int 0{,}4e^{t/50}dt = e^{-t/50}[50 \times 0{,}4e^{t/50} + c]$$
$$A(t) = 20 + ce^{-t/50},$$

donde c es una constante real por determinar.

Para determinar la constante usamos la condición inicial del PVI, a saber $A_0 = 0$, así:

$$0 = A(0) = 20 + ce^{-0/50} = 20 + ce^0 = 20 + c$$
$$\therefore c = -20$$

Por lo tanto,

$$A(t) = 20 - 20e^{-t/50}.$$

Ahora bien, con esta fórmula hallamos la cantidad de sal en el tanque después de 15 minutos:

$$A(15) = 20 - 20e^{-15/50} = 20 - 20e^{-0{,}3}$$
$$\therefore A(15) = 5{,}1836.$$

(c) (**2 ptos**) Después de 15 minutos, se detiene el bombeo de la solución salina y se comienza a bombear agua pura al tanque a la misma velocidad de 10 l/min. La mezcla sigue saliendo del tanque a la misma velocidad. Determine la cantidad de sal en el tanque 30 minutos después del inicio del proceso (es decir, 15 minutos después de comenzar a bombear agua pura).

Solución:
Inicia en el mismo tanque un nuevo proceso. Se 'reinicia el cronómetro' y tenemos la *nueva* condición inicial

$$A_0 = -5{,}1836.$$

Además, ahora ya no se bombea hacia el tanque agua con sal, sino agua pura, es decir que la concentración de entrada ya no es 0,04 kg/L, sino 0 kg/L. Todos los demás datos se mantienen iguales. Similarmente a como se hizo en el ítem (a) obtenemos el PVI:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)}{50}$$
$$A(0) = 5{,}1836.$$

Podemos resolverlo usando separación de variables, puesto que la EDO es autónoma (también se podría resolver usando el método por factor integrante, pero sería menos directo plantearlo así). Separamos variables:

$$\frac{dA}{A(t)} = -\frac{dt}{50}$$

Integramos ambos lados

$$\int \frac{dA}{A} = -\frac{1}{50}\int dt$$
$$\ln|A| = -\frac{t}{50} + c,$$

donde c es una constante por determinar. Ahora usamos la función exponencial para conseguir

$$A(t) = c'e^{-t/50},$$

donde $c' = e^c$ es una constante por determinar.

Para determinar la constante usamos la condición inicial del PVI, a saber $A_0 = -5{,}1836$, así

$$5{,}1836 = A(0) = c'e^{-0/50} = c'e^0 = c'.$$

Por lo tanto

$$A(t) = 5{,}1836e^{-t/50}.$$

Finalmente, para determinar la cantidad de sal en el tanque 30 minutos después del inicio del (primer) proceso (es decir, 15 minutos después de comenzar a bombear agua pura, que sería el segundo proceso), evaluamos $A(t)$ en $t = 15$.

$$A(15) = 5{,}1836e^{-15/50} = 5{,}1836e^{-0{,}3}$$
$$\therefore A(15) = 3{,}8401.$$

Problema 2

(a) (**3 ptos**) Una población de conejos en una isla sigue un modelo de crecimiento logístico. La población inicial es de 10 conejos, y la capacidad de carga de la isla se estima en 200 conejos. La constante de proporcionalidad es 0,0004. Se sabe que la tasa de crecimiento poblacional es proporcional al tamaño de la población y a la diferencia entre la capacidad de carga y el tamaño de la población. Escriba la ecuación diferencial que modele la población de conejos en la isla con su condición inicial.

Solución:

Planteamos las cantidades involucradas en el problema y nuestros datos:

- La población de conejos en el tiempo t se denotará por $P(t)$ o simplemente P.
- La población inicial de conejos es $P_0 = P(0) = 10$ conejos.
- La capacidad de carga de la isla es de $K = 200$ conejos.
- La constante de proporcionalidad es $r = 0{,}0004$.

Como P sigue el modelo logístico entonces

$$\frac{dP}{dt} = rP\,(K - P) = 0{,}0004P(200 - P).$$

Y junto con la condición inicial tenemos que el PVI que modela la población de conejos en la isla es:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004P(200 - P),$$
$$P(0) = 10.$$

(b) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001P\left(1 - \frac{P}{1000}\right), \quad P(0) = 50$$

Solución:

La ecuación diferencial logística es autónoma, así que resolvemos por separación de variables.

Separamos variables

$$\frac{dP}{0{,}001P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)} = dt.$$

En el lado izquierdo de la ecuación, consideramos la función racional

$$f(P) = \frac{1}{0{,}001P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)} = \frac{1}{0{,}001P\,(1 - 0{,}001P)}$$

y empezamos a deducir su expansión en fracciones parciales:

$$\frac{1}{0{,}001P\,(1 - 0{,}001P)} = f(P) = \frac{A}{0{,}001P} + \frac{B}{1 - 0{,}001P}$$

donde A, B son constantes reales por determinar. Multiplicando en cruz en el lado derecho de la ecuación vemos que

$$\frac{1}{0{,}001P\,(1 - 0{,}001P)} = \frac{A - 0{,}001AP + 0{,}001BP}{0{,}001P(1 - 0{,}001P)} = \frac{A + (-0{,}001A + 0{,}001B)P}{0{,}001P(1 - 0{,}001P)}.$$

Para que se cumpla la igualdad debemos tener que

$$\begin{cases} -0{,}001A + 0{,}001B & = 0, \\ \qquad A & = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales llegamos a que $A = 1$ y $B = 1$, y así que

$$f(P) = \frac{1}{0{,}001P} + \frac{1}{1 - 0{,}001P}.$$

Volviendo a la EDO tenemos que

$$dP\left(\frac{1}{0{,}001P}+\frac{1}{1-0{,}001P}\right)=dt$$

Integramos ambos lados,

$$\int dP\left(\frac{1}{0{,}001P}+\frac{1}{1-0{,}001P}\right)=\int dt$$

$$\int\frac{dP}{0{,}001P}+\int\frac{dP}{1-0{,}001P}=\int dt$$

$$\frac{1}{0{,}001}\ln|0{,}001P|+\frac{1}{-0{,}001}\ln|1-0{,}0001P|=t+c$$

$$1000\ln|0{,}001P|-1000\ln|1-0{,}0001P|=t+c$$

$$\ln|0{,}001P|-\ln|1-0{,}0001P|=0{,}001t+c'$$

donde $c'=c/1000$ es una constante real por determinar.

Usando las propiedades de la función logaritmo obtenemos

$$\ln\left|\frac{0{,}001P}{1-0{,}001P}\right|=0{,}001t+c'$$

Usando la función exponencial tenemos

$$\frac{0{,}001P}{1-0{,}001P}=c''e^{0{,}001t},$$

donde $c''=e^{c'}$. Ahora despejamos P en función de t así:

$$\begin{aligned}
c''e^{0{,}001t}&=\frac{0{,}001P}{1-0{,}001P}\\
&=\frac{1-(1-0{,}001P)}{1-0{,}001P}\\
&=\frac{1}{1-0{,}001P}-\frac{(1-0{,}001P)}{1-0{,}001P}\\
&=\frac{1}{1-0{,}001P}-1\\
1+c''e^{0{,}001t}&=\frac{1}{1-0{,}001P}\\
\frac{1}{1+c''e^{0{,}001t}}&=1-0{,}001P\\
0{,}001P&=1-\frac{1}{1+c''e^{0{,}001t}}\\
P&=\frac{1}{0{,}001}\left(1-\frac{1}{1+c''e^{0{,}001t}}\right)\\
P&=1000-\frac{1000}{1+c''e^{0{,}001t}}.
\end{aligned}$$

Entonces la solución general a la EDO del problema es

$$P = 1000 - \frac{1000}{1 + c'' e^{0{,}001t}},$$

donde c'' es una constante real. Para determinarla usamos la condición inicial $P(0) = 50$ ya sea en la ecuación de arriba o en *cualquiera de las ecuaciones equivalentes a esta*; por experiencia, es más rápido operar si la reemplazamos en la ecuación $c'' e^{0{,}001t} = \frac{0{,}001P}{1-0{,}001P}$. Veamos

$$\begin{aligned}
c'' e^{0{,}001\times 0} &= \frac{0{,}001P(0)}{1 - 0{,}001P(0)} \\
c'' e^{0} &= \frac{0{,}001 \times 50}{1 - 0{,}001 \times 50} \\
c'' &= \frac{0{,}05}{1 - 0{,}05} \\
c'' &= \frac{0{,}05}{0{,}95} \\
c'' &= \frac{1}{19}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es

$$P(t) = 1000 - \frac{1000}{1 + \frac{1}{19} e^{0{,}001t}} = 1000 - \frac{19000}{19 + e^{0{,}001t}}.$$

NOTA: La solución puede ser implícita también, sin despejar P.

Problema 3

Se ha observado que cierto circuito eléctrico se comporta según la siguiente ecuación diferencial que modela la carga $q(t)$ en función del tiempo t:

$$\frac{1}{5} q'' + 12q' + 500q = 0$$

(a) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial y determine la carga $q(t)$ en función del tiempo. Utilice las condiciones iniciales: $q(0) = 3$, $q'(0) = 0$.

Solución:
La EDO es equivalente a

$$q'' + 60q' + 2500q = 0$$

Sea I el operador identidad (es decir, le que cumple $I(q) = q$ para toda función) y el operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$. El operador diferencial asociado a la EDO es

$$D^2 + 60D + 2500I$$

Usando la fórmula para las raíces de una función cuadrática vemos que esta tiene raíces complejas conjugadas:

$$r_1 = -30 + 40i, \quad r_2 = -30 - 40i.$$

Por lo tanto, la EDO homogénea

$$0 = q'' + 60q' + 2500q = (D^2 + 60D + 2500I)q$$

tiene la solución general

$$q = c_1 e^{-30t}\cos(40t) + c_2 e^{-30t}\sin(40t),$$

donde c_1, c_2 son constantes reales arbitrarias.

Anotamos aquí la fórmula para la derivada de q para usarla en unos cálculos más abajo.

$$\begin{aligned}
q' = Dq &= D[c_1 e^{-30t}\cos(40t) + c_2 e^{-30t}\sin(40t)] \\
&= D[e^{-30t}(c_1\cos(40t) + c_2\sin(40t))] \\
&= [De^{-30t}](c_1\cos(40t) + c_2\sin(40t)) + e^{-30t}D[c_1\cos(40t) + c_2\sin(40t)] \\
&= [-30e^{-30t}](c_1\cos(40t) + c_2\sin(40t)) + e^{-30t}[40c_2\cos(40t) - 40c_1\sin(40t)] \\
&= (-30c_1 + 40c_2)e^{-30t}\cos(40t) + (-40c_1 - 30c_2)e^{-30t}\sin(40t).
\end{aligned}$$

Como tenemos condiciones iniciales $q(0) = 3$ y $q'(0) = 0$ podemos determinar dichas constantes para nuestro PVI particular evaluando en $t = 0$ nuestras fórmulas para $q(t)$ y $q'(t)$, así:

$$\begin{aligned}
&3 = q(0) = c_1 e^{-30\times 0}\cos(40\times 0) + c_2 e^{-30\times 0}\sin(40\times 0) = c_1 \\
&0 = q'(0) = (-30c_1 + 40c_2)e^{-30\times 0}\cos(40\times 0) + (-40c_1 - 30c_2)e^{-30\times 0}\sin(40\times 0) = -30c_1 + 40c_2
\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
3 &= c_1 \\
0 &= -30c_1 + 40c_2
\end{aligned}$$

Resolviendo llegamos a que $c_1 = 3$ y $c_2 = 9/4$. Finalmente, escribimos la solución al PVI:

$$q(t) = 3e^{-30t}\cos(40t) + \frac{9}{4}e^{-30t}\sin(40t).$$

(b) (**3 ptos**) Suponga que se cambia los dispositivos eléctricos del circuito, lo que modifica la ecuación diferencial a la siguiente forma:

$$q'' + 6q' + 25q = 17\sin(t) + 125t^2 + \frac{103}{5}.$$

Encuentre la **solución particular** y_p de esta nueva ecuación diferencial.

Solución:
Sabemos que $17\sin t$ genera una solución particular de la forma

$$A\cos t + B\sin t,$$

y que $125t^2 + \frac{103}{5}$ genera una solución particular de la forma

$$at^2 + bt + c,$$

donde A, B, a, b, c son constantes reales por determinar. Entonces, la solución particular a la EDO no-homogénea tendrá la forma

$$y_p = [A\cos t + B\sin t] + [at^2 + bt + c].$$

Trabajemos con este y_p. Primero hallamos una fórmula para su primera derivada:

$$\begin{aligned}
q_p' &= [A\cos t + B\sin t]' + [at^2 + bt + c]' \\
&= [B\cos t - A\sin t] + [2at + b].
\end{aligned}$$

Luego, derivando usando esta nueva fórmula, hallamos una fórmula para su segunda derivada:

$$\begin{aligned} q_p'' = (q_p')' &= [B\cos t - A\sin t]' + [2at + b]' \\ &= [-A\cos t - B\sin t] + 2a. \end{aligned}$$

(Observación: Nótese como se procura mantener la parte 'trigonométrica' y la parte 'polinomial separadas', y que la parte trigonométrica se mantiene el orden de primero ir el coseno y luego el seno. Esto facilita tremendamente los cálculos y hace visible las ideas involucradas.)

Luego, apoyándonos en las ecuaciones obtenidas y la forma de la EDO, hacemos los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned} 17\sin(t) + 125t^2 + \frac{103}{5} &= q_p'' + 6q_p' + 25q \\ &= \{[-A\cos t - B\sin t] + 2a\} \\ &\quad + 6\{[B\cos t - A\sin t] + [2at + b]\} \\ &\quad + 25\{[A\cos t + B\sin t] + [at^2 + bt + c]\} \\ &= \{[-A\cos t - B\sin t] + 2a\} \\ &\quad + \{[6B\cos t - 6A\sin t] + [12at + 6b]\} \\ &\quad + \{[25A\cos t + 25B\sin t] + [25at^2 + 25bt + 25c]\} \\ &= [(-A + 6B + 25A)\cos t + (-B - 6A + 25B)\sin t] \\ &\quad + [25at^2 + (12a + 25b)t + (2a + 6b + 25c)] \\ [0\cos t + 17\sin(t)] + [125t^2 + 0t + \frac{103}{5}] &= (24A + 6B)\cos t + (-6A + 24B)\sin t] \\ &\quad + [25at^2 + (12a + 25b)t + (2a + 6b + 25c)] \end{aligned}$$

(Observación: Nótese como se colectan/agrupan términos similares para facilitar, al final, la comparación del lado izquierdo de la ecuación con el derecho. También, se procura mantener el orden de a va primero, luego b, luego c. No es obligatorio, pero ayuda.)

Comparando coeficientes, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas a, b, c, A, B (notar que el sistema es equivalente a dos sistemas separados: uno solo con las incógnitas A, B, y otro solo con las incógnitas a, b, c):

$$\begin{aligned} 0 &= 24A + 6B, \\ 17 &= -6A + 24B, \\ 125 &= 25a, \\ 0 &= 12a + 25b, \\ \frac{103}{5} &= 2a + 6b + 25c. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema llegamos a que $A = -1/6$, $B = 2/3$, $a = 5$, $b = -12/5$, $c = 1$. Finalmente, reemplazando esta información en la fórmula que define a q_p llegamos a que una solución particular a la EDO es

$$q_p(t) = -\frac{1}{6}\cos t + \frac{2}{3}\sin t + 5t^2 - \frac{12}{5}t + 1.$$

(c) (**2 ptos**) Considerando ahora que los componentes del circuito pueden cambiar con el tiempo, se presenta la siguiente ecuación diferencial con coeficientes variables:

$$t^2q'' + 2tq' - 2q = 0$$

Resuelva esta ecuación diferencial considerando las condiciones iniciales: $q(1) = 5$ y $q(2) = 3$.

Solución:

Reconocemos que la EDO es de Cauchy-Euler. Así que primero hallamos las raíces de la ecuación polinomial asociada:

$$0 = m(m-1) + 2m - 2 = m^2 + m - 2$$

Usando el método de aspa simple (o la fórmula general para las raíces de una ecuación cuadrática, o algún otro método) vemos que la ecuación tiene dos raíces reales diferentes: $m_1 = 1$ y $m_2 = -2$. Luego, la solución general a la EDO es

$$q = c_1 t + c_2 t^{-2},$$

donde c_1, c_2 son constantes reales indeterminadas.

Como tenemos condiciones iniciales, podemos determinar c_1, c_2:

$$\begin{aligned} 5 &= q(1) = c_1 \times 1 + c_2 \times 1^{-2} = c_1 + c_2, \\ 3 &= q(2) = c_1 \times 2 + c_2 \times 2^{-2} = 2c_1 + \frac{1}{4}c_2. \end{aligned}$$

Más claramente:

$$\begin{aligned} 5 &= q(1) = c_1 + c_2, \\ 3 &= q(2) = 2c_1 + \frac{1}{4}c_2. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales sobre las incógnitas c_1, c_2 obtenemos que $c_1 = 1$ y $c_2 = 4$. Luego, la solución al PVI es

$$q(t) = t + 4t^{-2}.$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**1.5 ptos**) El campo de direcciones para una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se muestra en el siguiente gráfico:

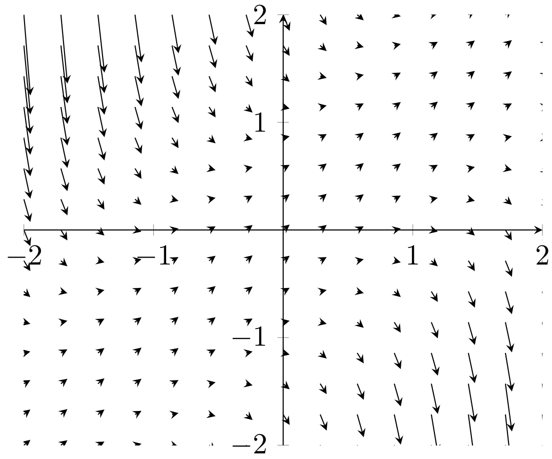

Figura 1: Campo de direcciones de la ED $y' = f(x, y)$.

Selecciones cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales corresponde la Figura 1:

i. $y' = 1 - y^2$,

ii. $y' = 1 - (x - y)^2$,

iii. $y' = 1 - (x + y)^2$.

Justifique su respuesta.

Solución:
Recordamos que $\frac{dy}{dx}$ es el valor de la *inclinación* de la recta tangente a la curva solución a la EDO que pasa por el punto (x, y) (por cada punto del plano le corresponde una *única* solución a la EDO que pasa por ese punto).

De la figura vemos que la curva recta $y(x) = x$ es la solución única a la EDO que pasa por el punto $(0, 0)$. Para ese curva vemos que $f(x, y) = 1$, es decir $y' = 1$. Solo la opción **(ii)** cumple con esto. De ahí podemos verificar examinando repetidamente la figura que, en efecto, $f(x, y) = 1-(x-y)^2$.

(b) (**1.5 ptos**) Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_2, \\ x_2'(t) &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación sistemática.

Solución:
Re-escribimos el sistema usando la notación del operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$, así:

$$\begin{aligned} Dx_1 &= 3x_2, \\ Dx_2 &= 2x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Re-ordenando las ecuaciones pensando en D como coeficientes y x_1, x_2 como incógnitas (donde I es el operador identidad. Recordemos también que $DI = ID = D$):

$$\begin{aligned} Dx_1 - 3Ix_2 &= 0, \\ -2Ix_1 + (D - I)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

- Aplicamos $(D - I)$ a la primera ecuación y le sumamos tres veces la segunda ecuación, y esto elimina la incógnita x_2 así:

$$0 = (D-I)\cdot 0+3\cdot 0 = (D-I)[Dx_1-3Ix_2]+3[-2Ix_1+(D-I)x_2] = (D-I)Dx_1-6Ix_1 = (D^2-D-6I)x_1.$$

$$0 = (D^2 - D - 6I)x_1.$$

Como $D^2 - D - 6I = (D-3)(D+2)$, entonces la solución la EDO homogénea de arriba es

$$x_1 = a_1 e^{-2t} + b_1 e^{3t},$$

donde a_1, b_1 son constantes indeterminadas.

- Aplicamos D a la segunda ecuación y le sumamos el doble de la primera ecuación, y esto elimina la incógnita x_1, así:

$$0 = 2 \cdot 0 + D \cdot 0 = [2Dx_1 - 6Ix_2] + [-2Dx_1 + D(D-I)x_2] = (D^2 - D - 6I)x_2$$
$$0 = (D^2 - D - 6I)x_2.$$

  Como $D^2 - D - 6I = (D-3)(D+2)$, entonces la solución la EDO homogénea de arriba es

$$x_2 = a_2 e^{-2t} + b_2 e^{3t},$$

  donde a_2, b_2 son constantes indeterminadas.

- No todas las elecciones de constantes a_1, b_1, a_2, b_2 cumplen con el sistema de EDOS. Reemplacemos las fórmulas obtenidas para x_1 y x_2 en la primera ecuación del sistema de EDOS y veamos que constantes cumplen las restricciones impuestas por el sistema:

$$\begin{aligned}
0 &= Dx_1 - 3x_2 \\
&= D[a_1 e^{-2t} + b_1 e^{3t}] - 3[a_2 e^{-2t} + b_2 e^{3t}] \\
&= -2a_1 e^{-2t} + 3b_1 e^{3t} - 3a_2 e^{-2t} - 3b_2 e^{3t} \\
&= (-2a_1 - 3a_2)e^{-2t} + (3b_1 - 3b_2)e^{3t}.
\end{aligned}$$

  De esto deducimos que

$$\begin{aligned}
0 &= -2a_1 - 3a_2, \\
0 &= 3b_1 - 3b_2.
\end{aligned}$$

  De esto deducimos que $a_2 = -\frac{2}{3}a_1$ y $b_2 = b_1$ (es decir, hemos expresado a_2 y b_2, las constantes de x_2, en términos de a_1 y b_1, las con constantes de x_1).

  Finalmente tenemos que la solución general al sistema de EDOs es

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 e^{-2t} + b_1 e^{3t}, \\
x_2 &= -\frac{2}{3}a_1 e^{-2t} + b_1 e^{3t},
\end{aligned}$$

  donde a_1, b_1 son constantes indeterminadas.

  Como el problema también nos da condiciones iniciales, entonces podemos determinar a_1 y b_1 como números concretos fijos. Veamos:

$$\begin{aligned}
2 = x_1(0) &= a_1 e^{-2\times 0} + b_1 e^{3\times 0}, \\
1 = x_2(0) &= -\frac{2}{3}a_1 e^{-2\times 0} + b_1 e^{3\times 0}.
\end{aligned}$$

  Limpiando un poco las ecuaciones llegamos a

$$\begin{aligned}
2 &= a_1 + b_1, \\
1 &= -\frac{2}{3}a_1 + b_1.
\end{aligned}$$

La solución para este sistema de ecuaciones lineales sobre las incógnitas a_1, b_1 es $a_1 = 3/5$ y $b_1 = 7/5$.

Finalmente, la solución al sistema de EDOs con condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{7}{5}e^{3t}, \\ x_2 &= -\frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{7}{5}e^{3t}. \end{aligned}$$