

Ecuaciones diferenciales

Sistemas de ecuaciones
diferenciales lineales

Semana 07: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca

Sergio Quispe Rodríguez

Patricia Reynoso Quispe

Cristina Navarro Flores

Daniel Camarena Pérez

➤ Reinventa el mundo ◀



Profesores: Utec-Ciencias

Índice

- 1 **Sistemas de ED en forma matricial**
- 2 **Solución de sistemas mediante el cálculo de eigenvalores y eigenvectores**



Objetivos

- **Resolver** sistemas ED de primer orden aplicando valores y vectores propios (caso 1 y 2).

SISTEMAS DE ED EN FORMA MATRICIAL

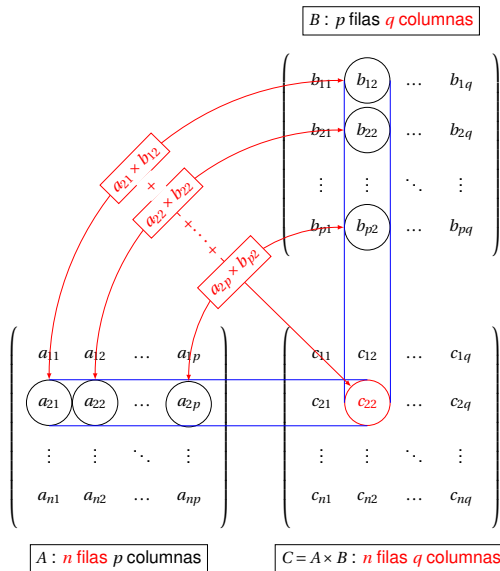
1



Logros

- **Resuelve** sistemas ED de primer orden aplicando valores y vectores propios (caso 1 y 2). (L.5.7.2.2)

Multiplicación de matrices



Ejemplos

- Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule el producto AB .

Solución: Notemos que como ambas matrices son de tamaño 3×3 , el producto también será de tamaño 3×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Un sistema de EDO de primer orden, en forma normal, se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= h_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= h_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= h_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{1}$$

Si las funciones h_1, h_2, \dots, h_n son lineales respecto a las variables dependientes x_1, x_2, \dots, x_n , el sistema (1) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{2}$$

Sistema lineal: Forma matricial

Notamos que la ecuación (2) puede escribirse en forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

o, de forma equivalente

$$X' = AX + F. \quad (4)$$

Cuando $F = 0$, se dice que el sistema es homogéneo:

$$X' = AX \quad (5)$$

Ejemplos

Expresa en forma matricial los siguientes sistemas

1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{2x}{24} + \frac{y}{50} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{4x}{50} - \frac{4y}{50}\end{aligned} \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{24} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} \end{bmatrix} X$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 7y\end{aligned} \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} X$$

3)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x + y + 4z + 4t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x + 7y - z + t^2 \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 9y - z + e^t\end{aligned} \Rightarrow X' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4t \\ t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Ejemplos

Compruebe que las funciones vectoriales:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$$

son soluciones de la ecuación: $X' = AX$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

Derivando los vectores X_1 y X_2 :

$$X_1' = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad X_2' = \begin{bmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, efectuando la multiplicación matricial:

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad AX_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{bmatrix}$$

Así, vemos que X_1 y X_2 son soluciones de la ecuación diferencial matricial $X' = AX$.

Solución general de una ecuación diferencial matricial en \mathbb{R}^2

Consideremos la ecuación diferencial $X' = AX$, donde A es una matriz de tamaño 2×2 y supongamos que X_1, X_2 son soluciones de dicha E.D.

Podemos calcular el **Wronskiano**:

$$W(X_1, X_2) = \det \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Note que } X_1 \text{ y } X_2 \text{ son vectores columna})$$

Luego, se tiene que

X_1, X_2 son soluciones linealmente independientes $\iff W(X_1, X_2) \neq 0$, para todo t

Finalmente, si X_1, X_2 son soluciones linealmente independientes de $X' = AX$, entonces la **solución general** X esta dada por:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2,$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son constantes.

En el ejemplo anterior, vimos que $X_1 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$ y $X_2 = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$ son soluciones de $X' = AX$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Calculemos el Wronskiano:

$$\begin{aligned} W(X_1, X_2)(t) &= \det \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix} \\ &= 8e^{4t} \neq 0, \text{ para todo } t \end{aligned}$$

Por lo tanto X_1, X_2 son soluciones **linealmente independientes** y así, la solución general de $X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X$ es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE EL CÁLCULO DE EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

2



En la E.D

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X$$

Vimos que un par de soluciones linealmente independiente son: $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t}.$$

Cabe preguntarse si en el caso general (cuando la matriz A es de tamaño $n \times n$) uno puede obtener soluciones de esa forma, osea

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t}, \quad (6)$$

donde $\lambda, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

Derivando (6) y reemplazando en $X' = AX$, se obtiene:

$K\lambda e^{\lambda t} = AK e^{\lambda t}$, dividimos ambos miembros de la ecuación entre $e^{\lambda t}$:

$$\lambda K = AK$$

$\lambda I_n K = AK$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$

$$0 = AK - \lambda I_n K$$

$$0 = (A - \lambda I_n)K \quad (7)$$

Es así, que el problema de encontrar soluciones a la E.D $X' = AX$, se reduce a encontrar soluciones no nulas del sistema $(A - \lambda I_n)K = 0$. Por otro lado, el sistema (7) admite una solución no nula ($K \neq [0, 0, \dots, 0]^t$) si y solo si

$$\underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polinomio característico}} = 0 \quad \leftarrow \text{(Ecuación característica)} \quad (8)$$

Las soluciones de (8) son llamadas eigenvalores, y los correspondientes vectores $K \neq 0$ que resuelven (7) son llamados eigenvectores.

Cálculo de eigenvalores y eigenvectores

- 1 Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, para calcular sus eigenvalores, primero debemos encontrar el polinomio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ y luego resolver la ecuación característica:

$$p_A(\lambda) = 0$$

- 2 Luego de encontrar los eigenvalores de A , digamos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, debemos reemplazar cada uno de estos en (7) y resolver dicho sistema. Es decir, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, debemos resolver:

$$(A - \lambda_i I_n)K = 0 \tag{9}$$

Los vectores K que se encuentren al resolver (9) serán los eigenvectores de A , asociados a λ_i .

Solución de la E.D: $X' = AX$

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, el polinomio característico de A tiene grado n , de ahí que la matriz A tendrá n eigenvalores (algunos de ellos pueden repetirse). La solución general de la E.D $X' = AX$, depende de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz A , en ese sentido, se tienen los siguientes casos:

- La matriz A tiene n eigenvalores reales y diferentes.
- La matriz A tiene algunos eigenvalores reales repetidos.
- La matriz A tiene algunos eigenvalores complejos.

Dependiendo del caso en el que nos encontremos, la solución general de la ecuación diferencial $X' = AX$ tomará una forma específica.

A tiene n eigenvalores diferentes

Cuando la matriz A tiene n eigenvalores **diferentes** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, también tendrá n eigenvectores K_1, K_2, \dots, K_n , donde K_i está asociado a λ_i .

En este caso, la solución general es:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$$

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x\end{aligned}$$

Matricialmente, tenemos:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (10)$$

Luego, resolvemos la ecuación característica:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Por lo tanto los eigenvalores son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ (notemos que todos los eigenvalores son diferentes entre si), ahora debemos determinar los eigenvectores asociados a cada uno de ellos.

Para $\lambda_1 = 2$: Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ 1 & 0-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases}$$
$$\longrightarrow k_1 = 2k_2$$

Luego $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$, tomando $k_2 = 1$ (la elección del valor de k_2 es irrelevante siempre y cuando sea no nulo) se obtiene $K_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, el eigenvector asociado a λ_1 .

Para $\lambda_2 = -1$: Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1) & 2 \\ 1 & 0 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow k_1 = -k_2$$

Así $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$, tomando $k_2 = 1$ se obtiene $K_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, el eigenvector asociado a λ_2 .

Finalmente, la solución general del sistema de E.D matricial (10) es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \rightarrow \begin{cases} x = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \end{cases}$$

A tiene eigenvalores repetidos

Antes de analizar este caso, discutamos el concepto de multiplicidad de un eigenvalor. Sea A una matriz $n \times n$, entonces el polinomio característico siempre se puede factorizar de la siguiente manera:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son los eigenvalores de A . En este contexto, para $i = 1, 2, \dots, r$, definimos la multiplicidad de λ_i como el exponente m_i que acompaña al factor $(\lambda - \lambda_i)$. Más aún, siempre se cumple que $m_i \leq n$

Ahora, veamos cómo obtener la solución de una ecuación diferencial $X' = AX$, en la que la matriz A tiene eigenvalores con multiplicidad mayor que 1. Cabe resaltar que restringiremos nuestro estudio a eigenvalores cuya multiplicidad es menor o igual a tres. Sea A una matriz 3×3 y $\lambda \in \mathbb{R}$ un eigenvalor con multiplicidad m ($1 < m \leq 3$). Tenemos los siguientes casos:

- a) λ tiene asociados m eigenvectores linealmente independientes K_1, \dots, K_m : En este caso, en la solución general tiene la forma:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda t} + c_2 K_2 e^{\lambda t} + \dots + c_m K_m e^{\lambda t} + \text{otros términos}$$

donde los *otros términos* son los que provienen al analizar los demás eigenvalores.

Ejemplo

Calcule la solución general de la E.D matricial: $X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X$

Solución:

Resolvamos la ecuación característica:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$-(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

De esta manera A tiene los eigenvalores $\lambda_1 = -1$ (multiplicidad 2) y $\lambda_2 = 5$. A continuación debemos encontrar los eigenvectores asociados.

Para $\lambda_1 = -1$: Resolvemos,

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1) & -2 & 2 \\ -2 & 1 - (-1) & -2 \\ 2 & -2 & 1 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$
$$\longrightarrow 2k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0$$
$$\longrightarrow k_1 = k_2 - k_3$$

Luego $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 - k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, de esta manera obtenemos $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$K_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ eigenvectores asociados a λ_2 (notemos que la cantidad de eigenvectores coincide con la multiplicidad)

De esta manera la solución general es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \text{otros términos}$$

Para completar la solución general, debemos analizar el otro eigenvalor

Para $\lambda_2 = 5$: Resolvemos,

$$\begin{bmatrix} 1-5 & -2 & 2 \\ -2 & 1-5 & -2 \\ 2 & -2 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -4k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ -2k_1 - 4k_2 - 2k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 - 4k_3 = 0 \end{cases}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} -6k_1 - 6k_2 = 0 \\ -6k_2 - 6k_3 = 0 \end{cases}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} k_2 = -k_1 \\ k_3 = -k_2 \end{cases}$$

Así, tenemos $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. De esta manera $K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector asociado a λ_2 . Finalmente la solución general de la E.D matricial $X' = AX$ es

$$X = \underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}}_{\text{aporte de } \lambda_1} + \underbrace{c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}}_{\text{aporte de } \lambda_2}$$

A continuación, veremos el siguiente caso:

b) $m = 2$, pero se obtiene solo un eigenvector asociado al eigenvalor λ : Sea K el eigenvector asociado a λ , en este caso la solución general es:

$$X = c_1 K e^{\lambda t} + c_2 (K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}) + \text{otros términos},$$

donde P se obtiene al resolver

$$(A - \lambda I_n)P = K \quad (11)$$

Ejemplo: Determine la solución de la siguiente E.D diferencial:

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} X \quad (12)$$

Solución: Resolvamos,

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

De esta manera, A tiene solo un eigenvalor $\lambda_1 = -3$ (multiplicidad 2). Calculemos sus eigenvectores, para ello analicemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 3 - (-3) & -18 \\ 2 & -9 - (-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6k_1 - 18k_2 = 0 \\ 2k_1 - 6k_2 = 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow k_1 = 3k_2$$

Luego $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, es decir $K = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el eigenvector asociado a λ_1 .

Para encontrar el vector P debemos resolver el sistema $(A - \lambda_1 I_2)P = K$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases} \\ &\rightarrow 2p_1 - 6p_2 = 1 \\ &\rightarrow p_1 = \frac{1}{2} + 3p_2 \end{aligned}$$

Tenemos $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 3p_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, tomando $p_2 = 0$, tenemos $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Finalmente la solución general de $X' = AX$ queda

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} \right)$$

El siguiente caso que analizaremos es:

- c) $m = 3$, pero solo se obtiene un eigenvector asociado al eigenvalor λ : Sea K el eigenvector asociado a λ , luego solución general toma la forma:

$$X = c_1 K e^{\lambda t} + c_2 \left(K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t} \right) + c_3 \left(K \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + P t e^{\lambda t} + Q e^{\lambda t} \right),$$

donde P, Q se obtienen al resolver los sistemas:

$$(A - \lambda I_n)P = K$$

$$(A - \lambda I_n)Q = P.$$

Ejemplo: Resuelva el sistema de E.D matricial:

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

Solución: La ecuación característica a resolver es:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$-(\lambda - 2)^3 = 0$$

Obtenemos el único eigenvalor de A , $\lambda_1 = 2$ (multiplicidad 3). Para determinar los eigenvectores, resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 6 \\ 0 & 2-2 & 5 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} k_2 + 6k_3 = 0 \\ 5k_3 = 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow k_2 = k_3 = 0$$

$$\text{Así } \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ de ahí que } K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es el único eigenvector asociado a } \lambda_1.$$

Ahora, determinemos P :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} p_2 + 6p_3 = 1 \\ 5p_3 = 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow p_2 = 1, p_3 = 0$$

En consecuencia $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tomando $p_1 = 0$ encontramos $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por otro lado, para calcular Q debemos resolver el sistema $(A - \lambda_1 I_n)Q = P$, osea

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} q_2 + 6q_3 = 0 \\ 5q_3 = 1 \end{cases}$$
$$\rightarrow q_3 = \frac{1}{5}, q_2 = -6q_3$$

Luego $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, tomando $q_1 = 0$, se tiene que $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

De este modo, la solución general de la E.D matricial es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} \right) + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{2t} \right).$$

Actividad: Duración 10 minutos I

Objetivo: Comprender la forma de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con valores propios reales repetidos, utilizando la forma de Jordan y el razonamiento crítico con apoyo de IA.

Sistema a resolver:

$$\begin{cases} x_1' = x_1, & x_1(0) = b_1 \\ x_2' = 4x_1 + x_2, & x_2(0) = b_2 \end{cases}$$

- 1 **Forma matricial:** Escribe el sistema como $x' = Ax$, $x(0) = b$, identificando la matriz A y el vector de condiciones iniciales.
- 2 **Forma de Jordan:** Verifica que A tiene un valor propio repetido. Encuentra el vector propio u y el vector propio generalizado v , y construye la matriz $P = [u \ v]$. Luego, calcula la forma de Jordan $J = P^{-1}AP$.

Actividad: Duración 10 minutos II

- 3 **Cambio de variable y solución:** Realiza el cambio de variable $y = P^{-1}x$, resuelve el sistema $y' = Jy$, $y(0) = P^{-1}b$ y recupera la solución original con $x = Py$. Grafica las curvas solución para condiciones iniciales específicas.
- 4 **Uso del chatbot ExpertIA – Reflexión crítica:** Utiliza el chatbot **ExpertIA** para pedir una *secuencia de pasos* para resolver el sistema utilizando la forma de Jordan. Luego, compara esta estrategia con el método directo de resolución que viste en clase (resolviendo primero x_1 , luego x_2). ¿Qué ventajas o limitaciones encuentras al usar la forma de Jordan? ¿Qué dificultades detectas al interpretar la solución? Justifica tu respuesta.

Examen Parcial 2024-2

Resuelva el siguiente sistema hallando los autovalores y autovectores.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Solución

Se resuelve el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0$ y

$\lambda_2 = -5$, con vectores propios $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Conclusiones

- 1 Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden puede ser expresado en forma matricial.
- 2 Los autovectores y autovalores de una matriz permiten calcular las soluciones de sistemas de ED lineales de primer orden.

Gracias

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

