Ecuaciones Diferenciales 2025-1

Transformada de Laplace: Ejercicios

Semana 14: Auditorio

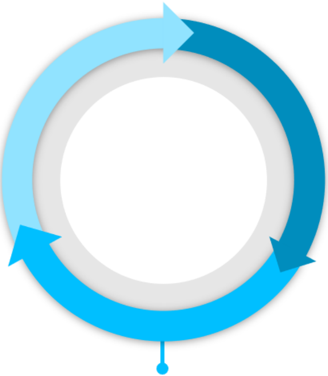
Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

UTEC

Índice

Objetivo



Objetivo

Resolver ED utilizando las diferentes propiedades de la Transformada de Laplace.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

TRANSFORMADA DE LAPLACE - EJERCICIOS

1

Logro

- **Resuelve** ED utilizando las diferentes propiedades de la Transformada de Laplace. (L.8.14.1.8)

Cálculo de la transformada de Laplace

Ejemplo

Calcule:

a) $\mathscr{L}\{(e^t - e^{-t})^2\}$

b) $\mathscr{L}\{4t^2 - 5\sin 3t\}$

Solución:

a) Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{(e^t - e^{-t})^2\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right\} &= \mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\} - 2\mathscr{L}\left\{1\right\} + \mathscr{L}\left\{e^{-2t}\right\} \\ &= \frac{1}{s-2} - 2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s-(-2)} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{8}{(s-2)s(s+2)}\end{aligned}$$

b) Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{4t^2 - 5\sin 3t\right\} &= 4\mathscr{L}\left\{t^2\right\} - 5\mathscr{L}\{\sin 3t\} \\
&= 4 \cdot \frac{2!}{s^{2+1}} - 5 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2} \\
&= \frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2 + 9} \\
&= \frac{-15s^3 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)}
\end{aligned}
$$

Resolución de una EDO usando TL

Ejemplo

Determine $\mathscr{L}^{-1}\{f(t)\}$, cuando

a) $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + 9y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución:

a) Sea $F(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' + 5y' + 4y\} &= \mathscr{L}\{0\} \\
\mathscr{L}\{y''\} + 5\mathscr{L}\{y'\} + 4\mathscr{L}\{y\} &= 0 \\
s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sF(s) - y(0)) + 4F(s) &= 0 \\
s^2F(s) - s + 5(sF(s) - 1) + 4F(s) &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(s)(s^2+5s+4) &= s+5 \\
F(s) &= \frac{s+5}{(s+1)(s+4)} \\
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s+4)}\right\} \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+4}\right\} \\
&= \frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\
&= \frac{4e^{-t}}{3}-\frac{e^{-4t}}{3}
\end{aligned}
$$

b) Sea $F(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{y'' + 9y\right\} &= \mathscr{L}\{e^t\} \\
\mathscr{L}\left\{y''\right\} + 9\mathscr{L}\left\{y\right\} &= \frac{1}{s-1} \\
s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + 9F(s) &= \frac{1}{s-1} \\
s^2F(s) + 9F(s) &= \frac{1}{s-1} \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+9)}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{10}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{10}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{e^t}{10} - \frac{\cos 3t}{10} - \frac{\sin 3t}{30}
\end{aligned}
$$

Traslación en el eje s

Ejemplo

Calcule:

$$\mathscr{L}\left\{t\left(e^{t}+e^{2t}\right)^{2}\right\}$$

Solución: Sea $F(s)=\mathscr{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$Desarrollando el binomio y utilizando la linealidad:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t(e^{2t}+2e^{3t}+e^{4t})\right\} &= \mathscr{L}\{e^{2t}t\}+2\mathscr{L}\{e^{3t}t\}+\mathscr{L}\{e^{4t}t\}\\ &= F(s-2)+2F(s-3)+3F(s-4)\\ &= \frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-3)^2}+\frac{3}{(s-4)^2}\end{aligned}$$

Traslación en el eje t

Ejemplo

Calcule:

$$\mathscr{L}\left\{\sin t \cdot \mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Solución: Recordemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$, y que $\cos(-t)=\cos t$, luego:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\sin t \cdot \mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot \mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&= \mathscr{L}\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathscr{L}\{\cos(t)\}\\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{s}{s^2+1^2} = -\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Conclusiones

1. Se resolvió ED utilizando la transformada de Laplace.
2. El método de la transformada de Laplace es sencillo de seguir, la dificultad radica en la descomposición de fracciones parciales.

Gracias

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA