Ecuaciones Diferenciales 2025-1

Transformada de Laplace. Parte IV

Semana 13: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Resolver** ecuaciones diferenciales utilizando el segundo teorema de traslación (Traslación en el eje "t").
- **Resolver** ecuaciones diferenciales utilizando la propiedad de la derivada de una transformada.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

PROPIEDADES OPERACIONALES II

1

Logros

- **Resuelve** ecuaciones diferenciales utilizando el segundo teorema de traslación (Traslación en el eje "t"). (L.8.13.2.6)
- **Resuelve** ecuaciones diferenciales utilizando la propiedad de la derivada de una transformada. (L.8.13.2.7)

Traslación en el eje t

Si se conoce la transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ de una función F es posible calcular la transformada inversa de Laplace de un múltiplo exponencial de F, es decir, $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$

Teorema 1: Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{1}$$

Prueba: Por definición,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st}f(t-a)\mathscr{U}(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\mathscr{U}(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

Ejemplos

1 Evalúe $\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\}$.
Solución: Sea $f(t)=1$, entonces, $\mathscr{L}\{f(t)\}=1/s$

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\}=\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\}=e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}.$$

2 Evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$, donde

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0\leq t\leq 2\\ -1, & 2\leq t\leq 3\\ 0, & t\geq 3\end{cases}$$

Solución: Se tiene que $f(t)=2-3\mathscr{U}(t-2)+\mathscr{U}(t-3)$

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=2\mathscr{L}\{1\}-3\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-2)\}+\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-3)\}=\frac{2}{s}-3\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}$$

Forma inversa del teorema 1

Si

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

A partir del teorema 1 se puede calcular la transformada inversa de $e^{-as}F(s)$, $a > 0$, en efecto,

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a) \tag{2}$$

Ejemplo:

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$

Solución:

Identificando $a = 2$ y $F(s) = 1/(s-4)$, entonces $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$. Por lo tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$$

Forma alternativa del teorema 1

A menudo buscamos determinar la transformada de Laplace de una función del tipo $g(t)\mathscr{U}(t-a)$. Para aplicar el teorema 1 debemos escribir $g(t) = f(t-a)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} t^2\mathscr{U}(t-2) &= \left(t^2 - 4t + 4 + 4t - 4\right)\mathscr{U}(t-2) = \left((t-2)^2 + 4(t-2) + 4\right)\mathscr{U}(t-2) \\ &= (t-2)^2\mathscr{U}(t-2) + 4(t-2)\mathscr{U}(t-2) + 4\mathscr{U}(t-2) \end{aligned}$$

Es por esto que resulta conveniente encontra un resultado directo para encontrar $\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\}$. Por definición,

$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}g(t)dt \overset{u=t-a}{=} \int_0^\infty e^{-s(u+a)}g(u+a)du$$

es decir,

$$\boxed{\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}} \tag{3}$$

Ejercicios

1. Resuelva $y' + y = f(t), \quad y(0) = 5$, dónde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 3\cos(t), & t \geq \pi \end{cases}$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{y\} &= 3\mathscr{L}\{\cos(t)\mathscr{U}(t-\pi)\} \\
sY(s) - y(0) + Y(s) &= 3e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos(t+\pi)\} \\
(s+1)Y(s) - 5 &= 3e^{-\pi s}\mathscr{L}\{-\cos(t)\} \\
(s+1)Y(s) - 5 &= -3e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos(t)\} \\
(s+1)Y(s) &= 5 - 3e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = 5\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right] \qquad (4)$$

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}e^{-\pi s}\right\} \overset{(2)}{=} e^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} \overset{(2)}{=} \sin(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\right\} \overset{(2)}{=} \cos(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)$

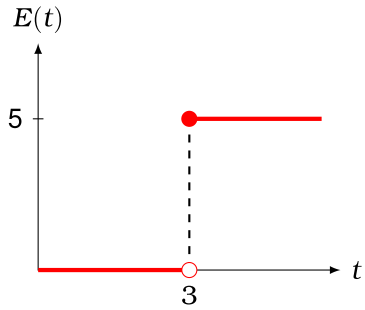
Aplicando la transformada inversa a (4) y utilizando los resultados anteriores

$$\begin{aligned} y(t) &= 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\mathscr{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\sin(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi) - \frac{3}{2}\cos(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi) \\ &= 5e^{-t} + \frac{3}{2}\left[e^{-(t-\pi)} + \sin(t) + \cos(t)\right]\mathscr{U}(t-\pi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{cases} 5e^{-t}, & 0 \le t \le \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-(t-\pi)} + \frac{3}{2}\sin(t) + \frac{3}{2}\cos(t), & t \ge \pi \end{cases}$$

Para el alumno

Halle la carga $q(t)$ en un circuito RC en serie dónde $q(0) = 0, R = 2.5\ \Omega$, $C = 0.08\ F$ y $E(t)$ está dado por la siguiente gráfica



Respuesta:

$$q(t) = \frac{2}{5}\mathscr{U}(t-3) - \frac{2}{5}e^{-5(t-3)}\mathscr{U}(t-3)$$

Derivada de una transformada

Suponiendo que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de diferenciación e integración, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt\\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\}.\end{aligned}$$

Es decir

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \tag{5}$$

Podemos usar el resultado (1) para encontrar la transformada de Laplace de $t^2f(t)$:

$$\mathscr{L}\{t^2f(t)\} = \mathscr{L}\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Derivada de una transformada

Teorema 1: Derivadas de las transformaciones

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$ entonces

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \tag{6}$$

Ejemplo: Si

$$f(t) = \sin(kt), \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

entonces

$$\mathscr{L}\{t \sin(kt)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\sin(kt)\} - \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$$

Observación: Para calcular la transformada de Laplace de una función de la forma

$$f(t) = t^n e^{at}$$

podemos usar el primer teorema de traslación (traslación en el eje s) o el teorema 1 de arriba.

Ejemplo

Usando el teorema de traslación en el eje s,

$$\mathscr{L}\{te^{3t}\} = \mathscr{L}\{t\}|_{s \to s-3} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s \to s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Mientras que, del teorema 1,

$$\mathscr{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Ejercicios

1. **Un problema de valor inicial.** Resuelva $y'' + 16y = \cos(4t)$, sujeto a $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Solución

Aplicando la transformada de Laplace

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{s}{s^2+16}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}.$$

Del ejemplo anterior, $\mathscr{L}\{t\sin(kt)\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$. Por lo tanto, para $k = 4$,

$$\mathscr{L}\{t\sin(4t)\} = \frac{8s}{(s^2+16)^2}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t)$$

2 Resuelva $y'' + 16y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

Solución

La ecuación es

$$y'' + 16y = \cos(4t) - \cos(4t)\mathscr{U}(t-\pi).$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 16\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\cos(4t) - \cos(4t)\mathscr{U}(t-\pi)\}$$

$$(s^2+16)\mathscr{L}\{y\} = 1 + \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos(4(t+\pi))\}$$

$$(s^2+16)\mathscr{L}\{y\} = 1 + \frac{s}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+16}e^{-\pi s}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s}$$

Sabemos que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}\mathscr{L}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}t\sin(4t).$$

Ahora, utilizando la forma inversa del teorema de traslación en el eje t:

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a),$$

entonces, tomando

$$F(t) = \frac{s}{(s^2+16)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{8}t\sin(4t)$$

se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s}\right\} = \frac{1}{8}(t-\pi)\sin\left(4(t-\pi)\right)\mathscr{U}(t-\pi)$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t) - \frac{1}{8}(t-\pi)\sin(4t)\mathscr{U}(t-\pi)$$

Para el alumno

Considere un circuito RLC con voltaje constante E_0. Utilice la transformada de Laplace para hallar la carga si se sabe que $q(0) = 0$, $i(0) = 0$.

Solución:

La ecuación del sistema es

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}.$$

Sea $2\lambda = \frac{R}{L}$ y $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, entonces

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \frac{E_0}{L}.$$

$$q(t) = \begin{cases} E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\sinh\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t\right)\right)\right], & \lambda > \omega \\ E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\right], & \lambda = \omega \\ E_0C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\sinh\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)\right)\right], & \lambda < \omega \end{cases}$$

Problemas para el alumno

1. (Ex. Final 23-2 - Pregunta 3 - Modelo B)
Considere el problema de valor inicial

$$y'' - y' - 6y = \mathscr{U}(t-2), \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1$$

   a) (1 pts) Aplique la transformada de Laplace a la ecuación anterior y utilice las condiciones iniciales.
   b) (1 pts) Resuelve para $Y(s)$ (Recordar que $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$).
   c) (4 pts) Halle $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.
   d) (2 pts) Halle la transformada de Laplace de la función $f(t)$, definida como:

$$f(t) = \begin{cases} y(0), & 0 \leq t < 2 \\ t+2, & 2 \leq t \end{cases}$$

   donde $y(0)$ es la evaluación de la solución del ítem anterior en $t = 0$.

Respuestas:

a)

$$s^2Y(s) - s + 1 - sY(s) + 1 - 6Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

b)

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s-3)(s+2)} + \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}$$

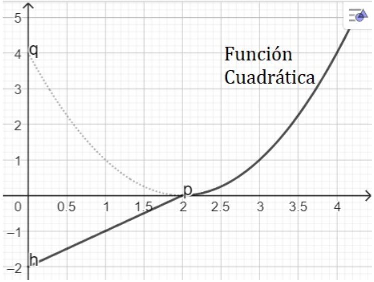
c)

$$y(t) = -\frac{1}{6}\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{15}\mathscr{U}(t-2)e^{3t-6} + \frac{1}{10}\mathscr{U}(t-2)e^{-2t+4} + \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

d)

$$F(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right]$$

2 (Ex. Final 23-2 -Pregunta Adicional - Modelo A)
Determine la expresión que defina la función de la figura usando el escalón unitario y halle la transformada de Laplace a dicha función.



Respuesta:

$$f(t) = t - 2 + \left[(t-2)^2 - (t-2)\right]\mathscr{U}(t-2)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right]$$

Conclusiones

1. Las propiedades de la transformada de Laplace nos permiten resolver ecuaciones diferenciales más fácilmente.
2. Es importante reconocer la forma de las funciones en las propiedades para calcular la transformada inversa.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA