Ecuaciones diferenciales

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (parte 2)

Semana 08: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Resolver** sistemas ED de primer orden aplicando valores y vectores propios (caso 3).

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

Sistemas de ED (Eigenvalores complejos)

1

Logros

Resuelve sistemas ED de primer orden aplicando valores y vectores propios (caso 3). L.5.8.1.3

Números complejos

El conjunto de los números complejos, el cual se denota por $\mathbb{C}$, esta definido como:

$$\mathbb{C} = \left\{x + yi \colon x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$$

Dados $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes operaciones:

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm y_1) + (x_2 \pm y_2) i$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$
- $\overline{z_1} = x_1 - y_1 i$
- $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

De la definición se tiene que $\sqrt{-1} = i$, es así que cuando trabajamos en el conjunto $\mathbb{C}$, expresiones como $\sqrt{-16}$ tienen sentido ya que $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$
Por otro lado, dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definimos la *parte real* de z, $Re(z) = x$; y la *parte imaginaria* de z, $Im(z) = y$.

Ejemplo

Considere el polinomio $p(x) = x^2 - 2x + 10$, calcule las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

<u>Solución:</u>

Utilizaremos la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas para calcular las soluciones de dicha ecuación. De esta manera, las soluciones son:

$$r_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + 3i$$
$$r_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - \sqrt{-36}}{2} = 1 - 3i$$

ED matricial $X' = AX$, donde A tiene eigenvalores complejos

Retomando nuestro estudio de la solución general de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$X' = AX,$$

analizaremos qué sucede cuando algunos de los eigenvalores de A (matriz $n \times n$) son números complejos. Cabe resaltar que nos concentraremos en el caso $n = 2$.

- La matriz A es de tamaño 2×2 y tiene dos eigenvalores complejos: En esta situación, dichos eigenvalores **siempre** serán conjugados:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Importante: Los eigenvectores también pueden tener componentes complejas. Sea $v = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ un vector con componentes complejas (es decir $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), definimos el vector conjugado de v como $\overline{v} = \begin{bmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{bmatrix}$. En este contexto, si K_1 es un eigenvector asociado a λ_1, entonces $\overline{K_1}$ es el eigenvector asociado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. En este caso, la solución general es:

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \overline{K_1} e^{\lambda_2 t} \tag{1}$$

Notemos que la solución general dada en (1) contiene términos cuyas coordenadas son números complejos.
No obstante, es posible obtener una solución cuyos terminos involucren únicamente términos reales, para ello si $K_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ es el eigenvector asociado a $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, definimos:

$$B_1 = \begin{bmatrix} Re(z_1) \\ Re(z_2) \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} Im(z_1) \\ Im(z_2) \end{bmatrix}$$

Luego, la solución general (1) solo tendrá términos reales y será:

$$c_1 \left[B_1 \cos\beta t - B_2 \sin\beta t \right] e^{\alpha t} + c_2 \left[B_2 \cos\beta t + B_1 \sin\beta t \right] e^{\alpha t} \tag{2}$$

Ejemplo 1

Resuelva el sistema:

$$x' = 2x + 8y$$
$$y' = -x - 2y$$

<u>Solución</u>: Matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Calculamos los eigenvalores de A:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Luego, los eigenvalores son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$ (notemos que son conjugados)

Ahora debemos encontrar los eigenvectores,

- Para λ_1: Debemos analizar el sistema

$$\begin{bmatrix} 2-(2i) & 8 \\ -1 & -2-(2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} (2-2i)k_1 + 8k_2 = 0 \\ -k_1 - (2+2i)k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow k_1 = -(2+2i)k_2$$

Luego $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -(2+2i) \\ 1 \end{bmatrix}$ y así $K_1 = \begin{bmatrix} -2-2i \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector asociado a $\lambda_1 = 0+2i$.

- Para λ_2: Gracias a la discusión previa a este ejemplo, sabemos que para calcular el eigenvector asociado a λ_2 basta calcular $\overline{K_1}$, así $\begin{bmatrix} \overline{-2-2i} \\ \overline{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2i \\ 1 \end{bmatrix}$ es el eigenvector requerido.

Finalmente la solución (con coordenas complejas) es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} -2-2i \\ 1 \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} -2+2i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2it}$$

Además, usando lo definido anteriormente:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución general sin componentes complejas será:

$$X = c_1 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) e^{\alpha t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \beta t + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) e^{\alpha t}$$

Reemplazando $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, tenemos

$$X = c_1 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 2t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \right)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -2\cos(2t) + 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2\cos(2t) - 2\sin(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Resuelva el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -2x - y \end{aligned}$$

<u>Solución</u>: Matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Calculamos los eigenvalores de A:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, los eigenvalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ (notemos que son conjugados)

Ahora debemos encontrar los eigenvectores,

- Para λ_1: Debemos analizar el sistema

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \begin{cases} (1-i)\,k_1 + k_2 = 0 \\ -2k_1 - (1+i)\,k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\to k_2 = (-1+i)\,k_1$$

Luego $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$ y así $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$ es un eigenvector asociado a $\lambda_1 = 0 + i$.

- Para λ_2: Para calcular el eigenvector asociado a λ_2 basta calcular $\overline{K_1}$, así

$$K_2 = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{-1+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix}$$

es el eigenvector requerido.

Por lo tanto, la solución (con coordenas complejas) es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix} e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix} e^{-it}$$

Además, usando lo definido anteriormente:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución general sin componentes complejas será:

$$X = c_1 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos\beta t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin\beta t \right) e^{\alpha t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\beta t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin\beta t \right) e^{\alpha t}$$

Reemplazando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, tenemos

$$X = c_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin t\right) + c_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\sin t\right)$$

$$= c_1\begin{bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

Conclusiones

1. Los autovectores y autovalores de una matriz permiten calcular las soluciones de sistemas de ED lineales de primer orden.
2. Los sistemas también pueden resolverse por el método de eliminación.
3. Se ha estudiado 3 casos, que dependen de los eigenvalores.

Gracias

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA