RETO DINÁMICA DE SISTEMAS 2022 - 2º M3 -

Marco Antonio Buitrago López (21389)
Celia Moratalla Sainz (20224)
Irene Rodríguez Gramún (20286)

1. Ecuaciones físicas que permiten modelar el sistema

Para modelar el sistema emplearemos las ecuaciones necesarias para realizar el diagrama de bloques. Por una parte tenemos las ecuaciones del motor, ~~de las que sólo nos interesará la ecuación que relaciona la tensión del motor con la velocidad angular, y por otra parte, la del voltímetro, que relaciona la tensión del motor con el ángulo que forma la barra y con la tensión que marca el voltímetro.~~

$V_m(t) = K(V_{ref}(t) - V_{pot}(t))$ (esta está bien, pero no es ecuación del motor, sino de control) (6)

$U_e = k_b \omega_m(t)$

$V_m(t) = \frac{V(t)}{a_{max}} a(t)$

$V_m(t) = R \cdot i(t) + L \cdot d(i(t))/dt + U_e(t)$

$P_m(t) - Pr(t) = J_m \cdot d(\omega(t))/dt + B_m \cdot \omega(t)$

Sabiendo que $K_v = 920 \cdot 2\pi/60$ (rad/s)/v

R = 0,124 Ω

Por último, añadiremos ~~un par de~~ cuatro ecuaciones más al sistema. La primera es ~~la suma de momentos de inercia que componen el sistema~~ la suma de los pares en el eje de giro. ~~Consideraremos el momento producido por el peso de la barra despreciable y la masa del motor será la propia masa del motor más la de la hélice. También consideraremos que existe una fuerza de rozamiento con el aire (β).~~

$$Lf(t) - g\, L\, sin(a(t)) \left[\frac{M_b}{2} + M_R\right] = J \frac{d^2 a}{dt^2} + B \frac{da(t)}{dt} t$$

$M_R \rightarrow$ masa del motor + masa de las palas

J → momento de inercia de la barra. La expresión es $J = \frac{1}{3} \cdot M_b \cdot L^2 + M_R \cdot L^2$

$V_{pot} = 10/3\pi \cdot a(t)$ (ecuación del potenciómetro)

$P_r(t) = Kd \cdot \omega^2(t)$ (ecuación del par de resistencia de la hélice)

$f(t) = \frac{1}{2} \rho (\omega_m r)^2 S_{hélice} C$ X

$f(t) = K_R \cdot \omega^2(t)$

Siendo K_R

$K_R = F_{max}/\omega^2_{max} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ N/(rad/s)

2. Indicar y justificar si se trata de un sistema dinámico o estático

Se trata de un sistema dinámico porque los valores de las variables de salida dependen de los valores de las variables de entrada en un instante y en los instantes anteriores. Además, se puede ver que es dinámico porque hay derivadas en las ecuaciones del sistema.

3. Linealizar las ecuaciones en torno a un punto de trabajo razonable

Para linealizar el sistema en un punto razonable, tomaremos como tensión de referencia un valor que se encuentre en un intervalo de 0 a la tensión máxima que puede dar el motor. Para ello, tendremos que despejar las ecuaciones y hallar los valores del punto de equilibrio.

$$V_m(t) = K(V_{ref}(t) - V_{pot}(t))$$
$$u_e(t) = k_b\omega_m(t)$$
$$V_m(t) = \frac{10}{3\pi}a(t)$$
$$V_m(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_e(t)$$
$$P_m(t) - P_R(t) = J_m\frac{dw(t)}{dt} + B_m w(t)$$
$$Lf(t) - g\,L\,sin(a(t))\left[\frac{M_b}{2} + M_R\right] = J\frac{d^2a(t)}{dt^2} + B\frac{da(t)}{dt}$$
$$f(t) = K_R\omega(t)^2$$
$$V_{pot}(t) = \frac{10}{3\pi}a(t)$$
$$P_R(t) = K_D\,\omega(t)^2$$

Tomando $\alpha=\pi/6$ como punto de equilibrio, la fuerza y la velocidad angular en el equilibrio quedan así:

- $f_0 = g\,sin\left(a_0\right)\left(\frac{M_b}{2} + M_R\right)$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{f_0}{K_R}}$

Por otro lado, estas serían las ecuaciones linealizadas.

$$\Delta V_m(t) = K(\Delta V_{ref}(t) - \Delta V_{pot}(t))$$
$$\Delta u_e(t) = k_b\Delta\omega_m(t)$$
$$\Delta V_m(t) = \frac{10}{3\pi}\Delta a(t)$$
$$\Delta V_m(t) = R\,\Delta i(t) + L\frac{d\Delta i(t)}{dt} + \Delta u_e(t)$$
$$\Delta P_m(t) - \Delta P_R(t) = J_m\frac{d\Delta w(t)}{dt} + B_m\Delta w(t)$$
$$L\,\Delta f(t) - g\,L\,cos\left(a_0\right)\left[\frac{M_b}{2} + M_R\right]\Delta a(t) = J\frac{d^2\Delta a(t)}{dt^2} + B\frac{d\Delta a(t)}{dt}$$

$\Delta f(t) = 2\,K_R\,\omega_0\,\Delta\omega(t)$

$\Delta V_{pot}(t) = \frac{10}{3\,\pi}\Delta a(t)$

$\Delta P_R(t) = 2\,K_D\,\omega_0\,\Delta\omega(t)$

4. Calcular la transformada de Laplace de las ecuaciones

Las ecuaciones en Laplace serían:

$V_m(s) = K(V_{ref}(s) - V_{pot}(s))$

$u_e(s) = k_b\omega_m(s)$

$V_m(s) = \frac{10}{3\,\pi}A(s)$

$V_m(s) = R\,I(s) + L\,s\,I(s) + u_e(s)$

$P_m(s) - P_R(s) = J_m s\,w(s) + B_m\,w(s)$

$L\,F(s) - g\,L\,cos\left(a_0\right)\left[\frac{M_b}{2} + M_R\right]A(s) = J\,s^2A(s) + B\,s\,A(s)$

$F(s) = 2\,K_R\,\omega_0\,\omega(s)$

$V_{pot}(s) = \frac{10}{3\,\pi}A(s)$

$P_R(s) = 2\,K_D\,\omega_0\,\omega(s)$

5. Obtener la función de transferencia para el punto de trabajo definido

$$\frac{A(s)}{V_{ref}(s)} = \frac{K\,G(s)}{1 + 2K(1-226.637XG(s))}$$

Del modelo corregido:

```
                              0.005001
  -------------------------------------------------------------------
  8.682e-09 s^4 + 6.658e-05 s^3 + 0.004601 s^2 + 0.001256 s + 0.05605
```

Diagrama de bloques del sistema sin corregir:

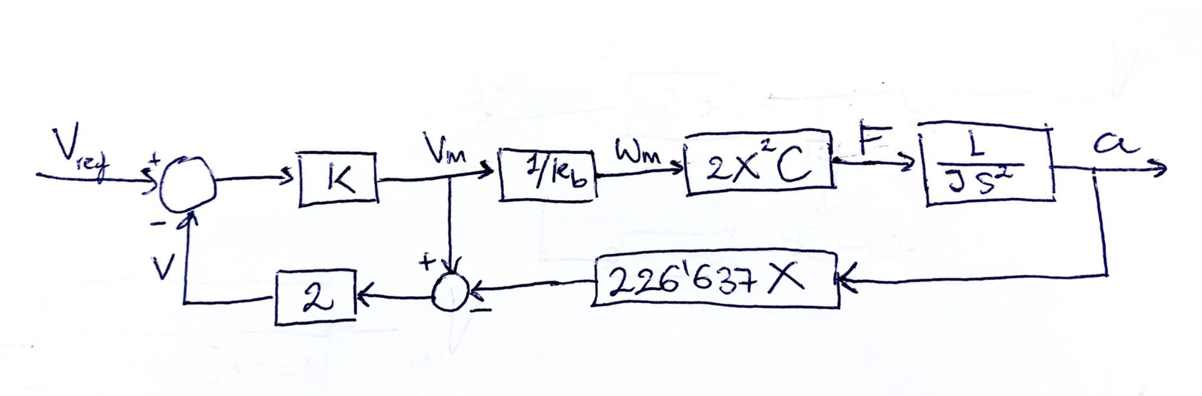
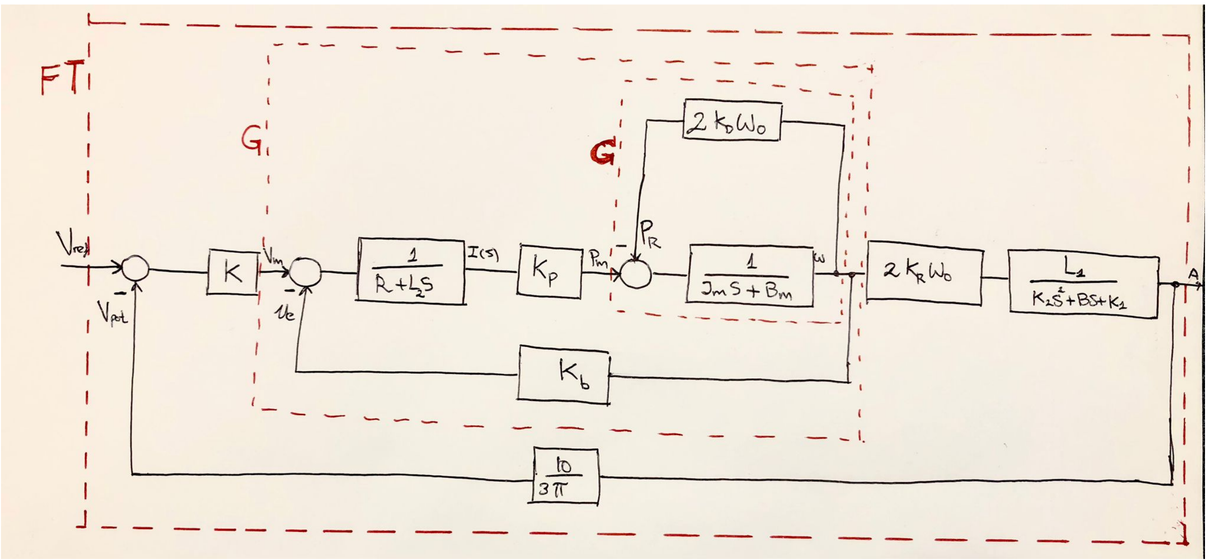


Diagrama de bloques del sistema corregido:

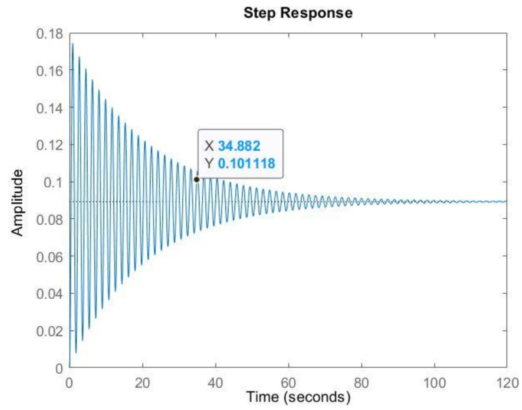


6. Orden del sistema, aproximaciones y ensayo

Para conocer el orden del sistema primero tenemos que hallar la función de transferencia, que es:

$$\frac{0.005001}{8.682e\text{-}09\ s^4 + 6.658e\text{-}05\ s^3 + 0.004601\ s^2 + 0.001256\ s + 0.05605}$$

Y su respuesta a un escalón:



Todo ello sacado del archivo de MATLAB adjunto al trabajo. Al mismo tiempo, hemos realizado el ensayo para unos determinados valores expuestos también en el archivo.

Se trata de un **sistema de cuarto orden**. Según los datos que hemos introducido, los polos serían:

```
10^3 ×
  -7.598970804236492 + 0.000000000000000i
  -0.069635462889940 + 0.000000000000000i
  -0.000048339944229 + 0.003492541734894i
  -0.000048339944229 - 0.003492541734894i
```

(Se da en formato long para facilitar el estudio).

El polo dominante (**<u>contando siempre que está multiplicado por</u>** 10^3) es $(-\ 0.000048339\ \pm\ 0.00349254i)$. Si la parte real de los polos adicionales son 6 veces mayores que la parte real del dominante, entonces el sistema se puede reducir. En nuestro sistema hay un polo que claramente puede despreciarse: $(-\ 7.5987\ \pm\ 0i)$. El sistema quedaría de tercer orden.

```
               75.802 (s+7599)
  -----------------------------------------
  (s+7599) (s+69.64) (s^2 + 0.09668s + 12.2)
```

Por otro lado, también existe otro, $-\ (0.0696354\ \pm\ 0i)$. Al despreciarlo obtenemos un sistema de segundo orden.

Luego, con los datos introducidos podemos reducir el sistema hasta uno de segundo orden.

```
          1.0886 (s+7599) (s+69.64)
  -----------------------------------------
  (s+7599) (s+69.64) (s^2 + 0.09668s + 12.2)
```

Al reducirlo, las gráficas de la respuesta de un escalón para ambos casos es prácticamente igual. Esto se debe a la poca influencia que tenían estos polos, y como se puede comprobar en la gráfica de zeros-polos del sistema.