Rapport du devoir de modèle probabiliste

Exercice 1:Validation de la Méthode de la Transformée Inverse par Simulation

Principe Fondamental

La méthode de simulation par transformée inverse repose sur le théorème suivant :

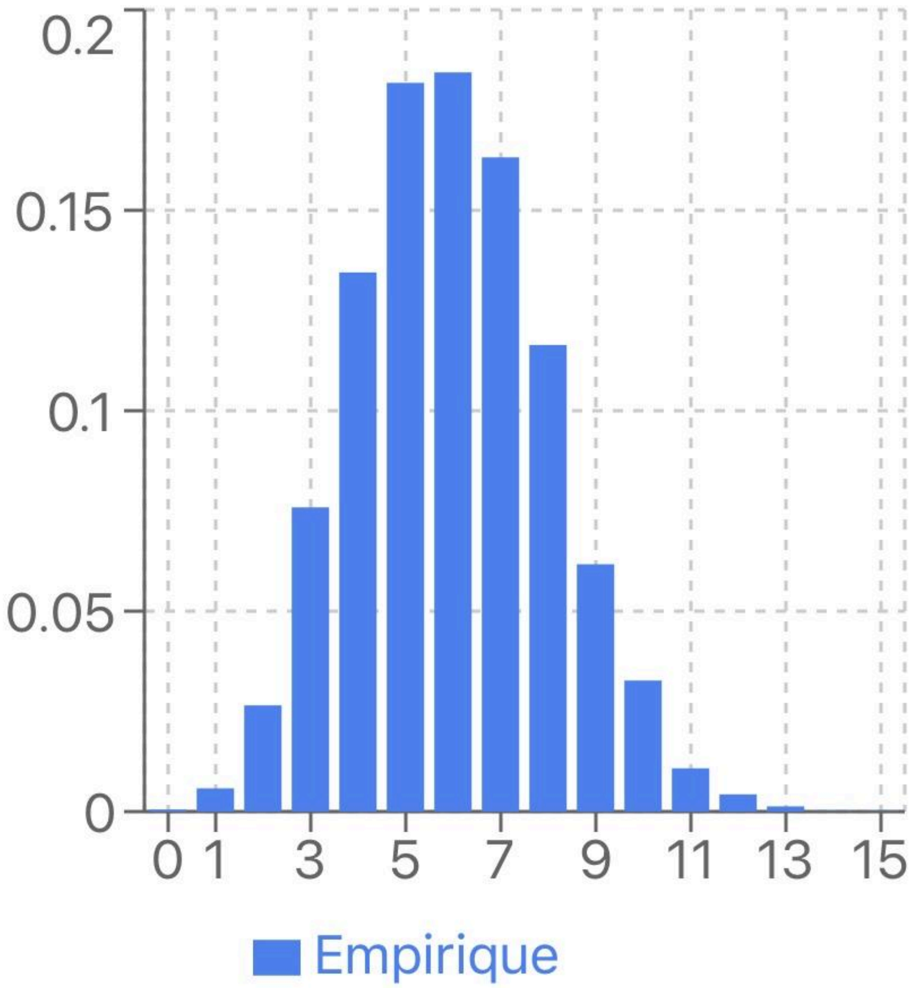
Théorème : Si U ~ U(0,1) et F est une fonction de répartition, alors $X = F^{-1}(U)$ suit la loi de probabilité de fonction de répartition F.

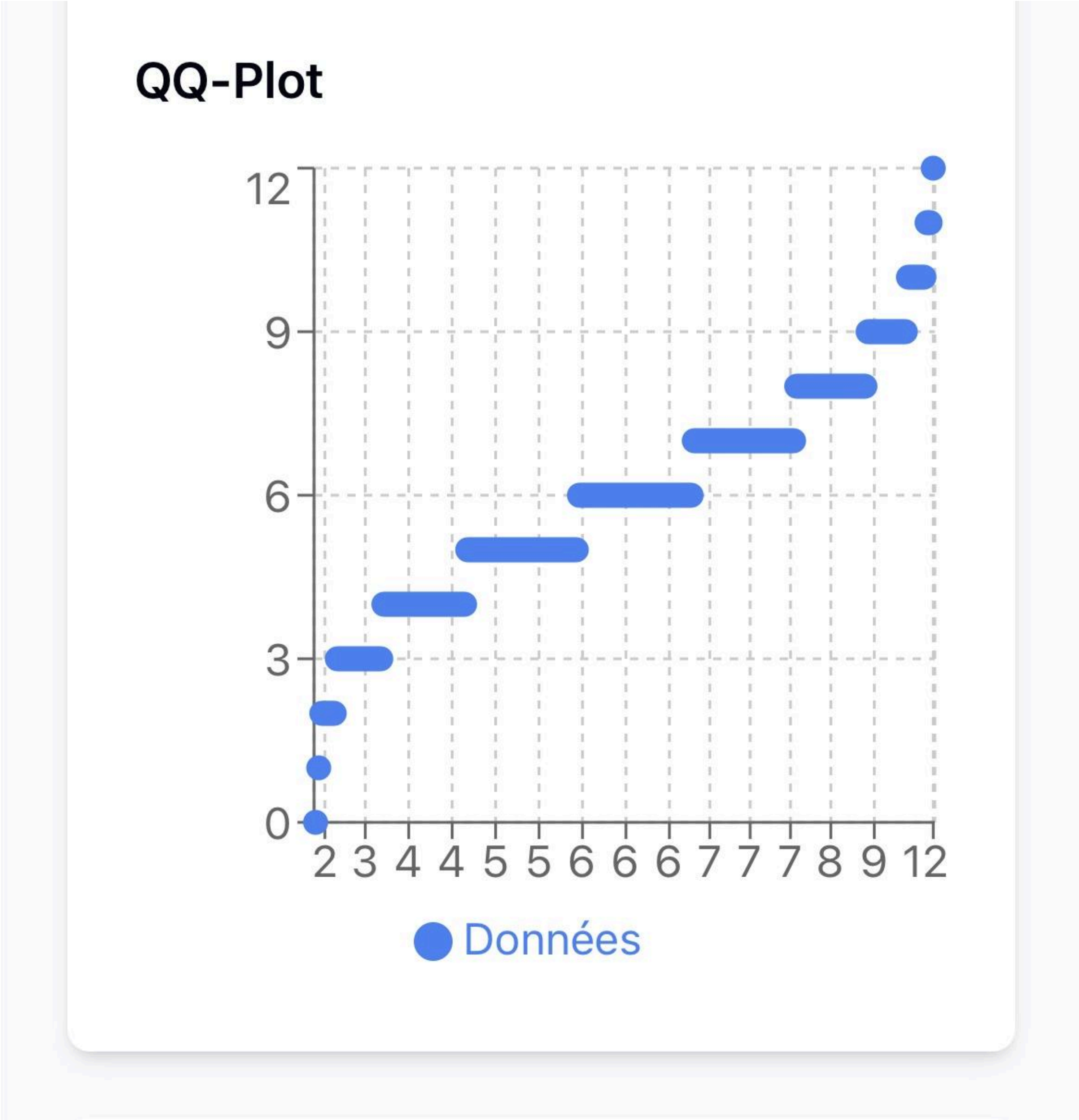
Paramètres de simulation : Taille d'échantillon : N = 10 000

Loi Binomiale B(n, p)

- Paramètres choisis : n = 20, p = 0.3
- Fonction de répartition :F(x) = Σ(k=0 jusqu'à ⌊x⌋) C(n,k) × p^k × (1-p)^(n-k)
- Espérance théorique : E[X] = n × p = 20 × 0.3 = 6.0
- Variance théorique : Var(X) = n × p × (1-p) = 20 × 0.3 × 0.7 = 4.2

Histogramme - Comparaison Empirique vs Théorique

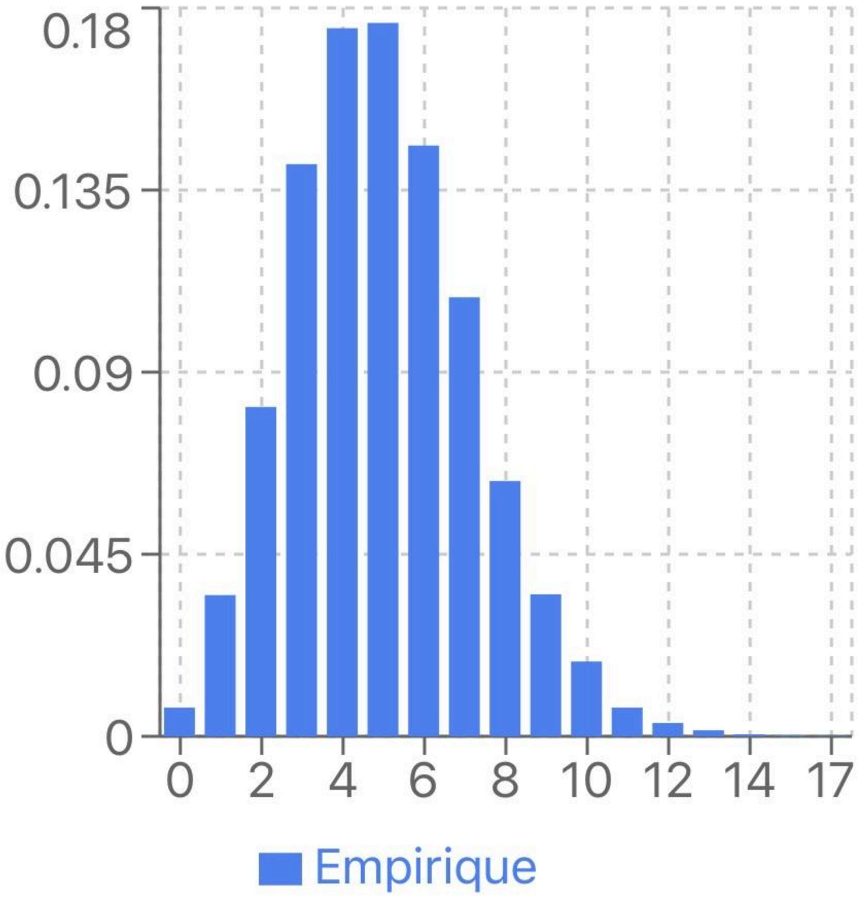


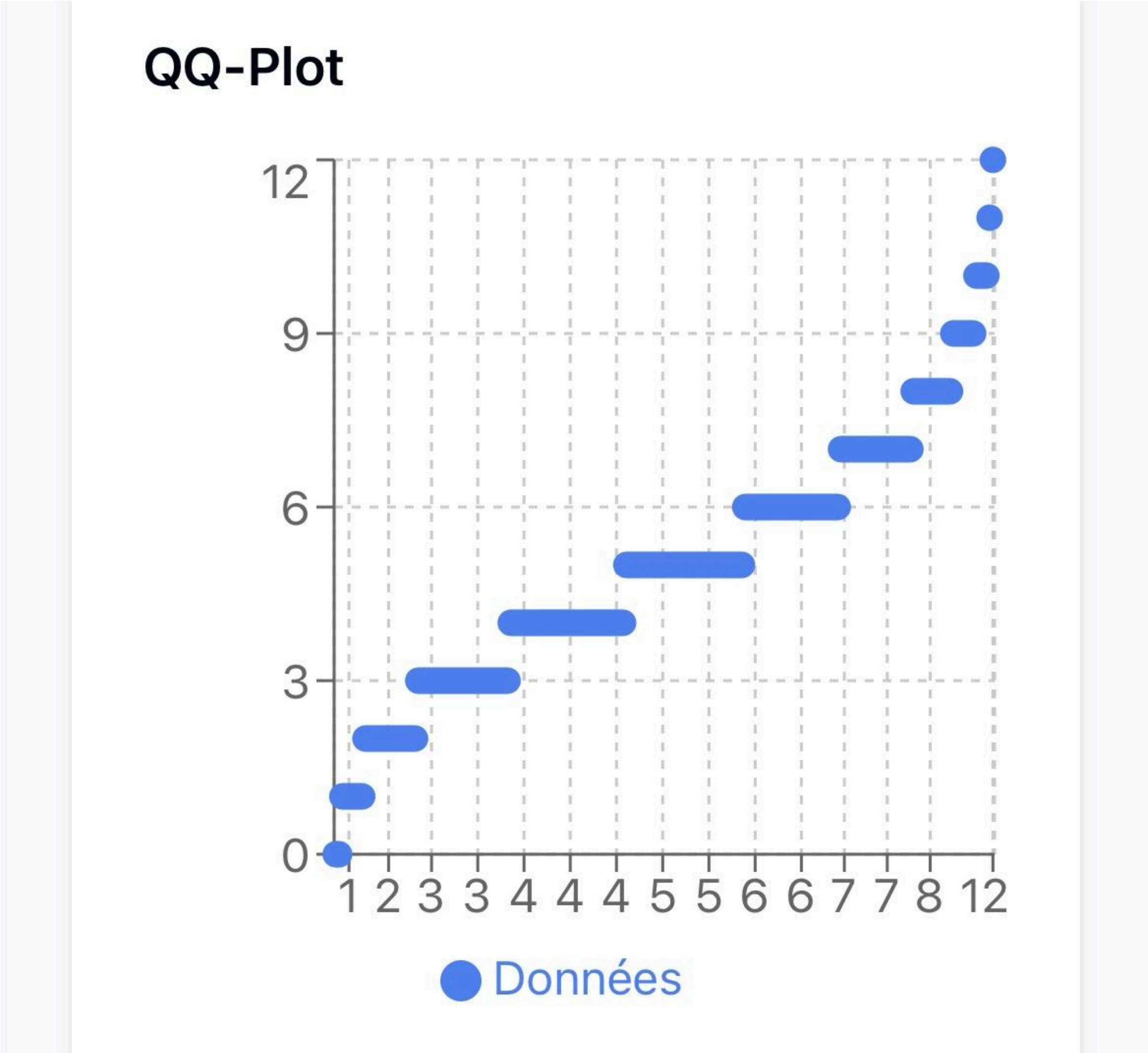


Loi de Poisson P(λ)

- Paramètre choisi : $\lambda = 5$
- Fonction de répartition :$F(x) = \Sigma(k=0 \text{ jusqu'à } \lfloor x \rfloor) (e^{(-\lambda)} \times \lambda^k) / k!$
- Espérance théorique: $E[X] = \lambda = 5.0$
- Variance théorique: $Var(X) = \lambda = 5.0$

Histogramme - Comparaison Empirique vs Théorique

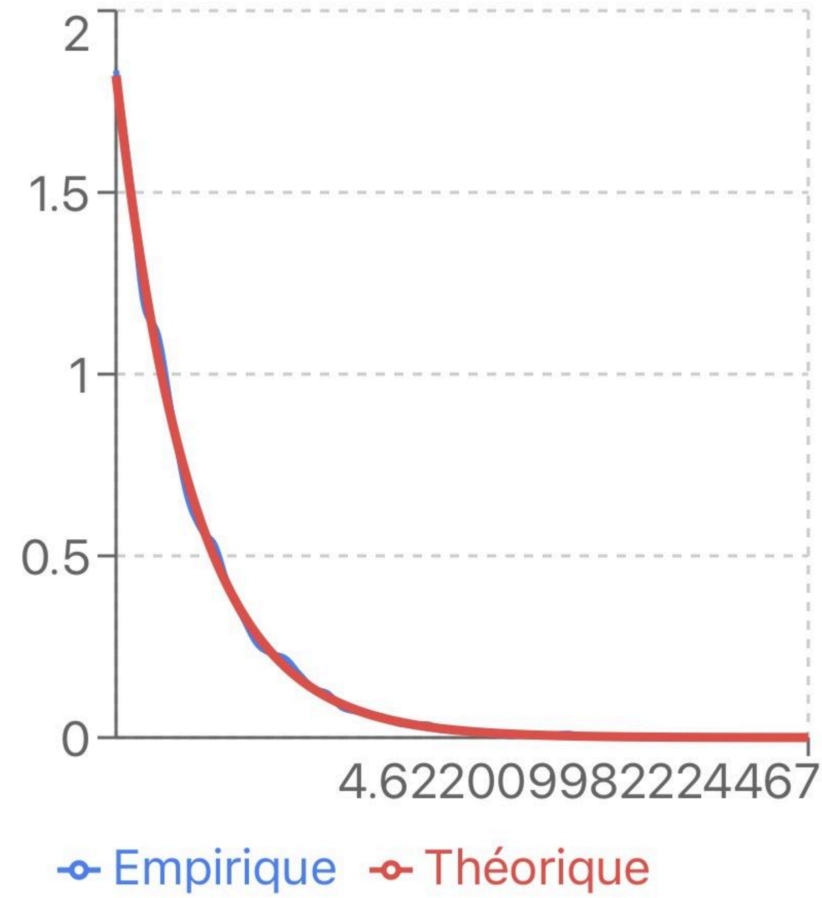


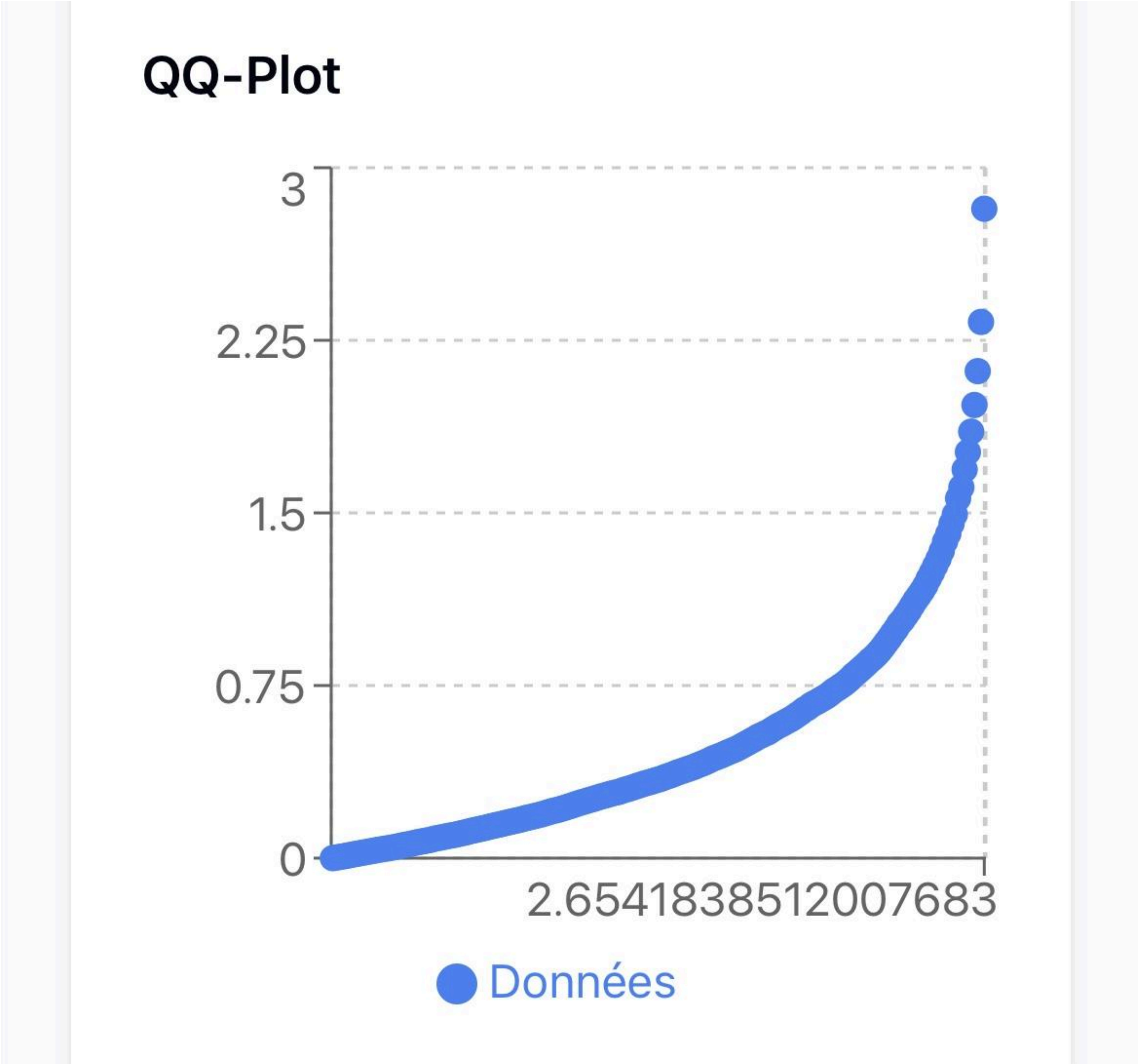


Loi Exponentielle Exp(θ)

- Paramètre choisi : $\theta = 2$
- Fonction de répartition: $F(x) = 1 - e^{(-\theta x)}$ pour $x \geq 0$
- Fonction quantile: $F^{-1}(u) = -\ln(1-u) / \theta$
- Espérance théorique: $E[X] = 1/\theta = 1/2 = 0.5$
- Variance théorique: $Var(X) = 1/\theta^2 = 1/4 = 0.25$

Histogramme - Comparaison Empirique vs Théorique

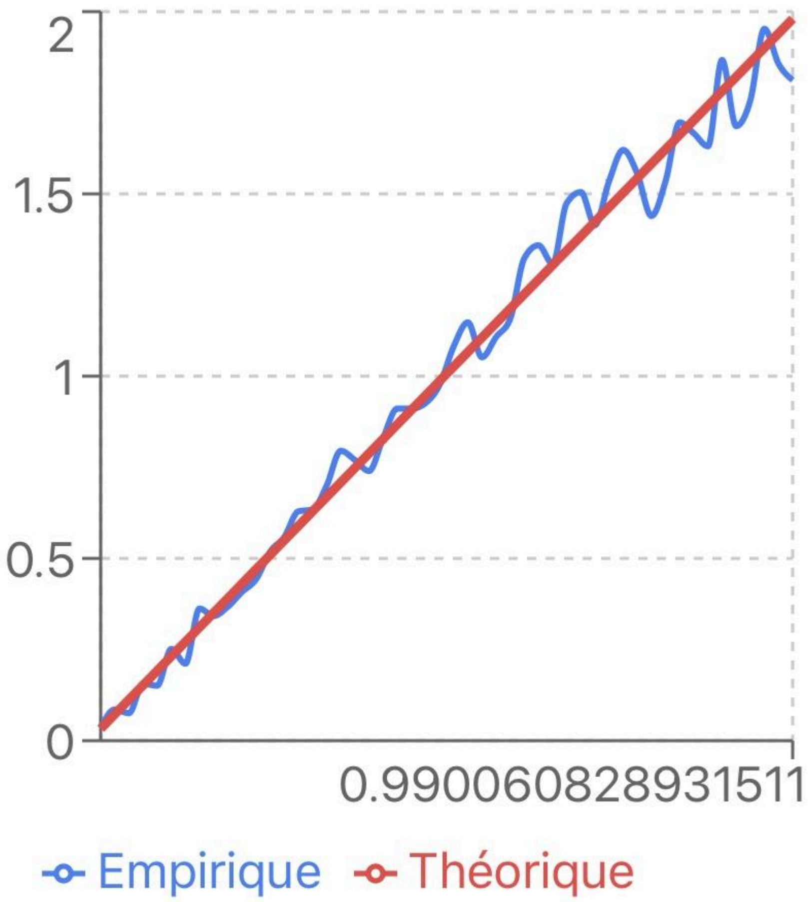


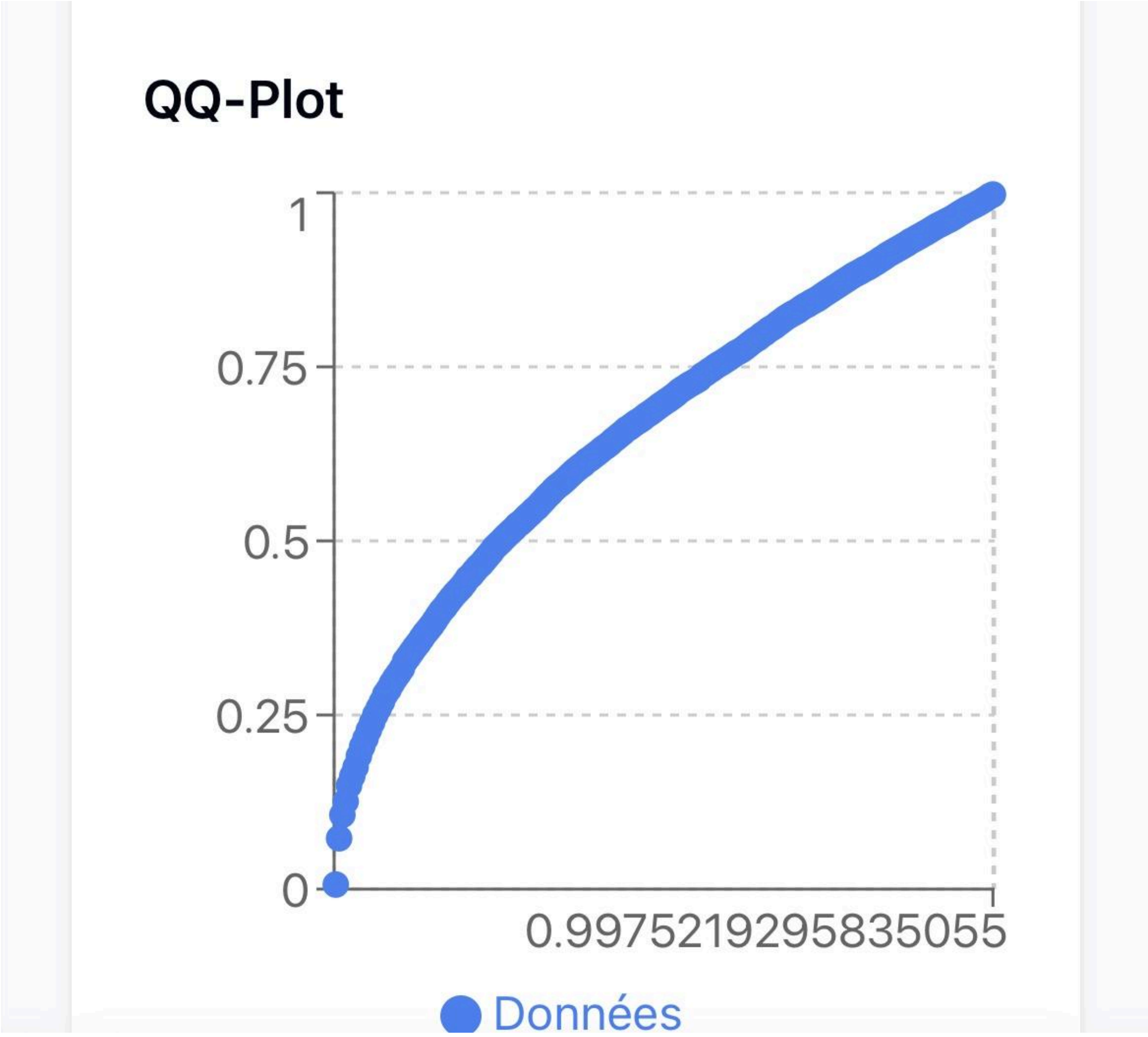


Loi Personnalisée f(x) = 2x sur [0,1]

- Densité choisie : $f(x) = 2x$ pour $x \in [0,1]$
-
- Fonction de répartition : $F(x) = \int_0^x 2t\,dt = [t^2]_0^x = x^2$ pour $x \in [0,1]$
- Fonction quantile: $F^{-1}(u) = \sqrt{u}$
- Espérance théorique:$E[X] = \int_0^1 x \times 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = [2x^3/3]_0^1 = 2/3 \approx 0.6667$
- Variance théorique: $E[X^2] = \int_0^1 x^2 \times 2x\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx = [x^4/2]_0^1 = 1/2$ $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1/2 - (2/3)^2 = 1/2 - 4/9 = 1/18 \approx 0.0556$

Histogramme - Comparaison Empirique vs Théorique





<u>Recapitulatif des Résultats</u>

Loi Binomiale B(20, 0.3)

- Moyenne : 5.9958
- Moyenne théorique:6
- Variance : 4.1292
- Variance theorique:4.2
- Test KS : D = 0.0078 < 0.0135 seuil critique

Loi de Poisson P(5)

- Moyenne : 4.9762
- Moyenne théorique:5
- Variance : 4.8634

- Variance theorique:5
- Test KS : D = 0.0062 < 0.0135 seuil critique

Loi Exponentielle Exp(2)

- Moyenne :0.5049
- Moyenne théorique:0.5
- Variance : 0.2501
- Variance theorique:0.25
- Test KS : D = 0.0066 < 0.0135 seuil critique

Loi Personnalisée f(x) = 2x

- Moyenne :0.6681
- Moyenne théorique:0.6667
- Variance : 0.0551
- Variance theorique:0.556
- Test KS : D = 0.0060 < 0.0135 seuil critique

Pour s'assurer de la fiabilité des simulations obtenues par la méthode de la transformée inverse, plusieurs outils de validation complémentaires sont employés.

Ce test statistique compare directement la fonction de répartition construite à partir de l'échantillon simulé à la fonction de répartition théorique de la loi cible. Une faible valeur de sa statistique *D* indique que l'écart maximal entre les deux courbes est négligeable, validant ainsi l'hypothèse que l'échantillon suit bien la distribution théorique.Le QQ-plot offre une validation graphique en mettant en relation les quantiles empiriques de l'échantillon simulé avec les quantiles théoriques de la loi attendue.

Exercice 2 : Vérification Empirique du Théorème Central Limite (TCL)

Paramètres de simulation

- N = 500 : Nombre d'échantillons Z_n générés
- n = 100 : Taille de chaque somme

Simulation avec la Loi Uniforme

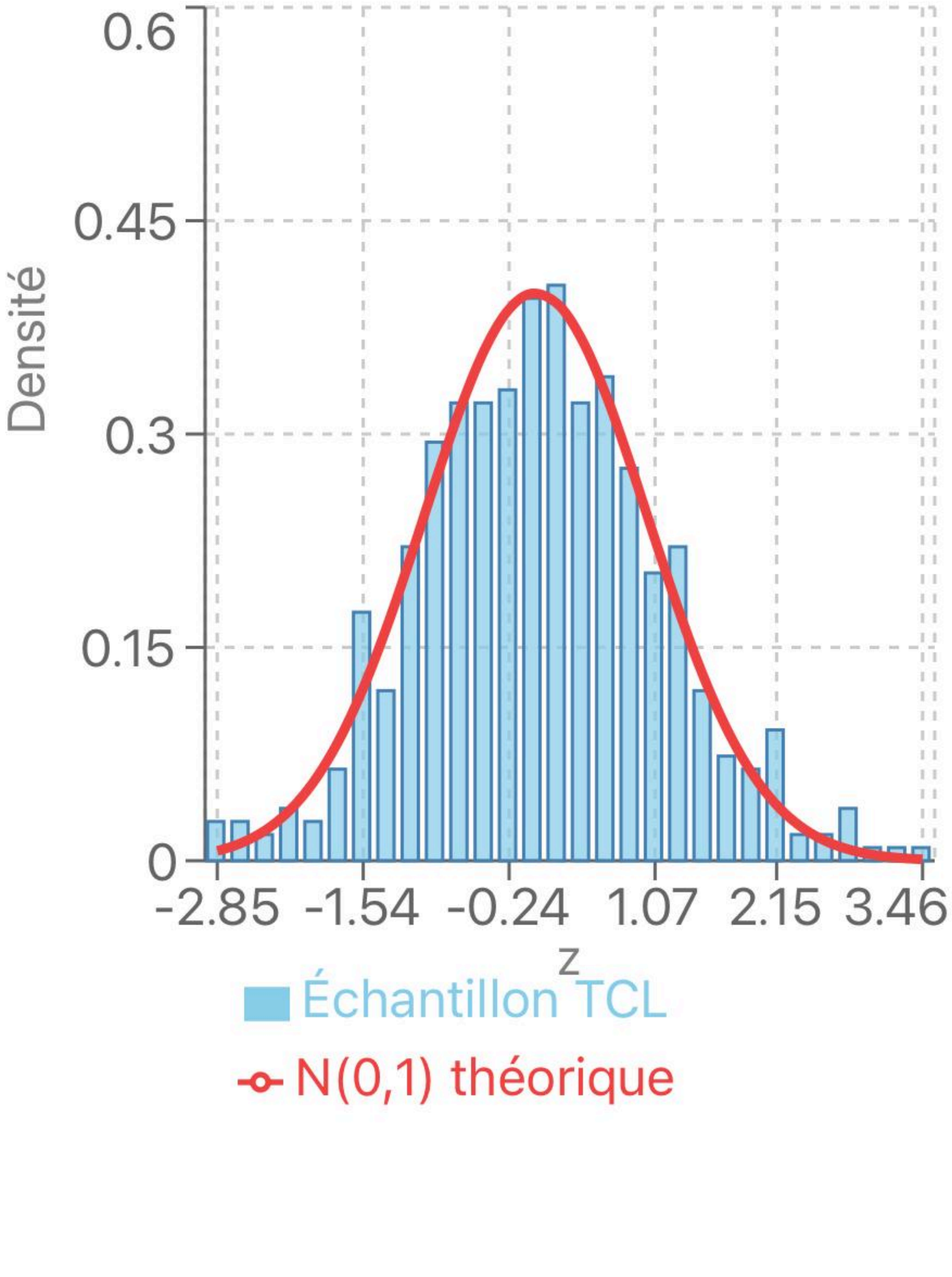
Pour X ~ U([0,1]) :

- Espérance : $\mu = 0.5$
- Variance : $\sigma^2 = 1/12 \approx 0.0833$

Pour la simulation:

- Espérance : -0.0106
- Variance : 1.0404
- Espérance théorique : 0
- Variance théorique : 1

Histogramme - Loi Uniforme (n=100, N=500)



Analyse graphique

Histogramme :

- L'histogramme des valeurs Z⍰ suit la courbe de densité N(0,1)
- La symétrie est bien respectée autour de 0
- La distribution correspondent bien à celles d'une loi normale

Fonction de répartition :

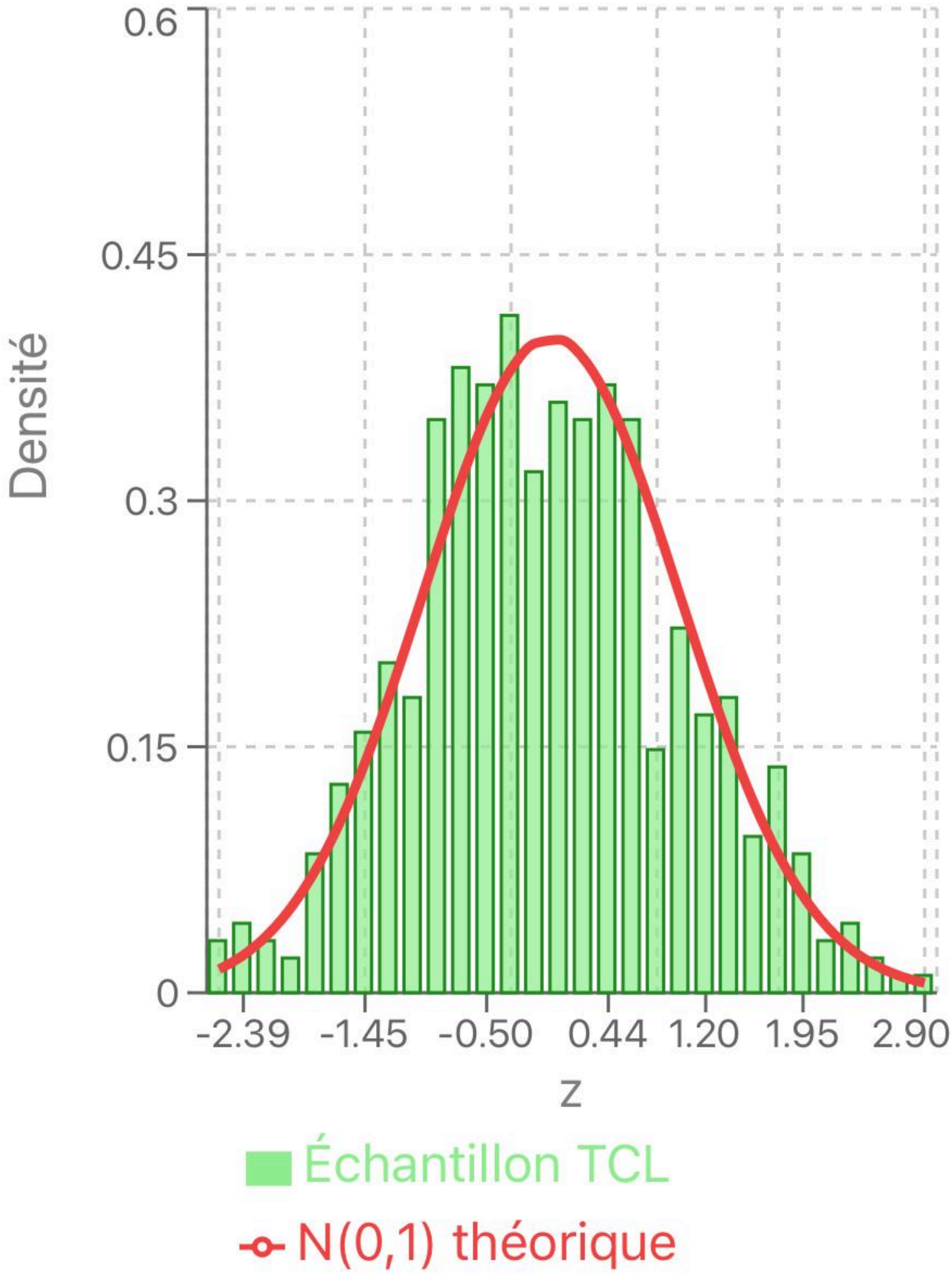
- La fonction de répartition coïncide avec la fonction de répartition théorique

Simulation avec la Loi Exponentielle

Pour $X \sim \text{Exp}(\lambda=1)$:

- Espérance : $\mu = 1/\lambda = 1$
- Variance : $\sigma^2 = 1/\lambda^2 = 1$

Histogramme - Loi Exponentielle λ=1 (n=100, N=500)



Analyse graphique

Histogramme :

- La forme gaussienne est clairement visible
- L'ajustement à la courbe N(0,1) est remarquable

Fonction de répartition :

- Bonne superposition avec la fonction théorique N(0,1)
- Les écarts sont négligeables

<u>EXERCICE 3:Méthode de Box-Muller</u>

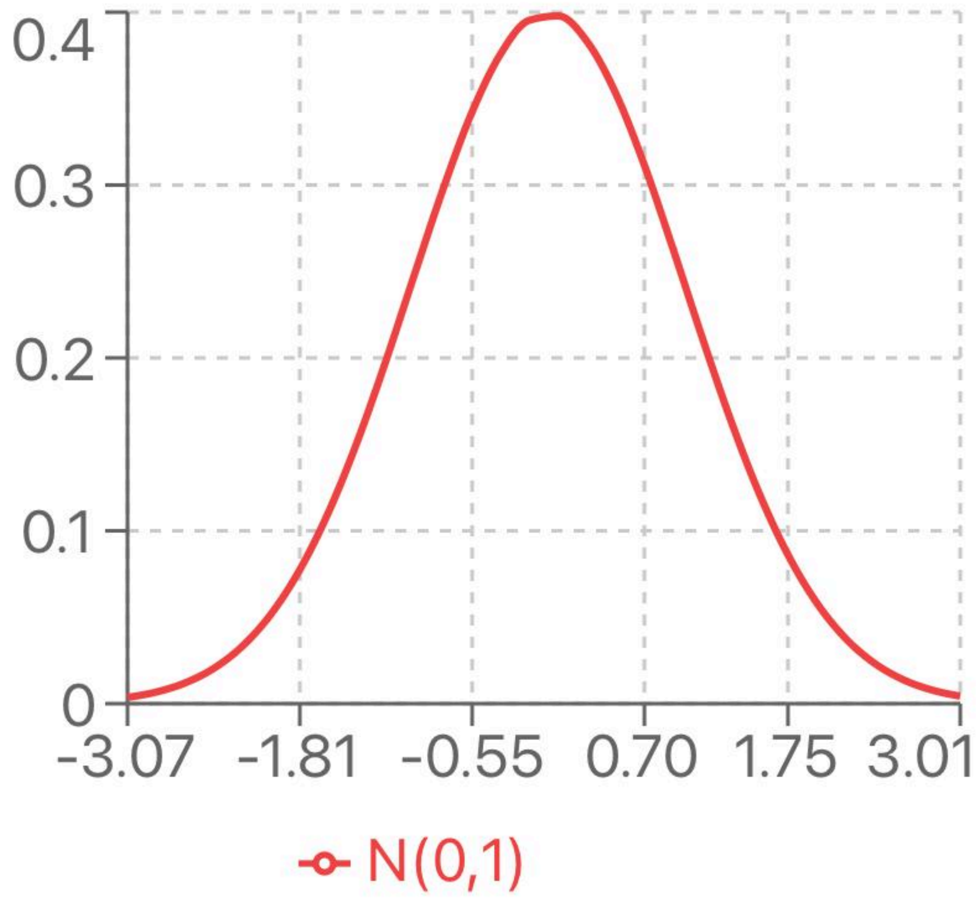
1) Proposition 1. Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes et de meme loi uniforme sur [0,1], alors les variables
X=sqrt(−2 ln(U) cos(2πV)) et Y=sqrt(−2 ln(U) sin(2πV)) sont indépendantes et de même loi N(0,1).

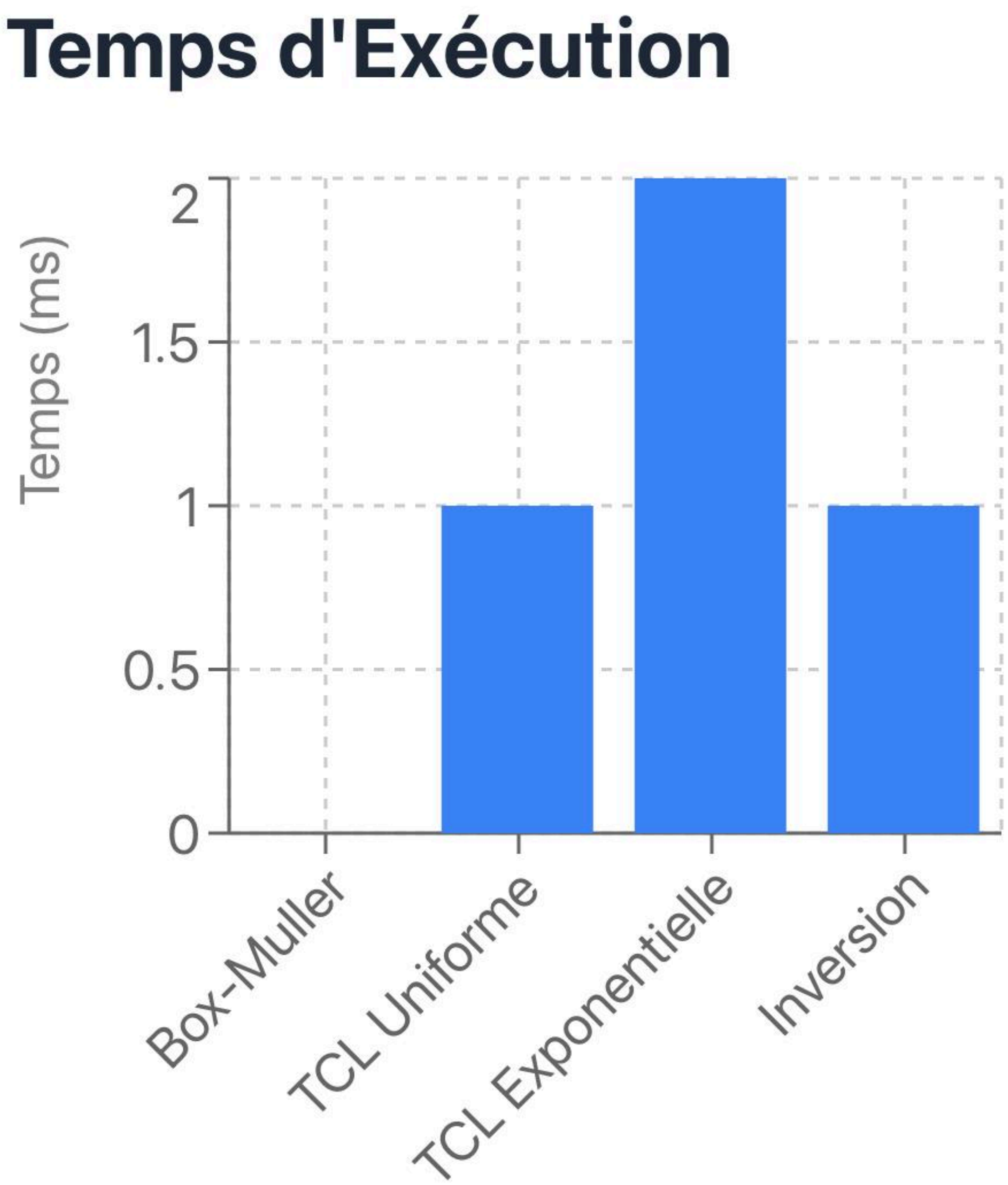
paramètre N=500

- Espérance théorique : E[X]=0
- Variance théorique : Var(X)=1
- Espérance : E[X]=0.0652
- Variance : Var(X)=1.0086

Box-Muller

Moyenne	Variance	KS D
0.0826	1.0254	0.0560





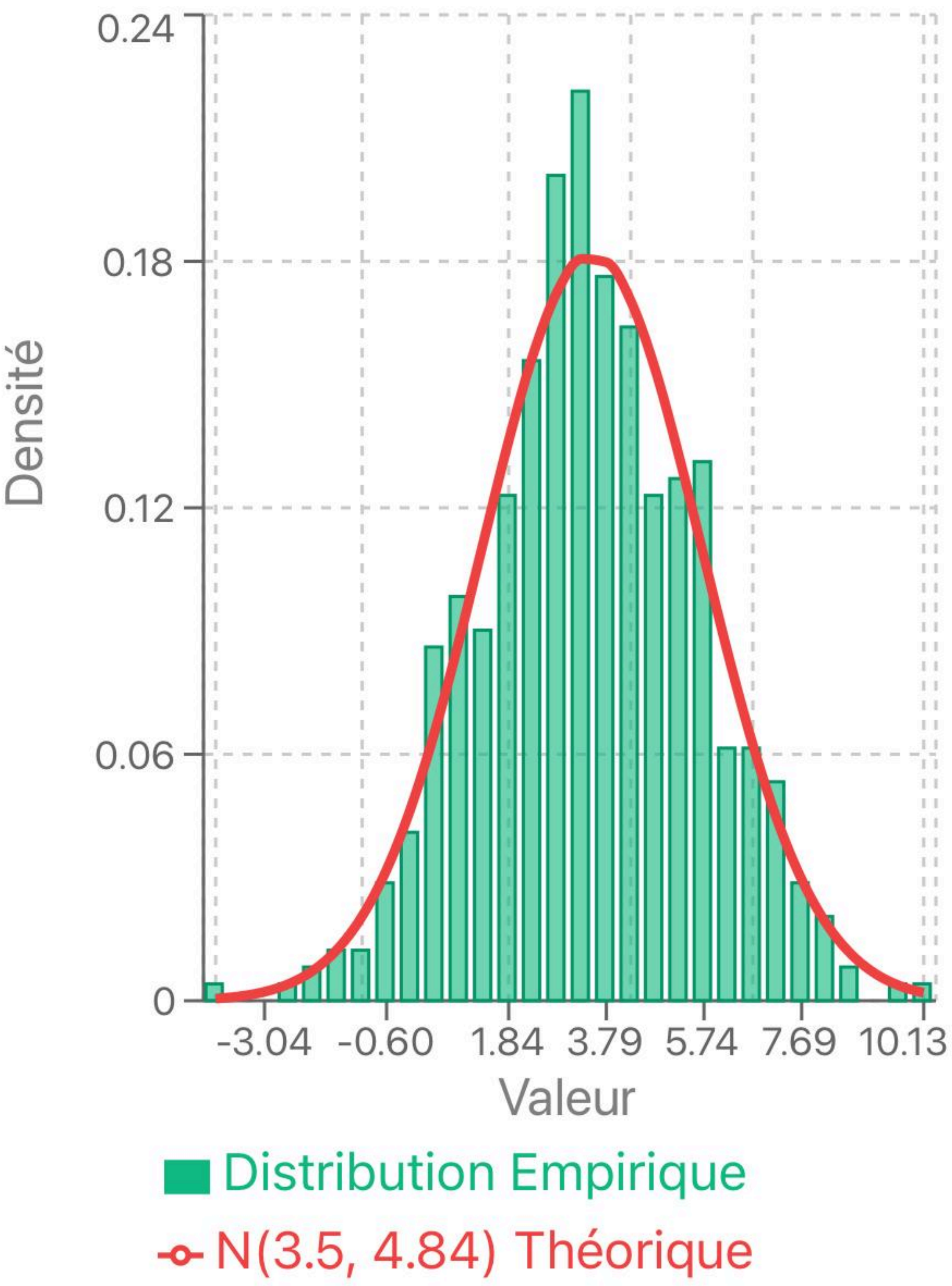
La méthode de Box-Muller est la plus rapide,Le Théorème Central Limite est avant tout pédagogique il est plus lent et approximatif pour un n fini.La méthode par inversion nécessite de connaître la fonction quantile La méthode par inversion et et le TCL, peuvent être des outils de compréhension mais La méthode de Box-Muller s'avère meilleur en pratique

2)

Paramètre choisis μ=3.5,σ=2.2

- Espérance théorique : E[X]=3.5
- Variance théorique : Var(X)=4.84
- Espérance : E[X]=3.4377
- Variance : Var(X)=4.9241

Histogramme Empirique de N(3.5, 4.84)



L'histogramme présente une distribution centrée sur zéro, ce qui correspond à une superposition quasi-parfaite avec la courbe de densité théorique de la loi normale centrée réduite.