SIC3601 : TD numéro 8

? Un signal sinusoïdal pur de fréquence 418Hz est échantillonné. La durée entre deux échantillons est de 20ms.

$\boxed{1}$ La condition d'échantillonnage de Shannon est respectée.

$\boxed{2}$ La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 20Hz.

$\boxed{3}$ La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 18Hz.

$\boxed{4}$ La transformée de Fourier à temps discret du signal échantillonné n'est pas définie car la condition d'échantillonnage n'est pas respectée.

Exercice 1: formule d'interpolation Dans cet exercice, on suppose $T > 0$ fixé.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, s_n le signal d'énergie finie ($s_n \in L^2(\mathbb{R})$) défini par sa transformée de Fourier S_n qui s'écrit :

$$S_n(f) = \begin{cases} \sqrt{T}e^{-\mathrm{i}2\pi nTf} & \text{si } f \in [-1/2T, 1/2T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer l'expression temporelle du signal s_n.

2. On définit dans l'espace des signaux d'énergie finie ($L^2(\mathbb{R})$) le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)^* \, dt$$

Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans l'espace des signaux d'énergie finie et à bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$.

3. Soit x un signal d'énergie finie et de bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$. On note X la transformée de Fourier de x. On définit une version périodisée de X par :

$$\begin{cases} \forall f \in]-1/2T, 1/2T] & \tilde{X}(f) = X(f) \\ \forall f \in \mathbb{R} & \tilde{X}(f + \frac{1}{T}) = \tilde{X}(f) \end{cases}$$

(a) Calculer le développement en série de Fourier de $\tilde{X}$. On rappelle que dans le cas présent, il s'exprime sous la forme :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}2\pi nfT} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{Z} : c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \tilde{X}(f)e^{-\mathrm{i}2\pi nfT} \, df$$

(b) En déduire la relation suivante, appelée formule d'interpolation de Shannon :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right)$$

A partir des questions 2 et 3b on obtient que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée des signaux d'énergie finie et de bande limitée $[-1/2T, 1/2T]$.

4. Commenter le fait que l'on ait obtenu une formule d'interpolation exacte. Est-ce cohérent avec le «sens physique» ?

Exercice 2: calcul de transformées de Fourier Cet exercice a pour but de manipuler quelques transformées de Fourier. Le cadre est implicitement celui des distributions tempérées et aucune justification théorique n'est demandée. On note dans cet exercice T et L deux réels positifs tels que $L > T > 0$.

Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le signal $y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(t - kL)$.

1. Tracer l'allure des signaux $x(t)$ et $y(t)$.
2. Que vaut la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$?
3. On définit $Ш_L(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kL)$. Quel est le nom couramment donné à cette distribution ?
4. Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $Ш_L(t)$. Préciser en français le nom de l'opération mise en jeu dans la formule donnée.
5. Déduire de la question précédente la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$.
6. Tracer l'allure des transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$.
7. Voyez vous une analogie avec un calcul que vous auriez pu déjà faire en physique ?
8. Calculer la série de Fourier associée au signal L-périodique $y(t)$.
9. Montrer que les coefficients de Fourier précédents ont déjà été obtenus lors du calcul de $Y(f)$ à la question 5.