

Théorie du signal

SIC3601

Marc Castella

Télécom SudParis

February 1, 2026

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

Organisation du module

- 10×1h cours amphi → synthèse de l'essentiel et commentaires
 - A la suite de chaque amphi, 10×2h TD → exercices
 - Documents téléchargeables sur moodle et à l'adresse:
<http://www-public.tem-tsp.eu/~castella/>
- ~~~ Tout ce qui est vu en cours et TD est au programme de l'**examen**.

Examen

QCM (Questions à choix multiples) exclusivement.

- Amener un **stylo noir** (ou bleu foncé) et un **correcteur blanc**: détection des cases cochées par niveau de gris.

OUI	NON
 _____	 _____
 _____	 _____

- **Aucun document, aucun dispositif électronique** autorisés;

Plan du cours

- I. Introduction: généralités, rappels transformée de Fourier temps continu
- II. Transformées temps discret: transf. en z, transf. Fourier
- III. Filtres numériques: filtres temps discret
- IV. Représentations énergétiques: puissance, énergie, densité spectrale
- V. Signaux aléatoire (1/2) stationnarité, ergodicité, autocorrélation
- VI. Signaux aléatoire (2/2) densité spectrale de puissance, bruit blanc
- VII. Systèmes à temps continu: filtrage, modulations
- VIII. Echantillonnage: théorème de Shannon-Nyquist
- IX. Transformée de Fourier discrète et FFT: transformées de Fourier
- X. Signaux à bande étroite: transf. Hilbert, signal analytique, enveloppe complexe, modèle bande de base équivalent

Qu'est-ce qu'un signal?

- **signal** = toute grandeur (physique ou non) qui contient une *information*. Cette grandeur dépend d'un paramètre (par exemple temps, espace, ...)

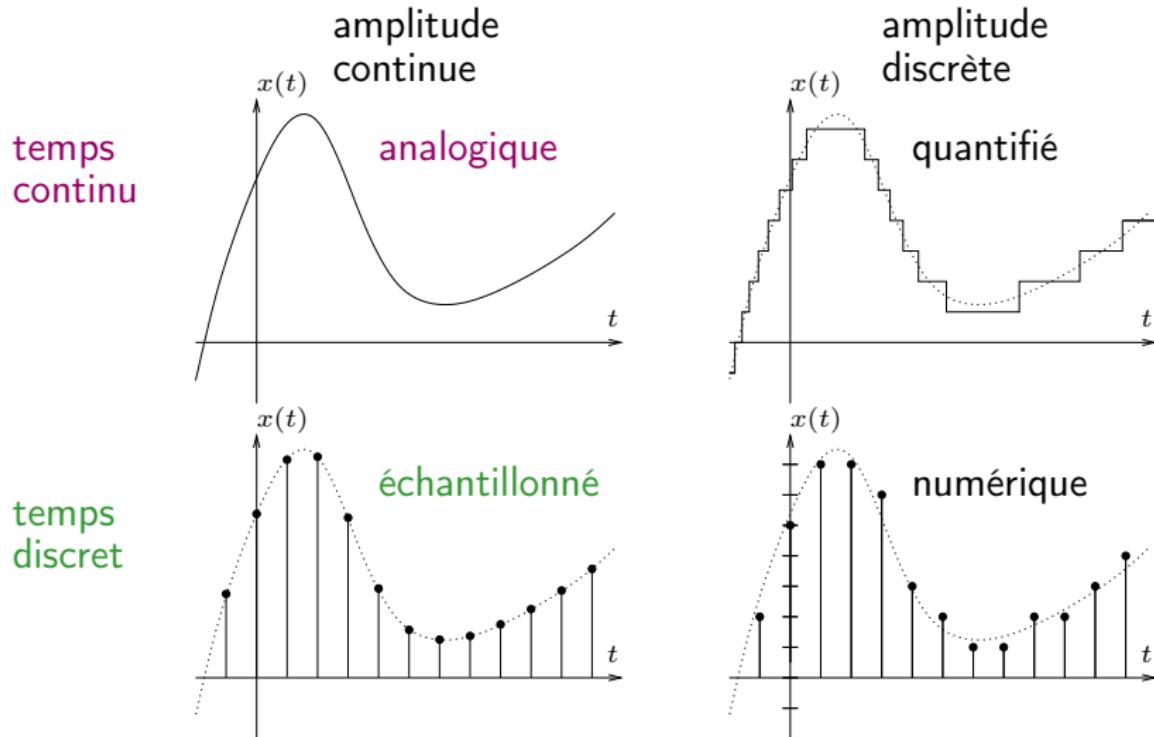
Qu'est-ce qu'un signal?

- **signal** = toute grandeur (physique ou non) qui contient une *information*. Cette grandeur dépend d'un paramètre (par exemple temps, espace, ...)
- Exemples de signaux:
 - ▶ son audio: scalaire temporel $s(t)$
 - ▶ pression fonction de l'altitude: scalaire spatial
 - ▶ image: scalaire bidimensionnel $s(x, y)$
 - ▶ vidéo: scalaire spatio-temporel $s(x, y, t)$
 - ▶ signal acoustique stéréo: signal vectoriel $\begin{pmatrix} s_g(t) \\ s_d(t) \end{pmatrix}$
 - ▶ image couleur, vidéo couleur, ...

Qu'est-ce qu'un signal?

- **signal** = toute grandeur (physique ou non) qui contient une *information*. Cette grandeur dépend d'un paramètre (par exemple temps, espace, ...)
- Exemples de signaux:
 - ▶ son audio: scalaire temporel $s(t)$
 - ▶ pression fonction de l'altitude: scalaire spatial
 - ▶ image: scalaire bidimensionnel $s(x, y)$
 - ▶ vidéo: scalaire spatio-temporel $s(x, y, t)$
 - ▶ signal acoustique stéréo: signal vectoriel $\begin{pmatrix} s_g(t) \\ s_d(t) \end{pmatrix}$
 - ▶ image couleur, vidéo couleur, ...
- **Traitement du signal** = science de l'ingénieur concernée par les méthodes permettant de traiter l'information

Continu / Discret



- Souvent: numérique = digital \leftrightarrow échantillonné
- Il existe des signaux naturellement quantifiés

Signal déterministe / aléatoire

- déterministe: $x(t)$ est une **fonction**

Ex: signal de laboratoire, généré par un GBF (sinusoïde, créneau, échelon, ...)

→ évolution **prévisible** par un modèle

- aléatoire: $x(t)$ est une **variable aléatoire** à tout instant t

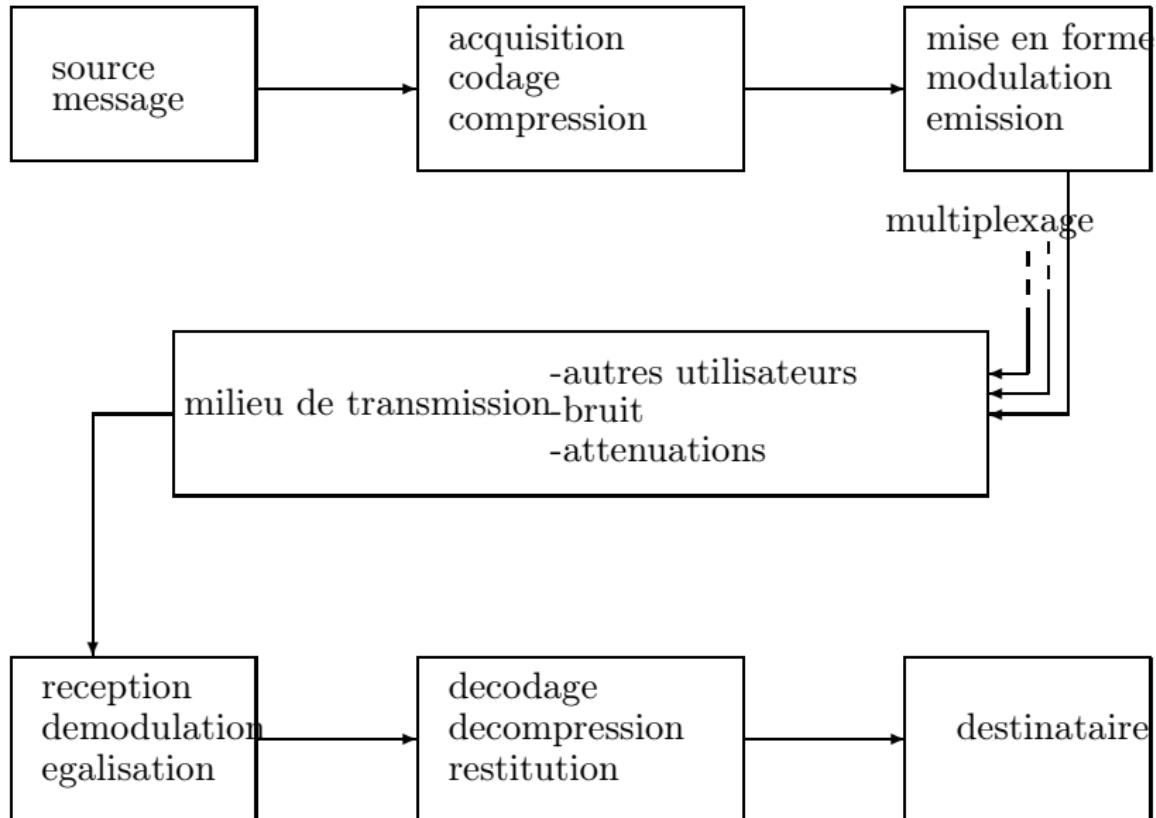
Ex: bruit, signal de communication, signal issu d'une mesure,...

→ signal non prévisible et **non reproductible** à l'identique

- Selon contexte, un même signal peut être vu comme aléatoire ou déterministe → **modèle**

Ex: signal sinusoïdal avec phase ou amplitude aléatoire / fluctuations au niveau «microscopique»

Principe d'une chaîne de communication



Applications du traitement du signal

- Télécommunications
- Image: restauration, débruitage, fusion de données, segmentation
- Sonar, radar: détection, classification,
- Acoustique et audio: annulation d'écho, reconnaissance de parole
- Instrumentation et capteurs → contrôle non destructif, surveillance
- Sismologie, géologie, optique, biomédical,...

Applications du traitement du signal

- Télécommunications
 - Image: restauration, débruitage, fusion de données, segmentation
 - Sonar, radar: détection, classification,
 - Acoustique et audio: annulation d'écho, reconnaissance de parole
 - Instrumentation et capteurs → contrôle non destructif, surveillance
 - Sismologie, géologie, optique, biomédical,...
- ⇒ Traitement du signal à l'interface des **sciences de l'ingénieur**, de la **physique**, des **mathématiques appliquées**
- Pour retrouver information dans signal observé: effectuer une transformation...

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier:

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

- Transformée inverse:

$$X(f) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df$$

↷ $|X(f)|$ donne le spectre en amplitude.

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier:

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

- Transformée inverse:

$$X(f) \xrightarrow{\text{TF}^{-1}} x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df$$

↔ $|X(f)|$ donne le spectre en amplitude.

- Cas de signaux T -périodiques: série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{i2\pi k \frac{t}{T}} \quad X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

↔ Signal périodique ↔ Spectre de raies discrètes

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité
- Symétrie: $x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} X^*(-f)$

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité
 - Symétrie: $x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} X^*(-f)$
- ⇒ **symétrie hermitienne** de la TF d'un **signal réel**

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité
- Symétrie: $x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} X^*(-f)$
⇒ **symétrie hermitienne** de la TF d'un **signal réel**
- Théorème du retard / translation:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\text{i}2\pi f t_0} X(f)$$

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité
- Symétrie: $x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} X^*(-f)$
⇒ **symétrie hermitienne** de la TF d'un **signal réel**
- Théorème du retard / translation:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\text{i}2\pi f t_0} X(f)$$

- Modulation:

$$e^{\text{i}2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$$

Propriétés de la TF (1/2)

- Linéarité
- Symétrie: $x^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} X^*(-f)$
⇒ **symétrie hermitienne** de la TF d'un **signal réel**
- Théorème du retard / translation:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} X(f)$$

- Modulation:

$$e^{i2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$$

⇒ La multiplication par $e^{i2\pi f_0 t}$ translate le spectre

Propriétés de la TF (2/2)

- Changement d'échelle: $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$ (avec $a \neq 0$)

Propriétés de la TF (2/2)

- Changement d'échelle: $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$ (avec $a \neq 0$)
- Dérivation:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TF}} \text{i}2\pi f X(f) \quad tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} -\frac{1}{\text{i}2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

Propriétés de la TF (2/2)

- Changement d'échelle: $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$ (avec $a \neq 0$)
- Dérivation:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TF}} \mathfrak{i}2\pi f X(f) \quad tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} -\frac{1}{\mathfrak{i}2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

- Convolution: $x(t) \star y(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(\theta)y(t - \theta) d\theta$

$$x(t) \star y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)Y(f)$$

Propriétés de la TF (2/2)

- Changement d'échelle: $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$ (avec $a \neq 0$)
- Dérivation:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TF}} i2\pi f X(f) \quad tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} -\frac{1}{i2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

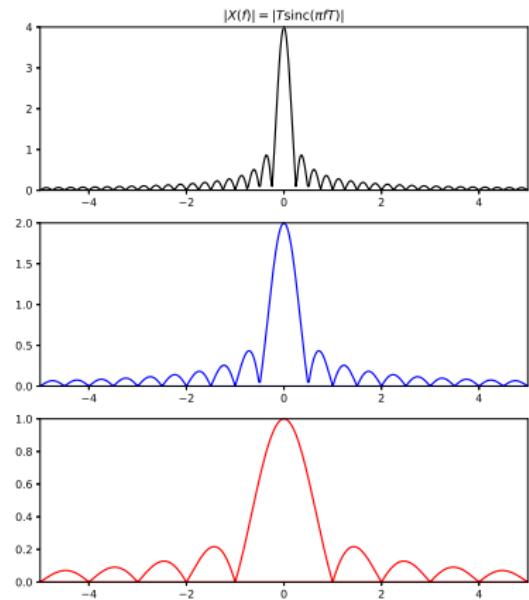
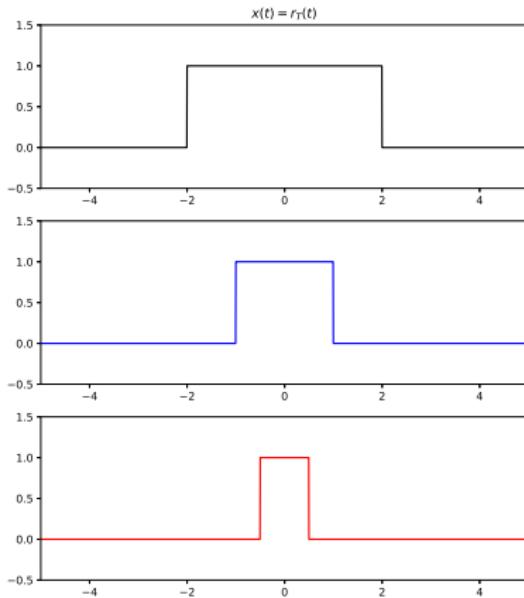
- Convolution: $x(t) \star y(t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(\theta)y(t - \theta) d\theta$

$$x(t) \star y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)Y(f)$$

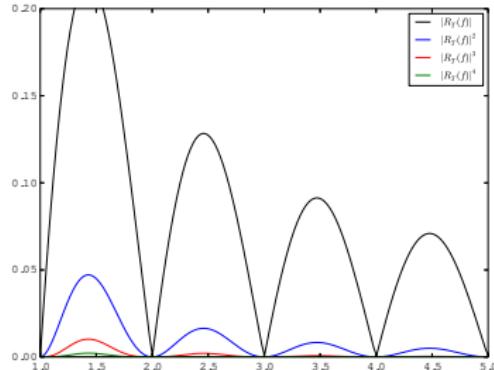
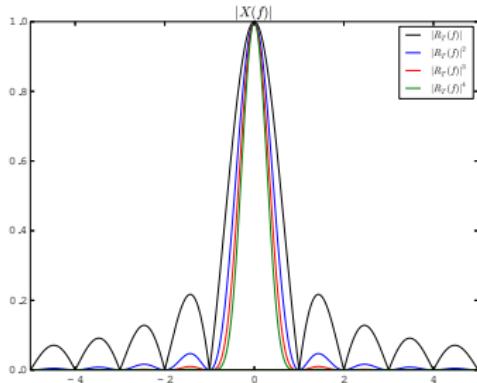
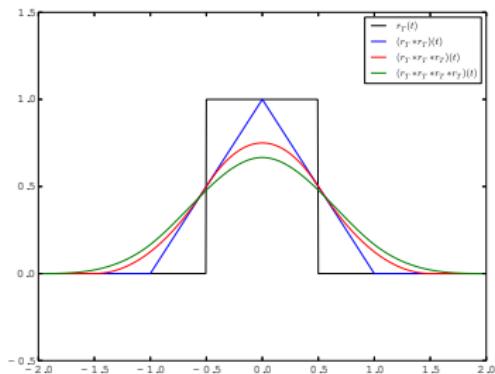
- relation de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

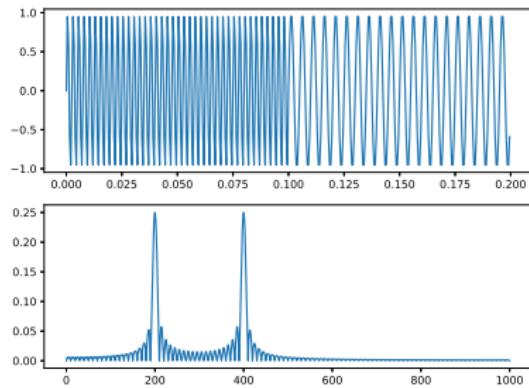
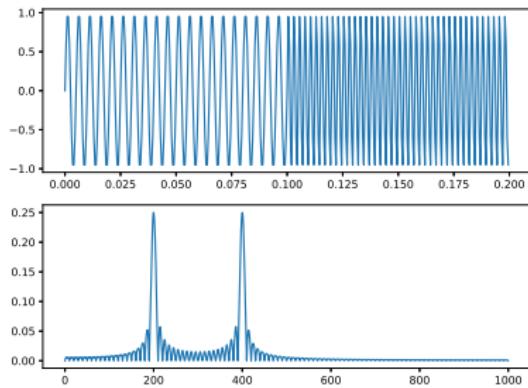
Fonction porte et sa transformée de Fourier



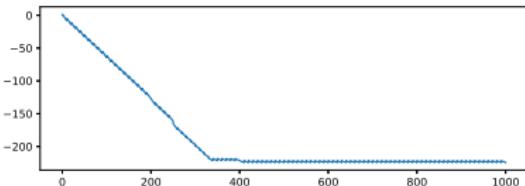
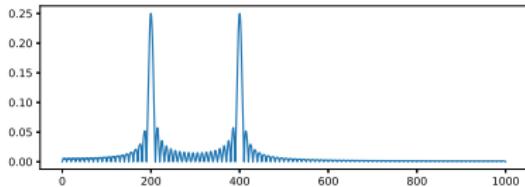
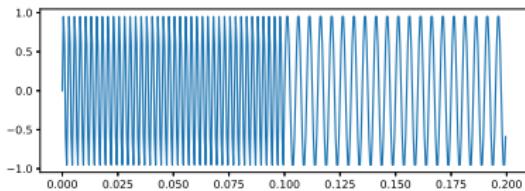
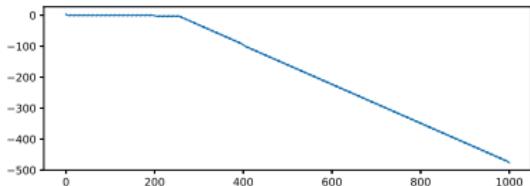
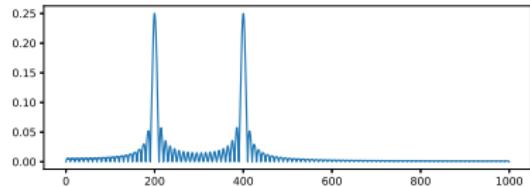
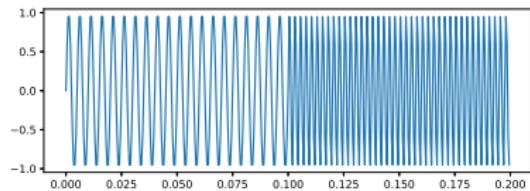
Autour de la TF d'une porte...



Difficulté de localisation temporelle par la TF



Difficulté de localisation temporelle par la TF



Limitations de la TF

Transformée de Fourier est adaptée à de nombreux signaux mais:

- Caractérisation globale
⇒ obligatoirement **temps** différé
 - Difficulté de **synthèse** des signaux ayant des irrégularités locales
 - Difficulté à **analyser** certains signaux
- Il existe d'autres représentations:
- ▶ **temps/fréquence**
 - ▶ **temps/échelle**
 - ▶ ...

Energie et puissance

- Energie de $x(t)$:
$$E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance:
$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

Energie et puissance

- Energie de $x(t)$:
$$E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance:
$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

- énergie finie \Rightarrow puissance nulle

$$\Leftrightarrow P_x > 0 \Rightarrow E_x = \infty$$

Energie et puissance

- Energie de $x(t)$:
$$E_x \triangleq \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance:
$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

- énergie finie \Rightarrow puissance nulle

$\Leftrightarrow P_x > 0 \Rightarrow E_x = \infty$

- En traitement du signal: puissance et énergie sans dimension.

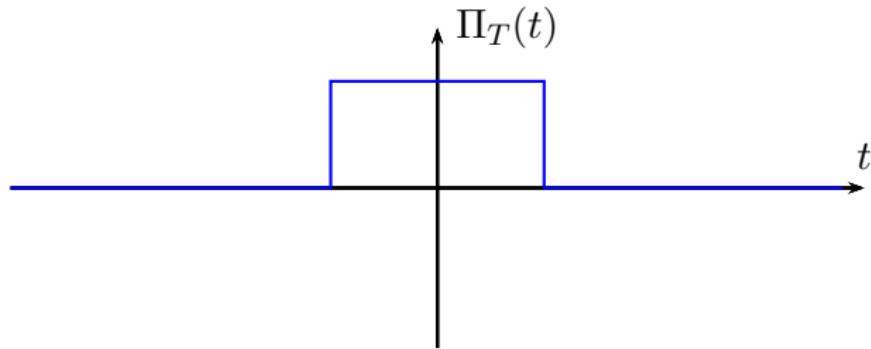
Si $x(t)$: tension appliquée à une résistance R , puissance physique:
 $P_{\text{elec}}(t) = \frac{|x(t)|^2}{R}$.

Exemples de signaux

- impulsion rectangulaire

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

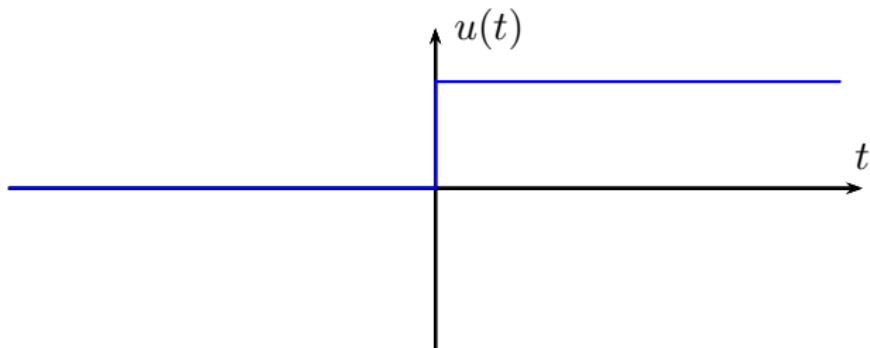
$$E_{\Pi_T} = T \quad P_{\Pi_T} = 0$$



Exemples de signaux

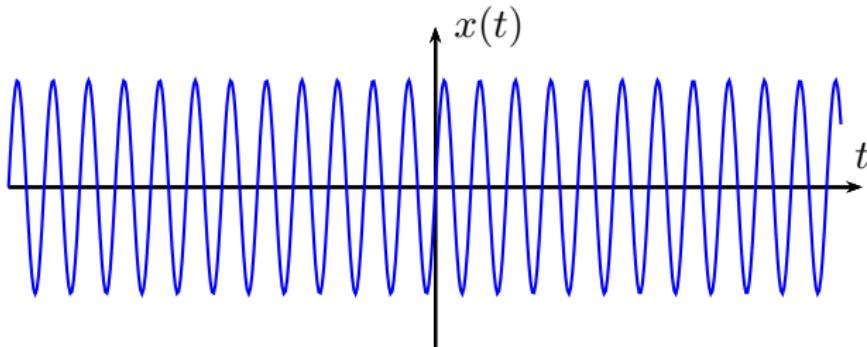
- échelon de Heaviside $u(t) = 1$ si $t \geq 0, 0$ sinon.

$$E_u = \infty \quad P_u = 1/2$$



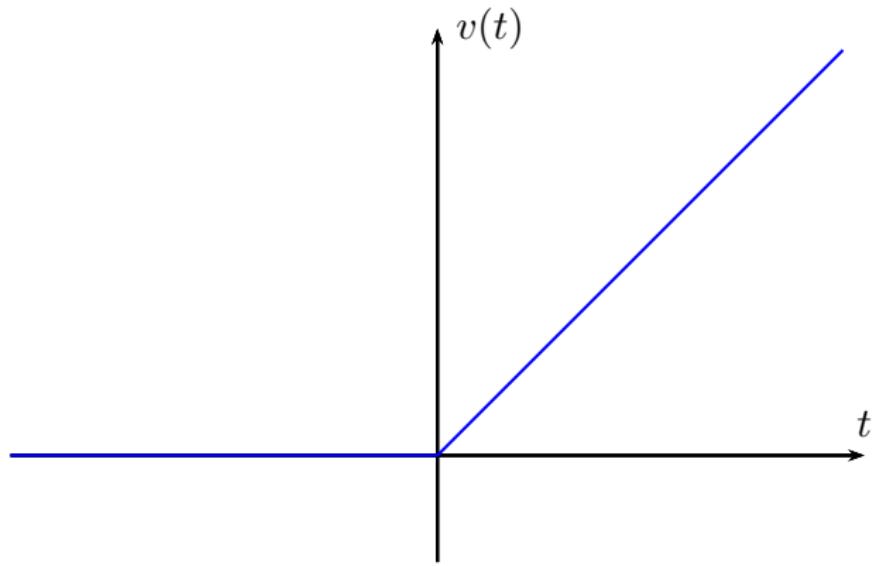
Exemples de signaux

- exponentielle complexe $x(t) = Ce^{i2\pi f_0 t}$ $E_x = \infty$ $P_x = |C|^2$
 - sinusoïde $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ $E_y = \infty$ $P_y = |A|^2/2$
- ↝ pour un signal T_0 -périodique: $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$



Exemples de signaux

- rampe linéaire $v(t) = t$ si $t \geq 0$, 0 sinon. $E_v = \infty$ $P_v = \infty$



Signaux d'énergie finie

Utile de considérer les espaces vectoriels de signaux. En particulier:
Energie finie $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < \infty \Leftrightarrow x(t) \in L^2(\mathbb{R})$

Signaux d'énergie finie

Utile de considérer les espaces vectoriels de signaux. En particulier:

$$\text{Energie finie} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < \infty \Leftrightarrow x(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

- produit scalaire $\langle x, y \rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t) dt$
- norme et distance entre signaux:

$$\|\tilde{x} - x\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{x}(t) - x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

↔ erreur quadratique moyenne

- inégalité de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
- projection orthogonale

Inter- et auto-corrélation en énergie

Pour des signaux d'**énergie finie**:

- **Inter-corrélation** de $x(t)$ et $y(t)$ en **énergie**:

$$\gamma_{xy}^e(\tau) := \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau) dt, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- **Auto-corrélation** de $x(t)$ en **énergie**:

$$\gamma_x^e(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau) dt, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- $\gamma_x^e(\tau) = \gamma_{xx}^e(\tau)$

Inter- et auto-corrélation en puissance

Pour des signaux de **puissance finie**, énergie infinie:

- **Inter-corrélation** de $x(t)$ et $y(t)$ en **puissance**:

$$\gamma_{xy}^p(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y^*(t - \tau) dt, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- **Auto-corrélation** de $x(t)$ en **puissance**: $\gamma_x^p(\tau) = \gamma_{xx}^p(\tau)$

$$\gamma_x^p(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t - \tau) dt, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- Auto-corrélation égale à la puissance et **maximale en zéro**:

$$\gamma_x^p(0) = P_x > 0$$

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

Séries de Fourier: quelques rappels...

Coefficients et définition

Soit u fonction T -périodique et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Coefficients de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-\text{i}n\omega t} dt$$

$(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définis dès que u intégrable sur $[0, T]$, donc par ex:

- $u \in L^1(0, T)$,
- $u \in L^2(0, T)$ (puisque $L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$),
- u continue par morceaux.

Série de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\text{i}n\omega t}$$

Séries de Fourier: quelques rappels...

Coefficients et définition

Pour u fonction T -périodique et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Coefficients de Fourier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt$$

- Lien avec les coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n &= c_{-n} + c_n & c_n &= (a_n - i b_n)/2 \\ & b_n = (c_{-n} - c_n)/i & c_{-n} &= (a_n + i b_n)/2 \end{aligned}$$

Série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \left(= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t} \right)$$

Séries de Fourier: quelques rappels...

Fonction de carré sommable

Pour $u \in L^2(0, T)$:

- Produit scalaire: $\langle u, v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)v(t)^* dt$
- La famille $(t \mapsto e^{in\omega t})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.
 - ▶ inégalité de Bessel,
 - ▶ approximation de u par un polynôme trigonométrique:
tronquer de la série de Fourier.

Relation de Parseval

$$\|u\|_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

⇝ convergence de la série vers u au sens $\|\cdot\|_2$

➤ $L^2(0, T)$ est un espace de Hilbert.

Séries de Fourier: quelques rappels...

Représentation ponctuelle

- Convergence dans L^2 donne égalité presque partout (et non pas ponctuelle)!
 - Existence des coefficients de Fourier pour $u \in L^1(0, T)$ et $u \in L^2(0, T) \subset L^1(0, T)$ non nécessaire.
- ~ Hypothèses pour une représentation ponctuelle? Type de convergence?

Theorem (Dirichlet)

Si u est C^1 par morceaux et T -périodique, alors:

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}(u(t^+) + u(t^-))$$

Séries de Fourier: quelques rappels...

Formulaire, fonction u T -périodique

Coefficients et série de Fourier, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i\omega nt} dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega nt) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega nt) dt$$

série Fourier: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega nt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt)$

- Lien entre les $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{C}}$.

Relation de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Signaux à temps discret

On considère des **signaux à temps discret** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

- sans quantification de l'amplitude ($x_n \in \mathbb{R}$)
- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ provient ou non d'un échantillonnage.

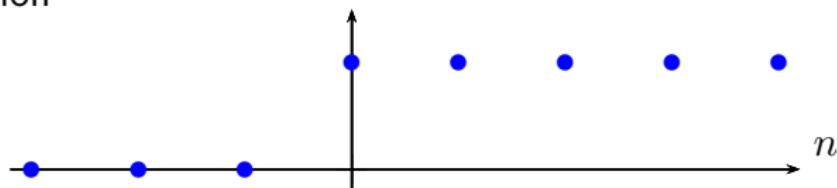
Signaux à temps discret

On considère des **signaux à temps discret** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

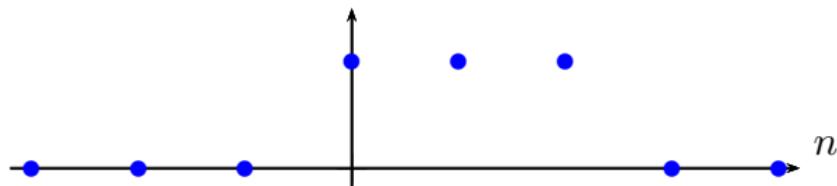
- sans quantification de l'amplitude ($x_n \in \mathbb{R}$)
- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ provient ou non d'un échantillonnage.

Exemples de signaux à temps discret:

- échelon



- porte



- rampe, ...

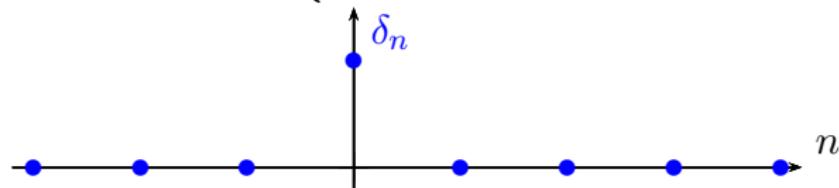
Signaux à temps discret

On considère des **signaux à temps discret** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

- sans quantification de l'amplitude ($x_n \in \mathbb{R}$)
- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ provient ou non d'un échantillonnage.

Exemples de signaux à temps discret:

- **impulsion unité** $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



→ signal à temps discret comme les autres

$$\rightarrow x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k x_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{n-k} = x_n \star \delta_n \text{ (convolution)}$$

Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (**TFTD**) du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-\text{i}2\pi n \tilde{f}}$$

Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (**TFTD**) du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-\text{i}2\pi n \tilde{f}}$$

- $X(\tilde{f})$ de période 1 $\rightsquigarrow \tilde{f}$ fréquence normalisée, au choix: $\tilde{f} \in [0, 1]$
ou $\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (**TFTD**) du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i2\pi n \tilde{f}}$$

- $X(\tilde{f})$ de période 1 $\rightsquigarrow \tilde{f}$ fréquence normalisée, au choix: $\tilde{f} \in [0, 1]$
ou $\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- si x_n échantillonné à f_e , fréquence réelle $f = \tilde{f} f_e = \frac{\tilde{f}}{T_e}$

Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (**TFTD**) du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i2\pi n \tilde{f}}$$

- $X(\tilde{f})$ de période 1 $\rightsquigarrow \tilde{f}$ fréquence normalisée, au choix: $\tilde{f} \in [0, 1]$
ou $\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- si x_n échantillonné à f_e , fréquence réelle $f = \tilde{f} f_e = \frac{\tilde{f}}{T_e}$
- $X(\tilde{f})$ est la série de Fourier associée aux coefficients $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc:

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{f}) e^{+i2\pi n \tilde{f}} d\tilde{f} = \int_0^1 X(\tilde{f}) e^{+i2\pi n \tilde{f}} d\tilde{f}$$

Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (**TFTD**) du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i2\pi n \tilde{f}}$$

- $X(\tilde{f})$ de période 1 $\rightsquigarrow \tilde{f}$ fréquence normalisée, au choix: $\tilde{f} \in [0, 1]$
ou $\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- si x_n échantillonné à f_e , fréquence réelle $f = \tilde{f} f_e = \frac{\tilde{f}}{T_e}$
- $X(\tilde{f})$ est la série de Fourier associée aux coefficients $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc:

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{f}) e^{+i2\pi n \tilde{f}} d\tilde{f} = \int_0^1 X(\tilde{f}) e^{+i2\pi n \tilde{f}} d\tilde{f}$$

- Propriétés de la TFTD: transparents 14 et suivants

TFTD: exemple et remarques

- Ex:

$$r_n^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \dots, N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R^{(N)}(\tilde{f}) = \frac{\sin \pi N \tilde{f}}{\sin \pi \tilde{f}} e^{-\mathrm{i} 2\pi \frac{N-1}{2} \tilde{f}}$$

- La TFTD n'est pas l'échantillonnée de la transformée de Fourier à temps continu (TFTC).
- La TFTD n'est pas la transformée de Fourier discrète (TFD)
- Il existe aussi une Transformée de Fourier rapide (FFT: Fast Fourier transform)

Transformée en z

- La transformée en z du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la série formelle:

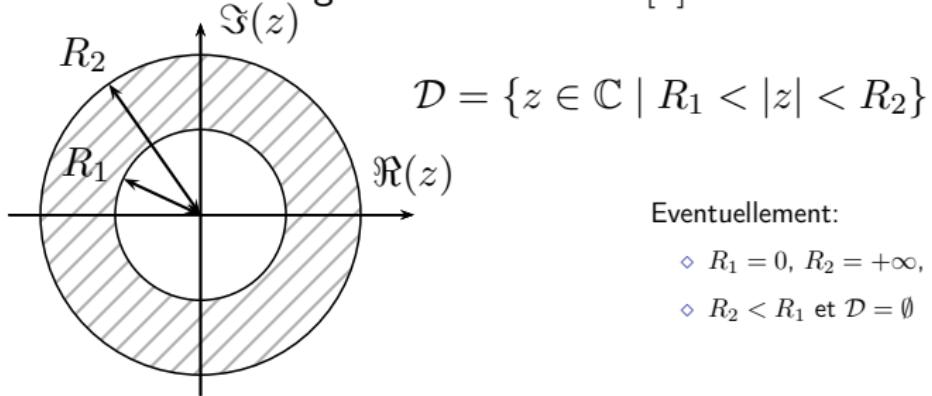
$$X[z] \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

Transformée en z

- La transformée en z du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la série formelle:

$$X[z] \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

- Domaine de convergence de la série $X[z]$: anneau \mathcal{D}

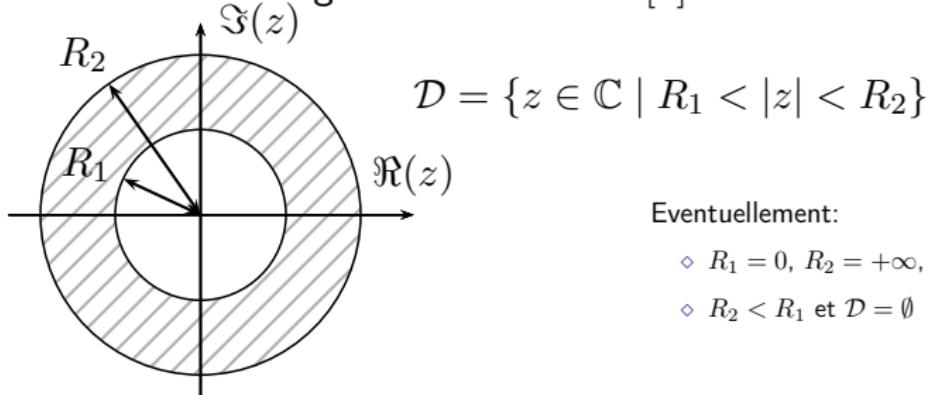


Transformée en z

- La transformée en z du signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la série formelle:

$$X[z] \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

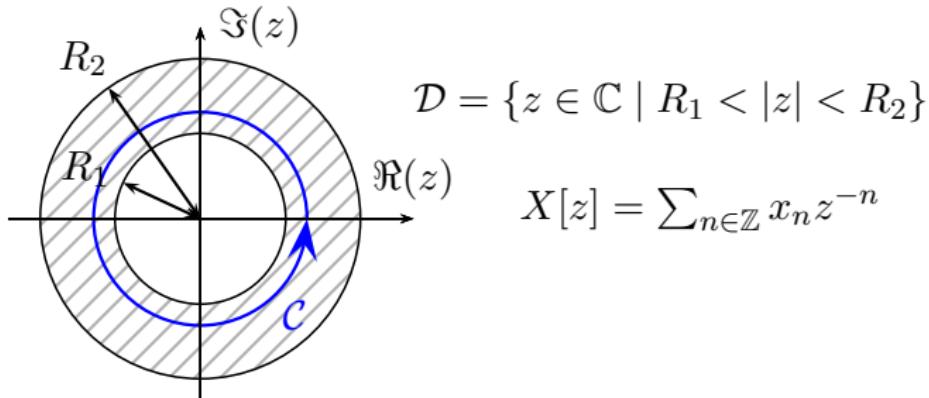
- Domaine de convergence de la série $X[z]$: anneau \mathcal{D}



- Transformée en z : fonction holomorphe $X[z]$ avec la couronne de convergence associée \mathcal{D} .

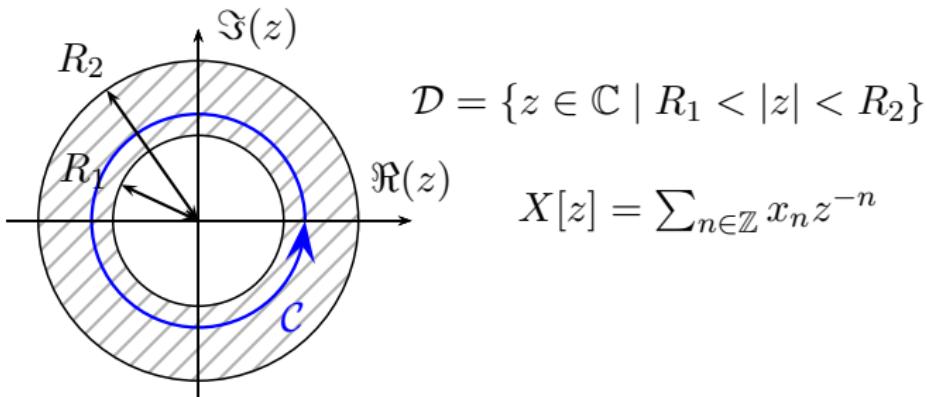
Inversion de la transformée en z

Pour $k \in \mathbb{Z}$, comment déterminer x_k à partir de $X[z]$?



Inversion de la transformée en z

Pour $k \in \mathbb{Z}$, comment déterminer x_k à partir de $X[z]$?



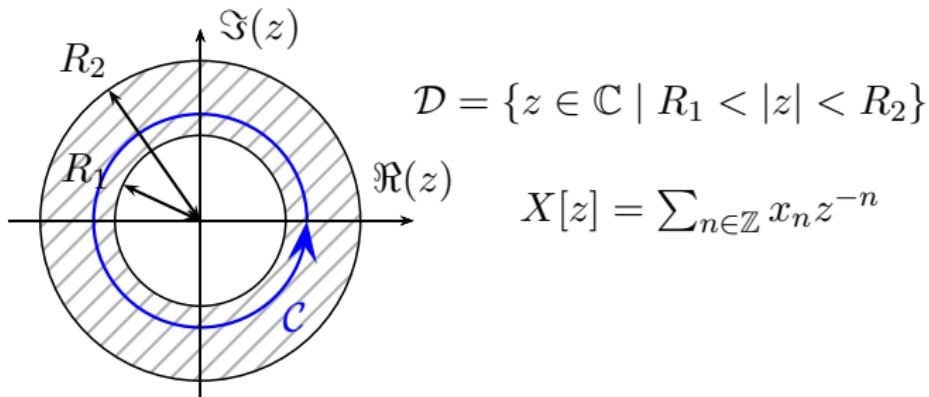
- Formule de Cauchy:

$$x_k = \frac{1}{i2\pi} \int_{\mathcal{C}} X[z] z^{k-1} dz$$

~≈ valeur identique de l'intégrale pour tout \mathcal{C} à condition de préciser le domaine d'holomorphie \mathcal{D}

Inversion de la transformée en z

Pour $k \in \mathbb{Z}$, comment déterminer x_k à partir de $X[z]$?



- Formule de Cauchy:

$$x_k = \frac{1}{i2\pi} \int_{\mathcal{C}} X[z] z^{k-1} dz$$

- ~≈ valeur identique de l'intégrale pour tout \mathcal{C} à condition de **préciser le domaine d'holomorphie \mathcal{D}**
- Autre méthode utilisée en pratique pour des fractions rationnelles: **développement en série**

Transformée en z : exemple

- Ex: $x_n = a^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = 0$ sinon ($a \in \mathbb{C}^*$)

$$X[z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}$$

Transformée en z : exemple

- Ex: $x_n = a^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = 0$ sinon ($a \in \mathbb{C}^*$)

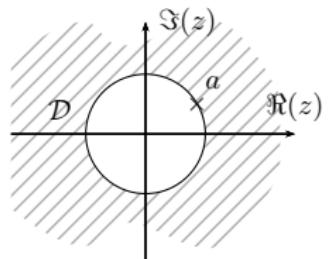
$$X[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \text{ ne converge que si } |az^{-1}| < 1$$

Transformée en z : exemple

- Ex: $x_n = a^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = 0$ sinon ($a \in \mathbb{C}^*$)

$$X[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

$$\rightarrow X[z] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ sur le domaine } \mathcal{D} = \{|z| > |a|\}$$



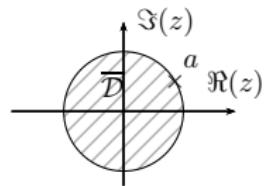
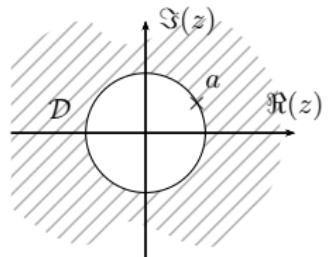
Transformée en z : exemple

- Ex: $x_n = a^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = 0$ sinon ($a \in \mathbb{C}^*$)

$$X[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

$\rightarrow X[z] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur le domaine $\mathcal{D} = \{|z| > |a|\}$

- $Y[z] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur $\overline{\mathcal{D}} = \{|z| < |a|\}$??



Transformée en z : exemple

- Ex: $x_n = a^n$ si $n \geq 0$ et $x_n = 0$ sinon ($a \in \mathbb{C}^*$)

$$X[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

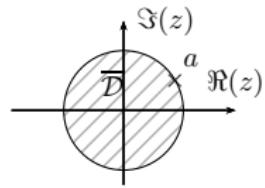
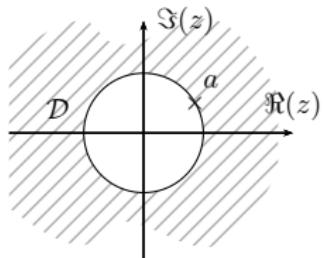
$\rightarrow X[z] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur le domaine $\mathcal{D} = \{|z| > |a|\}$

- $Y[z] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ sur $\overline{\mathcal{D}} = \{|z| < |a|\}$??

$$Y[z] = \frac{-1}{(az^{-1})(1 - a^{-1}z)} = \frac{-1}{az^{-1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} z^n = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

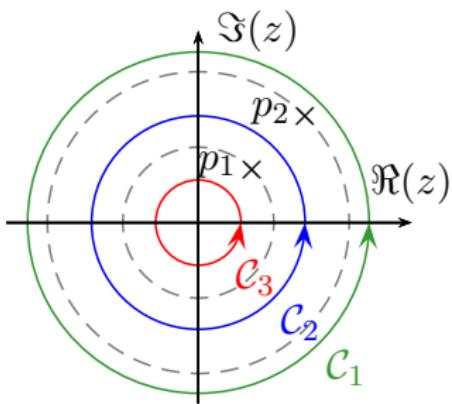
$\rightarrow y_n = -a^n$ si $n \leq -1$ et $y_n = 0$ si $n \geq 0$.

~ Domains différents $\Rightarrow y_n \neq x_n$ et pourtant même expression de la transformée en z .



Importance du domaine

Ex: $X[z]$ admet deux singularités (pôles) en p_1, p_2 .



$$\begin{aligned}x_k &= \frac{1}{\mathrm{i}2\pi} \int_{\mathcal{C}} X[z]z^{k-1} dz \\&= \sum_j \operatorname{Res} [X[z]z^{k-1}, p_j]\end{aligned}$$

Singularités a_j à prendre en compte:

- pour \mathcal{C}_1 : $0, p_1$ et p_2
- pour \mathcal{C}_2 : 0 et p_1
- pour \mathcal{C}_3 : 0

→ signal différent pour des domaines différents!

- Fraction rationnelle: série distincte sur chaque domaine (\rightsquigarrow développement éléments simples)

Propriétés de la transformée en z (1/2)

Si $x_n \xrightarrow{\text{Tz}} X[z]$ et $y_n \xrightarrow{\text{Tz}} Y[z]$ alors:

- linéarité: $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{\text{Tz}} \lambda X[z] + \mu Y[z]$

Propriétés de la transformée en z (1/2)

Si $x_n \xrightarrow{\text{Tz}} X[z]$ et $y_n \xrightarrow{\text{Tz}} Y[z]$ alors:

- linéarité: $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{\text{Tz}} \lambda X[z] + \mu Y[z]$
- symétries: $x_{-n} \xrightarrow{\text{Tz}} X[z^{-1}] \quad x_n^* \xrightarrow{\text{Tz}} (X[z^*])^*$

Propriétés de la transformée en z (1/2)

Si $x_n \xrightarrow{\text{Tz}} X[z]$ et $y_n \xrightarrow{\text{Tz}} Y[z]$ alors:

- linéarité: $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{\text{Tz}} \lambda X[z] + \mu Y[z]$
- symétries: $x_{-n} \xrightarrow{\text{Tz}} X[z^{-1}] \quad x_n^* \xrightarrow{\text{Tz}} (X[z^*])^*$
- théorème du retard:

$$\boxed{x_{n-1} \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-1} X[z]} \quad x_{n-n_0} \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-n_0} X[z]$$

Propriétés de la transformée en z (1/2)

Si $x_n \xrightarrow{\text{Tz}} X[z]$ et $y_n \xrightarrow{\text{Tz}} Y[z]$ alors:

- linéarité: $\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow{\text{Tz}} \lambda X[z] + \mu Y[z]$
- symétries: $x_{-n} \xrightarrow{\text{Tz}} X[z^{-1}] \quad x_n^* \xrightarrow{\text{Tz}} (X[z^*])^*$
- théorème du retard:

$$x_{n-1} \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-1} X[z] \quad x_{n-n_0} \xrightarrow{\text{Tz}} z^{-n_0} X[z]$$

- convolution:

$$x_n \star y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} \xrightarrow{\text{Tz}} X[z]Y[z]$$

Propriétés de la transformée en z (2/2)

- Lien transformée en z et TFTD: si le cercle unité appartient au domaine de convergence:

$$X(\tilde{f}) = X \left[e^{i2\pi\tilde{f}} \right]$$

Propriétés de la transformée en z (2/2)

- Lien transformée en z et TFTD: si le cercle unité appartient au domaine de convergence:

$$X(\tilde{f}) = X \left[e^{i2\pi\tilde{f}} \right]$$

→ les propriétés de la TFTD en découlent (linéarité, symétries, retard/modulation, convolution)

Propriétés de la transformée en z (2/2)

- Lien transformée en z et TFTD: si le cercle unité appartient au domaine de convergence:

$$X(\tilde{f}) = X \left[e^{i2\pi\tilde{f}} \right]$$

→ les propriétés de la TFTD en découlent (linéarité, symétries, retard/modulation, convolution)

- Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = \frac{1}{i2\pi} \int_{\mathcal{C}} X[z] X[1/z^*]^* \frac{dz}{z}$$

Propriétés de la transformée en z (2/2)

- Lien transformée en z et TFTD: si le cercle unité appartient au domaine de convergence:

$$X(\tilde{f}) = X \left[e^{i2\pi\tilde{f}} \right]$$

→ les propriétés de la TFTD en découlent (linéarité, symétries, retard/modulation, convolution)

- Parseval:

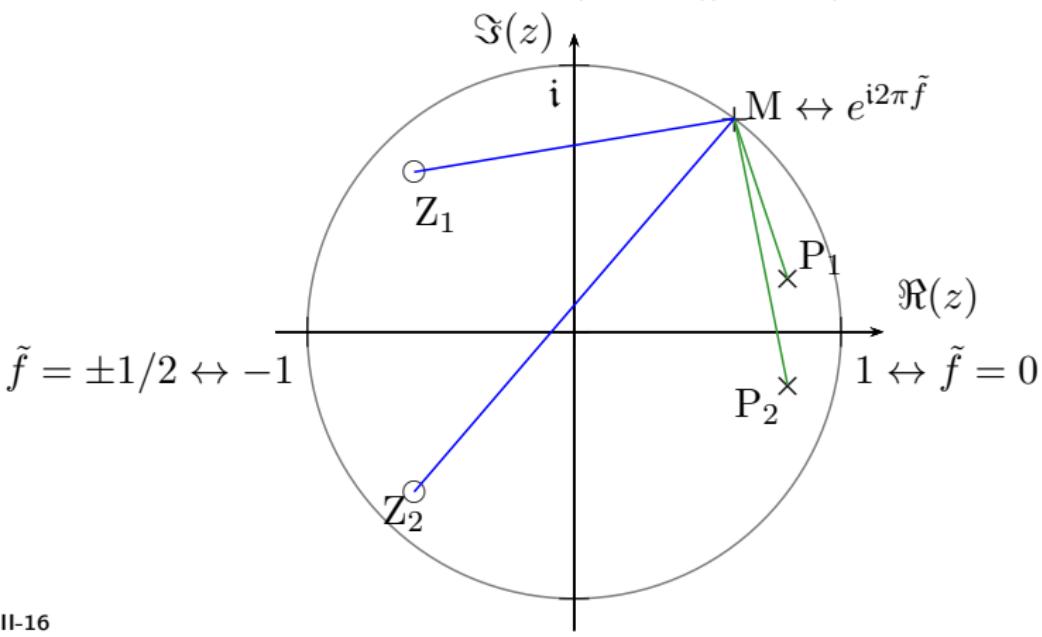
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = \frac{1}{i2\pi} \int_{\mathcal{C}} X[z] X[1/z^*]^* \frac{dz}{z}$$

- lien avec transformée de Laplace: $\int x(t)e^{-pt} dt \leftrightarrow \sum x_n z^{-n}$ avec $z \leftrightarrow e^p$

Zéros/pôles d'une transformée en z

- Exemple: $X[z] = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$
- TF temps discret:

$$\left|X(\tilde{f})\right| = \left|X\left[e^{i2\pi\tilde{f}}\right]\right| = \frac{|z - z_1||z - z_2|}{|z - p_1||z - p_2|} = \frac{Z_1 M Z_2 M}{P_1 M P_2 M}$$



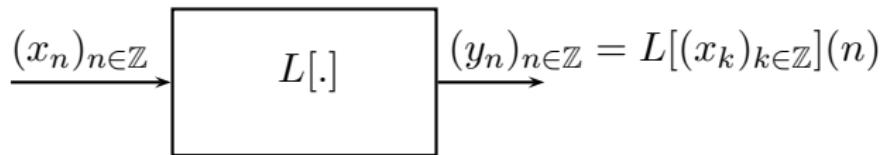
- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

Système

- Modéliser ce qui se passe lors:
 - ▶ transmission du signal (canal de propagation,...)
 - ▶ traitement du signal (restauration au récepteur,...)
 - ▶ toute autre modification

Système

- Modéliser ce qui se passe lors:
 - ▶ transmission du signal (canal de propagation,...)
 - ▶ traitement du signal (restauration au récepteur,...)
 - ▶ toute autre modification
- **Système:** dispositif qui à un signal d'entrée associe un signal de sortie



Propriétés possibles des système

- linéarité

$$\lambda^{(1)}x_n^{(1)} + \lambda^{(2)}x_n^{(2)} \xrightarrow{L[.]} y_n = \lambda^{(1)}y_n^{(1)} + \lambda^{(2)}y_n^{(2)}$$
$$= \lambda^{(1)}L[(x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{Z}}](n) + \lambda^{(2)}L[(x_k^{(2)})_{k \in \mathbb{Z}}](n)$$

Propriétés possibles des système

- linéarité

$$\lambda^{(1)}x_n^{(1)} + \lambda^{(2)}x_n^{(2)} \xrightarrow{L[.]} y_n = \lambda^{(1)}y_n^{(1)} + \lambda^{(2)}y_n^{(2)}$$

$$= \lambda^{(1)}L[(x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{Z}}](n) + \lambda^{(2)}L[(x_k^{(2)})_{k \in \mathbb{Z}}](n)$$

- instantanéité: la sortie ne dépend que du présent

$$x_n \xrightarrow{L[.]} y_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n) = L[x_n](n)$$

Propriétés possibles des système

- linéarité

$$\lambda^{(1)}x_n^{(1)} + \lambda^{(2)}x_n^{(2)} \xrightarrow{L[.]} y_n = \lambda^{(1)}y_n^{(1)} + \lambda^{(2)}y_n^{(2)}$$

$$= \lambda^{(1)}L[(x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{Z}}](n) + \lambda^{(2)}L[(x_k^{(2)})_{k \in \mathbb{Z}}](n)$$

- instantanéité: la sortie ne dépend que du présent

$$x_n \xrightarrow{L[.]} y_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n) = L[x_n](n)$$

- causalité: la sortie ne dépend que du passé

$$x_n \xrightarrow{L[.]} y_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n) = L[x_k, k \leq n](n)$$

Propriétés possibles des système

- linéarité

$$\lambda^{(1)}x_n^{(1)} + \lambda^{(2)}x_n^{(2)} \xrightarrow{L[.]} y_n = \lambda^{(1)}y_n^{(1)} + \lambda^{(2)}y_n^{(2)}$$

$$= \lambda^{(1)}L[(x_k^{(1)})_{k \in \mathbb{Z}}](n) + \lambda^{(2)}L[(x_k^{(2)})_{k \in \mathbb{Z}}](n)$$

- instantanéité: la sortie ne dépend que du présent

$$x_n \xrightarrow{L[.]} y_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n) = L[x_n](n)$$

- causalité: la sortie ne dépend que du passé

$$x_n \xrightarrow{L[.]} y_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n) = L[x_k, k \leq n](n)$$

- invariance:

$$\tilde{x}_n = x_{n-n_0} \xrightarrow{L[.]} \tilde{y}_n = L[(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}](n - n_0) = y_{n-n_0}$$

Exemples de systèmes

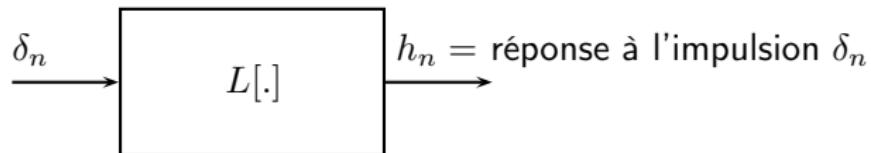
	linéaire	instantané	causal	invariant
$y_n = (x_n)^2$	non	oui	oui	oui
$y_n = \sin(x_n)$	non	oui	oui	oui
$y_n = m_n x_n$	oui	oui	oui	non
$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{n,k} x_k$	oui	non	non	non
$y_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=n-M}^{n+M} x_k$	oui	non	non	oui
$y_n = \frac{1}{M} \sum_{k=n-M+1}^n x_k$	oui	non	oui	oui

Filtrage et convolution

- **Filtre** = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)

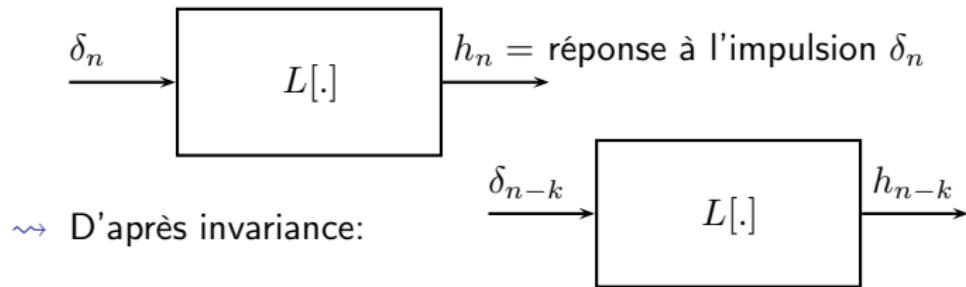
Filtrage et convolution

- **Filtre** = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)
 - ▶ **réponse impulsionnelle** h_n :



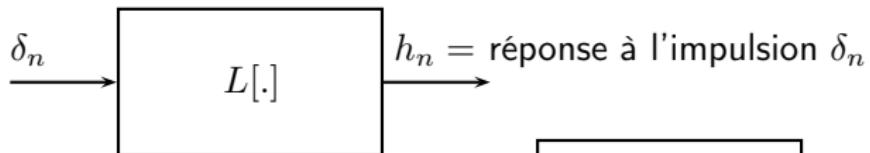
Filtrage et convolution

- **Filtre** = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)
 - ▶ **réponse impulsionnelle** h_n :

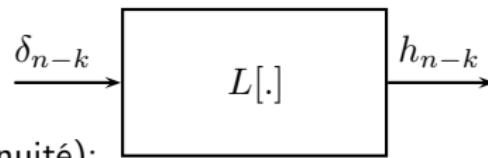


Filtrage et convolution

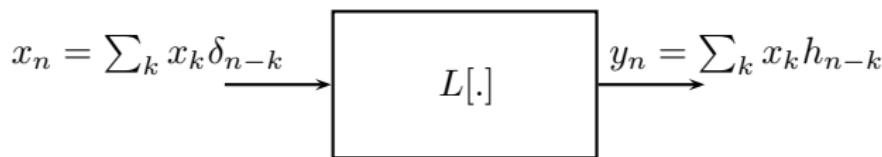
- **Filtre** = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)
 - ▶ **réponse impulsionnelle** h_n :



↝ D'après invariance:

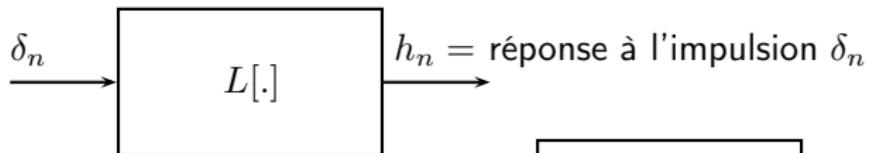


↝ D'après linéarité (+ continuité):

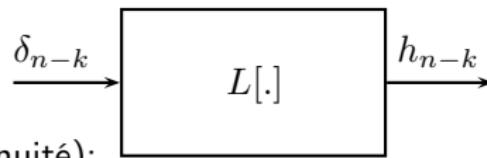


Filtrage et convolution

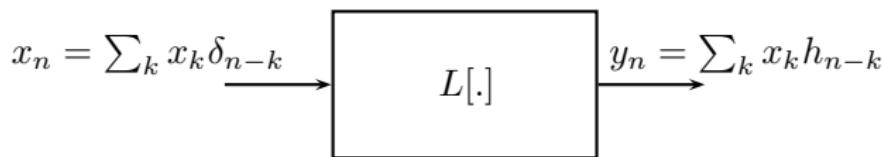
- **Filtre** = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)
 - ▶ **réponse impulsionnelle** h_n :



↝ D'après invariance:



↝ D'après linéarité (+ continuité):

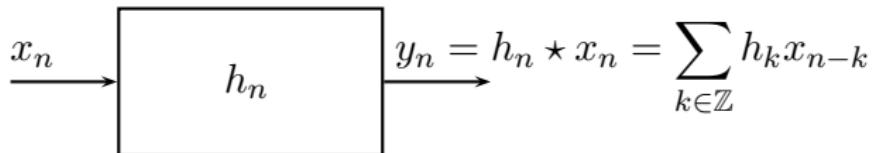


⇒ **convolution discrète**:

$$y_n = x_n \star h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k} = h_n \star x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

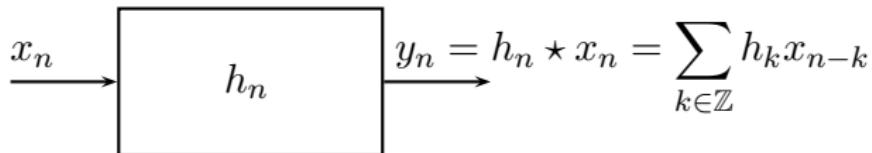
Exemple de filtrage

- Filtrage et convolution 1D:



Exemple de filtrage

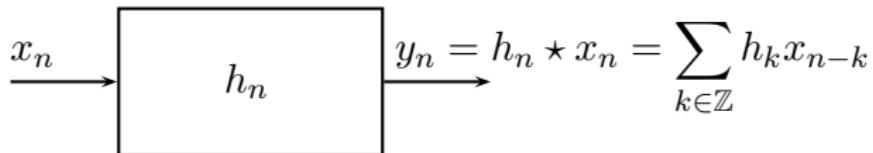
- Filtrage et convolution 1D:



- Convolution pour une image 2D: $y_{m,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k,l} x_{m-k,n-l}$

Exemple de filtrage

- Filtrage et convolution 1D:



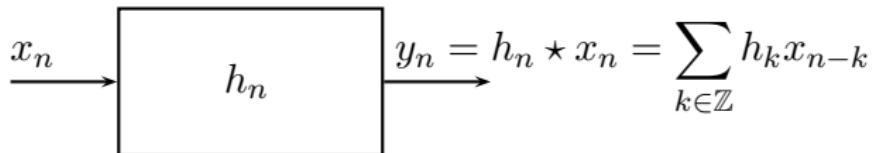
- Convolution pour une image 2D: $y_{m,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k,l} x_{m-k,n-l}$
- Si un seul pixel blanc:

$$x_{m,n} = \delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors: $y_{m,n} = h_{m,n}$

Exemple de filtrage

- Filtrage et convolution 1D:



- Convolution pour une image 2D: $y_{m,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k,l} x_{m-k,n-l}$
- Si un seul pixel blanc:

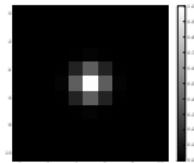
$$x_{m,n} = \delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors: $y_{m,n} = h_{m,n}$

→ exemple sur une image réelle: effet de flou, bougé, . . .

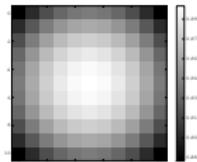
Effet d'une convolution/filtrage 2D (1/6)

Figure originale



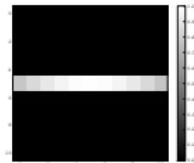
Effet d'une convolution/filtrage 2D (2/6)

Figure originale



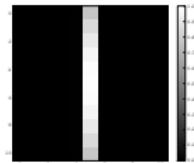
Effet d'une convolution/filtrage 2D (3/6)

Figure originale



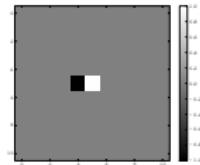
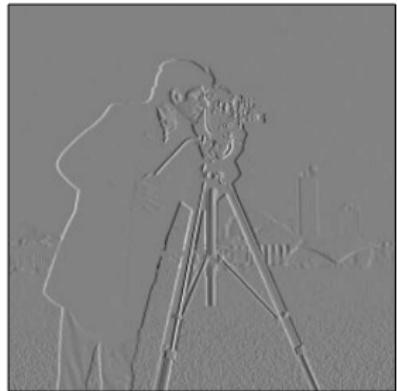
Effet d'une convolution/filtrage 2D (4/6)

Figure originale



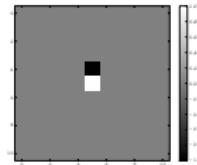
Effet d'une convolution/filtrage 2D (5/6)

Figure originale



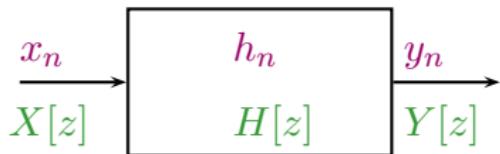
Effet d'une convolution/filtrage 2D (6/6)

Figure originale



Fonction de transfert en z

- **Filtre:** système linéaire invariant



- ▶ réponse impulsionnelle: h_n
- ▶ fonction de transfert en z : $H[z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}$
- ▶ relations entrée-sortie:

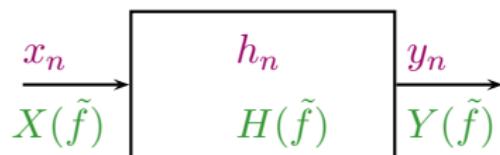
$$y_n = h_n \star x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

$$Y[z] = H[z]X[z]$$

Rq: $y_n = h_n \star x_n = x_n \star h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k}$

Réponse en fréquence

- **Filtre:** système linéaire invariant



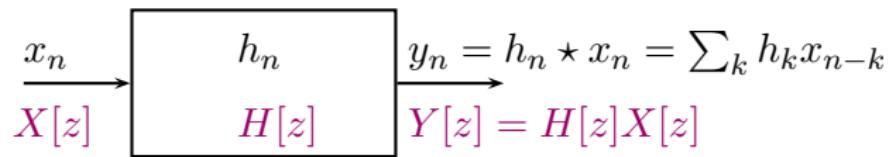
- ▶ réponse impulsionnelle: h_n
- ▶ fonction de transfert en z : $H[z] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n}$
- ▶ réponse en fréquence: $H(\tilde{f}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-i2\pi n \tilde{f}}$
- ▶ relations entrée-sortie:

$$y_n = h_n \star x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

$$Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f})X(\tilde{f})$$

Rq: $y_n = h_n \star x_n = x_n \star h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k h_{n-k}$

Causalité

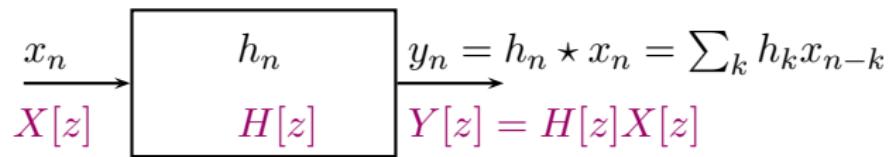


- Filtre **causal** n'utilise que les $x_k, k \leq n$ pour calculer y_n :

$$y_n = \sum_{k \geq 0} h_k x_{n-k}$$

→ Le filtre h_k est causal $\Leftrightarrow h_k = 0, \forall k < 0$.

Causalité

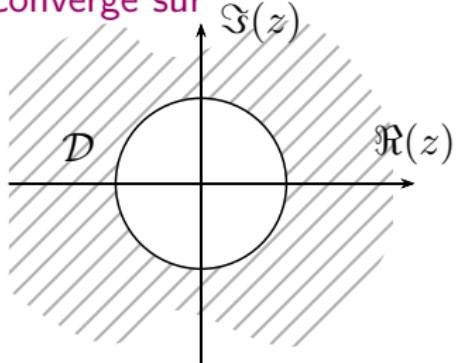


- Filtre **causal** n'utilise que les $x_k, k \leq n$ pour calculer y_n :

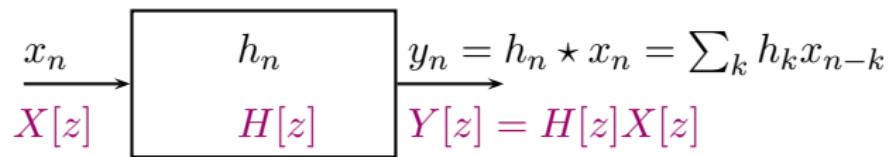
$$y_n = \sum_{k \geq 0} h_k x_{n-k}$$

→ Le filtre h_k est causal $\Leftrightarrow h_k = 0, \forall k < 0$.

→ $H[z]$ est causal $\Leftrightarrow H[z] = \sum_{k \geq 0} h_k z^{-k}$ converge sur $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_1\} \cup \{\infty\}$

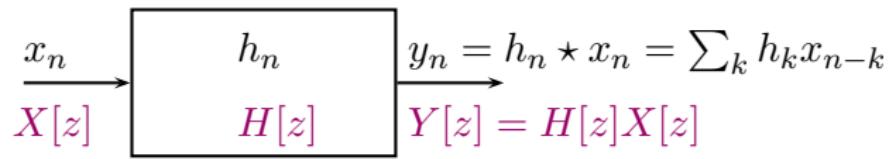


Stabilité



- Filtre **stable** lorsque: entrée bornée \Rightarrow sortie bornée

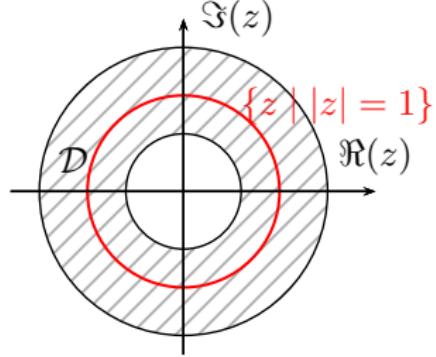
Stabilité



- Filtre **stable** lorsque: entrée bornée \Rightarrow sortie bornée

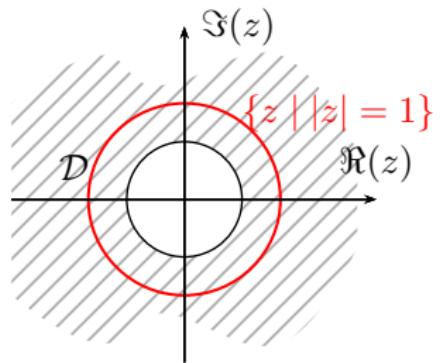
\rightarrow Stabilité $\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < +\infty$

$\rightarrow H[z]$ est stable \Leftrightarrow le cercle unité appartient au domaine de convergence de $H[z]$



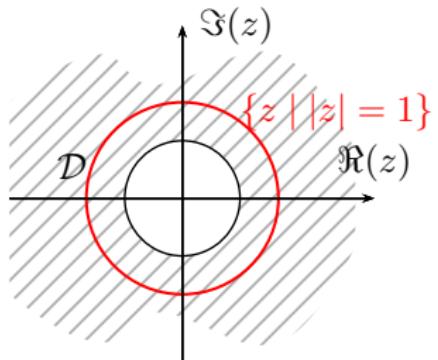
Stabilité et causalité

- Un filtre $H[z]$ est **stable et causal** \Leftrightarrow domaine de convergence de $H[z]$ du type $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ avec $R < 1$



Stabilité et causalité

- Un filtre $H[z]$ est **stable et causal** \Leftrightarrow domaine de convergence de $H[z]$ du type $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ avec $R < 1$



- Si $H[z]$ **fraction rationnelle**:
 $H[z]$ stable et causal \Leftrightarrow tous les pôles du filtre sont à l'intérieur du cercle unité et d^o numérateur $H[z] \leq d^o$ dénominateur $H[z]$ (en tant que fraction rationnelle en z).

Rq: Condition sur les d^o : permet que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} H[z]$ soit fini

çàd causalité: $H[z] = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots$ sans puissance > 0 de z

Stabilité en automatique / élec ?

- Si $H[z]$ fraction rationnelle:

$H[z]$ stable et causal \Leftrightarrow tous les pôles du filtre sont à l'intérieur du cercle unité et d^o numérateur $H[z] \leq d^o$ dénominateur $H[z]$.

- Avec $z = e^p$, correspondances en temps continu:

Transf. $z \leftrightarrow$ Transf. Laplace

$$z \leftrightarrow p$$

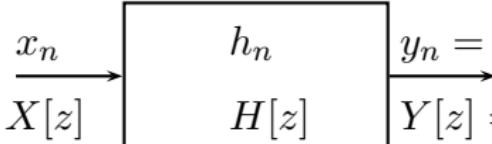
$|z| = 1 \leftrightarrow$ axe imaginaire pur

$|z| < 1 \leftrightarrow \Re\{p\} < 0$

- ~ condition de stabilité «pôles à partie réelle < 0 »: vrai pour des systèmes causaux (ce qui est le cas en physique, automatique, . . .)

Filtrage et équations de récurrence

- Cas de **filtres rationnels**: $H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}$

- Lien entrée-sortie: 

$$\Rightarrow Y[z](1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}) = (\sum_{j=0}^q b_j z^{-j})X[z]$$

et par utilisation du théorème du retard:

$$\forall n : y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j}$$

⇒ **Équation de récurrence associée au filtre**

Filtre réponse impulsionnelle finie (RIF)

- Définition: $H[z] = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j}$ d'où la réponse impulsionnelle:

$$h_n = \begin{cases} b_n & \text{si } 0 \leq n \leq q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

→ réponse impulsionnelle finie (RIF)

Filtre réponse impulsionnelle finie (RIF)

- Définition: $H[z] = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j}$ d'où la réponse impulsionnelle:

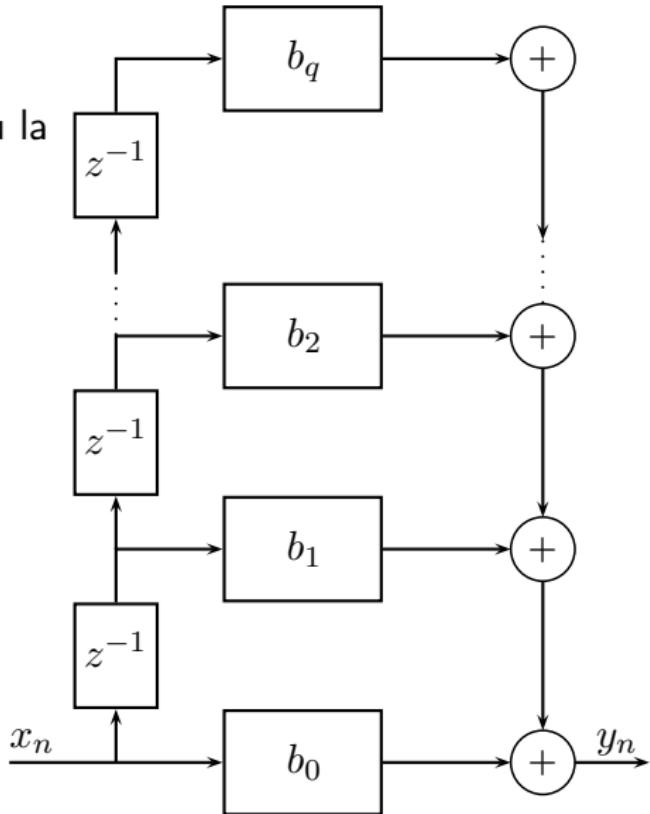
$$h_n = \begin{cases} b_n & \text{si } 0 \leq n \leq q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

→ réponse impulsionnelle finie (RIF)

- Équation temporelle:

$$y_n = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j}$$

→ moyenne mobile (moving average: MA)



Filtres récursifs (ou RII)

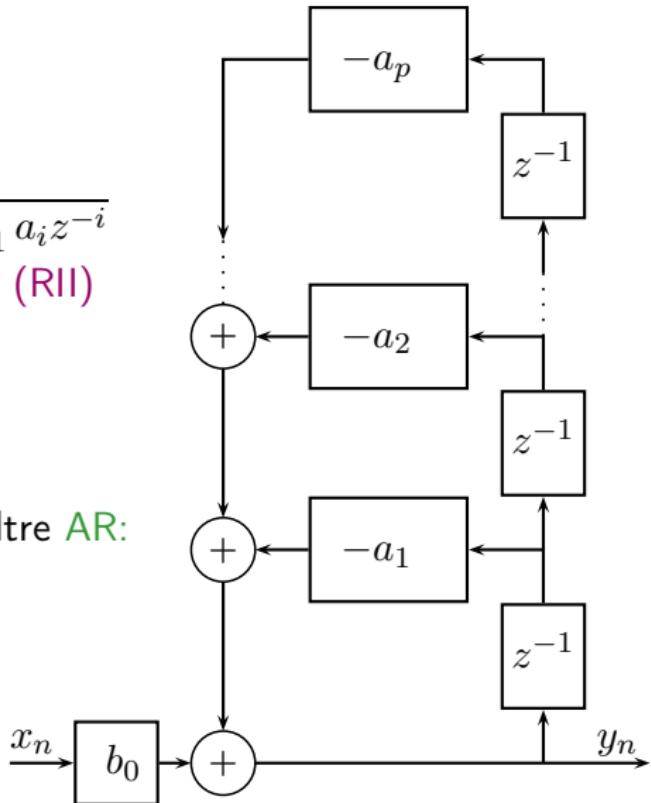
- Définition: $H[z] = \frac{b_0}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}$

→ réponse impulsionnelle infinie (RII)

- Équation temporelle:

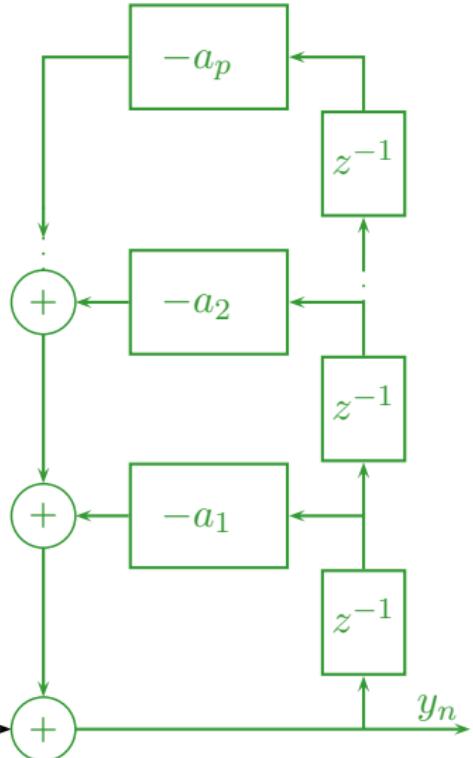
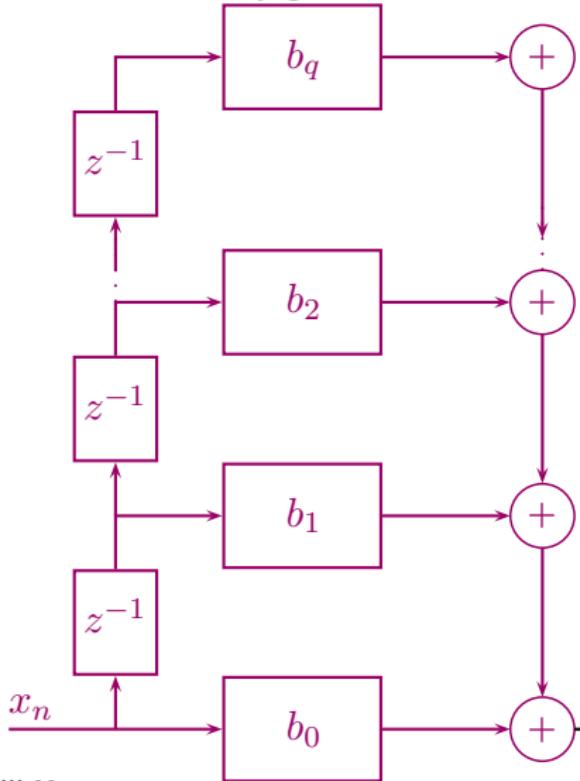
$$y_n = b_0 x_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$$

→ filtre (purement) récursif / filtre AR:
auto-régressif



Cas général: filtres ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad / \quad y_n = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j} - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$$



Conception/choix d'un filtre numérique

- Filtres RIF:

$$H[z] = \sum_{j=0}^q b_j z^{-j} \quad y_n = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j}$$

- ▶ exemple synthèse en TD
- ▶ avantages/inconvénients:
 - + stabilité
 - + phase linéaire
 - temps calcul, retards importants

- Filtres RII / récursifs:

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad y_n = \sum_{j=0}^q b_j x_{n-j} - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$$

- ▶ synthèse en fonction d'un gabarit donné: non traité!
- ▶ avantages/inconvénients:
 - + bonne performance
 - + peu de coefficients et faible temps calcul
 - instabilité possible

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

Energie et puissance

- Energie de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$E_x \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2$$

- Puissance:

$$P_x \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

Energie et puissance

- Energie de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$E_x \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2$$

- Puissance:

$$P_x \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

- énergie finie \Rightarrow puissance nulle

$\Leftrightarrow P_x > 0 \Rightarrow E_x = \infty$

Energie et puissance

- Energie de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$E_x \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2$$

- Puissance:

$$P_x \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

→ Classification en énergie/puissance finie/infinie.

- énergie finie \Rightarrow puissance nulle

$$\Leftrightarrow P_x > 0 \Rightarrow E_x = \infty$$

- En traitement du signal: puissance et énergie sans dimension.

Si x_n : tension appliquée à une résistance R , puissance physique:

$$P_{\text{elec}} = \frac{|x_n|^2}{R}.$$

Exemples de signaux

- impulsion rectangulaire $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $$E_x = 2N + 1 \quad P_x = 0$$

Exemples de signaux

- impulsion rectangulaire $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
 $E_x = 2N + 1 \quad P_x = 0$
- échelon de Heaviside $x_n = 1 \text{ si } n \geq 0, 0 \text{ sinon. } E_x = \infty \quad P_x = 1/2$

Exemples de signaux

- impulsion rectangulaire $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
 $E_x = 2N + 1 \quad P_x = 0$
- échelon de Heaviside $x_n = 1 \text{ si } n \geq 0, 0 \text{ sinon. } E_x = \infty \quad P_x = 1/2$
- exponentielle complexe $x_n = e^{i2\pi f_0 n}: E_x = \infty \quad P_x = 1$

Exemples de signaux

- **impulsion rectangulaire** $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
 $E_x = 2N + 1 \quad P_x = 0$
- **échelon de Heaviside** $x_n = 1 \text{ si } n \geq 0, 0 \text{ sinon.}$ $E_x = \infty \quad P_x = 1/2$
- **exponentielle complexe** $x_n = e^{i2\pi f_0 n}: E_x = \infty \quad P_x = 1$
- **sinusoïde** $x_n = \cos(2\pi f_0 n + \varphi):$
 $E_x = \infty \quad P_x = 1/2 \quad (2f_0 \notin \mathbb{Z})$

Exemples de signaux

- **impulsion rectangulaire** $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{-N, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
 $E_x = 2N + 1 \quad P_x = 0$
- **échelon de Heaviside** $x_n = 1 \text{ si } n \geq 0, 0 \text{ sinon.}$ $E_x = \infty \quad P_x = 1/2$
- **exponentielle complexe** $x_n = e^{i2\pi f_0 n}: E_x = \infty \quad P_x = 1$
- **sinusoïde** $x_n = \cos(2\pi f_0 n + \varphi):$
 $E_x = \infty \quad P_x = 1/2 \quad (2f_0 \notin \mathbb{Z})$
- **rampe linéaire** $x_n = n \text{ si } n \geq 0, 0 \text{ sinon.}$ $E_x = \infty \quad P_x = \infty$

Signaux d'énergie finie

Utile de considérer les espaces vectoriels de signaux. En particulier:

$$\text{Energie finie} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{Z})$$

Signaux d'énergie finie

Utile de considérer les espaces vectoriels de signaux. En particulier:

$$\text{Energie finie} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{Z})$$

- produit scalaire $\langle x, y \rangle \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_n^*$
- norme et distance entre signaux:

$$\|\tilde{x} - x\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\tilde{x}_n - x_n|^2 \right)^{1/2}$$

↔ erreur quadratique moyenne

- inégalité de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
- projection orthogonale

Inter- et auto-corrélation en énergie

Pour des signaux d'**énergie finie**:

- **Inter-corrélation** de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en **énergie**:

$$\gamma_{xy}^e(k) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n-k}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

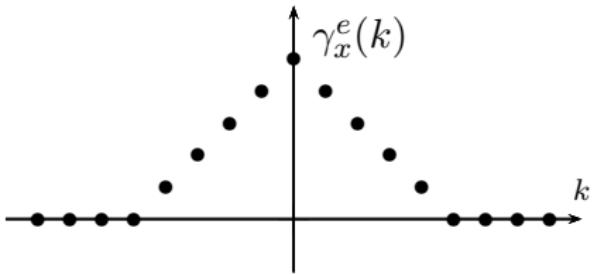
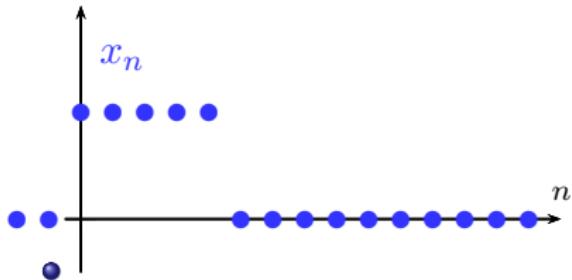
- **Auto-corrélation** de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en **énergie**:

$$\gamma_x^e(k) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- $\gamma_x^e(k) = \gamma_{xx}^e(k)$

Corrélation: exemple

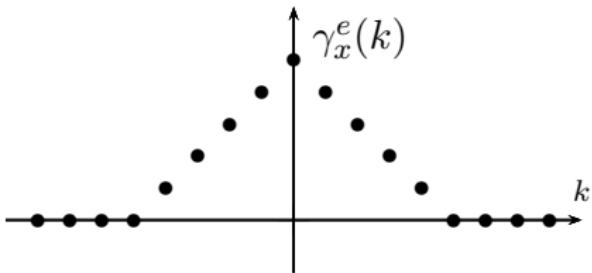
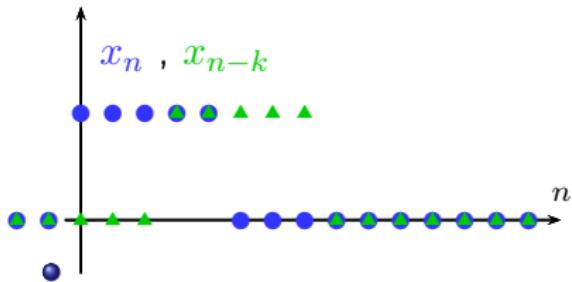
- $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



$$\gamma_x^e(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^* = \begin{cases} N - |k| & \text{si } |k| \leq N-1, \\ 0 & \text{si } |k| \geq N. \end{cases}$$

Corrélation: exemple

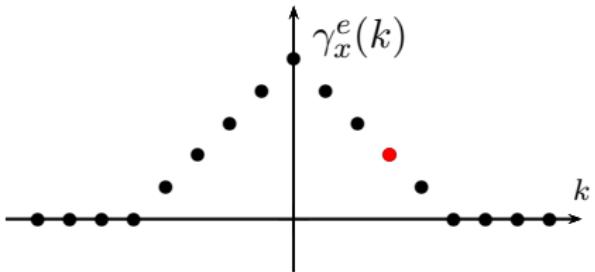
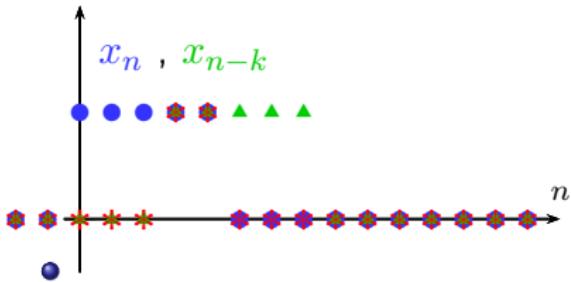
- $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



$$\gamma_x^e(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^* = \begin{cases} N - |k| & \text{si } |k| \leq N-1, \\ 0 & \text{si } |k| \geq N. \end{cases}$$

Corrélation: exemple

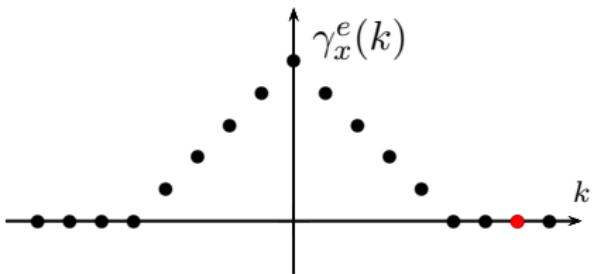
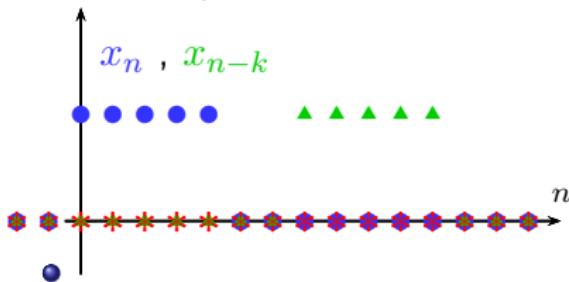
- $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



$$\gamma_x^e(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^* = \begin{cases} N - |k| & \text{si } |k| \leq N-1, \\ 0 & \text{si } |k| \geq N. \end{cases}$$

Corrélation: exemple

- $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



$$\gamma_x^e(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x_{n-k}^* = \begin{cases} N - |k| & \text{si } |k| \leq N-1, \\ 0 & \text{si } |k| \geq N. \end{cases}$$

Interprétations de la corrélation

$$\gamma_{xy}^e(k) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n-k}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Lien avec le **produit scalaire**:

$$\boxed{\gamma_{xy}^e(k) = \langle x_., y_{.-k} \rangle}$$

$$\gamma_x^e(k) = \langle x_., x_{.-k} \rangle$$

↔ La corrélation est une mesure de **colinéarité** entre les signaux.

- Lien avec la **convolution**:

$$\boxed{\gamma_{xy}^e(k) = x_k \star y_{-k}^*}$$

$$\gamma_x^e(k) = x_k \star x_{-k}^*$$

Propriétés de la corrélation

- $\gamma_x^e(0) = E_x$: énergie du signal. $\Rightarrow \gamma_x^e(0) > 0$

Propriétés de la corrélation

- $\gamma_x^e(0) = E_x$: énergie du signal. $\Rightarrow \gamma_x^e(0) > 0$
- **Symétrie hermitienne** (en effet: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n+k}^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_n^*$)

$$\gamma_{xy}^e(-k) = \gamma_{yx}^e(k)^*$$

Propriétés de la corrélation

- $\gamma_x^e(0) = E_x$: énergie du signal. $\Rightarrow \gamma_x^e(0) > 0$
- **Symétrie hermitienne** (en effet: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n+k}^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_n^*$)

$$\gamma_{xy}^e(-k) = \gamma_{yx}^e(k)^*$$

- **Majoration** (Cauchy-Schwarz):

$$|\gamma_{xy}^e(k)| = |\langle x., y_{.-k} \rangle| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_{n-k}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\gamma_x^e(0) \gamma_y^e(0)}$$

Propriétés de la corrélation

- $\gamma_x^e(0) = E_x$: énergie du signal. $\Rightarrow \gamma_x^e(0) > 0$
- Symétrie hermitienne (en effet: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n+k}^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_n^*$)

$$\gamma_{xy}^e(-k) = \gamma_{yx}^e(k)^*$$

- Majoration (Cauchy-Schwarz):

$$|\gamma_{xy}^e(k)| = |\langle x., y_{.-k} \rangle| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_{n-k}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\gamma_x^e(0) \gamma_y^e(0)}$$

$\rightarrow |\gamma_x^e(k)| \leq \gamma_x^e(0)$: autocorrélation maximale en zéro.

Propriétés de la corrélation

- $\gamma_x^e(0) = E_x$: énergie du signal. $\Rightarrow \gamma_x^e(0) > 0$
- **Symétrie hermitienne** (en effet: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{n+k}^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_n^*$)

$$\gamma_{xy}^e(-k) = \gamma_{yx}^e(k)^*$$

- **Majoration** (Cauchy-Schwarz):

$$|\gamma_{xy}^e(k)| = |\langle x., y_{.-k} \rangle| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_{n-k}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\gamma_x^e(0) \gamma_y^e(0)}$$

$\rightarrow |\gamma_x^e(k)| \leq \gamma_x^e(0)$: autocorrélation maximale en zéro.

- **Semi-définie positivité** (en effet: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{i=1}^N \lambda_i x_{n-n_i} \right|^2 \geq 0$)

$$\sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j^* \gamma_x^e(n_j - n_i) \geq 0, \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, n_i \in \mathbb{Z})$$

Utilisation de la corrélation

- Cas d'un signal RADAR:
 - ▶ signal émis: x_n
 - ▶ signal reçu: $y_n = \rho x_{n-n_0}$ version atténuée et retardée de x_n

Utilisation de la corrélation

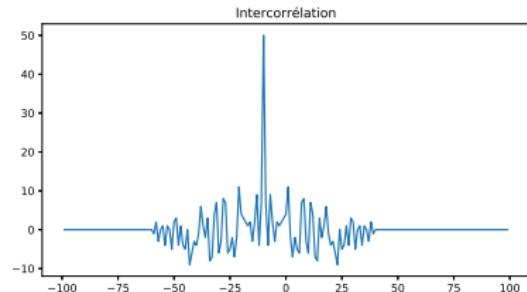
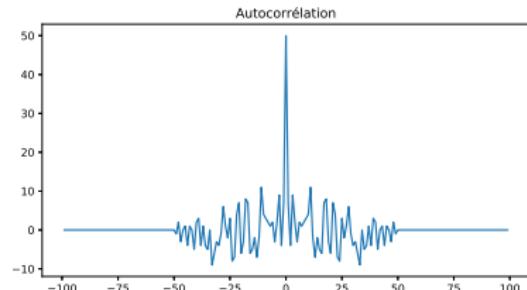
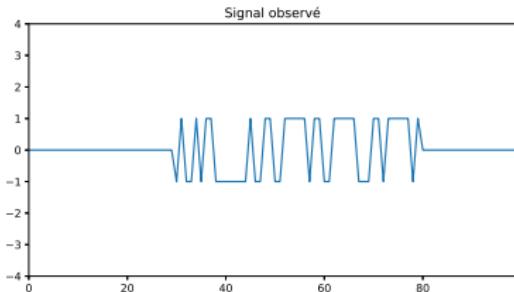
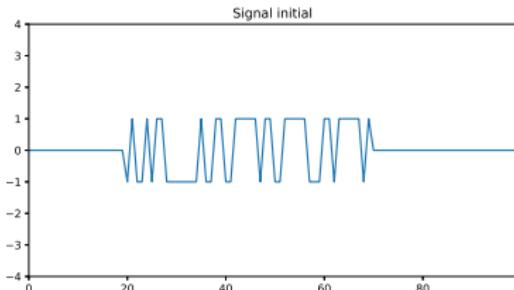
- Cas d'un signal RADAR:
 - ▶ signal émis: x_n
 - ▶ signal **reçu**: $y_n = \rho x_{n-n_0}$ version **atténuée et retardée** de x_n

$$\begin{aligned}\gamma_{yx}^e(k) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n x_{n-k}^* \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho x_{n-n_0} x_{n-k}^* \\ &= \rho \gamma_x^e(k - n_0)\end{aligned}$$

- ⇒ Corrélation maximale pour $k = n_0$
- Illustration dans un cas particulier: **robustesse!**

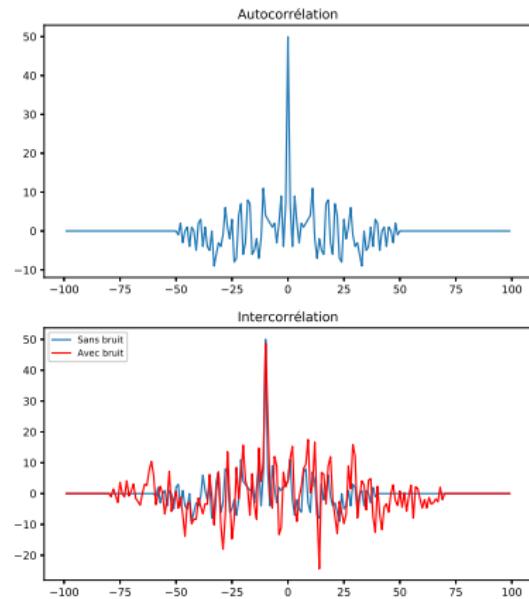
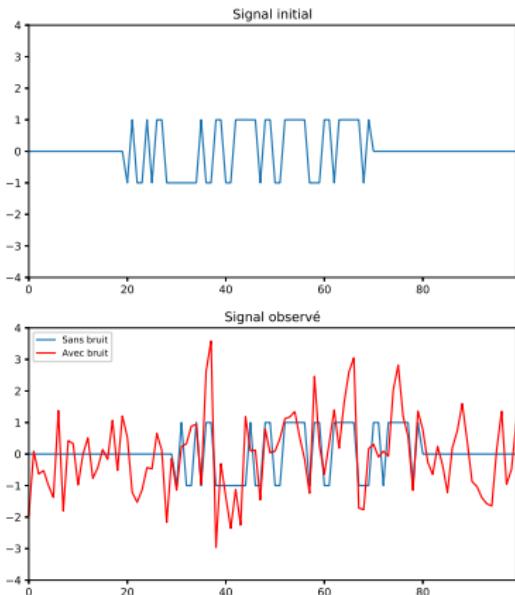
Corrélation

Cas non bruité



Corrélation

Cas bruité



Densité spectrale d'énergie (1/2)

- La **densité spectrale d'énergie** est la transformée de Fourier de l'auto-corrélation en énergie.

$$\gamma_x^e(k) \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_x^e(\tilde{f})$$

càd:

$$\Gamma_x^e(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x^e(k) e^{-\text{i}2\pi k \tilde{f}} \quad \gamma_x^e(k) = \int_{[0,1]} \Gamma_x^e(\tilde{f}) e^{+\text{i}2\pi \tilde{f} k} d\tilde{f}$$

Densité spectrale d'énergie (1/2)

- La **densité spectrale d'énergie** est la transformée de Fourier de l'auto-corrélation en énergie.

$$\gamma_x^e(k) \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_x^e(\tilde{f})$$

càd:

$$\Gamma_x^e(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x^e(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k \tilde{f}} \quad \gamma_x^e(k) = \int_{[0,1]} \Gamma_x^e(\tilde{f}) e^{+\mathrm{i}2\pi \tilde{f} k} d\tilde{f}$$

- Propriété essentielle:

$$\int_{[0,1]} \Gamma_x^e(\tilde{f}) d\tilde{f} = \gamma_x^e(0) = E_x$$

⇒ Energie dans une bande de fréquences = intégrale densité spectrale d'énergie sur la bande

Densité spectrale d'énergie (2/2)

Pour un signal **déterministe, d'énergie finie**:

$$\gamma_x^e(k) = x_k \star x_{-k}^* \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_x^e(\tilde{f}) = |X(\tilde{f})|^2$$

Densité spectrale d'énergie (2/2)

Pour un signal **déterministe, d'énergie finie**:

$$\gamma_x^e(k) = x_k \star x_{-k}^* \xrightarrow{\text{TFTD}} \boxed{\Gamma_x^e(\tilde{f}) = |X(\tilde{f})|^2}$$

↔ On retrouve l'identité de Parseval:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 = \int_{[0,1]} |X(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} \\ &= \int_{[0,1]} \Gamma_x^e(\tilde{f}) d\tilde{f} \end{aligned}$$

Densité interspectrale d'énergie

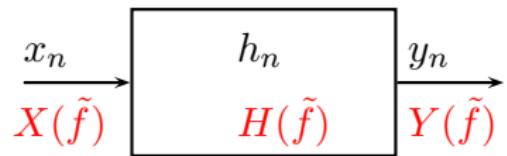
- Densité interspectrale d'énergie $\Gamma_{xy}^e(\tilde{f})$:

$$\gamma_{xy}^e(k) \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_{xy}^e(\tilde{f})$$

- Pour des signaux d'énergie finie:

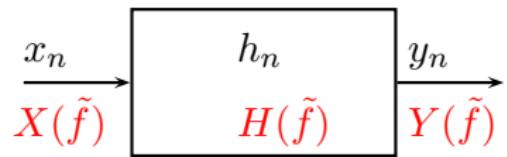
$$\gamma_{xy}^e(k) = x_k \star y_{-k}^* \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_{xy}^e(\tilde{f}) = X(\tilde{f})Y^*(\tilde{f})$$

Filtrage des signaux (énergie finie)



- $Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f})X(\tilde{f})$ et donc: $|Y(\tilde{f})|^2 = |H(\tilde{f})|^2|X(\tilde{f})|^2$

Filtrage des signaux (énergie finie)



- $Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f})X(\tilde{f})$ et donc: $|Y(\tilde{f})|^2 = |H(\tilde{f})|^2|X(\tilde{f})|^2$
- Densité spectrale d'énergie:

$$\Gamma_y^e(\tilde{f}) = |H(\tilde{f})|^2 \Gamma_x^e(\tilde{f})$$

Filtrage des signaux (énergie finie)



- $Y(\tilde{f}) = H(\tilde{f})X(\tilde{f})$ et donc: $|Y(\tilde{f})|^2 = |H(\tilde{f})|^2|X(\tilde{f})|^2$
- Densité spectrale d'énergie:

$$\Gamma_y^e(\tilde{f}) = |H(\tilde{f})|^2 \Gamma_x^e(\tilde{f})$$

~~~ Généralisation: (formule des interférences)

$$\Gamma_{yv}(\tilde{f}) = H(\tilde{f})G(\tilde{f})^* \Gamma_{xu}(\tilde{f})$$

## Inter- et auto-corrélation en puissance

Pour des signaux de **puissance finie**, énergie infinie:

- **Inter-corrélation** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  en **puissance**:

$$\gamma_{xy}^p(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n y_{n-k}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- **Auto-corrélation** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  en **puissance**:  $\gamma_x^p(k) = \gamma_{xx}^p(k)$

$$\gamma_x^p(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n-k}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Auto-corrélation égale à la puissance et **maximale en zéro**:

$$\gamma_x^p(0) = P_x > 0$$

## Densité spectrale de puissance

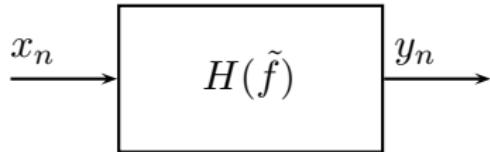
- La **densité spectrale de puissance** est la transformée de Fourier de l'autocorrélation en puissance.

$$\gamma_x^p(k) \xrightarrow{\text{TFTD}} \Gamma_x^p(\tilde{f}) \quad \text{et donc:}$$

$$\int_{[0,1]} \Gamma_x^p(\tilde{f}) d\tilde{f} = \gamma_x^p(0) = P_x$$

⇒ Puissance dans une bande de fréquences = intégrale densité spectrale de puissance sur la bande

- Filtrage:



$$\Gamma_y^p(\tilde{f}) = |H(\tilde{f})|^2 \Gamma_x^p(\tilde{f})$$

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# Probabilités: rappels (1/4)

## Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- $\Omega$ : ensemble des événements élémentaires
  - $\omega \in \Omega$ :  $\omega$  est un événement élémentaire
  - $\mathcal{A}$ : ensemble des événements (pas que élémentaires) auxquels on sait associer une probabilité.
- Si  $A \in \mathcal{A}$ , c'est que  $A \subset \Omega$ !
- Si  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}(A)$  a un sens!

## Probabilités: rappels (2/4)

Variable aléatoire  $X$ .

- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto X(\omega)$ 
  - en fonction de l'événement élémentaire  $\omega$ , qui survient on a une «valeur aléatoire»  $X(\omega)$ .
  - On écrit  $X$  au lieu de  $X(\omega)$   
(abréviation: va=variable aléatoire).
- $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\})$
- va continue: densité de probabilité  $f_X$  telle que:  
$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx$$
va discrète: pour toutes les valeurs de  $X$  possibles,  $\mathbb{P}(X = x)$
- Fonction de répartition:  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

# Probabilités: rappels (3/4)

## Espérance mathématique

- C'est une intégrale sur tous les événements élémentaires possibles.

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Pour une va continue:

$$\mathbb{E}\{X\} = \int x f_X(x) dx$$

et pour une variable discrète:

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{x \text{ valeur possible de } X} x \mathbb{P}(X = x)$$

## Probabilités: rappels (4/4)

Vecteur aléatoire (ici:  $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  couple de dimension 2)

- va continue: densité de probabilité  $f_{X,Y}(x, y)$   
suite du transparent: va continue!
- **indépendance** lorsque  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- **décorrélation** lorsque  $\mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}$
- Si  $X$  et  $Y$  indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{XY\} &= \int xyf_{X,Y}(x, y) dxdy = \int xyf_X(x)f_Y(y) dxdy \\ &= \left( \int xf_X(x) dx \right) \left( \int yf_Y(y) dy \right) = \mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}\end{aligned}$$

→ indépendance  $\Rightarrow$  décorrélation, réciproque fausse.

# Signal aléatoire (temps discret)

Signal aléatoire (à temps discret) :=  
famille indexée de variables aléatoires  $\{x_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

# Signal aléatoire (temps discret)

Signal aléatoire (à temps discret) :=  
famille indexée de variables aléatoires  $\{x_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

- $n$  fixé:  $\omega \mapsto x_n(\omega)$  est une variable aléatoire

# Signal aléatoire (temps discret)

Signal aléatoire (à temps discret) :=  
famille indexée de variables aléatoires  $\{x_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

- $n$  fixé:  $\omega \mapsto x_n(\omega)$  est une variable aléatoire
- $\omega$  fixé:  $n \mapsto x_n(\omega)$  est une suite: une trajectoire du signal aléatoire

# Signal aléatoire (temps discret)

Signal aléatoire (à temps discret) :=  
famille indexée de variables aléatoires  $\{x_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

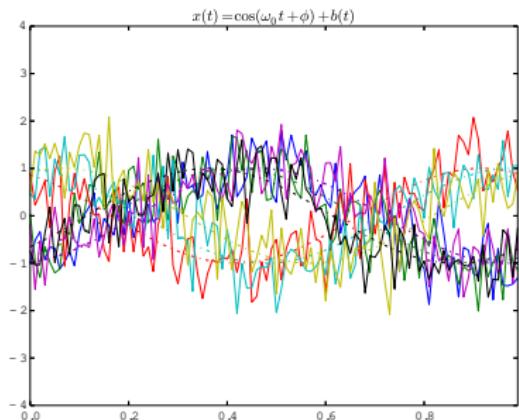
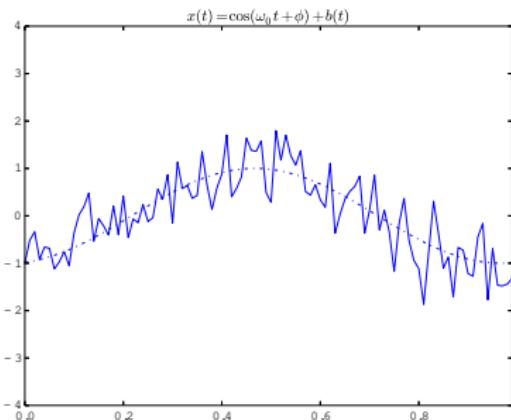
- $n$  fixé:  $\omega \mapsto x_n(\omega)$  est une variable aléatoire
- $\omega$  fixé:  $n \mapsto x_n(\omega)$  est une suite: une trajectoire du signal aléatoire

Rq:

- ▶ on notera simplement  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  le signal aléatoire
- ▶ Autres noms: série chronologique/temporelle

# Exemple de signal aléatoire

Sinusoïde avec phase aléatoire + bruit additif



# Signaux aléatoires temps discret: exemples

- $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va dans un alphabet fini (par ex.  $\pm 1$ )
  - ~~~ symboles de télécom (souvent i.i.d.)
  - ~~~ signal temps continu émis:  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT)$

# Signaux aléatoires temps discret: exemples

- $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va dans un alphabet fini (par ex.  $\pm 1$ )
  - $\rightsquigarrow$  symboles de télécom (souvent i.i.d.)
  - $\rightsquigarrow$  signal temps continu émis:  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT)$
- chaîne de Markov:  $x_n \in \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$  et pour tout  $n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_{n+1} = \omega_{i_{n+1}} | x_n = \omega_{i_n}, x_{n-1} = \omega_{i_{n-1}}, \dots, x_0 = \omega_{i_0}) \\ = \mathbb{P}(x_{n+1} = \omega_{i_{n+1}} | x_n = \omega_{i_n}) = p_{i_n i_{n+1}} \end{aligned}$$

# Signaux aléatoires temps discret: exemples

- $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va dans un alphabet fini (par ex.  $\pm 1$ )  
 ↳ symboles de télécom (souvent i.i.d.)  
 ↳ signal temps continu émis:  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT)$
- chaîne de Markov:  $x_n \in \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$  et pour tout  $n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_{n+1} = \omega_{i_{n+1}} | x_n = \omega_{i_n}, x_{n-1} = \omega_{i_{n-1}}, \dots, x_0 = \omega_{i_0}) \\ = \mathbb{P}(x_{n+1} = \omega_{i_{n+1}} | x_n = \omega_{i_n}) = p_{i_n i_{n+1}} \end{aligned}$$

- processus harmonique:  $x_n = \sum_p U_p e^{i 2\pi n f_p}$  où:

$f_p$  : fréquences données,

$U_p$  : va complexes, centrées et décorrélées

## Loi d'un signal aléatoire

- Ensemble fini d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ :

Loi du vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \leftrightarrow$  connaître pour tout borélien  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbb{P}((x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \in \mathbf{B})$$

- signal  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : indices en nombre infini!

# Loi d'un signal aléatoire

- Ensemble fini d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ :

Loi du vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \leftrightarrow$  connaître pour tout borélien  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbb{P}((x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \in \mathbf{B})$$

- signal  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : indices en nombre infini!

~~> La loi du processus  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est donnée par l'ensemble des lois de dimension finie.

# Loi d'un signal aléatoire

- Ensemble fini d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ :

Loi du vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \leftrightarrow$  connaître pour tout borélien  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbb{P}((x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \in \mathbf{B})$$

- signal  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : indices en nombre infini!

~~ La loi du processus  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est donnée par l'ensemble des lois de dimension finie.

~~ Il suffit de connaître  $\mathbb{P}((x_{n_1}, \dots, x_{n_M}) \in \mathbf{B})$  pour  $n_1, \dots, n_M$  quelconques et  $M \in \mathbb{N}^*$  fini quelconque.

Rq:  $\exists$  relations de compatibilité entre lois dimension finie  $\leftrightarrow$  th. de Kolmogorov

# Moments

Si loi de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  non entièrement connue, regarder déjà:

- **moyenne**:  $m_x(n) = \mathbb{E}\{x_n\}$
- **fonction d'autocorrélation**:

statistiques du  
second ordre

$$\gamma_x(n, p) = \mathbb{E}\{(x_n - m_x(n))(x_p - m_x(p))^*\}$$

- **fonction d'intercorrélation**:

$$\gamma_{xy}(n, p) = \mathbb{E}\{(x_n - m_x(n))(y_p - m_y(p))^*\}$$

# Moments

Si loi de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  non entièrement connue, regarder déjà:

- **moyenne**:  $m_x(n) = \mathbb{E}\{x_n\}$
- **fonction d'autocorrélation**:



$$\gamma_x(n, p) = \mathbb{E}\{(x_n - m_x(n))(x_p - m_x(p))^*\}$$

- **fonction d'intercorrélation**:

$$\gamma_{xy}(n, p) = \mathbb{E}\{(x_n - m_x(n))(y_p - m_y(p))^*\}$$

- Rq: possibilité de regarder au delà du second ordre et définir des moments d'ordre supérieur

## Signal gaussien

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire **gaussien** lorsque pour tout ensemble d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ , le vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  est gaussien.

## Signal gaussien

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire **gaussien** lorsque pour tout ensemble d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ , le vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  est gaussien.
- signal gaussien: caractérisé par ses **statistiques du second ordre** (moyenne, corrélation)

# Signal gaussien

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire **gaussien** lorsque pour tout ensemble d'indices  $(n_1, \dots, n_M)$ , le vecteur  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  est gaussien.
- signal gaussien: caractérisé par ses **statistiques du second ordre** (moyenne, corrélation)
- Rappels et remarques: (revoir le cours de probas!)
  - ▶ vecteur gaussien caractérisé par moyenne et covariance
  - ▶ décorrélation  $\Rightarrow$  indépendance **uniquement dans le cas gaussien**
  - ▶ indépendance  $\Rightarrow$  décorrélation
  - ▶ vecteur gaussien  $\Rightarrow$  marginales gaussiennes
  - ▶ marginales gaussiennes + **indépendance**  $\Rightarrow$  vecteur gaussien
  - ▶ stabilité par transf. affine ( $\rightsquigarrow$  par filtrage également)
  - ▶ le cas gaussien se prête bien au calcul
  - ▶ modélisation gaussienne souvent utilisée (au moins en première approche)

## Stationnarité au sens strict

Certains signaux ont des propriétés statistiques qui ne changent pas au cours du temps:

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au sens strict lorsque, pour  $M, n_1, \dots, n_M$  et  $k$  quelconques:  
 $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  et  $(x_{n_1+k}, \dots, x_{n_M+k})$  ont même loi

stationnarité  $\leftrightarrow$  loi identique après décalage dans le temps

## Stationnarité au sens strict

Certains signaux ont des propriétés statistiques qui ne changent pas au cours du temps:

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  **stationnaire au sens strict** lorsque, pour  $M, n_1, \dots, n_M$  et  $k$  quelconques:
- $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  et  $(x_{n_1+k}, \dots, x_{n_M+k})$  ont même loi

stationnarité  $\leftrightarrow$  loi identique après décalage dans le temps

$\Rightarrow$  En particulier pour signal stationnaire strict:

$$\mathbb{E}\{x_n\} = \mathbb{E}\{x_{n+k}\}$$

$$\mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_p - m_x)^*\} = \mathbb{E}\{(x_{n+k} - m_x)(x_{p+k} - m_x)^*\}$$

# Stationnarité au sens large

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au sens large lorsque:
  - $\mathbb{E}\{x_n\} = m_x$  indépendant de  $n$
  - $\mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_p - m_x)^*\} = \gamma_x(n - p)$   
ne dépend que de la différence  $n - p$

# Stationnarité au sens large

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au sens large lorsque:
  - $\mathbb{E}\{x_n\} = m_x$  indépendant de  $n$
  - $\mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_p - m_x)^*\} = \gamma_x(n - p)$   
ne dépend que de la différence  $n - p$
- stationnarité au sens strict  $\Rightarrow$  stationnarité au sens large

# Stationnarité au sens large

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire au sens large lorsque:
  - $\mathbb{E}\{x_n\} = m_x$  indépendant de  $n$
  - $\mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_p - m_x)^*\} = \gamma_x(n - p)$   
ne dépend que de la différence  $n - p$

- stationnarité au sens strict  $\Rightarrow$  stationnarité au sens large

Rq:

- ▶ stationnaire sens large = au second ordre = faiblement stationnaire
- ▶ on suppose souvent le signal centré:  $m_x = 0$  (voir transp. 18)

## Stationnarité: exemple

$$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi) \text{ avec:}$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , constante

$\Phi$  va uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  ( $f_\Phi = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}$ ):

## Stationnarité: exemple

$$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi) \text{ avec:}$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , constante

$\Phi$  va uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  ( $f_\Phi = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}$ ):

$$\mathbb{E}\{x_n\} = \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega_0 n + \varphi) f_\Phi(\varphi) d\varphi$$

## Stationnarité: exemple

$$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi) \text{ avec:}$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , constante

$\Phi$  va uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  ( $f_\Phi = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}$ ):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x_n\} &= \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega_0 n + \varphi) f_\Phi(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 n + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \\ &= 0\end{aligned}$$

# Stationnarité: exemple

$$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi) \text{ avec:}$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , constante

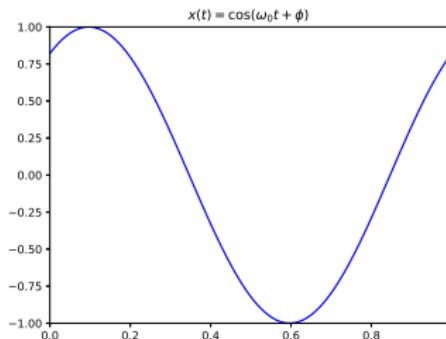
$\Phi$  va uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$  ( $f_\Phi = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0,2\pi]}$ ):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x_n\} &= \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega_0 n + \varphi) f_\Phi(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 n + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \\ &= 0\end{aligned}$$

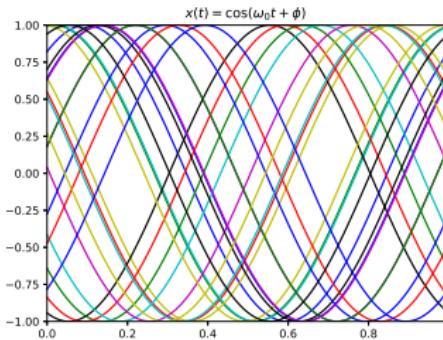
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} &= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 n + \varphi) \cos(\omega_0(n-k) + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{\cos(\omega_0 k)}{2}\end{aligned}$$

⇒ stationnaire au sens large

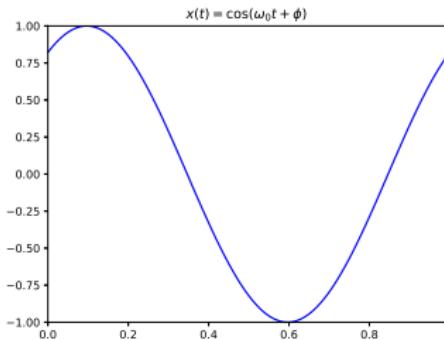
# Simulations signal sinusoïdal, phase aléatoire



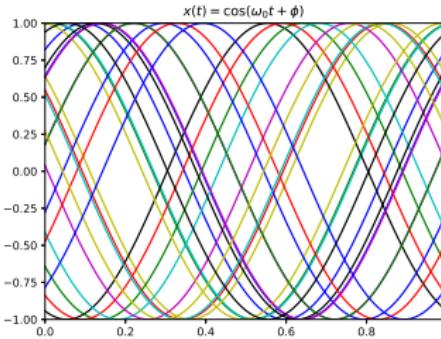
phase uniforme  $[0, 2\pi]$ :



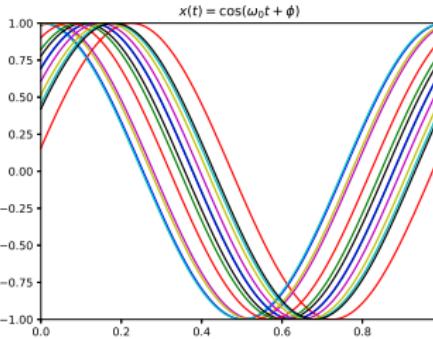
# Simulations signal sinusoïdal, phase aléatoire



phase uniforme  $[0, 2\pi]$ :



phase uniforme  $[0, \pi/2]$ :



## Non stationnarité: exemple

$$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi) \text{ avec:}$$

$\omega_0 \in \mathbb{R}$ , constante

$\Phi$  va uniformément répartie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ( $f_\Phi = \frac{2}{\pi} \mathbf{1}_{[0,\pi/2]}$ ):

$$\mathbb{E}\{x_n\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega_0 n + \varphi) \frac{2}{\pi} d\varphi = \frac{2}{\pi} (\cos(\omega_0 n) - \sin(\omega_0 n))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega_0 n + \varphi) \cos(\omega_0(n-k) + \varphi) \frac{2}{\pi} d\varphi \\ &= \frac{\cos(\omega_0 k)}{2} - \frac{\sin(\omega_0(2n-k))}{\pi} \end{aligned}$$

⇒ non stationnaire

# Corrélation

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  : signal **stationnaire au sens large**;  $m_x = \mathbb{E}\{x_n\}$ .

- Fonction d'autocorrélation de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ :

$$\gamma_x(k) \triangleq \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_{n-k} - m_x)^*\}$$

- Intercorrélation de deux signaux stationnaires sens large:

$$\gamma_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(y_{n-k} - m_y)^*\}$$

## Cas des signaux centrés

Désormais signaux supposés **centrés** et stationnaires (sens large):

- $\mathbb{E}\{x_n\} = m_x = 0$  (pour tous les signaux)

→ Expressions simplifiées:

- ▶ Autocorrélation:

$$\gamma_x(k) \triangleq \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$$

- ▶ Intercorrélation:

$$\gamma_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{x_n y_{n-k}^*\}$$

# Cas des signaux centrés

Désormais signaux supposés **centrés** et stationnaires (sens large):

- $\mathbb{E}\{x_n\} = m_x = 0$  (pour tous les signaux)

→ Expressions simplifiées:

- ▶ Autocorrélation:

$$\gamma_x(k) \triangleq \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$$

- ▶ Intercorrélation:

$$\gamma_{xy}(k) \triangleq \mathbb{E}\{x_n y_{n-k}^*\}$$

- Dans l'espace des va  $L^2(\Omega)$ , produit scalaire:  $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}\{XY^*\}$
- $\gamma_{xy}(k) = \langle x_., y_{.-k} \rangle$  mesure une colinéarité

# Propriétés de la corrélation

- Symétrie hermitienne:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= \mathbb{E}\{x_n y_{n-k}^*\} \\ &= \mathbb{E}\{x_{n+k} y_n^*\} = (\gamma_{yx}(-k))^*\end{aligned}$$

# Propriétés de la corrélation

- Symétrie hermitienne:

$$\gamma_{xy}(k) = (\gamma_{yx}(-k))^*$$

$$\gamma_x(k) = \gamma_x(-k)^*$$

# Propriétés de la corrélation

- Symétrie hermitienne:

$$\gamma_{xy}(k) = (\gamma_{yx}(-k))^*$$

$$\gamma_x(k) = \gamma_x(-k)^*$$

- Majoration (Cauchy-Schwarz):

$$\begin{aligned} |\gamma_{xy}(k)| &= |\langle x_., y_{.-k} \rangle| \\ &\leq (\mathbb{E}\{|x_n|^2\}\mathbb{E}\{|y_{n-k}|^2\})^{1/2} = \sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)} \end{aligned}$$

# Propriétés de la corrélation

- Symétrie hermitienne:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= (\gamma_{yx}(-k))^* \\ \gamma_x(k) &= \gamma_x(-k)^*\end{aligned}$$

- Majoration (Cauchy-Schwarz):

$$|\gamma_{xy}(k)| \leq \sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}$$

→  $|\gamma_x(k)| \leq \gamma_x(0)$ : autocorrélation maximale en zéro ↪ puissance  $\gamma_x(0) > 0$ !

# Propriétés de la corrélation

- Symétrie hermitienne:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(k) &= (\gamma_{yx}(-k))^* \\ \gamma_x(k) &= \gamma_x(-k)^*\end{aligned}$$

- Majoration (Cauchy-Schwarz):

$$|\gamma_{xy}(k)| \leq \sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}$$

→  $|\gamma_x(k)| \leq \gamma_x(0)$ : autocorrélation maximale en zéro ↪ puissance  $\gamma_x(0) > 0$ !

- Semi-définie positivité (en effet:  $\mathbb{E}\{|\sum_{i=1}^N \lambda_i x_{n-n_i}|^2\} \geq 0$ )

$$\sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j^* \gamma_x(n_j - n_i) \geq 0, \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, n_i \in \mathbb{Z})$$

# Puissance

- **Puissance** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , stationnaire sens large:

$$P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\}$$

- $P_x = \gamma_x(0)$       (avec  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  centré)

# Puissance

- **Puissance** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , stationnaire sens large:

$$P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\}$$

- $P_x = \gamma_x(0)$       (avec  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  centré)

- ~ Comment avoir  $\mathbb{E}\{|x_n|^2\}$  en pratique à partir de données?
- Rappel pour signal déterministe:  $P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$
- ~ Lien entre les deux définitions?

# Puissance

- **Puissance** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , stationnaire sens large:

$$P_x \triangleq \mathbb{E}\{|x_n|^2\}$$

- $P_x = \gamma_x(0)$       (avec  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  centré)

- ~ ~ Comment avoir  $\mathbb{E}\{|x_n|^2\}$  en pratique à partir de données?
- Rappel pour signal déterministe:  $P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$

~ ~ Lien entre les deux définitions?

  - Condition pour écrire:  $\mathbb{E}\{|x_n|^2\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$  ?

## Ergodicité

Un signal aléatoire  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , stationnaire au sens large est dit **ergodique** (sens large) lorsque pour tout  $n, k$ :

$$\mathbb{E}\{x_n\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n$$

$$\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n-k}^*$$

- Pour des signaux stationnaires et ergodiques, les moyennes statistiques peuvent être remplacées par des moyennes temporelles.  
Hypothèse d'ergodicité faite dès que nécessaire!
- Possible de regarder l'ergodicité à un ordre supérieur (non considéré dans ce cours).

## Ergodicité: exemple

$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi)$  avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\Phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n$$

## Ergodicité: exemple

$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi)$  avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\Phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- Si  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos(\Phi + \frac{\omega_0}{2}) \sin(\omega_0(N+1))}{2N+1} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2})}{\sin(\frac{\omega_0}{2})}$$

## Ergodicité: exemple

$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi)$  avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\Phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- Si  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos(\Phi + \frac{\omega_0}{2}) \sin(\omega_0(N+1))}{2N+1} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2})}{\sin(\frac{\omega_0}{2})} \\ &= 0 = \mathbb{E}\{x_n\}\end{aligned}$$

## Ergodicité: exemple

$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi)$  avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\Phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- Si  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos(\Phi + \frac{\omega_0}{2}) \sin(\omega_0(N+1))}{2N+1} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2})}{\sin(\frac{\omega_0}{2})} \\ &= 0 = \mathbb{E}\{x_n\} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n-k}^* = \frac{\cos(\omega_0 k)}{2} = \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$$

⇒ stationnaire et ergodique au sens large pour  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$

## Ergodicité: exemple

$x_n = \cos(\omega_0 n + \Phi)$  avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\Phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- Si  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos(\Phi + \frac{\omega_0}{2}) \sin(\omega_0(N+1))}{2N+1} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2})}{\sin(\frac{\omega_0}{2})} \\ &= 0 = \mathbb{E}\{x_n\} \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n-k}^* = \frac{\cos(\omega_0 k)}{2} = \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$$

⇒ stationnaire et ergodique au sens large pour  $\omega_0 \notin \pi\mathbb{Z}$

- Si  $\omega_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ : **stationnaire non ergodique** car:

$$x_n = \cos \Phi \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n = \cos \Phi \neq \mathbb{E}\{x_n\} = 0$$

- Si  $\omega_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ :  $x_n = (-1)^n \cos \Phi$

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# Résumé

(stationnarité, ergodicité)

- Signal **aléatoire** = suite de va
- Signal **stationnaire** = loi invariante par translation
- Pour  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  **stationnaire au sens large**:
  - ▶ moyenne  $m_x := \mathbb{E}\{x_n\}$
  - ▶ autocorrélation  $\gamma_x(k) := \mathbb{E}\{(x_n - m_x)(x_{n-k} - m_x)^*\}$
  - ▶ hypothèse  $m_x = 0$ , et donc

$$\begin{aligned}\gamma_x(k) &:= \mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\} \\ \gamma_x(0) &= \mathbb{E}\{|x_n|^2\} = \text{puissance}\end{aligned}$$

- Si le signal est **ergodique**, espérances  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  estimées par des moyennes temporelles.

# Densité spectrale de puissance

- Densité spectrale de puissance  $\Gamma_x(\tilde{f})$ :

$$\gamma_x(k) \xrightarrow{\text{TF}} \Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\text{i}2\pi k \tilde{f}}$$

# Densité spectrale de puissance

- Densité spectrale de puissance  $\Gamma_x(\tilde{f})$ :

$$\gamma_x(k) \xrightarrow{\text{TF}} \Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\text{i}2\pi k \tilde{f}}$$

- Propriété:

$$P_x = \gamma_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(\tilde{f}) d\tilde{f}$$

Rq: Cas de non existence de la TF de  $\gamma_x(k)$ ?

Th. Herglotz: comme  $\gamma_x(k)$  semi-déf.  $\geq 0 \Rightarrow$

Il existe toujours une mesure spectrale de puissance

$\rightsquigarrow$  raies dans le spectre  $\leftrightarrow$  masse Dirac

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k \tilde{f}}$

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} k} \right|^2$$

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-i2\pi k \tilde{f}}$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-i2\pi \tilde{f} k} \right|^2 \right\}$$

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-i2\pi k \tilde{f}}$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-i2\pi \tilde{f} k} \right|^2\right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{E}\{x_k x_l^*\} e^{-i2\pi \tilde{f}(k-l)}$$

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-i2\pi k \tilde{f}}$

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-i2\pi \tilde{f} k} \right|^2\right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_x(k-l) e^{-i2\pi \tilde{f}(k-l)}$$

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k \tilde{f}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} k} \right|^2\right\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_x(k-l) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f}(k-l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \gamma_x(p) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} p} (N - |p|) \end{aligned}$$

# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k \tilde{f}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} k} \right|^2\right\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_x(k-l) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f}(k-l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \gamma_x(p) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} p} (N - |p|) \\ &= \sum_{p=-N}^N \gamma_x(p) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} p} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) \end{aligned}$$

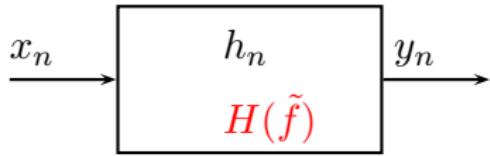
# Comprendre la définition de $\Gamma_x(\tilde{f})$ ?

Densité spectrale de puissance:  $\Gamma_x(\tilde{f}) \triangleq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-\mathrm{i}2\pi k \tilde{f}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} k} \right|^2\right\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_x(k-l) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f}(k-l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \gamma_x(p) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} p} (N - |p|) \\ &= \sum_{p=-N}^N \gamma_x(p) e^{-\mathrm{i}2\pi \tilde{f} p} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) \\ &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \Gamma_x(\tilde{f}) \quad (\text{convergence dominée}) \end{aligned}$$

↔ théorème de Wiener-Khintchine

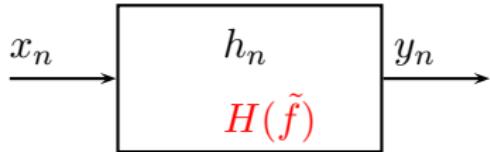
# Filtrage d'un signal aléatoire



- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : signal aléatoire stationnaire sens large  
 $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : réponse impulsionnelle déterministe d'un filtre stable
- $\Rightarrow$  sortie du filtre est signal aléatoire stationnaire au sens large donné par:

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k} x_k$$

# Filtrage d'un signal aléatoire



- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : signal aléatoire stationnaire sens large  
 $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ : réponse impulsionnelle déterministe d'un filtre stable  
 $\Rightarrow$  sortie du filtre est signal aléatoire stationnaire au sens large donné par:

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k} x_k$$

- Densité spectrale de puissance du signal filtré:

$$\Gamma_y(\tilde{f}) = |H(\tilde{f})|^2 \Gamma_x(\tilde{f})$$

et pour les auto-corrélations:  $\gamma_y(\tau) = \gamma_h(\tau) \star \gamma_x(\tau)$

## Bruit blanc

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va centrées, décorrélées,  $\mathbb{E}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma_\varepsilon^2$ .

- $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire à temps discret stationnaire

# Bruit blanc

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va centrées, décorrélées,  $\mathbb{E}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma_\varepsilon^2$ .

- $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire à temps discret stationnaire
- Autocorrélation:

$$\gamma_\varepsilon(k) = \mathbb{E}\{\varepsilon_n \varepsilon_{n-k}^*\} = \sigma_\varepsilon^2 \delta_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Densité spectrale:  $\Gamma_\varepsilon(\tilde{f}) = \sum_k \gamma_\varepsilon(k) e^{-i2\pi k \tilde{f}} = \sigma_\varepsilon^2$

# Bruit blanc

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suite de va centrées, décorrélées,  $\mathbb{E}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma_\varepsilon^2$ .

- $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un signal aléatoire à temps discret stationnaire
- Autocorrélation:

$$\gamma_\varepsilon(k) = \mathbb{E}\{\varepsilon_n \varepsilon_{n-k}^*\} = \sigma_\varepsilon^2 \delta_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Densité spectrale:  $\Gamma_\varepsilon(\tilde{f}) = \sum_k \gamma_\varepsilon(k) e^{-i2\pi k \tilde{f}} = \sigma_\varepsilon^2$

→  $\Gamma_\varepsilon(\tilde{f}) = \text{constante}$ :  $\varepsilon_n$  est un **bruit blanc** numérique de puissance  
 $\mathbb{E}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_\varepsilon(\tilde{f}) d\tilde{f}$

Rq: si  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  indépendantes identiquement distribuées (iid), centrées,  $\mathbb{E}\{|\varepsilon_n|^2\} = \sigma_\varepsilon^2$ , c'est un bruit blanc (strict).

## Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA**( $p, q$ ) lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

## Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA** $(p, q)$  lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

→ modèle ARMA = filtrée d'un bruit blanc par filtre ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (\text{avec } b_0 = 1)$$

## Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA** $(p, q)$  lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

→ modèle ARMA = filtrée d'un bruit blanc par filtre ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (\text{avec } b_0 = 1)$$

- Densité spectrale d'un modèle ARMA:

$$\Gamma_x(\tilde{f}) = |H[e^{i2\pi\tilde{f}}]|^2 \sigma_\varepsilon^2 = \left| \frac{\sum_{j=0}^q b_j e^{-i2\pi\tilde{f}j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-i2\pi\tilde{f}i}} \right|^2 \sigma_\varepsilon^2$$

# Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA**( $p, q$ ) lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

→ modèle ARMA = filtrée d'un bruit blanc par filtre ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (\text{avec } b_0 = 1)$$

- Densité spectrale d'un modèle ARMA:

$$\Gamma_x(\tilde{f}) = |H[e^{i2\pi\tilde{f}}]|^2 \sigma_\varepsilon^2 = \left| \frac{\sum_{j=0}^q b_j e^{-i2\pi\tilde{f}j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-i2\pi\tilde{f}i}} \right|^2 \sigma_\varepsilon^2$$

↝ utilisation:

# Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA** $(p, q)$  lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

→ modèle ARMA = filtrée d'un bruit blanc par filtre ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (\text{avec } b_0 = 1)$$

- Densité spectrale d'un modèle ARMA:

$$\Gamma_x(\tilde{f}) = |H[e^{i2\pi\tilde{f}}]|^2 \sigma_\varepsilon^2 = \left| \frac{\sum_{j=0}^q b_j e^{-i2\pi\tilde{f}j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-i2\pi\tilde{f}i}} \right|^2 \sigma_\varepsilon^2$$

↝ utilisation:

- ▶ estimation spectrale

# Modélisation ARMA

- $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  suit un modèle **ARMA**( $p, q$ ) lorsque:

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j}$$

pour un bruit blanc  $\varepsilon_n$  de variance  $\sigma_\varepsilon^2$  et des coefficients  $(a_i)_{i=1}^p, (b_j)_{j=0}^q$ .

→ modèle ARMA = filtrée d'un bruit blanc par filtre ARMA

$$H[z] = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (\text{avec } b_0 = 1)$$

- Densité spectrale d'un modèle ARMA:

$$\Gamma_x(\tilde{f}) = |H[e^{i2\pi\tilde{f}}]|^2 \sigma_\varepsilon^2 = \left| \frac{\sum_{j=0}^q b_j e^{-i2\pi\tilde{f}j}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-i2\pi\tilde{f}i}} \right|^2 \sigma_\varepsilon^2$$

↝ utilisation:

- ▶ estimation spectrale
- ▶ prédition (→ codage prédictif, ...)

## Modélisation ARMA: cas particuliers

Avec bruit blanc  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de puissance  $\sigma_\varepsilon^2$ :

- série autorégressive AR(p):

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \varepsilon_n \quad H[z] = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}$$

- série moyenne mobile MA(q):

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{n-j} \quad H[z] = 1 + \sum_{j=1}^q b_j z^{-j}$$

- série harmonique:  $\sigma_\varepsilon^2 = 0$

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = 0$$

## Représentation spectrale

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire et ergodique (sens large)

- $\lim_{\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x_n| = \mathbb{E}\{|x_0|\}$  est fini
- ⇒ pour (presque) toute trajectoire,  $x_n \notin L^1$  et idem  $x_n \notin L^2$
- pas de TF des trajectoires au sens  $L^1$  ou  $L^2$

# Représentation spectrale

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire et ergodique (sens large)

- $\lim_{\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x_n| = \mathbb{E}\{|x_0|\}$  est fini  
 $\Rightarrow$  pour (presque) toute trajectoire,  $x_n \notin L^1$  et idem  $x_n \notin L^2$
- pas de TF des trajectoires au sens  $L^1$  ou  $L^2$
- $\exists$  une décomposition spectrale (Cramer-Khintchine):

$$x_n = \int e^{i2\pi n \tilde{f}} dX(\tilde{f}) \quad \text{où:}$$

- ▶ intégrale de Wiener (petite intégrale stochastique)
- ▶  $(X(\tilde{f}))_{\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  : processus unique, accroissements non corrélés.

# Représentation spectrale

$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  stationnaire et ergodique (sens large)

- $\lim_{\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x_n| = \mathbb{E}\{|x_0|\}$  est fini
- ⇒ pour (presque) toute trajectoire,  $x_n \notin L^1$  et idem  $x_n \notin L^2$
- pas de TF des trajectoires au sens  $L^1$  ou  $L^2$
- $\exists$  une décomposition spectrale (Cramer-Khintchine):

$$x_n = \int e^{i2\pi n \tilde{f}} dX(\tilde{f}) \quad \text{où:}$$

- ▶ intégrale de Wiener (petite intégrale stochastique)
- ▶  $(X(\tilde{f}))_{\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  : processus unique, accroissements non corrélés.
- Eviter TF de signal aléatoire dans ce cours (mais TF fonction d'autocorrélation → densité spectrale).

# Signal aléatoire (temps continu)

Signal aléatoire (à temps continu):=  
famille indexée de variables aléatoires  $(x(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$   
(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

# Signal aléatoire (temps continu)

Signal aléatoire (à temps continu):=  
famille indexée de variables aléatoires  $(x(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$

(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

- $t$  fixé:  $\omega \mapsto x(t, \omega)$  est une variable aléatoire

# Signal aléatoire (temps continu)

Signal aléatoire (à temps continu):=  
famille indexée de variables aléatoires  $(x(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$   
(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

- $t$  fixé:  $\omega \mapsto x(t, \omega)$  est une variable aléatoire
- $\omega$  fixé:  $t \mapsto x(t, \omega)$  est une fonction: trajectoire

# Signal aléatoire (temps continu)

Signal aléatoire (à temps continu):=  
famille indexée de variables aléatoires  $(x(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$   
(sur un espace probabilisé donné  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ )

- $t$  fixé:  $\omega \mapsto x(t, \omega)$  est une variable aléatoire
- $\omega$  fixé:  $t \mapsto x(t, \omega)$  est une fonction: trajectoire

- Rq:
- ▶ on notera simplement  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le signal aléatoire
  - ▶ Autres noms: processus stochastique/aléatoire
  - ▶ difficultés théoriques par rapport au temps discret (continuité, dérivabilité, bruit blanc, ...)

## Signaux aléatoires temps continu: exemples



$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

avec:

$\omega_0$  constante

$\Phi$  variable aléatoire, uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$

## Signaux aléatoires temps continu: exemples



$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

avec:

$\omega_0$  constante

$\Phi$  variable aléatoire, uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$

- Avec un bruit additif:

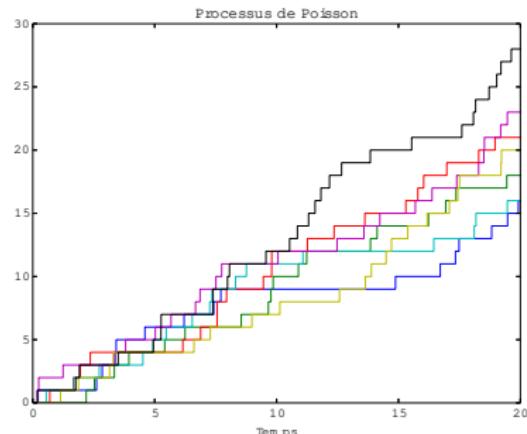
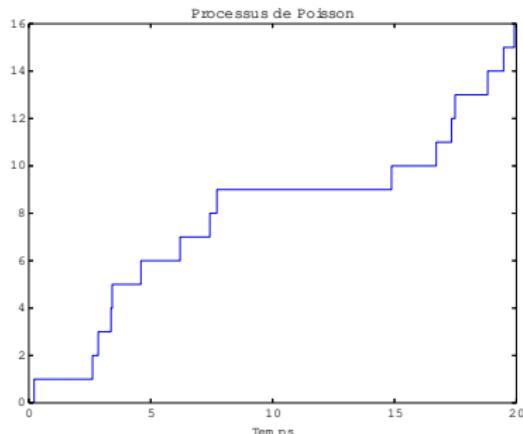
$$y(t) = x(t) + b(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi) + b(t)$$

$b(t)$  : terme aléatoire de bruit, de moyenne nulle

# Processus de Poisson

$(N(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un processus de Poisson homogène lorsque:

- (i)  $N(0) = 0$
- (ii) **accroissements indépendants:**  $N(t_2) - N(t_1)$ ,  $N(t_3) - N(t_2)$ , ...,  $N(t_n) - N(t_{n-1})$  sont va indépendantes pour  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .
- (iii)  $N(t) - N(s) \sim$  loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t-s)$  pour  $s \leq t$  càd:  
 $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(N(t) - N(s) = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$ .

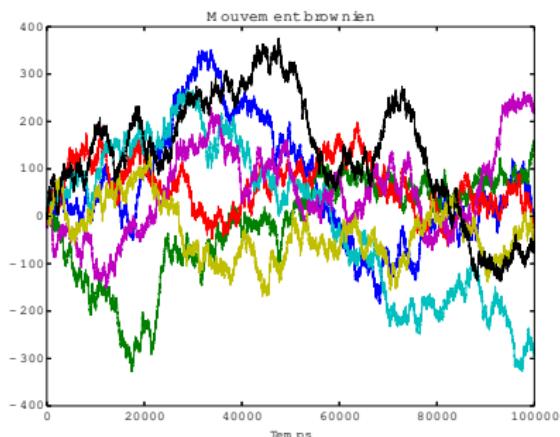
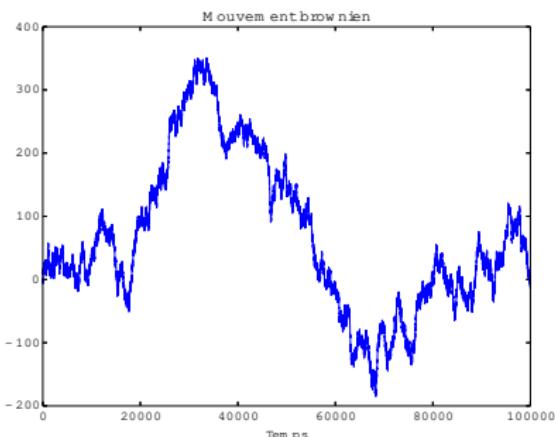


# Mouvement brownien / processus de Wiener

$(B(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un processus de Wiener lorsque:

- (i)  $B(0) = 0$
- (ii) accroissements indépendants:  $B(t_2) - B(t_1)$ ,  $B(t_3) - B(t_2)$ , ...,  $B(t_n) - B(t_{n-1})$  sont va indépendantes pour  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .
- (iii)  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  (gaussienne) pour  $s \leq t$  càd:

$$\mathbb{P}(B(t) - B(s) \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du$$



# Bruit blanc à temps continu

- **bruit blanc** à temps continu:

- ▶ densité spectrale de puissance constante  $\Gamma_\varepsilon(f) = \frac{N_0}{2}$
- ▶ autocorrélation:  $\gamma_\varepsilon(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

# Bruit blanc à temps continu

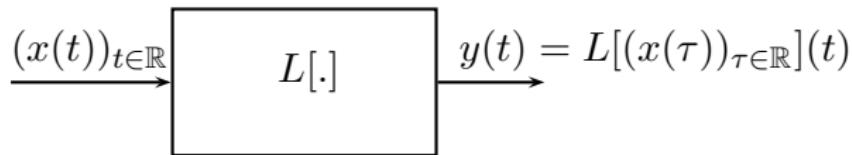
- **bruit blanc** à temps continu:

- ▶ densité spectrale de puissance constante  $\Gamma_\varepsilon(f) = \frac{N_0}{2}$
  - ▶ autocorrélation:  $\gamma_\varepsilon(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$
  - ▶ Problème:  $P_\varepsilon = \mathbb{E}\{| \varepsilon(0) |^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = +\infty$
- ~~> bruit blanc temps continu  $\leftrightarrow$  densité spectrale constante sur une «large bande fréquence»  $[-B, B]$ , où  $B \geq$  bande passante

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations**
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# Système

- Modéliser ce qui se passe lors:
  - ▶ transmission du signal (canal de propagation,...)
  - ▶ traitement du signal (restauration au récepteur,...)
  - ▶ toute autre modification
- **Système:** dispositif qui à un signal d'entrée associe un signal de sortie



# Propriétés possibles des système

- linéarité

$$\begin{array}{c} \lambda_1 x_1(t) \\ + \lambda_2 x_2(t) \end{array} \xrightarrow{\quad} \boxed{L[.]} \quad \begin{array}{l} y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \\ = \lambda_1 L[(x_1(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t) + \lambda_2 L[(x_2(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t) \end{array}$$

- instantanéité: la sortie ne dépend que du présent

$$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{L[.]} \quad y(t) = L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t) = L[x(t)](t)$$

- causalité: la sortie ne dépend que du passé

$$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{L[.]} \quad y(t) = L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t) = L[x(\tau), \tau \leq t](t)$$

- invariance:

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0) \xrightarrow{\quad} \boxed{L[.]} \quad \tilde{y}(t) = L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t - t_0) = y(t - t_0)$$

# Exemples de systèmes

|                                                                         | linéaire | instantané | causal | invariant |
|-------------------------------------------------------------------------|----------|------------|--------|-----------|
| $y(t) = x(t)^2$                                                         | non      | oui        | oui    | oui       |
| $y(t) = \sin(x(t))$                                                     | non      | oui        | oui    | oui       |
| $y(t) = m(t)x(t)$                                                       | oui      | oui        | oui    | non       |
| $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \theta)x(\theta) d\theta$         | oui      | non        | non    | non       |
| $y(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} x(\theta) d\theta$ | oui      | non        | non    | oui       |
| $y(t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{t-2\alpha}^t x(\theta) d\theta$         | oui      | non        | oui    | oui       |

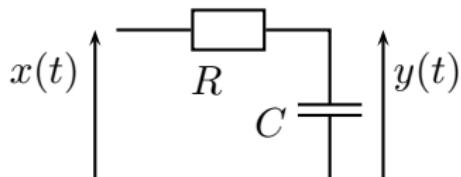
## Filtre

- Filtre = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)

# Filtre

- Filtre = système linéaire, invariant dans le temps (et continu)

- Exemple: **filtre RC**



$$\begin{cases} C \frac{dy(t)}{dt} = i(t) \\ x(t) = Ri(t) + y(t) \end{cases} \Rightarrow RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Solution (nulle en 0):  $y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t x(\theta) e^{-\frac{t-\theta}{RC}} d\theta$

- ▶ **Invariance:** composants ne vieillissent pas
- ▶ **Linéarité:** principe de superposition
- ▶ **Continuité:** admise (justification physique)
- Rq: éq. différentielle (temps continu)  $\leftrightarrow$  récurrence (temps discret)

# Filtrage d'un signal exponentiel

- Avec  $x(t) = z^t$  en entrée ( $z \in \mathbb{C}$ ):

$$\begin{aligned}y(t_0) &= L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = L[(z^\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\&= L[(z^{\tau-t_0+t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0)\end{aligned}$$

# Filtrage d'un signal exponentiel

- Avec  $x(t) = z^t$  en entrée ( $z \in \mathbb{C}$ ):

$$\begin{aligned}y(t_0) &= L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = L[(z^\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\&\stackrel{\text{linéarité} \downarrow}{=} L[(z^{\tau-t_0+t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\&= z^{t_0} L[(z^{\tau-t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = z^{t_0} L[(x(\tau - t_0))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0)\end{aligned}$$

# Filtrage d'un signal exponentiel

- Avec  $x(t) = z^t$  en entrée ( $z \in \mathbb{C}$ ):

$$y(t_0) = L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = L[(z^\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0)$$

$$\text{linéarité} \quad \downarrow \quad = L[(z^{\tau-t_0+t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0)$$

$$\text{invariance} \quad \downarrow \quad = z^{t_0} L[(z^{\tau-t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = z^{t_0} L[(x(\tau - t_0))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0)$$

$$= z^{t_0} L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0 - t_0) = y(0)z^{t_0}$$

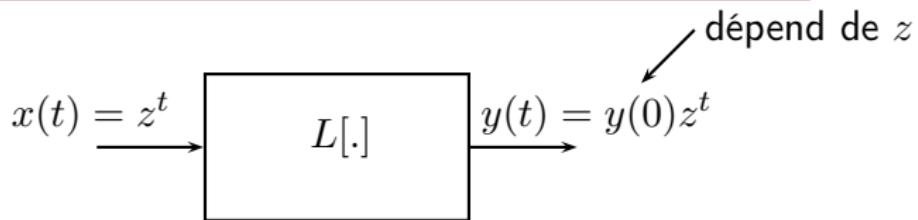
# Filtrage d'un signal exponentiel

- Avec  $x(t) = z^t$  en entrée ( $z \in \mathbb{C}$ ):

$$\begin{aligned}
 y(t_0) &= L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = L[(z^\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &\stackrel{\text{linéarité}}{=} L[(z^{\tau-t_0+t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &\stackrel{\text{invariance}}{=} z^{t_0} L[(z^{\tau-t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = z^{t_0} L[(x(\tau - t_0))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &= z^{t_0} L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0 - t_0) = y(0)z^{t_0}
 \end{aligned}$$

- Les signaux  $t \mapsto z^t$  sont des signaux propres des filtres

- 



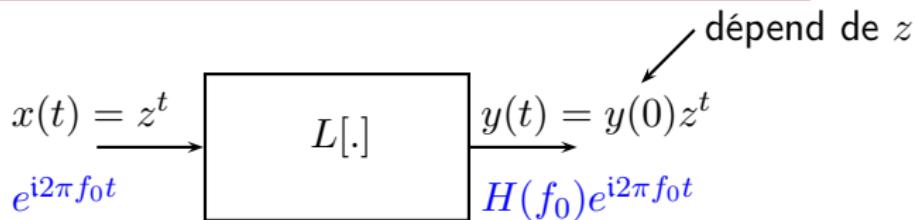
# Filtrage d'un signal exponentiel

- Avec  $x(t) = z^t$  en entrée ( $z \in \mathbb{C}$ ):

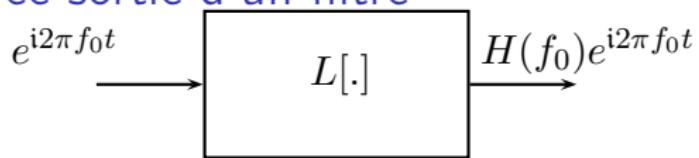
$$\begin{aligned}
 y(t_0) &= L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = L[(z^\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &\stackrel{\text{linéarité}}{=} L[(z^{\tau-t_0+t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &\stackrel{\text{invariance}}{=} z^{t_0} L[(z^{\tau-t_0})_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) = z^{t_0} L[(x(\tau - t_0))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0) \\
 &= z^{t_0} L[(x(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}](t_0 - t_0) = y(0)z^{t_0}
 \end{aligned}$$

- Les signaux  $t \mapsto z^t$  sont des signaux propres des filtres

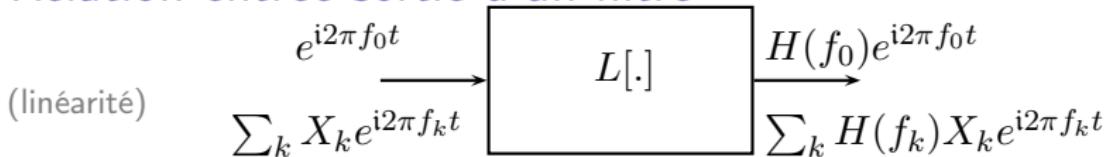
- 



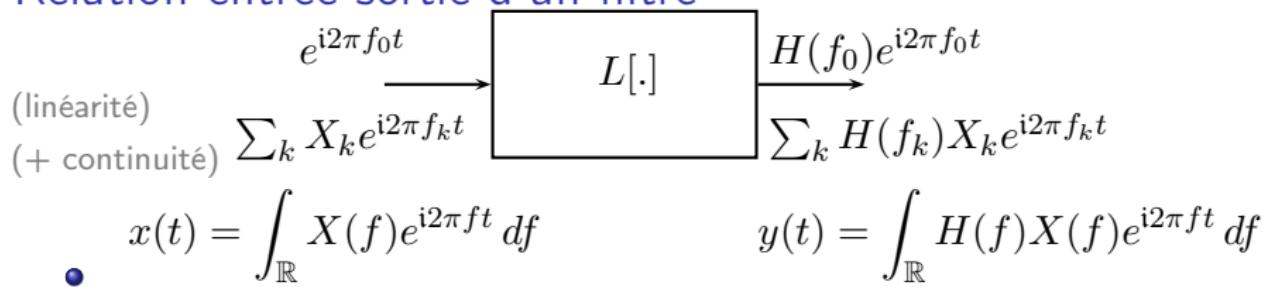
## Relation entrée-sortie d'un filtre



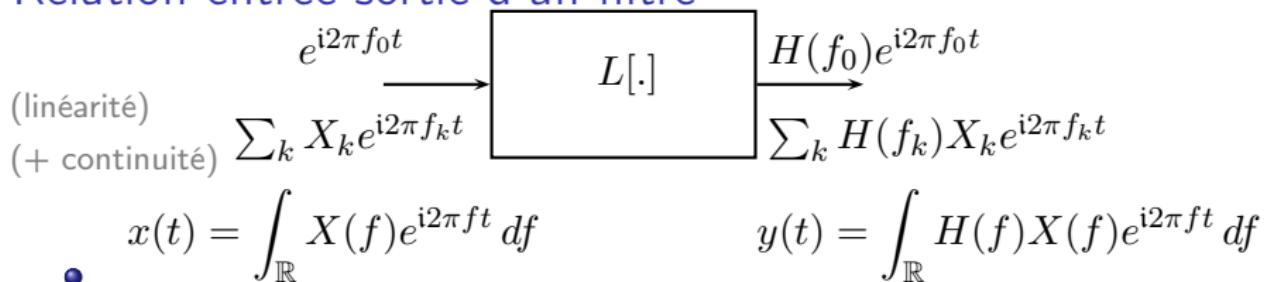
## Relation entrée-sortie d'un filtre



## Relation entrée-sortie d'un filtre



## Relation entrée-sortie d'un filtre

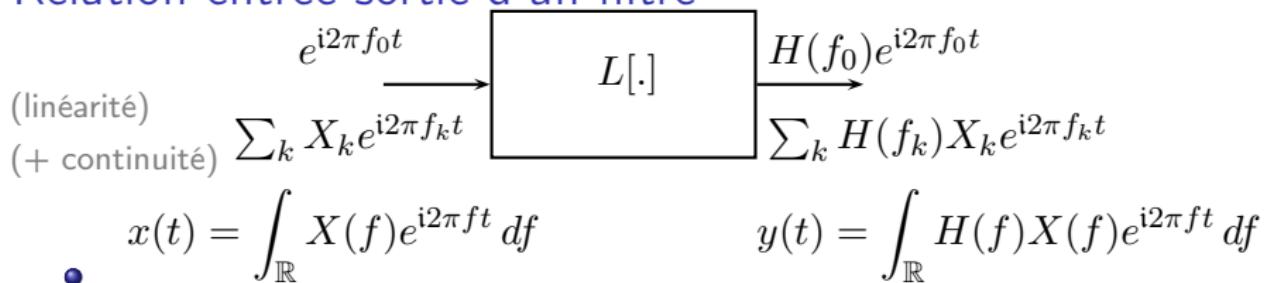


L'entrée et la sortie d'un filtre sont liées par:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- ⇒
- ▶  $H(f)$  = réponse fréquentielle
  - ▶  $|H(f)|$  = gain en fréquence
  - ▶  $\text{Arg}H(f)$  = phase du filtre

## Relation entrée-sortie d'un filtre



L'entrée et la sortie d'un filtre sont liées par:

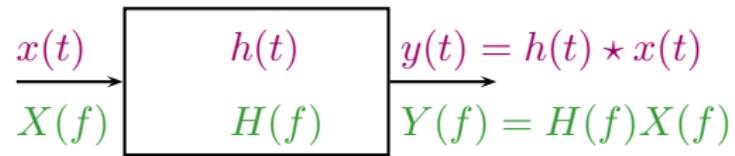
$$Y(f) = H(f)X(f) \iff y(t) = h(t) \star x(t)$$

- ⇒
- ▶  $H(f)$  = réponse fréquentielle  $\xrightarrow{\text{TF}^{-1}}$   $h(t)$
  - ▶  $|H(f)|$  = gain en fréquence
  - ▶  $\text{Arg}H(f)$  = phase du filtre
  - ▶  $h(t)$  = réponse impulsionale du filtre

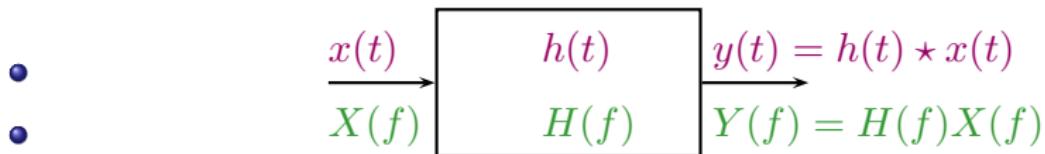
~~ convolution!

# Convolution et filtrage, exemples

- 



# Convolution et filtrage, exemples



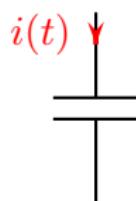
- Ex: 
$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \rightarrow y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\theta) d\theta$$
- Rappel: exemple sur des images (transparent III-6 et suivants)

## Insuffisance des fonctions

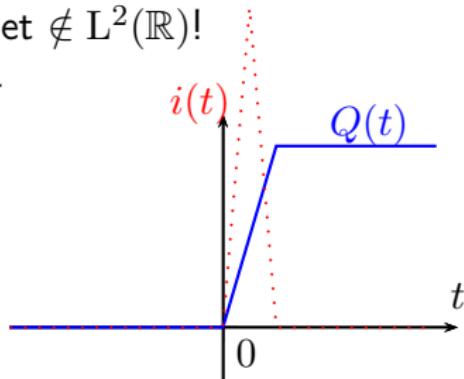
- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})$ !

# Insuffisance des fonctions

- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})$ !
- Ex1: charge d'un condensateur

  $i(t)$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t i(\theta) d\theta$$

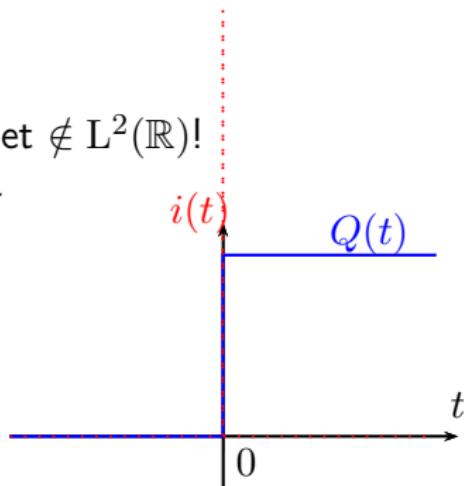


## Insuffisance des fonctions

- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})!$
- Ex1: charge d'un condensateur

$i(t)$

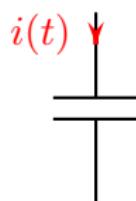
$$Q(t) = \int_{-\infty}^t i(\theta) d\theta$$



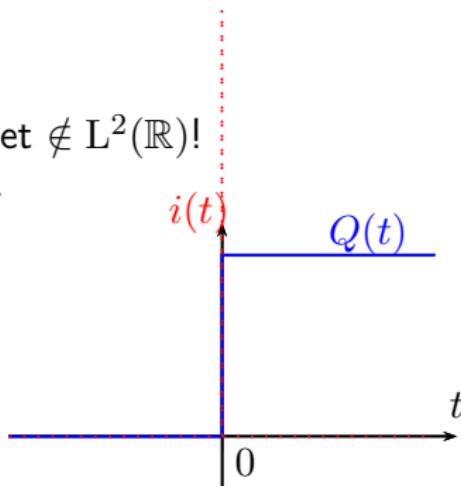
$\rightsquigarrow i(t) = 0$  pour  $t \neq 0$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = Q_0$  (charge finale)

## Insuffisance des fonctions

- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})!$
- Ex1: charge d'un condensateur



$$Q(t) = \int_{-\infty}^t i(\theta) d\theta$$



$\rightsquigarrow i(t) = 0$  pour  $t \neq 0$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt = Q_0$  (charge finale)

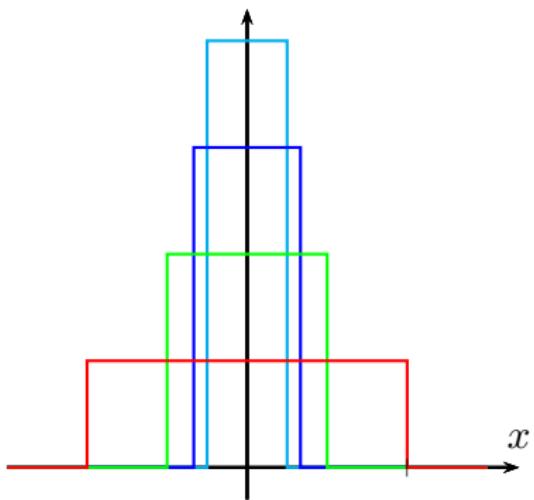
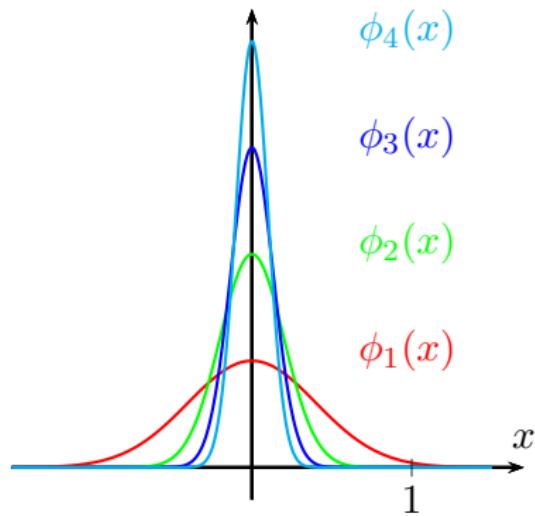
- Ex2: densité de charge/masse

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$\rightsquigarrow$  Charge en  $r_0$ :  $Q_0 = \iiint \delta_{r_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  avec  $\delta_{r_0}$  nulle sauf en  $r_0$ .

- Ex3: rebond d'une balle sur un mur,...

# Suite de fonctions qui converge vers un Dirac



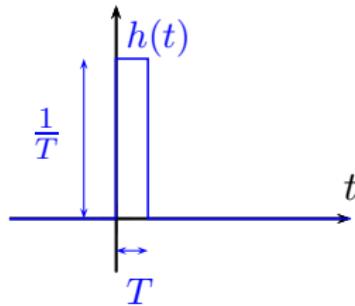
- $\phi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  pour  $x \neq 0$  et  $\phi_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) dx = 1$
- On dira que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t) = \delta(t)$ : impulsion de Dirac

# Impulsion de Dirac $\delta(t)$ et mesure

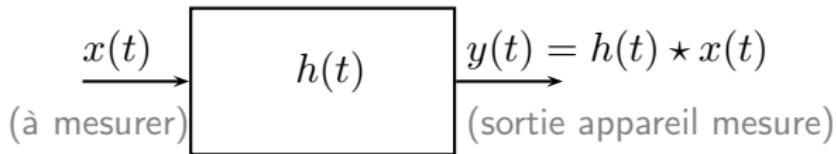
Tout appareil est non idéal (temps de réponse  $\neq 0$ , bande passante finie)

- Si impulsion en entrée, sortie déformée.  
Ex: moyenne sur le temps de réponse

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\theta) d\theta$$



→ Modèle filtre:

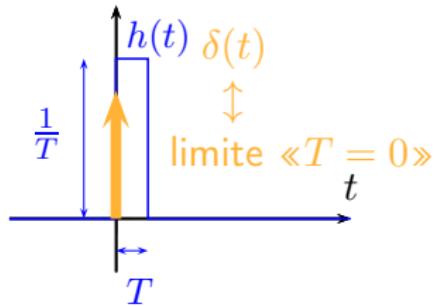


# Impulsion de Dirac $\delta(t)$ et mesure

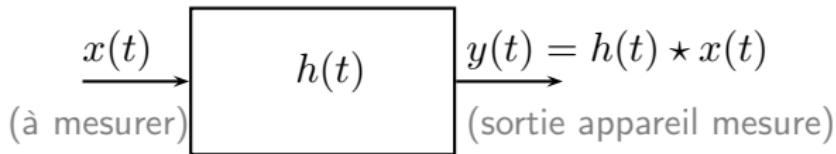
Tout appareil est non idéal (temps de réponse  $\neq 0$ , bande passante finie)

- Si impulsion en entrée, sortie déformée.  
Ex: moyenne sur le temps de réponse

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\theta) d\theta \quad = x(t) \longleftrightarrow$$



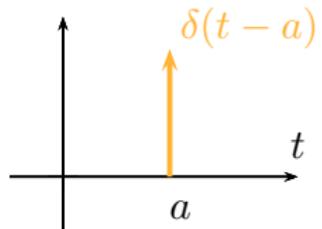
→ Modèle filtre:



# Impulsion de Dirac $\delta(t)$ et convolution

- Pour tout signal  $x(t)$ , par définition:  $\int_{\mathbb{R}} x(\theta)\delta(\theta) d\theta = x(0)$
- Plus généralement ( $a \in \mathbb{R}$  fixé quelconque):

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\theta)x(a - \theta) d\theta = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \delta(a - \theta)x(\theta) d\theta = x(a)}$$

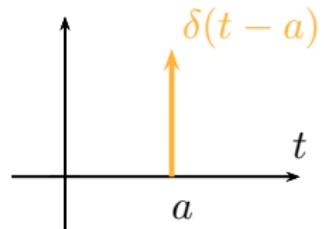


→  $x(t) \star \delta(t) = x(t)$       et       $x(t) \star \delta(t-a) = x(t-a)$

# Impulsion de Dirac $\delta(t)$ et convolution

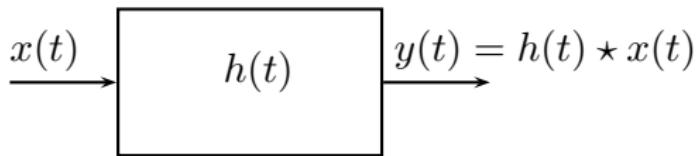
- Pour tout signal  $x(t)$ , par définition:  $\int_{\mathbb{R}} x(\theta)\delta(\theta) d\theta = x(0)$
- Plus généralement ( $a \in \mathbb{R}$  fixé quelconque):

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\theta)x(a - \theta) d\theta = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \delta(a - \theta)x(\theta) d\theta = x(a)}$$



→  $x(t) \star \delta(t) = x(t)$       et       $x(t) \star \delta(t - a) = x(t - a)$

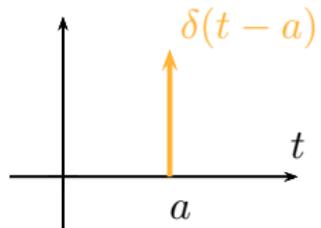
- Filtrage:



# Impulsion de Dirac $\delta(t)$ et convolution

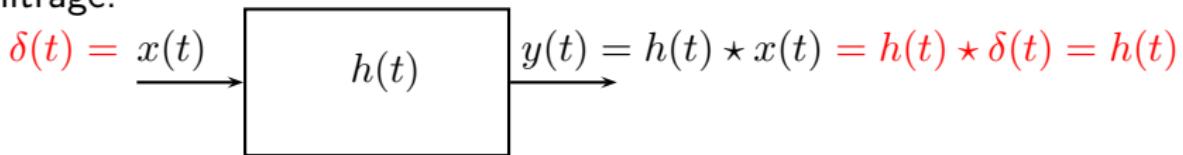
- Pour tout signal  $x(t)$ , par définition:  $\int_{\mathbb{R}} x(\theta)\delta(\theta) d\theta = x(0)$
- Plus généralement ( $a \in \mathbb{R}$  fixé quelconque):

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\theta)x(a - \theta) d\theta = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \delta(a - \theta)x(\theta) d\theta = x(a)}$$



→  $x(t) \star \delta(t) = x(t)$       et       $x(t) \star \delta(t - a) = x(t - a)$

- Filtrage:



→ réponse impulsionnelle = réponse à  $\delta(t)$  en entrée

## Spectre avec raies de Dirac

- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})$ !
- Dirac et transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} e^{i2\pi f_0 t} &\xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0) \\ \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} \quad \delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1 \end{aligned}$$

# Spectre avec raies de Dirac

- Signaux périodiques:  $\notin L^1(\mathbb{R})$  et  $\notin L^2(\mathbb{R})$ !

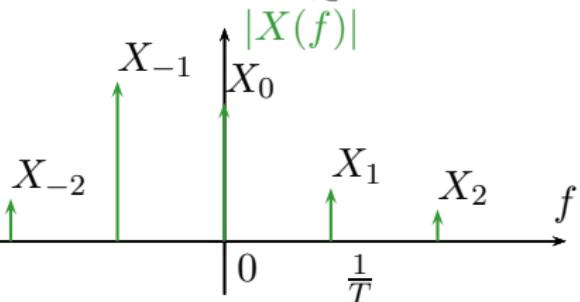
- Dirac et transformée de Fourier:

$$e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-i2\pi f t_0} \quad \delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1$$

- Spectre de **raies**:

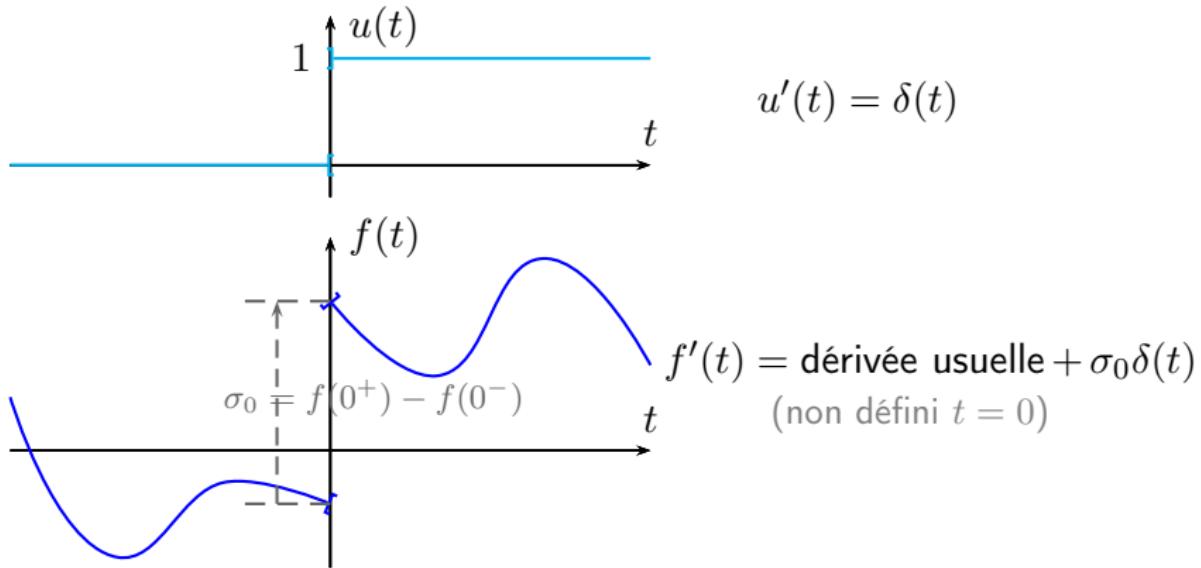
$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t} \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k \delta(f - \frac{k}{T})$$



## Autres propriétés du Dirac

Dérivée en cas de discontinuité:

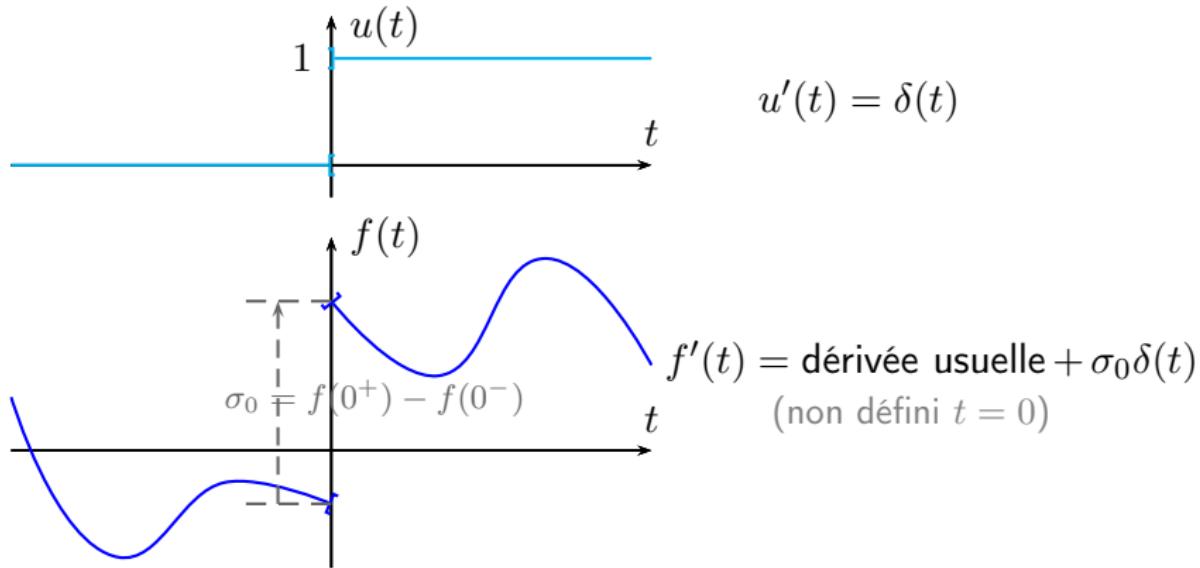
ajouter (Dirac centré en ce point)  $\times$  (amplitude algébrique du saut)



## Autres propriétés du Dirac

Dérivée en cas de discontinuité:

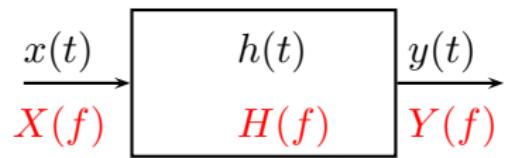
ajouter (Dirac centré en ce point)  $\times$  (amplitude algébrique du saut)



**Multiplication** par un signal continu en  $a \in \mathbb{R}$  donné:

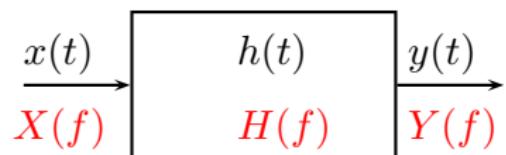
$$x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$$

# Filtrage et densité spectrale (rappels)



- Signaux d'énergie finie,  $Y(f) = H(f)X(f)$  et donc:  
 $|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2$

# Filtrage et densité spectrale (rappels)



- Signaux d'énergie finie,  $Y(f) = H(f)X(f)$  et donc:  
 $|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2$
- Pour la densité spectrale d'énergie ou puissance en général:

$$\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f)$$

et pour les auto-corrélations:  $\gamma_y(\tau) = \gamma_h(\tau) \star \gamma_x(\tau)$

# Causalité

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $(h(t))_{t \in \mathbb{R}}$ .

- Filtre causal  $\Leftrightarrow h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ .

$\Leftrightarrow$  sortie  $y(t) = \int_0^{\infty} h(\theta)x(t - \theta) d\theta$  ne dépend alors que des valeurs de  $x(\tau), \tau \leq t$ .

$\rightarrow$  Un filtre causal n'anticipe pas l'avenir.

$\rightsquigarrow$  Causalité vérifiée pour les systèmes physiques, mais pas toujours imposée ni nécessaire selon le contexte (ex: traitement d'une bande son pré-enregistrée)

# Stabilité

Soit un filtre de réponse impulsionnelle  $(h(t))_{t \in \mathbb{R}}$ .

- Filtre **stable**: lorsque à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.
  - Filtre **stable**  $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < +\infty$
- Il existe d'autres notions de stabilité (ex: entrée transitoire  $\Leftrightarrow$  sortie tend vers 0 à l' $\infty$ )

# Retard de phase / groupe

- Etude d'un milieu de propagation:  
équations de la physique à *une* fréquence → réponse à une excitation sinusoïdale permanente  
~~ milieus dispersifs ↔ réponse différente selon  $f$

$$H(f) = A(f)e^{i2\pi\phi(f)}$$

# Retard de phase / groupe

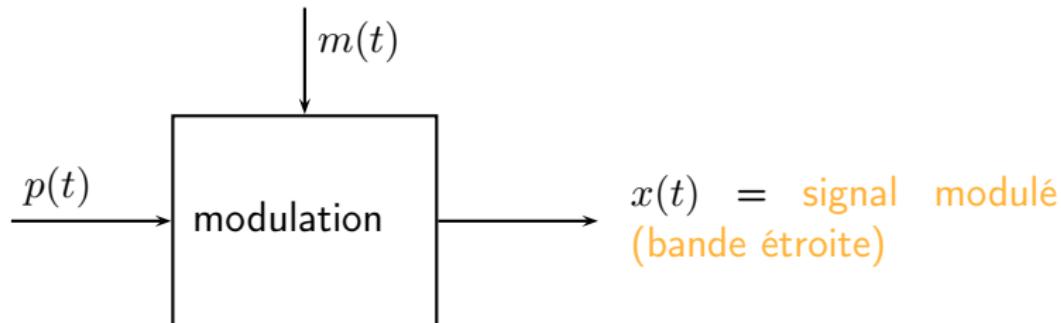
- Etude d'un milieu de propagation:  
équations de la physique à *une* fréquence → réponse à une excitation sinusoïdale permanente  
 ↵ milieu dispersif ↔ réponse différente selon  $f$

$$H(f) = A(f)e^{i2\pi\phi(f)}$$

- Filtre: autour de  $f_0$ ,  $\phi(f) \approx \phi_0 + \frac{d\phi}{df}|_{f_0}(f - f_0)$ 
    - ▶ temps de propagation de phase:  $\tau_P(f_0) \triangleq -\frac{\phi_0}{f_0}$
    - ▶ temps de propagation de groupe:  $\tau_g(f_0) \triangleq -\frac{d\phi}{df}|_{f_0}$
- importance des filtres à phase linéaire

# Modulation

- **Modulation** = adaptation d'un signal initial pour la transmission
  - ▶ **modulante**  $m(t)$  = signal **informatif, basse fréquence** et bande limitée  $[-B, B]$   
Ex: parole, télévision,...
  - ▶ **porteuse**  $p(t)$  = signal **haute fréquence** qui permet le transport de la modulante  
Ex:  $p(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  avec  $f_0 \gg B$ .



- démodulation = opération inverse (à la réception)

# Modulations analogiques

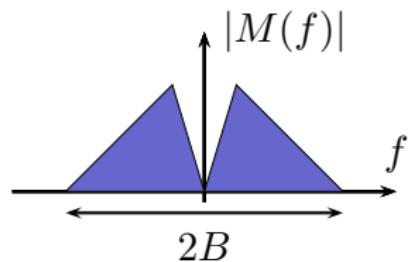
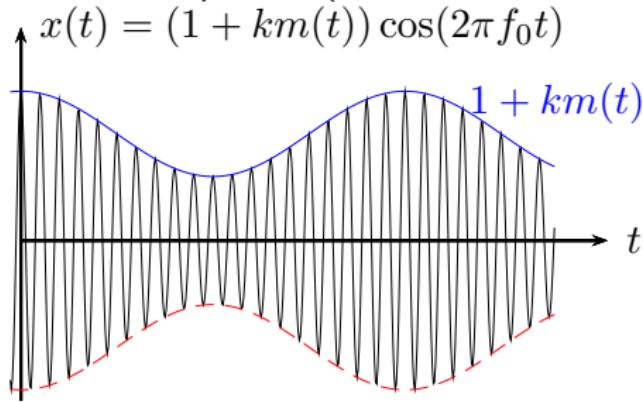
Porteuse:  $p(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos(\Phi(t))$

~ Inclure dans  $p(t)$  l'information de la modulante  $m(t)$ ?

- Modulations **linéaires**:  $m(t) \rightarrow A(t)$ 
    - ▶ modulation d'**amplitude avec porteuse**  $A(t) = 1 + km(t)$
    - ▶ modulation d'**amplitude sans porteuse**  $A(t) = km(t)$
  - Modulations **angulaires** (non linéaires)  $m(t) \rightarrow \Phi(t)$ 
    - ▶ Modulation de **fréquence (FM)**:  $m(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$
    - ▶ Modulation de **phase**:  $m(t) \rightarrow \varphi(t)$
- ~ En numérique, des modulations semblables permettent de transmettre des symboles!

# Modulation amplitude avec porteuse

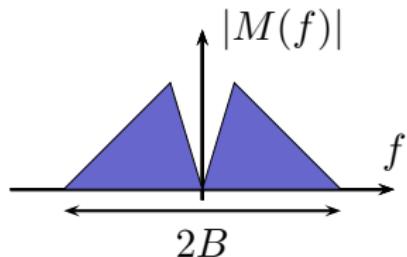
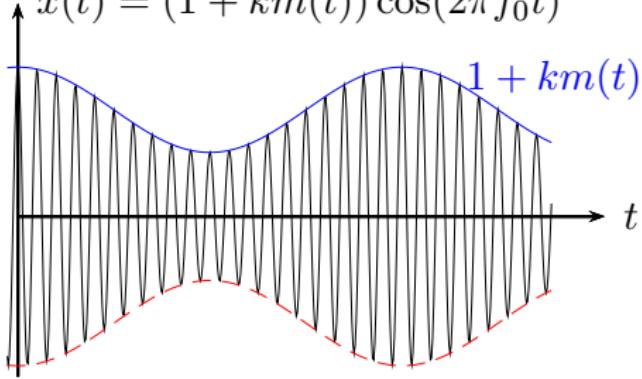
- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):



# Modulation amplitude avec porteuse

- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):

$$x(t) = (1 + km(t)) \cos(2\pi f_0 t)$$

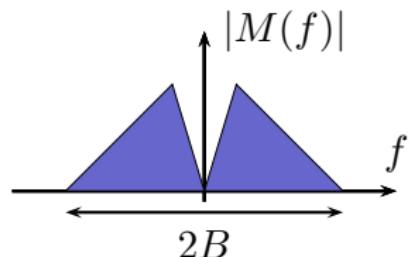
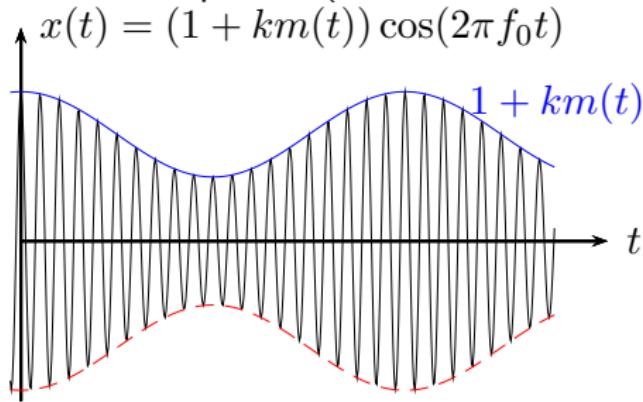


- Spectre:

$$X(f) = \left( \delta(f) + kM(f) \right) * \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

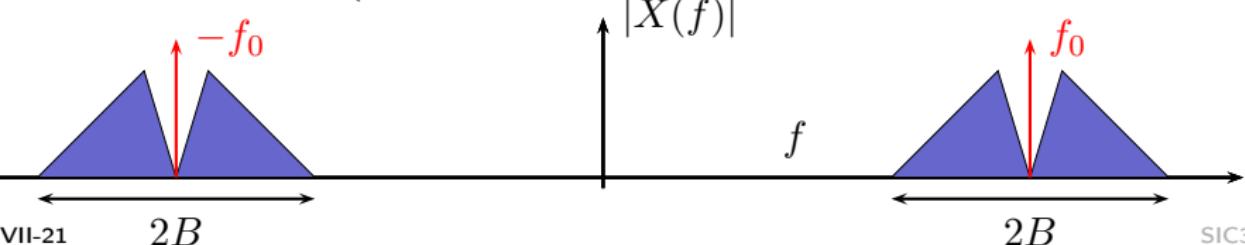
# Modulation amplitude avec porteuse

- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):



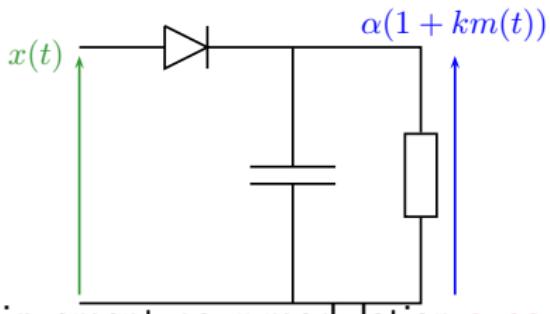
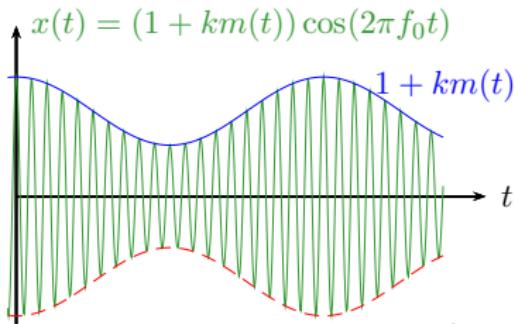
- Spectre:

$$X(f) = \frac{1}{2} \left( \delta(f - f_0) + kM(f - f_0) + \delta(f + f_0) + kM(f + f_0) \right)$$

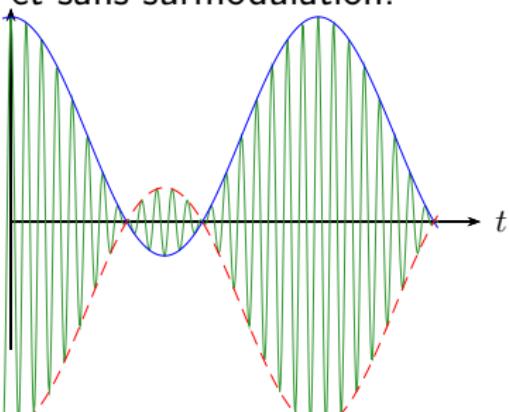


# Démodulation non cohérente

- Détecteur d'enveloppe:



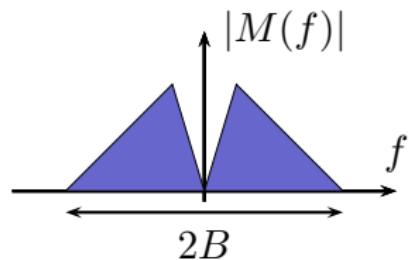
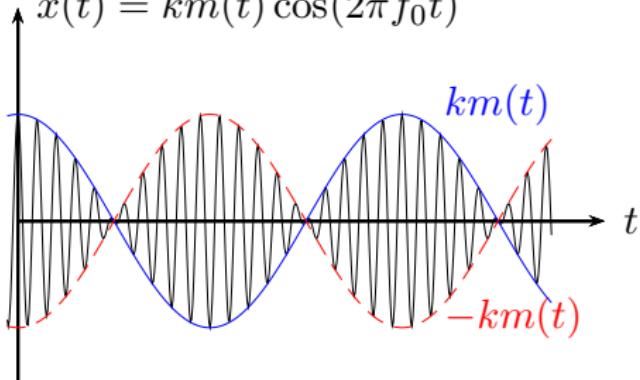
$\Rightarrow$  récepteur très simple mais uniquement pour modulation avec porteuse et sans surmodulation:



# Modulation amplitude sans porteuse

- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):

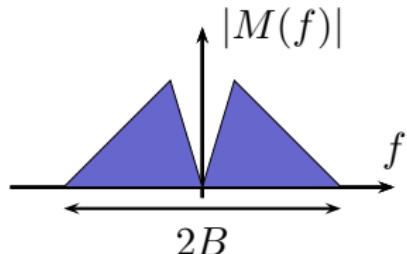
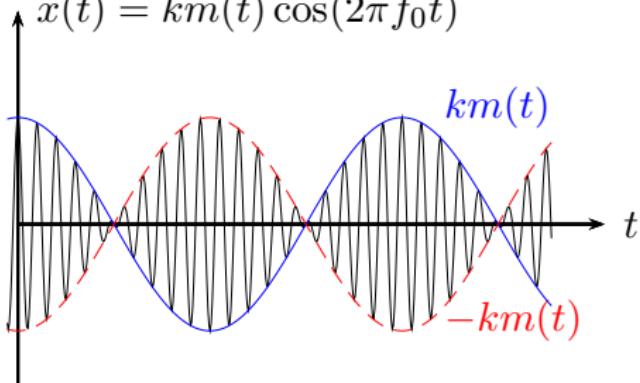
$$x(t) = km(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



# Modulation amplitude sans porteuse

- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):

$$x(t) = km(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

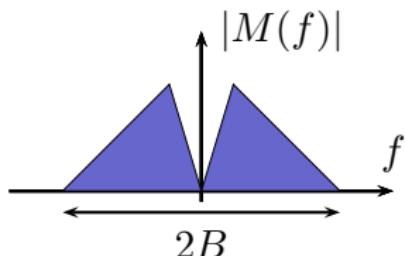
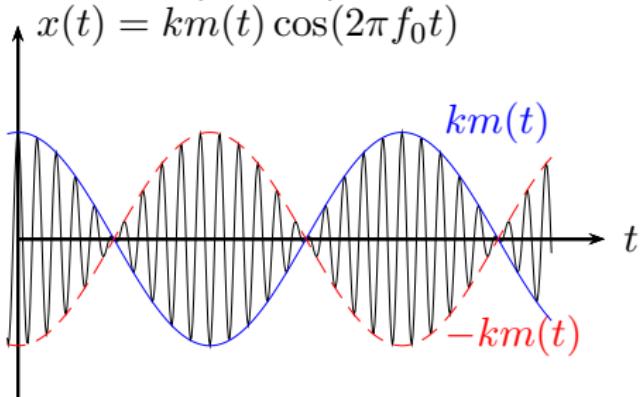


- Spectre:

$$X(f) = kM(f) \star \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

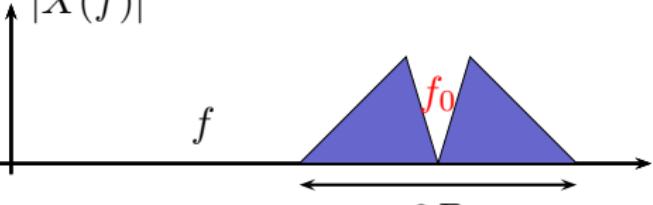
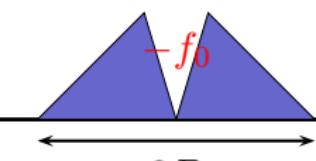
# Modulation amplitude sans porteuse

- Allure temporelle (modulante sinusoïdale):



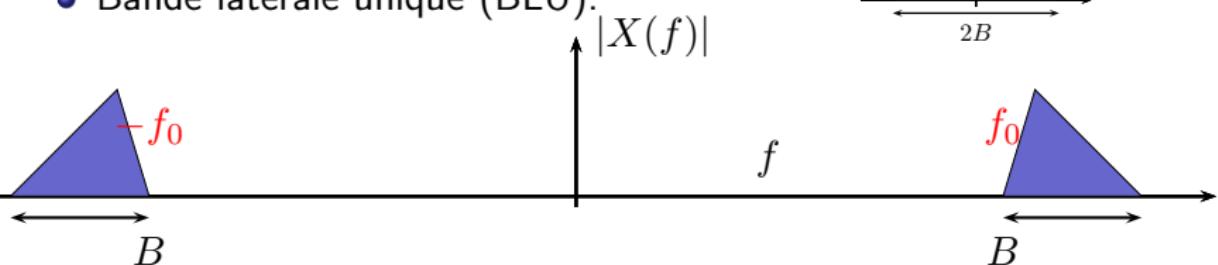
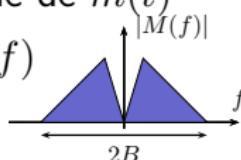
- Spectre:

$$X(f) = \frac{k}{2} \left( M(f - f_0) + M(f + f_0) \right)$$

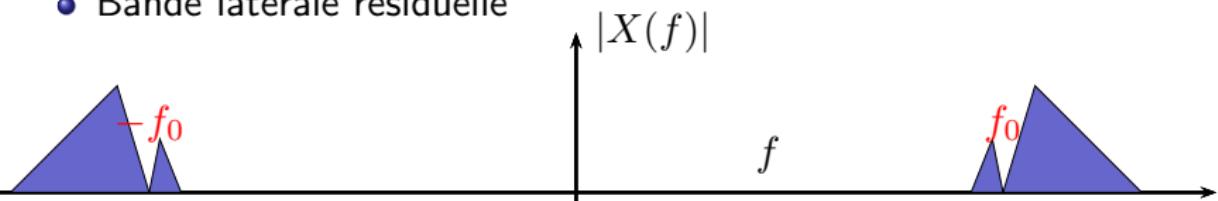


# Modulation BLU

- bande signal modulé en amplitude =  $2 \times$  celle de  $m(t)$
- inutile de garder la partie symétrique de  $M(f)$
- Bande latérale unique (BLU):



- Bande latérale résiduelle



Utilisation: télévision analogique

# Modulation en quadrature

- Transporter 2 signaux réels  $p(t)$  et  $q(t)$  sur une même fréquence porteuse:

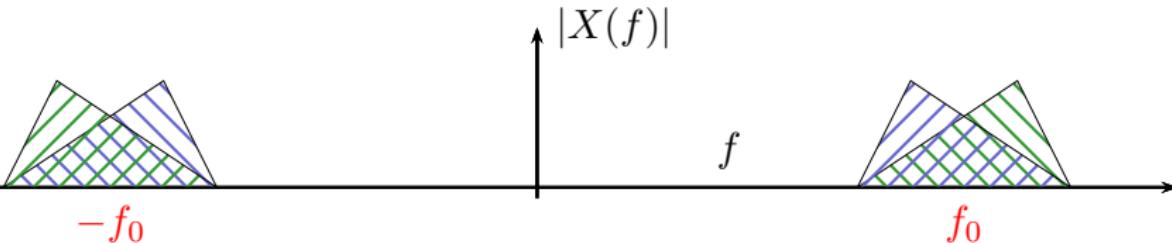
$\Leftrightarrow$  transporter le signal complexe  $z(t) = p(t) + iq(t)$

- ▶  $p(t)$  = composante en phase
- ▶  $q(t)$  = composante en quadrature

- Expression temporelle signal modulé:

$$x(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t) - q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

- Représentation schématique du spectre:



- Utilisation: signal NTSC, modulation numérique

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# De l'analogique au temps discret

$(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$ : signal à temps continu.

- échantillonner  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  = recueillir une suite discrète de valeurs et former le signal à temps discret  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  donné par:

$$x_n \triangleq x(nT_e) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

- ▶  $T_e$  = période d'échantillonnage
- ▶  $f_e = 1/T_e$  = fréquence d'échantillonnage

# De l'analogique au temps discret

$(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$ : signal à temps continu.

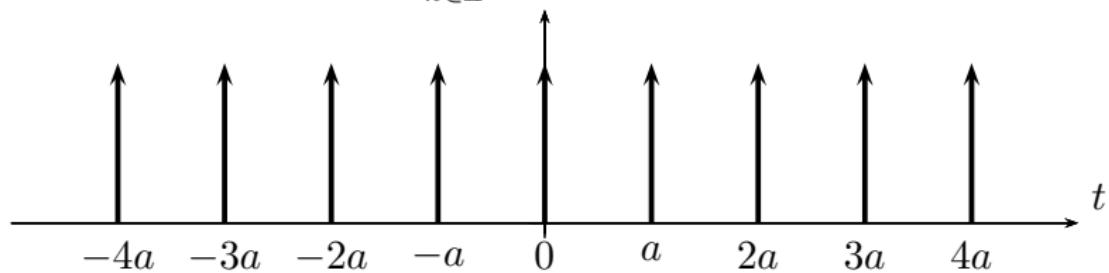
- échantillonner  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  = recueillir une suite discrète de valeurs et former le signal à temps discret  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  donné par:

$$x_n \triangleq x(nT_e) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

- ▶  $T_e$  = période d'échantillonnage
  - ▶  $f_e = 1/T_e$  = fréquence d'échantillonnage
- Se contenter des échantillons  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  au lieu de  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ?  
Est-ce possible sans perdre d'information?

# Le peigne de Dirac

- Peigne de Dirac:  $\text{III}_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - ka)$



$\text{III}_a$  est une distribution tempérée, périodique

développement en série de Fourier:  $\text{III}_a(t) = \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i 2\pi \frac{kt}{a}}$

- Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac: c'est un peigne de Dirac!

$$\text{III}_a(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{a} \text{III}_{\frac{1}{a}}(f)$$

# Signal échantillonné temps continu

- signal échantillonné à temps continu:

$$x_e(t) \triangleq x(t)\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

- $x_e(t)$ : permet d'étudier l'effet de l'échantillonnage par un formalisme à temps continu.
- ~~> Lien entre  $x(t)$  et  $x_e(t)$ , notamment dans le domaine fréquentiel?

# TF du signal échantillonné (calcul)

$$x_e(t) = x(t)\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_e(f) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right)$$

## TF du signal échantillonné (calcul)

$$x_e(t) = x(t)\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_e(f) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right)$$

et donc

$$X_e(f) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T_e}) \right)$$

## TF du signal échantillonné (calcul)

$$x_e(t) = x(t)\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_e(f) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T_e}) \right) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f) \star \delta(f - \frac{k}{T_e}) \end{aligned}$$

## TF du signal échantillonné (calcul)

$$x_e(t) = x(t)\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_e(f) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right) = X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T_e}) \right) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f) \star \delta(f - \frac{k}{T_e}) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e}) \end{aligned}$$

# TF du signal échantillonné



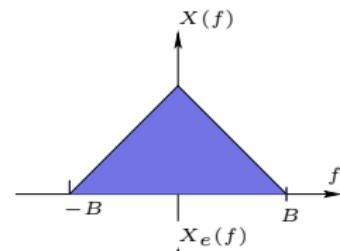
$$x_e(t) = x(t)\text{III}_{T_e}(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \star \left( \frac{1}{T_e} \text{III}_{\frac{1}{T_e}}(f) \right)$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

→  $X_e(f)$  est une version périodisée de  $X(f)$ : «repliement» du spectre

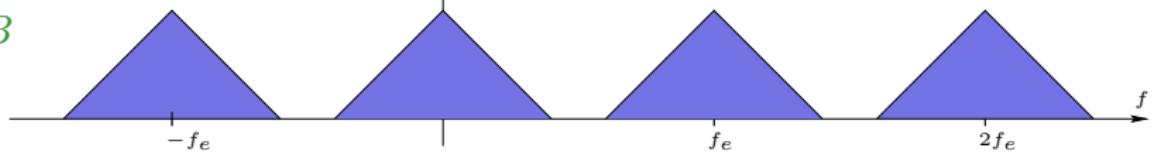
| signal        |   | spectre    |
|---------------|---|------------|
| échantillonné | ↔ | périodique |
| périodique    | ↔ | discret    |

## Echantillonnage: interprétation graphique du spectre

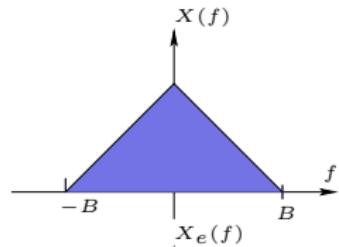


$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

$f_e > 2B$

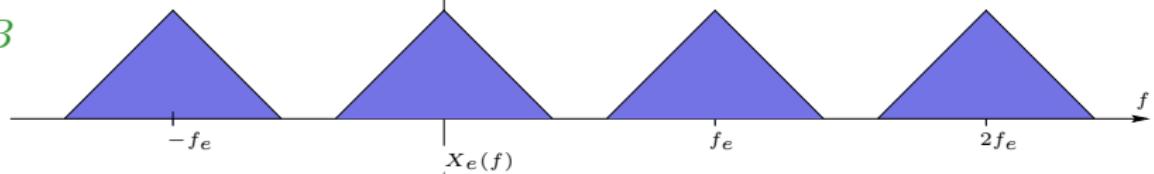


# Echantillonnage: interprétation graphique du spectre

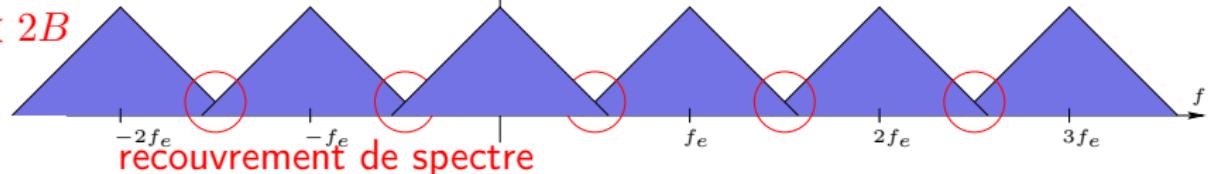


$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$$

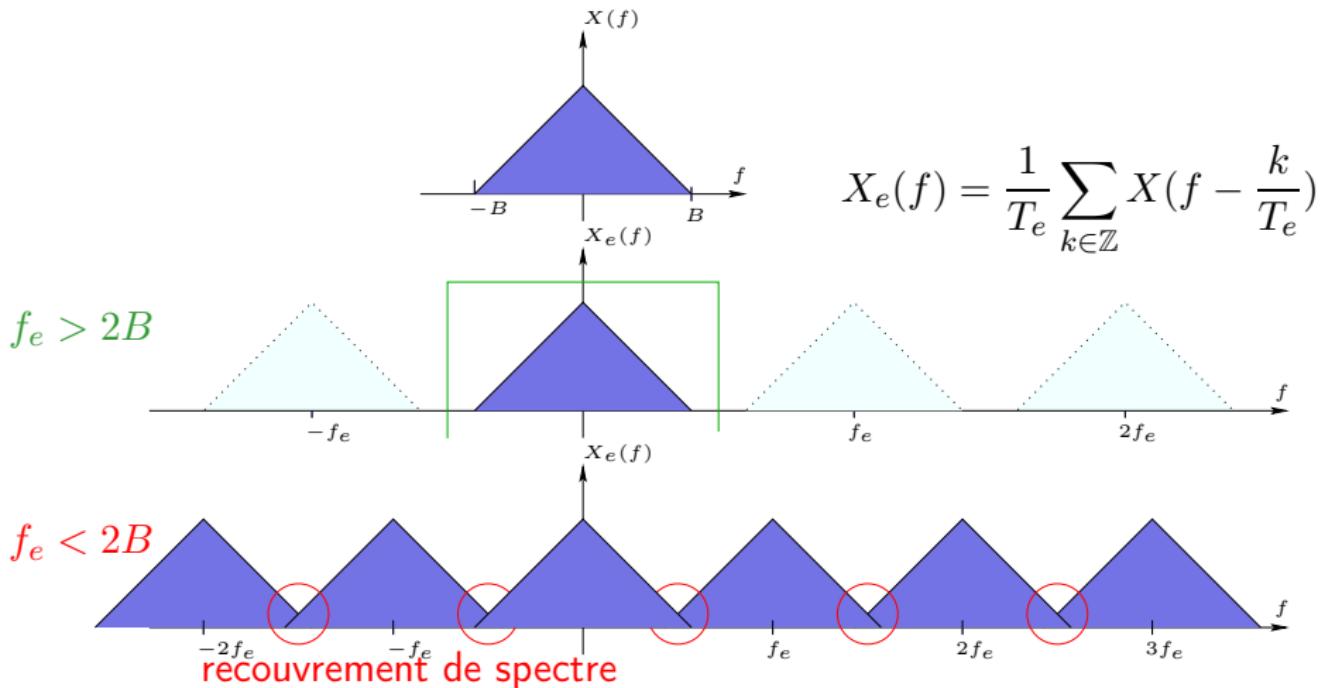
$f_e > 2B$



$f_e < 2B$



# Echantillonnage: interprétation graphique du spectre



- $f_e \geq 2B \Rightarrow$  reconstruction possible par filtrage passe-bas

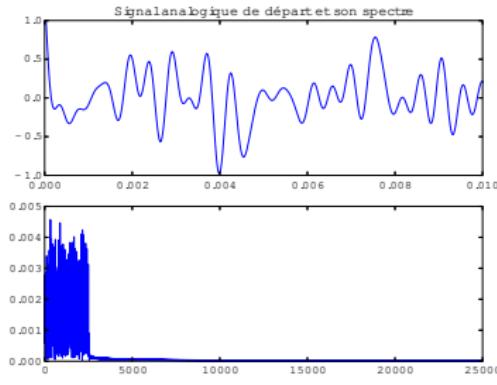
# Théorème de Shannon-Nyquist

- $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  de bande limitée  $[-B, B]$  est *entièrement défini* par les échantillons  $(x(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  prélevés à une fréquence  $f_e = 1/T_e \geq 2B$ .  
→ **formule exacte d'interpolation:**

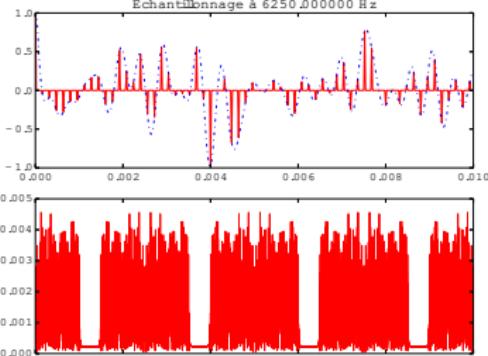
$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc}(\pi f_e(t - kT_e))$$

↔ bande limitée ↔ variations pas trop rapides du signal entre deux échantillons

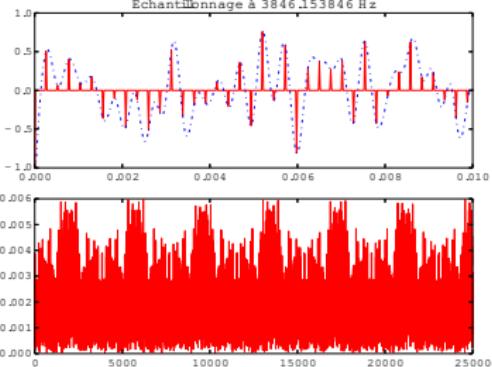
# Echantillonnage d'un signal analogique bande limitée



conditions Shannon-Nyquist

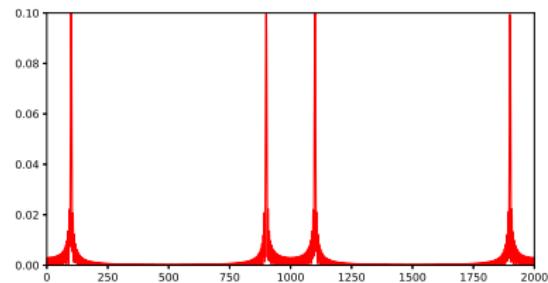
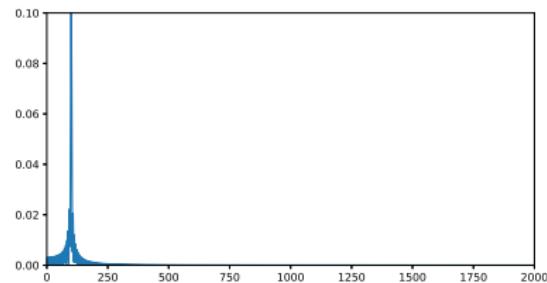
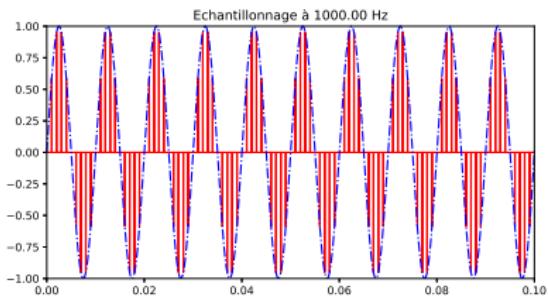
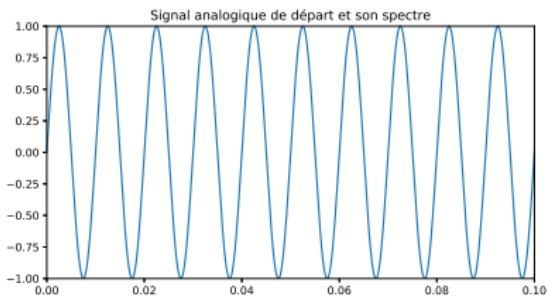


sous-échantillonnage



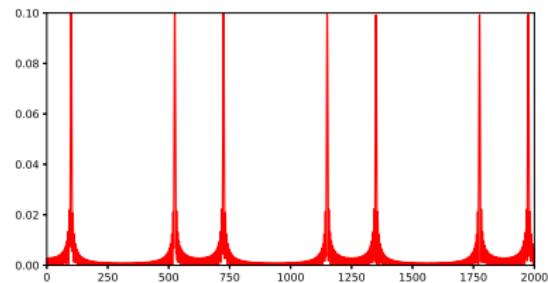
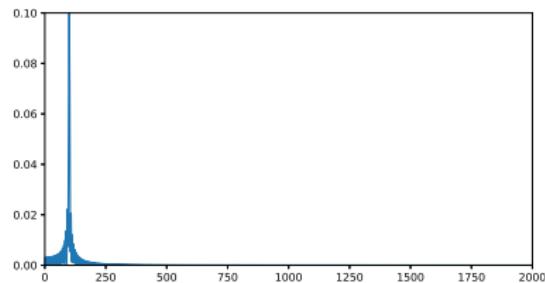
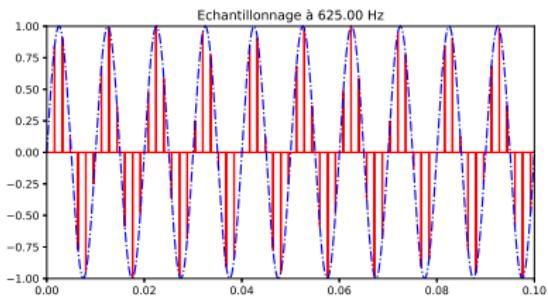
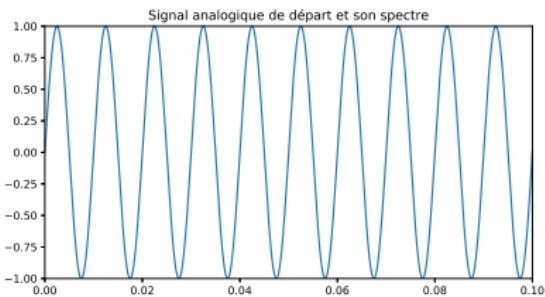
# Echantillonnage d'un sinus (1/3)

Signal analogique et échantillonnage dans les conditions de Shannon:



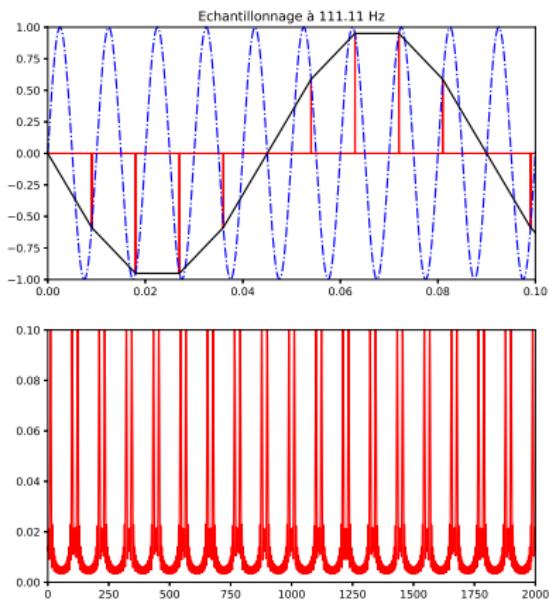
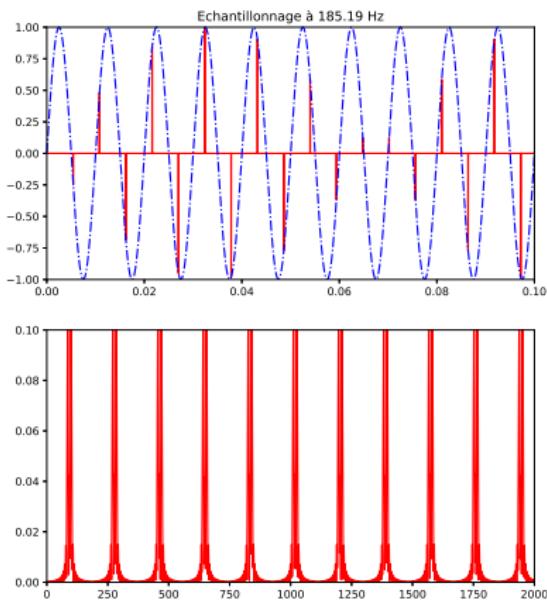
# Echantillonnage d'un sinus (2/3)

Signal analogique et échantillonnage dans les conditions de Shannon:



# Echantillonnage d'un sinus (3/3)

Effet d'un sous-échantillonnage:

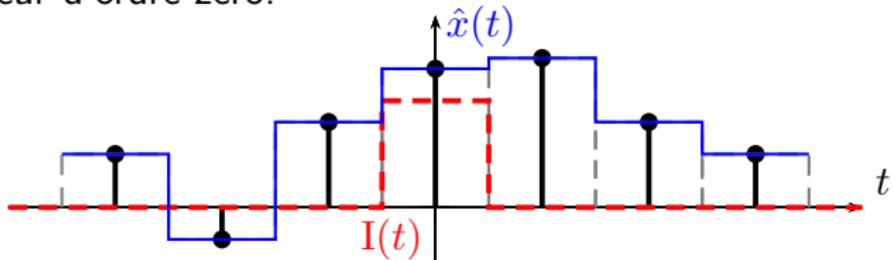


# Interpolation

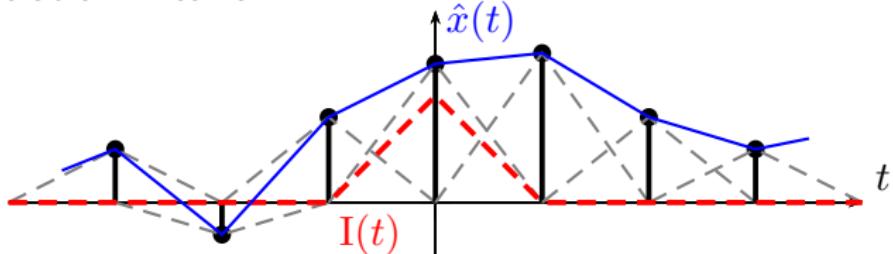
Signal interpolé à partir d'échantillons  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n I(t - nT_e) = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e) \right) * I(t)$$

- bloqueur d'ordre zéro:



- interpolation linéaire:

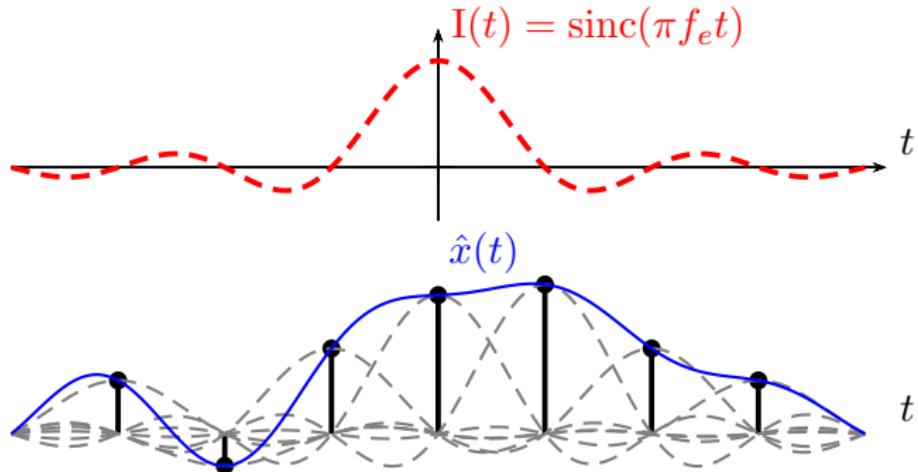


- interpolation de Lagrange, ...

# La base des sinus cardinaux

Signal interpolé à partir d'échantillons  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n I(t - nT_e) = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e) \right) * I(t)$$



## Une autre vue de la formule d'interpolation

- $\{\text{sinc}(2\pi B(t - \frac{k}{2B}))\}_{k \in \mathbb{Z}}$ : base orthonormée des signaux à bande limitée  $[-B, B]$ .
- Projection de  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  sur les signaux bande limitée  $[-B, B]$ :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \text{sinc}\left(2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right) \quad \text{avec:}$$

$$\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} x(t) \text{sinc}\left(2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right) dt$$

- Si  $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  à bande limitée, alors (cf. TD):

$$\alpha_k = x\left(\frac{k}{2B}\right) : \text{échantillon!}$$

- Problématique (récente): projeter sur une base mieux adaptée (faible nombre de  $\alpha_k \neq 0, \dots$ ) ?

## Echantillonnage/interpolation pratique

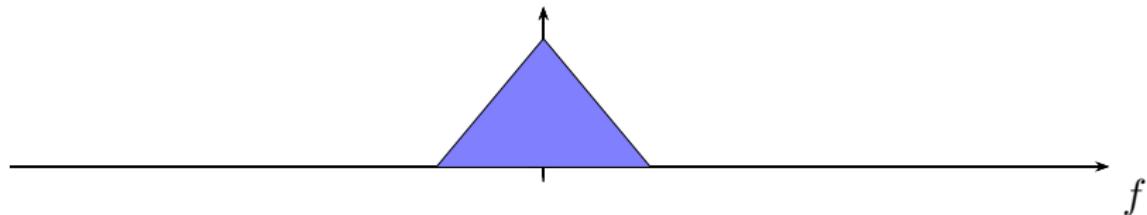
- En pratique, erreur dans échantillonnage des valeurs  $x(nT_e)$ : échantilleur bloqueur ou suiveur est plus réaliste.

## Echantillonnage/interpolation pratique

- En pratique, erreur dans échantillonnage des valeurs  $x(nT_e)$ : échantilleur bloqueur ou suiveur est plus réaliste.
- Interpolation par insertion de zéros et filtrage passe-bas numérique (ex. TD9)

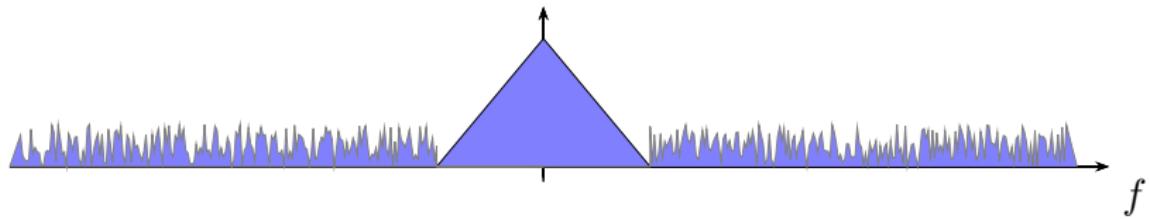
## Echantillonnage/interpolation pratique

- En pratique, erreur dans échantillonnage des valeurs  $x(nT_e)$ : échantilleur bloqueur ou suiveur est plus réaliste.
- Interpolation par insertion de zéros et filtrage passe-bas numérique (ex. TD9)
- Echantillonnage en présence de bruit:



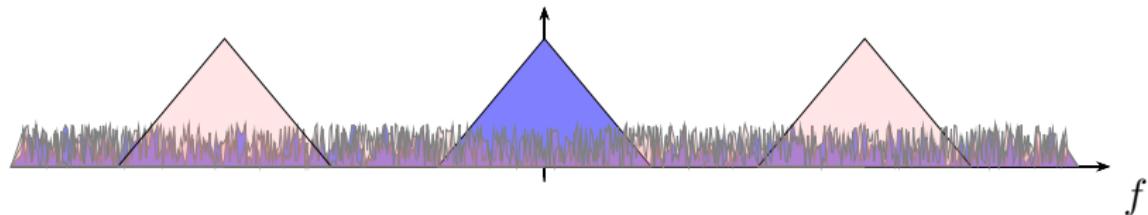
## Echantillonnage/interpolation pratique

- En pratique, erreur dans échantillonnage des valeurs  $x(nT_e)$ : échantilleur bloqueur ou suiveur est plus réaliste.
- Interpolation par insertion de zéros et filtrage passe-bas numérique (ex. TD9)
- Echantillonnage en présence de bruit:



# Echantillonnage/interpolation pratique

- En pratique, erreur dans échantillonnage des valeurs  $x(nT_e)$ : échantilleur bloqueur ou suiveur est plus réaliste.
- Interpolation par insertion de zéros et filtrage passe-bas numérique (ex. TD9)
- Echantillonnage en présence de bruit:

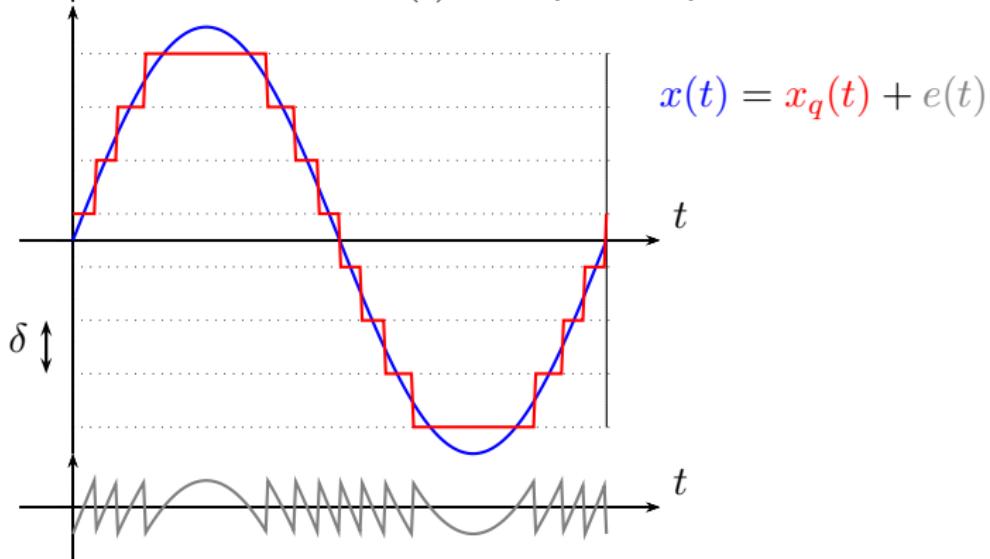


⇒ **filtre anti-repliement** (anti-aliasing):

- ▶ passe-bas, élimine le bruit en dehors de la bande de base
- ▶ indispensable avant échantillonnage

# Quantification

- Quantification de  $x(t)$  avec pas de quantification  $\delta$ :



- $e(t) = \text{erreur/bruit de quantification.}$

# Erreur de quantification

- Dynamique de  $x(t)$  grande par rapport à  $\delta$ :  
 $e(t)$  aléatoire uniforme sur  $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$

valeur moyenne: 0      variance:  $\sigma_q^2 = \frac{\delta^2}{12}$

- Quantification sur  $N$  bits  $2A = 2^N\delta$   
 $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ , valeur efficace  $A/\sqrt{2}$ .
- Rapport signal sur bruit de quantification:

$$\text{SNR} = \frac{A/\sqrt{2}}{\delta/\sqrt{12}} = 2^N \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{càd} \quad \text{SNR}_{\text{dB}} \approx 1.76 + 6N$$

- Possibilité de compression de dynamique, quantification non uniforme

# Spectre d'un signal échantillonné et série de Fourier

- $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$  échantillonné à la période  $T_e$

$$\begin{array}{lll} x_e(t) & \triangleq x(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \\ \downarrow \text{TF} & \downarrow \text{TF} & \downarrow \text{TF} \\ X_e(f) & = \frac{1}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - \frac{n}{T_e}) & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-\imath 2\pi n f T_e} \end{array}$$

- Fréquence normalisée:  $\tilde{f} \triangleq f T_e$

→  $X_e(f)$  obtenu par la série de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-\imath 2\pi n \tilde{f}}$

↝ Pour  $x(t)$  à bande dans  $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ , on obtient aussi le spectre  $X(f)$ .

# Transformée de Fourier à temps discret

- Transformée de Fourier à temps discret (TFTD):

$$X(\tilde{f}) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i 2\pi n \tilde{f}}$$

- $X(\tilde{f})$  de période 1  $\rightsquigarrow \tilde{f} \in [0, 1]$  ou  $\tilde{f} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ : fréquence normalisée
- si  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  échantillonné à  $f_e$ , fréquence réelle  $f = \tilde{f} f_e = \frac{\tilde{f}}{T_e}$

- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# Evaluation de la TF

- Transformée de Fourier

temps continu (TFTC): 
$$X^{(\text{TC})}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-\text{i}2\pi ft} dt$$

temps discret (TFTD): 
$$X^{(\text{TD})}(\tilde{f}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-\text{i}2\pi \tilde{f}n}$$

- ↵ Calcul **numérique** de  $X^{(\text{TC})}(f)$  ou  $X^{(\text{TD})}(\tilde{f})$ ? Difficultés:

- ▶ échantillonnage: si  $x_n = x(nT_e)$ , et conditions de Shannon:

$$X^{(\text{TC})}(f) = T_e X^{(\text{TD})}(\tilde{f} = fT_e)$$

- ▶ enregistrement: durée finie
- ▶ calcul numérique de la TFTD à l'aide d'une transformée de Fourier discrète (TFD); algorithme rapide

# Fenêtrage

- Tout enregistrement/mesure est de durée finie:

$$x_{\text{enreg.}}(t) = x(t)\mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t).$$

→ Après transf. Fourier:  $X_{\text{enreg.}}(f) = X(f) \star \left(T \text{sinc} \pi f T\right)$

- Signal observé au travers d'une **fenêtre d'observation**  $w(t)$ :

$$x_{\text{fen.}}(t) = x(t)w(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_{\text{fen.}}(f) = X(f) \star W(f)$$

- Différentes fenêtres de pondération possibles:

- ▶ rectangulaire:  $w(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t)$
- ▶ triangulaire (ou Bartlett):
- ▶ Hamming, Hann (ou Hanning?), Kaiser, ...

## Troncature: cas sinusoidal (temps continu)

- Cas d'un signal sinusoïdal constitué de deux raies à  $\pm f_0$ :

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2} \left( \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right)$$

- Après troncature:

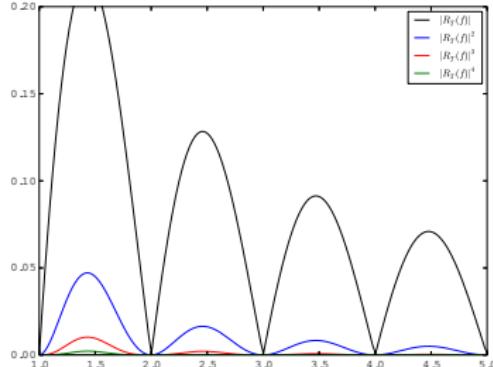
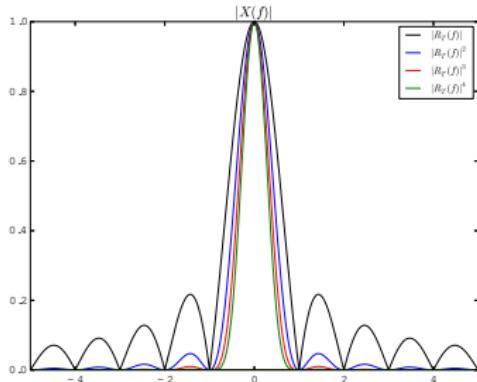
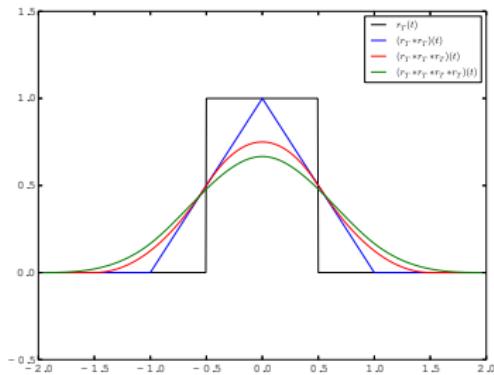
$$x_{\text{enreg.}}(t) = \cos(2\pi f_0 t) \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t)$$

$$X_{\text{enreg.}}(f) = \frac{1}{2} \left( T \text{sinc}(\pi(f - f_0)T) + T \text{sinc}(\pi(f + f_0)T) \right)$$

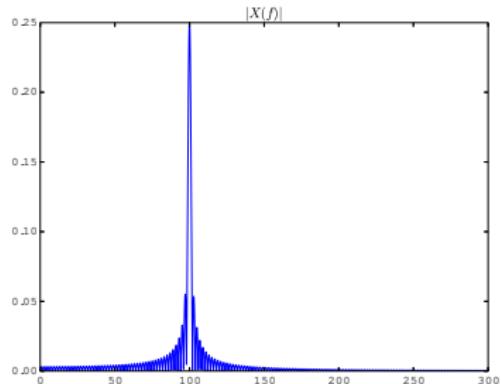
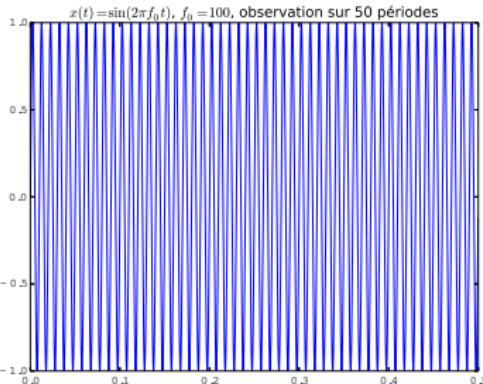
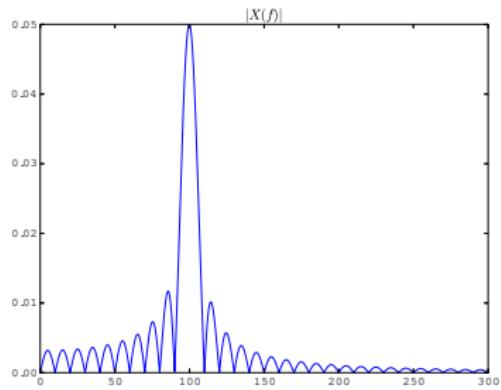
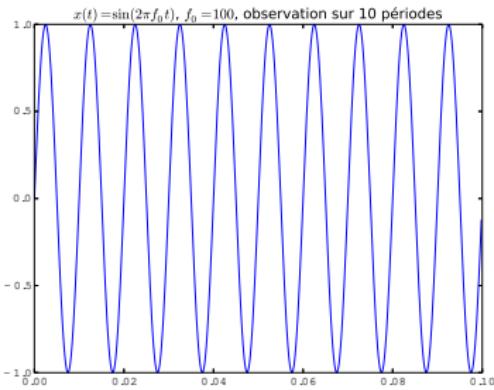
- Simulation et illustration:

- ▶ compromis durée d'observation/résolution spectrale
- ▶ possibilité d'apodiser les lobes secondaires par le choix de la fenêtre (au détriment de la résolution spectrale)

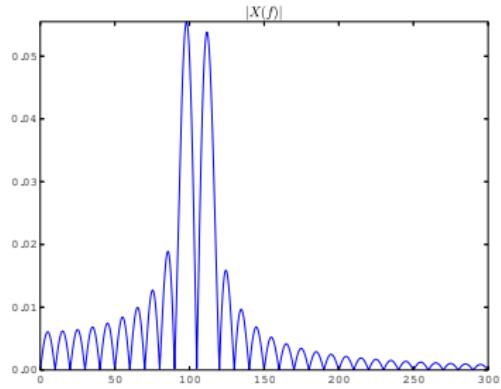
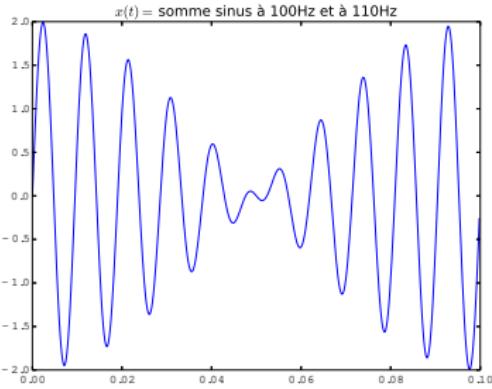
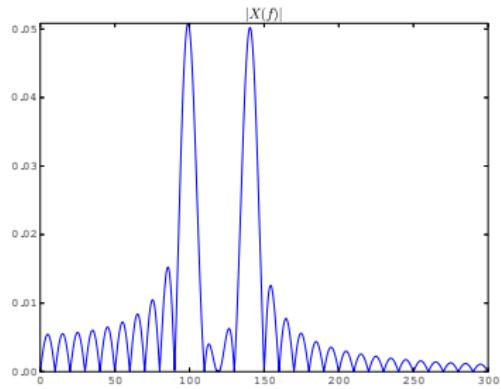
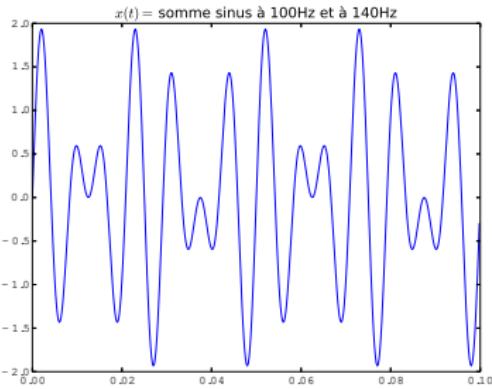
# Autour de la TF d'une porte...



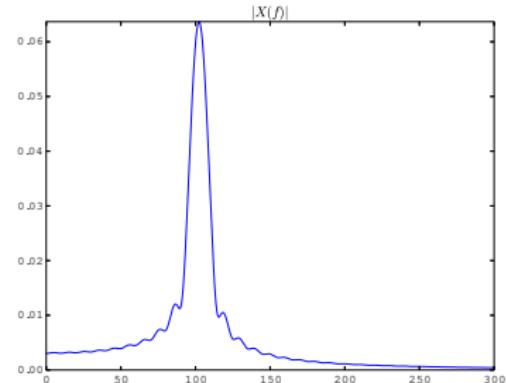
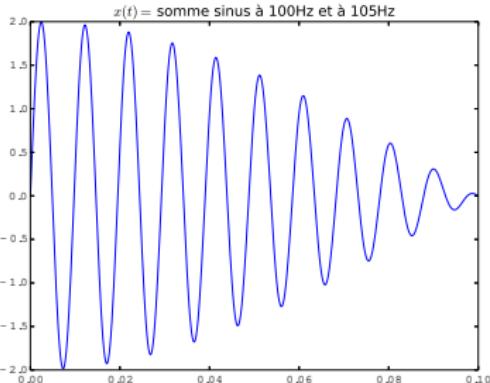
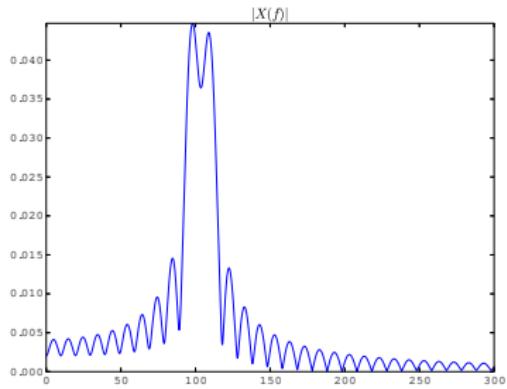
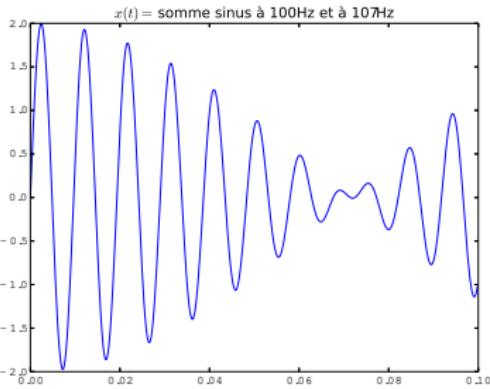
# Effet de la durée d'observation (sinusoïde 100Hz)



# Résolution en fréquence (1/3)

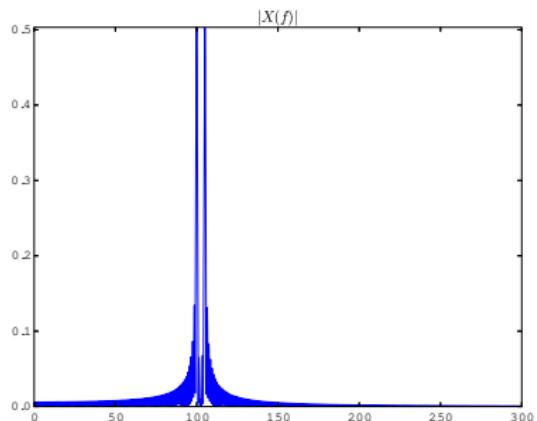
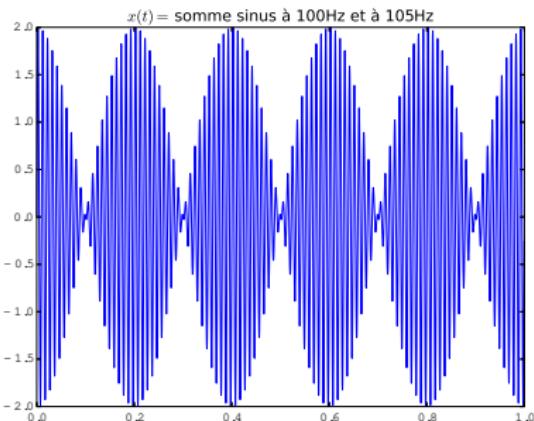


# Résolution en fréquence (2/3)

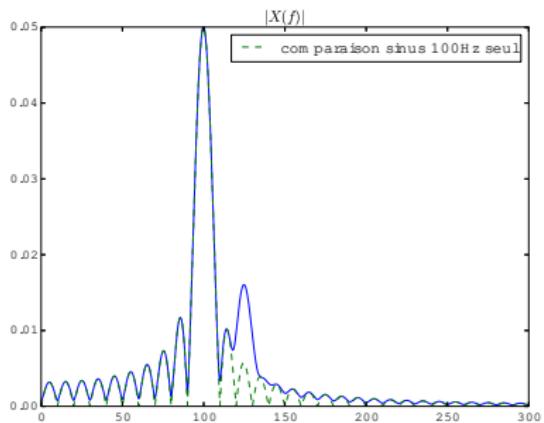
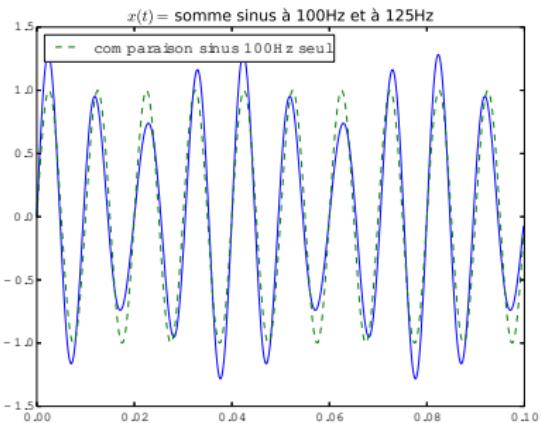


## Résolution en fréquence (3/3)

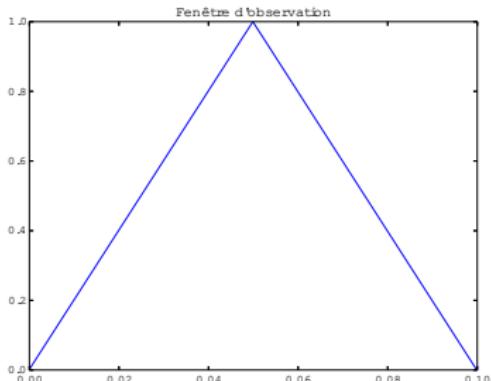
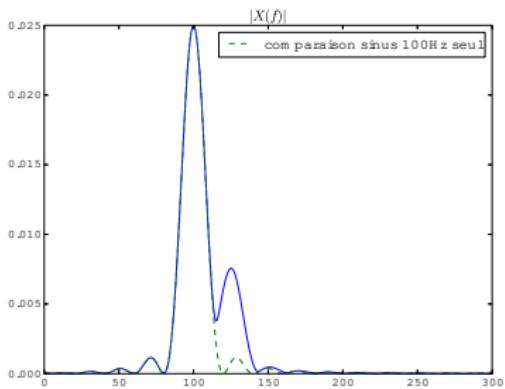
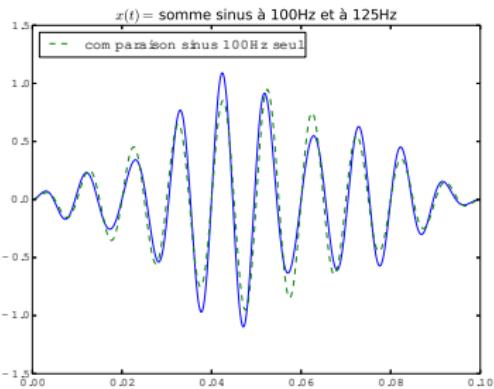
Avec une durée d'observation plus grande:



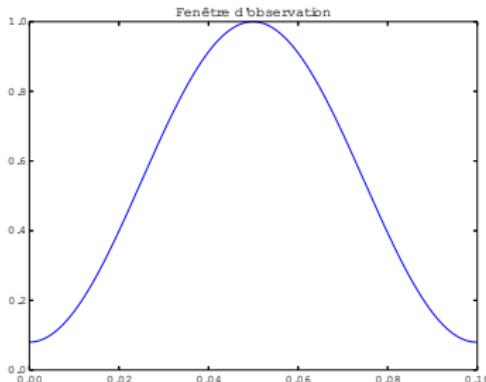
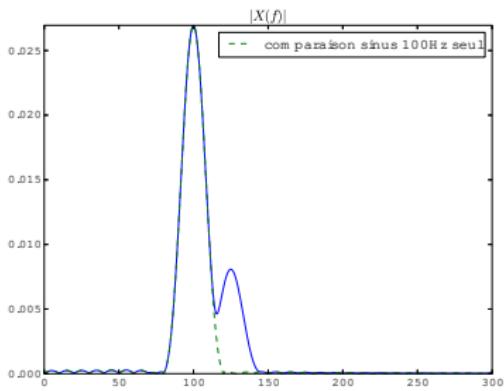
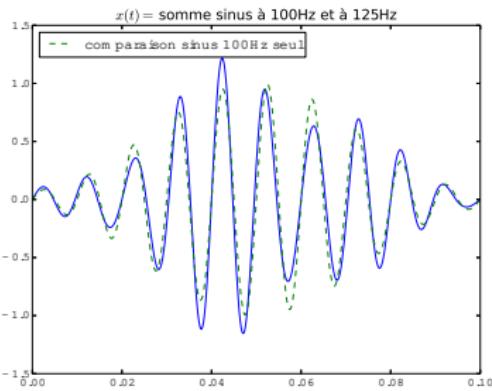
# Choix d'une fenêtre, apodisation (1/3)



# Choix d'une fenêtre, apodisation (2/3)



# Choix d'une fenêtre, apodisation (3/3)-



# Transformée de Fourier temps discret et fenêtrage

$$x_n \xrightarrow{\text{TFTD}} X(\tilde{f}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-\text{i}2\pi n \tilde{f}}$$

- Si fenêtre d'observation  $w_n$ :

$$x_n w_n \xrightarrow{\text{TFTD}} \int_0^1 X(\tilde{u}) W(\tilde{f} - \tilde{u}) d\tilde{u} \quad (\text{convolution circulaire})$$

- Cas d'une troncature/fenêtre rectangulaire  $N$  points:

$$X(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\text{i}2\pi n \tilde{f}}$$

# TFTD exponentielle tronquée

- Pour  $x_n = e^{i2\pi\tilde{f}_0 n}$ :

$$\begin{aligned} X(\tilde{f}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi\tilde{f}_0 n} e^{-i2\pi\tilde{f} n} = \frac{1 - e^{i2\pi(\tilde{f}_0 - \tilde{f})N}}{1 - e^{i2\pi(\tilde{f}_0 - \tilde{f})}} \\ &= e^{i\pi(\tilde{f}_0 - \tilde{f})(N-1)} \frac{\sin(\pi(\tilde{f}_0 - \tilde{f})N)}{\sin(\pi(\tilde{f}_0 - \tilde{f}))} \end{aligned}$$

- correspond au sinus cardinal observé en temps continu
- élargissement spectral (fonction de  $N$ : durée observation)

# Transformée de Fourier discrète

- Après fenêtrage, calculer pour  $\tilde{f} \in [0, 1]$ :

$$X(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\text{i}2\pi n \tilde{f}}$$

- Calcul pour les fréquences discrètes  $\tilde{f} = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$ :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\text{i}2\pi n \frac{k}{N}}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}$$

L'application  $(x_0, \dots, x_{N-1}) \mapsto (X_0, \dots, X_{N-1})$  est la **transformée de Fourier discrète (TFD)**.

# Matrice de TFD

$$\text{TFD: } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\text{i}2\pi \frac{nk}{N}} \quad k \in \{0, \dots, N-1\}$$

Avec  $w \triangleq e^{-\text{i}\frac{2\pi}{N}}$  et  $\mathbf{W} \triangleq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

la TFD correspond à la transformation linéaire:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

# Propriétés de la TFD

- La matrice  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  vérifie  $\mathbf{W}\mathbf{W}^H = N\mathbf{Id}$ .
  - La TFD est **inversible**:  $\forall n \in \{0, \dots, N-1\} \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi nk}{N}}$
- calcul de  $\text{TFD}^{-1}$  identique à celui de TFD

- relation de **Parseval**:  $\sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^* = N \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$

# Transformée de Fourier rapide

Calcul de TFD: 
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

- Produit matriciel naïf: complexité  $\mathcal{O}(N^2)$

- Transformée de Fourier rapide (ou FFT):**

si  $N$  est une puissance de 2, algorithme rapide de calcul de la TFD:  
complexité  $\mathcal{O}(N \log N)$

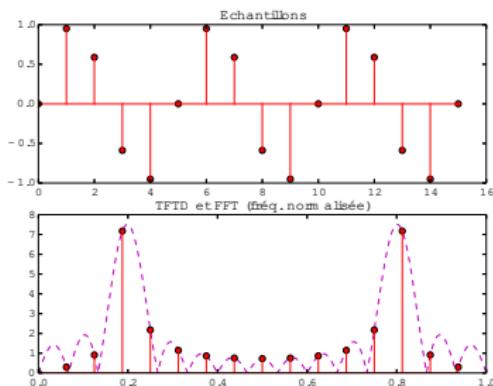
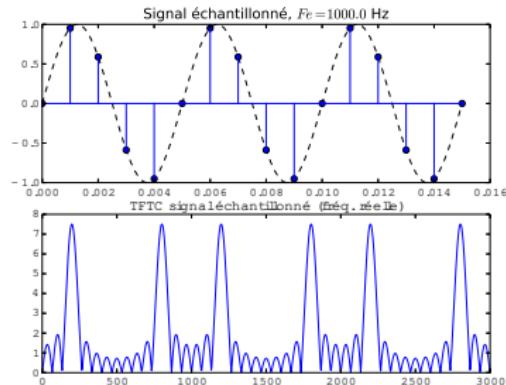
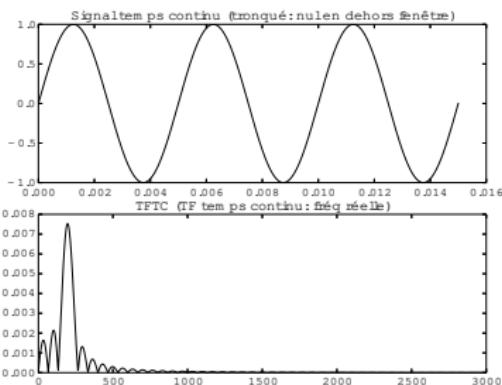
- Existence d'autres algorithmes rapides selon factorisation de  $N$
- Principe de départ (algorithme Cooley-Tukey):

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{2P-1} x_n e^{-i2\pi \frac{nk}{2P}} = \sum_{n=0}^{P-1} x_{2n} e^{-i2\pi \frac{(2n)k}{2P}} + \sum_{n=0}^{P-1} x_{2n+1} e^{-i2\pi \frac{(2n+1)k}{2P}} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{P-1} x_{2n} e^{-i2\pi \frac{nk}{P}}}_{\text{TFD taille } P = N/2} + e^{-i\frac{k}{2P}} \underbrace{\sum_{n=0}^{P-1} x_{2n+1} e^{-i2\pi \frac{nk}{P}}}_{\text{TFD taille } P = N/2} \end{aligned}$$

# Résumé des transformées de Fourier

- Temps continu (TFTC):  $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$
- Temps discret (TFTD):  $X(\tilde{f}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-i2\pi \tilde{f} n}$
- Discrète (TFD):  $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{k}{N} n}, \quad k = 0, \dots, N-1$
- si  $x_n = 0$  pour  $n \neq 0, \dots, N-1$ , lien TFD/TFTD:  
$$X_k = X(\tilde{f} = k/N)$$
- algorithmes rapides de TFD: FFT (en particulier si  $N = 2^p$ )

# TFTC, TFTD et TFD/FFT



# Bourrage de zéros (1/2)

- $N$  échantillons disponibles dans vecteur  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$   
 $(x_k = 0 \text{ pour } k \notin \{0, \dots, N-1\}).$

- TFTD et TFD :

$$X(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\text{i}2\pi \tilde{f}n} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X\left(\frac{N-1}{N}\right) \end{pmatrix}$$

- $X(\tilde{f})$  pour  $\tilde{f}$  autre que  $k/N$ ?

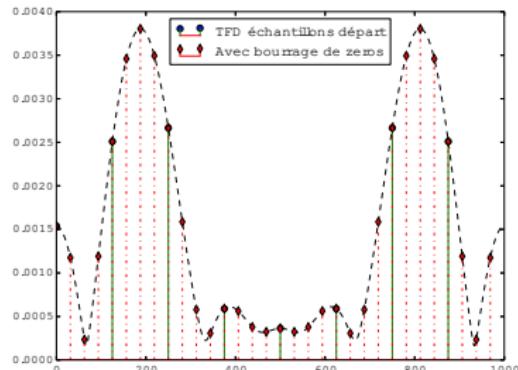
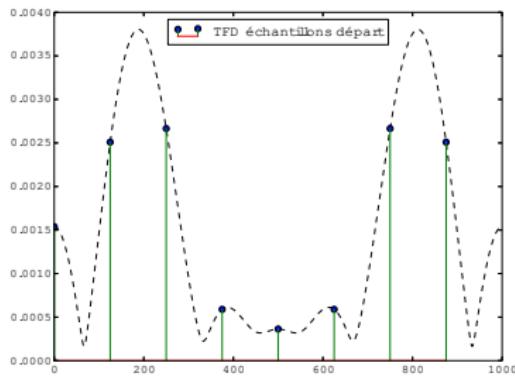
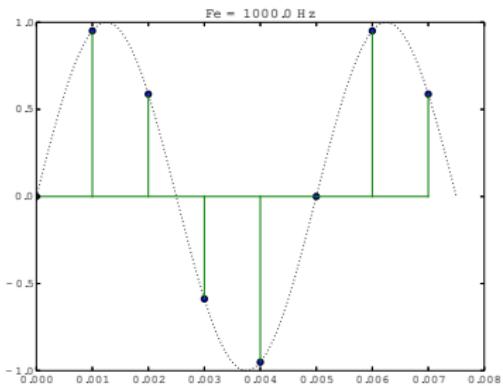
## Bourrage de zéros (2/2)

- $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  de taille  $M > N$  (bourrage de zéros)
- TFD de  $\mathbf{y}$ :  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(0) \\ \vdots \\ Y(M-1/M) \end{pmatrix}$  avec:

$$Y(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{M-1} y_n e^{-\text{i}2\pi \tilde{f} n} = \sum_{n=0}^{\textcolor{red}{N-1}} x_n e^{-\text{i}2\pi \tilde{f} n} = X(\tilde{f})$$

→  $X(\tilde{f})$  obtenu sur  $M$  points  $0, \frac{1}{M}, \dots, \frac{M-1}{M}$  au lieu des  $N$  points donnés par la TFD de  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$ .

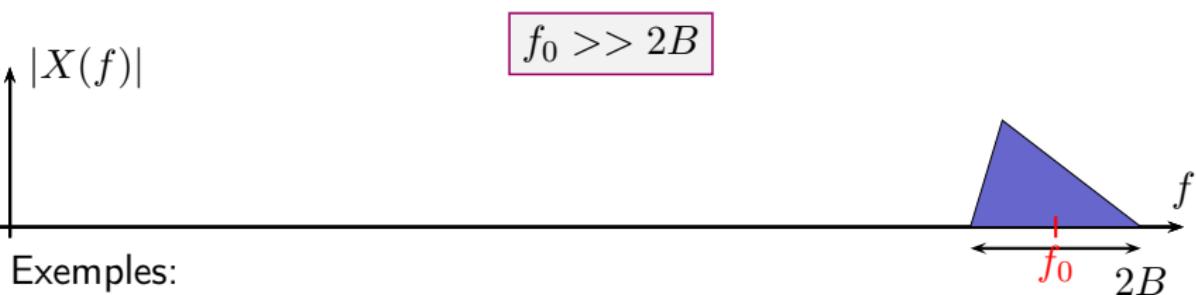
# Bourrage de zéros (zero-padding)



- 1 Introduction
- 2 Transformées temps discret
- 3 Filtres numériques (temps discret)
- 4 Représentations énergétiques
- 5 Signaux aléatoires (1/2)
- 6 Signaux aléatoires (2/2)
- 7 Systèmes à temps continu: filtrage et modulations
- 8 Echantillonnage
- 9 Transformée de Fourier discrète et FFT
- 10 Signaux à bande étroite

# Signal à bande étroite

- Signal à **bande étroite** = signal dont la fréquence centrale est grande par rapport à la bande occupée  $[f_0 - B, f_0 + B]$ :



- Exemples:
    - ▶ signal radio FM:  
 $f_0 \approx 100\text{MHz}$  et  $2B \approx 20$  à  $40\text{kHz}$ .
    - ▶ signal vidéo UHF (télévision analogique):  
 $f_0 \approx$  quelques  $100\text{MHz}$  et  $2B \approx 6\text{MHz}$
- ~~~ présenter les outils nécessaires pour la représentation et l'étude de tels signaux.

## Signal analytique

- si  $\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$ , alors  $X(-f) = X^*(f)$   
→ se restreindre aux fréquences positives

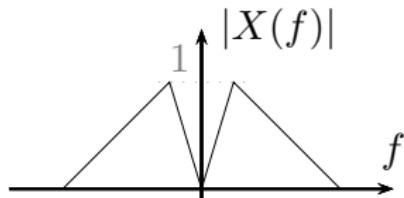
# Signal analytique

- si  $\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$ , alors  $X(-f) = X^*(f)$   
→ se restreindre aux fréquences positives
- $z_x(t)$ , signal analytique associé au signal réel  $x(t)$  est défini par sa transformée de Fourier:

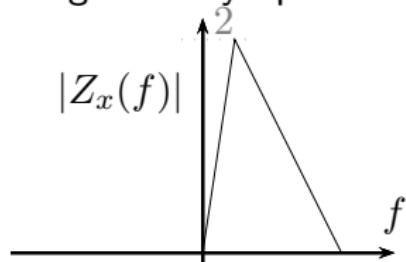
$$Z_x(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

- Représentation schématique des spectres:

signal réel



signal analytique

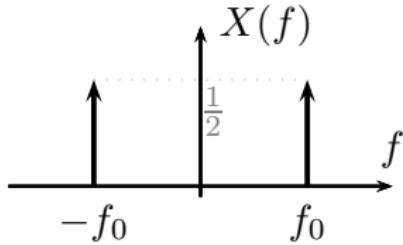


→  $z_x(t)$  ne peut pas être à valeurs réelles!

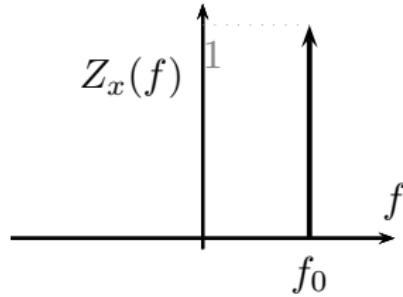
## Signal analytique: cas sinusoïdal

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$
- Représentation schématique des spectres:

signal réel



signal analytique

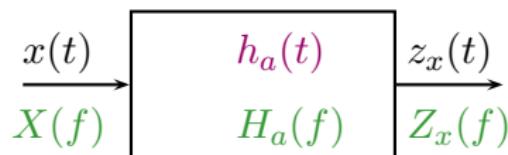


$$\Rightarrow Z_x(f) = \delta(f - f_0) \text{ et donc: } z_x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$$

- Le signal analytique associé à  $\cos(2\pi f_0 t)$  est l'exponentielle complexe  $e^{i2\pi f_0 t}$ .

## Filtre analytique

- Le filtre qui à un signal associe son signal analytique est appelé **filtre analytique**.



- réponse **en fréquence** du filtre analytique:

$$H_a(f) = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(f) = \begin{cases} 2 & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

- réponse **impulsionnelle** du filtre analytique:

$$h_a(t) = \delta(t) + i\frac{1}{\pi t}$$

$(\frac{1}{\pi t}$ : distribution à prendre en valeur principale)

# Transformée de Hilbert (1/2)



$$z_x(t) = h_a(t) \star x(t) = \left( \delta(t) + i \frac{1}{\pi t} \right) \star x(t)$$

## Transformée de Hilbert (1/2)

•

$$\begin{aligned}z_x(t) &= h_a(t) \star x(t) = \left( \delta(t) + i \frac{1}{\pi t} \right) \star x(t) \\&= x(t) + i \underbrace{\left( \frac{1}{\pi t} \star x(t) \right)}_{\widehat{x}(t)}\end{aligned}$$

# Transformée de Hilbert (1/2)

- 

$$\begin{aligned}z_x(t) &= h_a(t) \star x(t) = \left( \delta(t) + i \frac{1}{\pi t} \right) \star x(t) \\&= x(t) + i \underbrace{\left( \frac{1}{\pi t} \star x(t) \right)}_{\widehat{x}(t)}\end{aligned}$$

- La transformée de Hilbert d'un signal
- $x(t)$
- est définie par:

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t)$$

- Lien signal analytique
- $z_x$
- et transformée de Hilbert
- $\widehat{x}$
- :

$$z_x(t) = x(t) + i\widehat{x}(t)$$

## Transformée de Hilbert (2/2)

- La transformée de Hilbert d'un signal  $x(t)$  est définie par:

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$$

- Lien signal analytique  $z_x$  et transformée de Hilbert  $\widehat{x}$ :

$$z_x(t) = x(t) + i\widehat{x}(t)$$

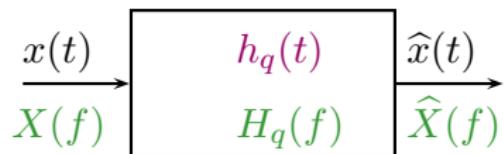
$\Rightarrow$  si  $\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$  alors  $\forall t, \widehat{x}(t) \in \mathbb{R}$  et  $x(t) = \Re[z_x(t)]$

- Effet sur le spectre:  $Z_x(f) = X(f) + i\widehat{X}(f) = \begin{cases} 2X(f) & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{X}(f) = \begin{cases} -iX(f) & \text{si } f \geq 0, \\ iX(f) & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

## Filtre en quadrature

- Le filtre qui a un signal associe sa transformée de Hilbert est appelé **filtre en quadrature**.



- réponse en **fréquence** du filtre en quadrature:

$$H_q(f) = -i \operatorname{signe}(f)$$

- réponse **impulsionnelle** du filtre en quadrature:

$$h_q(t) = \frac{1}{\pi t}$$

$(\frac{1}{\pi t}$ : valeur principale)

## Transformée de Hilbert: cas sinusoïdal

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$

- D'où:

$$\widehat{X}(f) = \begin{cases} -iX(f) & \text{si } f \geq 0, \\ iX(f) & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2i} \quad \text{et donc:}$$

$$\widehat{x}(t) = \frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i} = \sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$$

⇒ La transf. de Hilbert de  $\cos(2\pi f_0 t)$  est  $\sin(2\pi f_0 t)$ .

~~> filtre en quadrature ↔ déphaseur pur

Rq:  $e^{i2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow z_x(t) = x(t) + i\widehat{x}(t)$ .

# Propriétés de la transformée de Hilbert

- si  $\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$  alors  $\forall t, \hat{x}(t) \in \mathbb{R}$
- si  $\forall t, x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  sont orthogonaux

$$\int x(t)\hat{x}(t)^* dt = 0$$

En effet:  $\int x(t)\hat{x}(t)^* dt = \int X(f)\hat{X}(f)^* df = \int |X(f)|^2 \text{isigne}(f) df$

- Si  $M(f)$  et  $P(f)$ , transformées de Fourier de  $m(t)$  et  $p(t)$  ont des supports disjoints:

$$\widehat{m(t)p(t)} = m(t)\hat{p}(t)$$

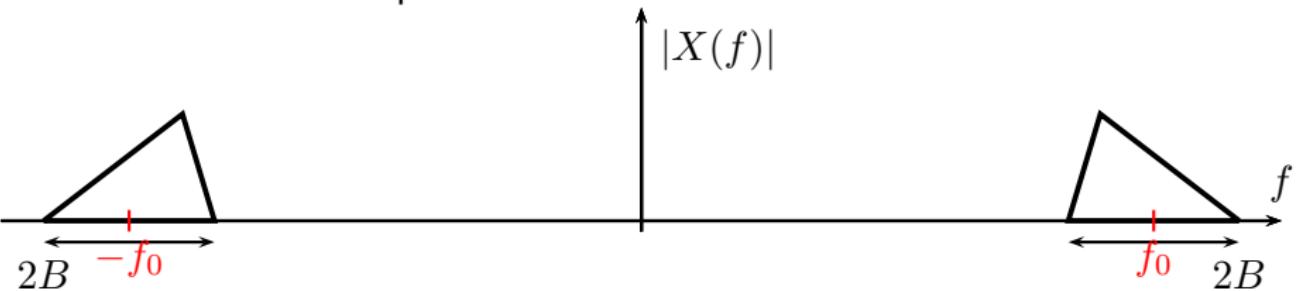
(Th. de Bedrosian)

# Enveloppe complexe

- Soit  $x(t)$  signal réel, à **bande étroite**  $[-B + f_0, B + f_0]$  et  $z_x(t)$  son signal analytique. L'**enveloppe complexe** de  $x(t)$  est:

$$\xi_x(t) = e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t)$$

- Domaine des fréquence:

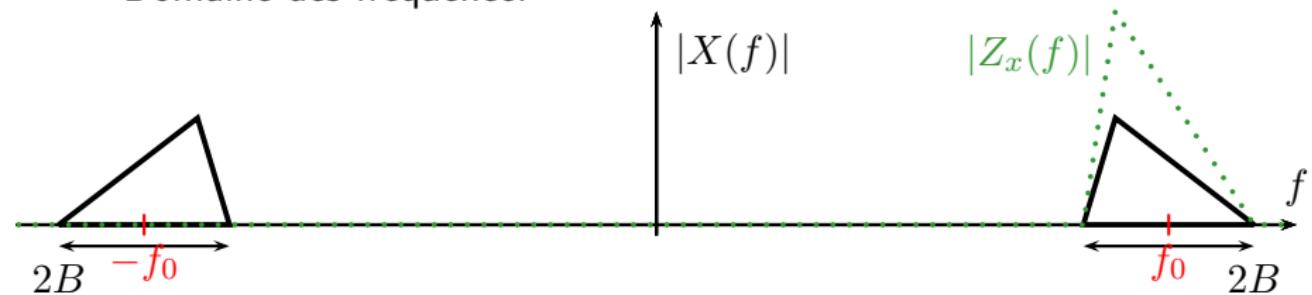


# Enveloppe complexe

- Soit  $x(t)$  signal réel, à **bande étroite**  $[-B + f_0, B + f_0]$  et  $z_x(t)$  son signal analytique. L'**enveloppe complexe** de  $x(t)$  est:

$$\xi_x(t) = e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t)$$

- Domaine des fréquence:

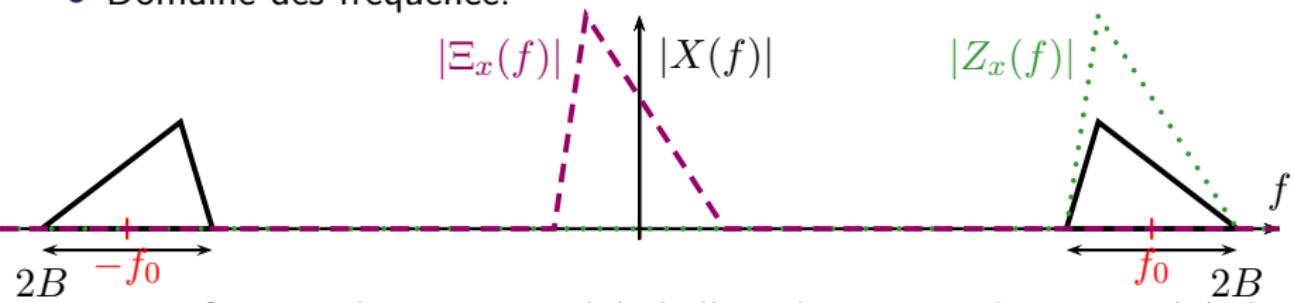


# Enveloppe complexe

- Soit  $x(t)$  signal réel, à **bande étroite**  $[-B + f_0, B + f_0]$  et  $z_x(t)$  son signal analytique. L'**enveloppe complexe** de  $x(t)$  est:

$$\xi_x(t) = e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t)$$

- Domaine des fréquence:



- Transformées de Fourier  $\Xi_x(f)$  de l'enveloppe complexe et  $Z_x(f)$  du signal analytique:

$$\Xi_x(f) = Z_x(f + f_0)$$

## Enveloppe complexe: cas sinusoïdal

- Exemple: inductance  $L$ :  $u(t) = L \frac{dj(t)}{dt}$

## Enveloppe complexe: cas sinusoïdal

- Exemple: inductance  $L$ :  $u(t) = L \frac{dj(t)}{dt}$

- Signaux réels:

$$j(t) = J \cos(2\pi f_0 t) \quad u(t) = -LJ2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= LJ2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$$

# Enveloppe complexe: cas sinusoïdal

- Exemple: inductance  $L$ :  $u(t) = L \frac{dj(t)}{dt}$

- Signaux réels:

$$j(t) = J \cos(2\pi f_0 t) \quad u(t) = -LJ2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= LJ2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$$

- Signaux complexes:

$z_x(t)$    $j(t) = Je^{i2\pi f_0 t} \quad \underline{u}(t) = LJ2\pi f_0 e^{i(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})}$

signal analytique

$$= LJ(i2\pi f_0)e^{i2\pi f_0 t} = \underline{U}e^{i2\pi f_0 t}$$

# Enveloppe complexe: cas sinusoïdal

- Exemple: inductance  $L$ :  $u(t) = L \frac{dj(t)}{dt}$

- Signaux réels:

$$j(t) = J \cos(2\pi f_0 t) \quad u(t) = -LJ2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= LJ2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$$

- Signaux complexes:

$z_x(t)$    $j(t) = Je^{i2\pi f_0 t}$   $\underline{u}(t) = LJ2\pi f_0 e^{i(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})}$

signal analytique  $= LJ(i2\pi f_0)e^{i2\pi f_0 t} = \underline{U}e^{i2\pi f_0 t}$

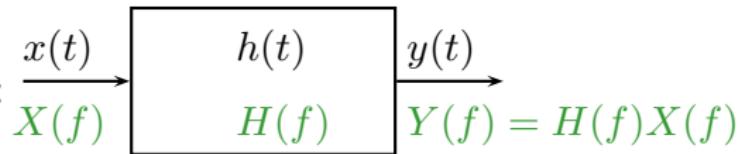
- Amplitudes complexes obtenues en multipliant par  $e^{-i2\pi f_0 t}$ , càd  
 translation du spectre de  $-f_0$ :

$\xi_x(t)$   enveloppe complexe  $\underline{U} = LJ(i2\pi f_0)$

## Filtre passe-bas équivalent

Soit  $x(t)$  à bande étroite centrée autour de  $f_0$ .

- Filtrage haute fréquence:



## Filtre passe-bas équivalent

Soit  $x(t)$  à bande étroite centrée autour de  $f_0$ .

- Filtrage haute fréquence:  $\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & h(t) \\ X(f) & & H(f) \\ & & \end{array} \quad y(t) \xrightarrow{\hspace{1cm}} Y(f) = H(f)X(f)$
- Pour les signaux analytiques:

$$Z_y(f) = H(f)Z_x(f) \quad \Rightarrow \quad Z_y(f + f_0) = H(f + f_0)Z_x(f + f_0)$$

## Filtre passe-bas équivalent

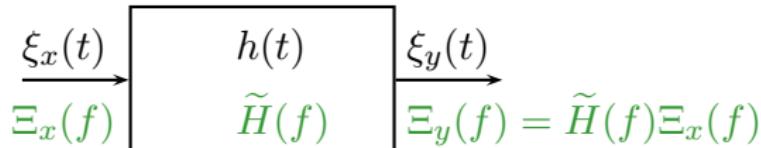
Soit  $x(t)$  à bande étroite centrée autour de  $f_0$ .

- Filtrage haute fréquence:  $\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t) \atop H(f)} \xrightarrow{y(t)} Y(f) = H(f)X(f)$
- Pour les signaux analytiques:

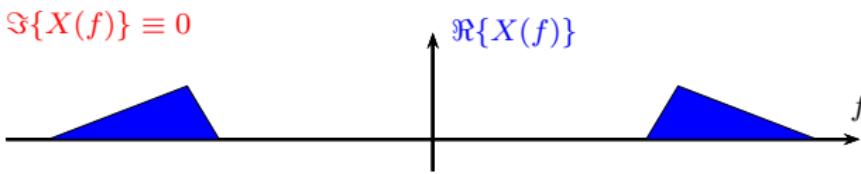
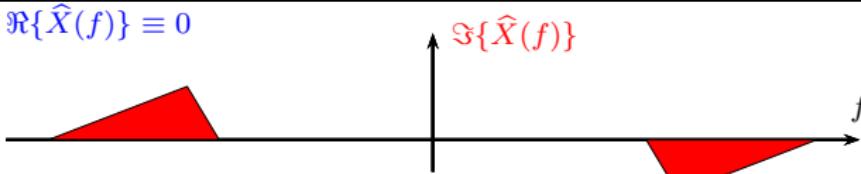
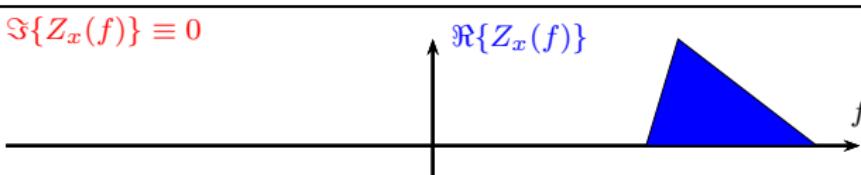
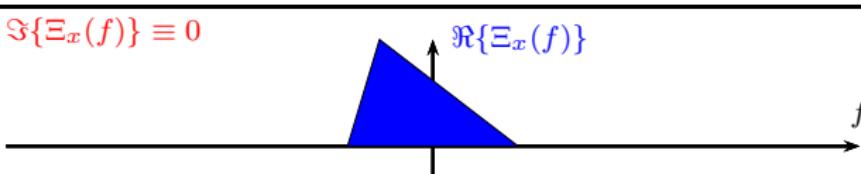
$$Z_y(f) = H(f)Z_x(f) \quad \Rightarrow \quad Z_y(f + f_0) = H(f + f_0)Z_x(f + f_0)$$

- Filtrage haute fréquence de  $x(t) \Leftrightarrow$  filtrage basse fréquence sur les enveloppes complexes par le filtre **passe-bas équivalent**

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} H(f + f_0) & \text{si } f \geq -f_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

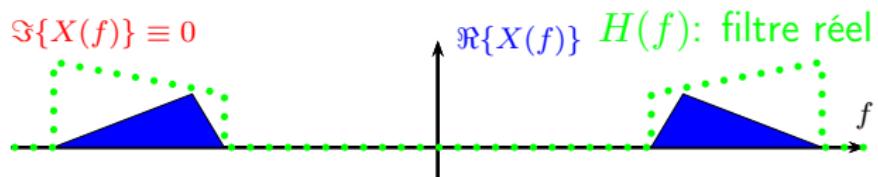


# Signaux bande étroite: résumé des représentations

|                                                                                                                                               |                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>signal <math>x(t)</math></p>                                                                                                               | $\Im\{X(f)\} \equiv 0$<br>           |
| <p>transf. Hilbert<br/> <math>\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t)</math><br/> <math>\widehat{X}(f) = -i\text{signe}(f)X(f)</math></p> | $\Re\{\widehat{X}(f)\} \equiv 0$<br> |
| <p>signal analytique<br/> <math>z_x(t) = x(t) + i\widehat{x}(t)</math><br/> <math>Z_x(f) = 2X(f)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(f)</math></p>       | $\Im\{Z_x(f)\} \equiv 0$<br>         |
| <p>enveloppe complexe<br/> <math>\xi_x(t) = e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t)</math><br/> <math>\Xi(f) = Z_x(f + f_0)</math></p>                        | $\Im\{\Xi_x(f)\} \equiv 0$<br>       |

# Signaux bande étroite: résumé des représentations

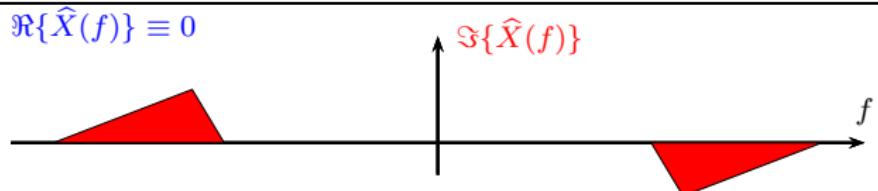
signal  $x(t)$



transf. Hilbert

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t)$$

$$\widehat{X}(f) = -i\text{signe}(f)X(f)$$



signal analytique

$$z_x(t) = x(t) + i\widehat{x}(t)$$

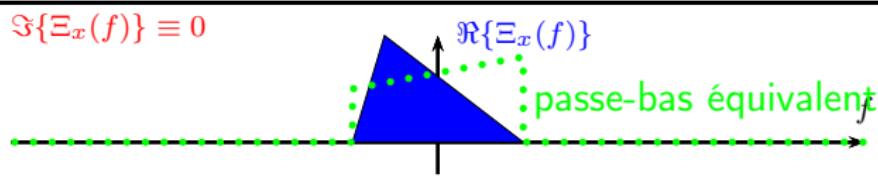
$$Z_x(f) = 2X(f)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(f)$$



enveloppe complexe

$$\xi_x(t) = e^{-i2\pi f_0 t} z_x(t)$$

$$\Xi(f) = Z_x(f + f_0)$$



# Signal bande étroite: représentations (1/2)

- Par définition:

$$\xi_x(t) = z_x(t)e^{-\text{i}2\pi f_0 t} = [x(t) + \text{i}\hat{x}(t)]e^{-\text{i}2\pi f_0 t}$$

donc:

$$x(t) = \Re[\xi_x(t)e^{\text{i}2\pi f_0 t}]$$

- En écrivant  $\xi_x(t) = |\xi_x(t)|e^{\text{i}\varphi(t)}$ , on définit pour  $x(t)$ :

- ▶ enveloppe instantanée:  $|\xi_x(t)|$
- ▶ phase instantanée:  $\phi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$
- ▶ fréquence instantanée:  $\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$

→ avec variations de la fréquence/phase instantanée, modulation angulaire (FM, modulation de phase, ...)

## Signal bande étroite: représentations (2/2)

- 

$$x(t) = \Re \left[ \xi_x(t) e^{i2\pi f_0 t} \right]$$

- $\xi_x(t) = p_x(t) + iq_x(t)$ 
  - ▶  $p_x(t)$  = composante en phase
  - ▶  $q_x(t)$  = composante en quadrature

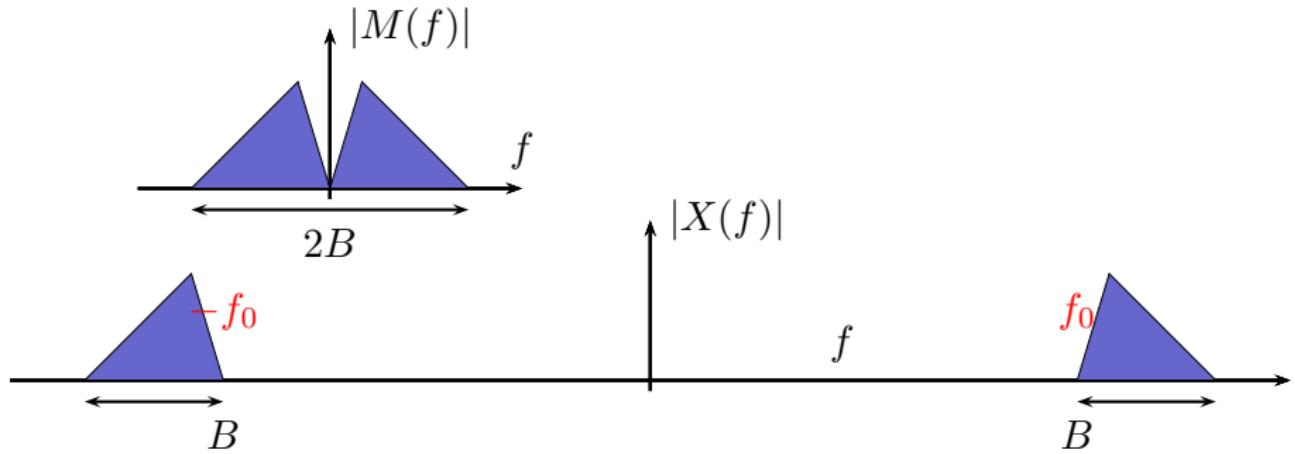
$$x(t) = \Re \left[ (p_x(t) + iq_x(t)) e^{i2\pi f_0 t} \right]$$

$$x(t) = p_x(t) \cos(2\pi f_0 t) - q_x(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

- on retrouve l'expression de la double modulation en quadrature
- transmission d'un signal à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

# Expression temporelle de la BLU

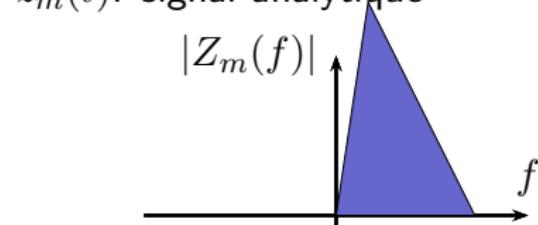
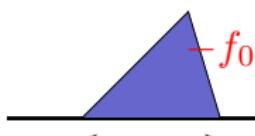
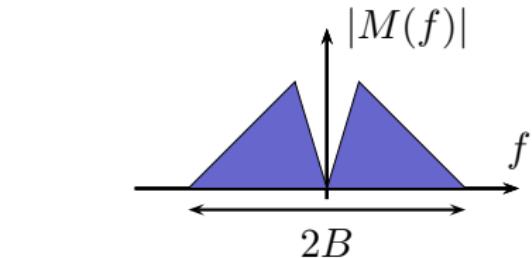
$m(t)$ : modulante



# Expression temporelle de la BLU

$m(t)$ : modulante

$z_m(t)$ : signal analytique

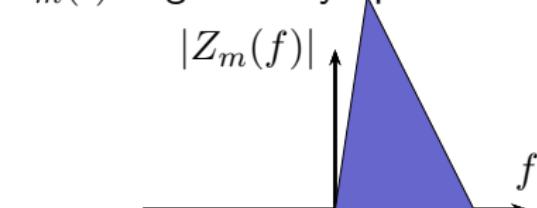
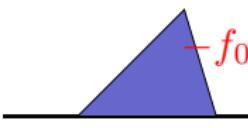
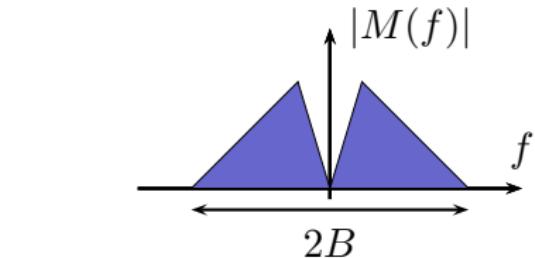


$$x(t) = \Re\{z_m(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2} [z_m(t)e^{i2\pi f_0 t} + z_m^*(t)e^{-i2\pi f_0 t}]$$

# Expression temporelle de la BLU

$m(t)$ : modulante

$z_m(t)$ : signal analytique



$$x(t) = \Re\{z_m(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2} [z_m(t)e^{i2\pi f_0 t} + z_m^*(t)e^{-i2\pi f_0 t}]$$

Comme  $z_m(t) = m(t) + i\hat{m}(t)$ ,

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$\rightsquigarrow x(t) \leftrightarrow$  modulation d'amplitude de  $z_m(t) \in \mathbb{C}$