SIC3601 : TD numéro 1

Soit $x(t)$ un signal et $X(f)$ sa transformée de Fourier (ce que l'on note par : $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$). Alors :

$\boxed{1}$ $x(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$

$\boxed{2}$ $x(t + t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(ft_0)$

$\boxed{3}$ $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} aX(af)$

$\boxed{4}$ si $x(t)$ est réel, alors $X(f) = X(-f)^*$.

Exercice 1: inégalité de Heisenberg Dans tout l'exercice, on considère un signal déterministe $x(t)$ d'énergie finie ($t \in \mathbb{R}$ représente le temps). On supposera que ce signal est dérivable, que $x'(t)$ est d'énergie finie et que $tx(t)$ est d'énergie finie.

1. (a) Préciser comment s'énonceraient les hypothèses ci-dessus dans le langage du cours de mathématiques. En admettant qu'elles existent, préciser les limites de $t|x(t)|^2$ pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$.

(b) On note E_x l'énergie du signal $x(t)$. Rappeler la définition de E_x.

2. On définit :

$$t_0 \triangleq \int_{\mathbb{R}} t \frac{|x(t)|^2}{E_x}\, dt \qquad \text{et : } T \triangleq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 \frac{|x(t)|^2}{E_x}\, dt}$$

En faisant une analogie avec les probabilités, justifier que l'on puisse dire que t_0 est le «temps moyen du signal». Interpréter T (appelé parfois «durée quadratique moyenne»).
Dans la suite de l'énoncé, on supposera $t_0 = 0$.

3. On note $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ (f désigne la fréquence) et on fait l'hypothèse que $\int_{\mathbb{R}} f|X(f)|^2\, df = 0$.
En utilisant la relation de Parseval, donner l'expression de E_x en fonction de $X(f)$. Interpréter la quantité B introduite ci-dessous (et appelée parfois de «bande quadratique moyenne occupée») :

$$B \triangleq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \frac{|X(f)|^2}{E_x}\, df}$$

4. Rappeler comment s'écrit la transformée de Fourier de $x'(t)$ en fonction de $X(f)$ et en déduire :

$$\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2\, dt = 4\pi^2 B^2 E_x$$

5. En appliquant l'inégalité de Schwarz à $\int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t)\, dt$ d'une part, et en calculant cette intégrale d'autre part, montrer que $BT \geq \frac{1}{4\pi}$.

6. Déterminer les signaux *à valeurs réelles* d'énergie finie pour lesquels le produit BT est minimum.

7. On rappelle la transformée de Fourier $e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2}$ et on considère le signal particulier $x(t) = e^{-\pi t^2}$. Calculer E_x, B et T.

Exercice 2: effet d'une troncature Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le signal $x(t)$ (pour $T > 1/f_0$). Est-ce un signal d'énergie finie ? de puissance finie ?

2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal et tracer son spectre en amplitude.

3. Calculer l'énergie ou la puissance du signal pour la valeur particulière $T = T_0 = 1/f_0$.

Note : Il est suggéré de faire cet exercice sans utiliser la transformée de Fourier des distributions ; on pourra reprendre l'exercice dans le cadre des distributions ultérieurement.