SIC3601 : TD numéro 3

Soit le filtre de fonction de transfert en z

$$H[z] = \frac{1}{z^{-2}/2 - z^{-1} + 1}$$

$\boxed{1}$ Les pôles de $H[z]$ sont $\frac{1}{2}(1-\mathfrak{i})$ et $\frac{1}{2}(1+\mathfrak{i})$.

$\boxed{2}$ Les pôles de $H[z]$ sont $1-\mathfrak{i}$ et $1+\mathfrak{i}$.

$\boxed{3}$ Les pôles de $H[z]$ sont à l'intérieur du cercle unité ; $H[z]$ est donc un filtre stable et causal (avec choix implicite du domaine de convergence correspondant).

$\boxed{4}$ Les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative ; $H[z]$ est donc instable.

$\boxed{5}$ Les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle positive ; $H[z]$ est donc instable.

$\boxed{6}$ La relation de récurrence entrée-sortie du filtre $H[z]$ est $y_n = x_n + y_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-2}$.

$\boxed{7}$ La relation de récurrence entrée-sortie du filtre $H[z]$ est $y_n = x_n - x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2}$.

Exercice 1: synthèse d'un filtre numérique Cet exercice est un exemple simple de synthèse de filtre numérique. On note $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle de ce filtre et $H(f)$ sa réponse en fréquence.

1. Dans tout l'énoncé, les fréquences sont normalisées (ou réduites) et la lettre f désigne une telle fréquence. Si F_e est la fréquence d'échantillonnage des signaux d'origine, quelle lien existe-t-il entre f, F_e et la fréquence réelle ?

2. Le filtre que l'on souhaite synthétiser est un filtre numérique passe-bas idéal de fréquence de coupure f_0 (réponse en fréquence égale à 1 dans la bande passante et nulle en dehors). Les coefficients du filtre sont à valeurs réelles. Quelles est la plage de valeurs ayant un sens pour la fréquence normalisée f_0 ? Préciser ce que vaut la fonction $H(f)$ et la tracer en fonction de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

3. Comment s'exprime $H(f)$ en fonction des coefficients $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de la réponse impulsionnelle ? Remarquer alors que l'on peut écrire $h_k = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)e^{+\mathfrak{i}2\pi kf}\, df$ pour tout k et calculer les valeurs de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

4. Le filtre obtenu est-t-il de réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il causal ou non ?

5. On regarde maintenant successivement comment une troncature puis un décalage de la réponse impulsionnelle $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ obtenue permet d'approcher le filtre souhaité.

(a) Proposer une solution pour obtenir à partir de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un filtre approché de réponse impulsionnelle finie avec 5 coefficients non nuls. On notera $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle de ce filtre approché.

(b) Proposer une solution pour obtenir à partir de $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un filtre causal de réponse impulsionnelle finie avec 5 coefficients non nuls. On notera $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ce dernier filtre obtenu.

6. Comment s'exprime $G[z]$, fonction de transfert en z du filtre $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$? Quels sont les pôles de $G[z]$? Que peut-on en déduire en terme de stabilité ?

7. Que peut-on dire de façon générale concernant la stabilité d'un filtre de réponse impulsionnelle finie ?

Exercice 2: transformée en z, filtre à temps discret

1. Soit le signal à temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Calculer la transformée en z du signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Quel est le domaine de convergence correspondant ?

2. Le signal $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appliqué à l'entrée du filtre stable et causal défini par la fonction de transfert en z :

$$H[z] = \frac{1}{1-4z}$$

On note $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la sortie correspondante du filtre.
Justifier l'existence d'un filtre stable et causal défini par cette fonction de transfert. Donner la relation de récurrence entrée-sortie qui correspond à $H[z]$.

3. Donner la relation entre les transformées en z $X[z]$ et $Y[z]$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ respectivement et le domaine sur lequel cette relation est valable. En déduire la séquence $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.