SIC3601 : TD numéro 7

On considère l'opération qui à un signal à temps continu $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_t^{t+\alpha} x(\theta)\, d\theta \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

$\boxed{1}$ C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{3}$ C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{4}$ C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1: distribution de Dirac

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\phi_n(t) = ne^{-\pi n^2 t^2}$.

(a) Faire un tracé des fonctions ϕ_n et donner la limite de la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ (convergence simple).

(b) Montrer que pour toute fonction f bornée et continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) f(t)\, dt = f(0)\,.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\phi_n(t) = n\mathbb{1}_{[-1/2n, 1/2n]}(t)$.

(a) Faire un tracé des fonctions ϕ_n et donner la limite de la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ (convergence simple).

(b) Montrer que pour toute fonction f continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) f(t)\, dt = f(0)\,.$$

3. Vérifier que les résultats précédents se généralisent en prenant $\phi_n(t) = n\phi(nt)$ dans les cas suivants :

(a) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dt = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée.

(b) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, de support borné, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dt = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

4. Soit la fonction $\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ que l'on suppose prolongée par continuité en zéro et, pour tout entier $n \geq 1$, soient $\phi_n(t) = n\phi(nt)$. Nous admettrons (cf. cours de maths) :

- (lemme de Riemann-Lebesgue) $\int_a^b f(t)e^{i2\pi nt}\, dt \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$ pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$.
- $\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \phi(t)\, dt = 1$

On suppose que f est une fonction de support borné telle qu'on peut l'écrire $f(t) = f(0) + tg(t)$ pour g intégrable (c'est par exemple le cas si f est continûment dérivable). Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)f(t)\, dt = f(0)\,.$$

5. Dans tous les cas ci-dessus, on définit $\delta(t) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t)$ qu'on appellera distribution (ou impulsion) de Dirac. C'est là une définition simplifiée et on notera que $\delta(t)$ n'est pas une fonction. La théorie des distributions montre toutefois que $\delta(t)$ peut se manipuler comme une fonction. On résume ci-dessous des éléments essentiels (aucune preuve n'est réellement demandée) :

(a) On peut définir la translatée $\delta(t-\tau) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t-\tau)$. Alors $\int_{\mathbb{R}} \delta(u-\tau)f(u)\, dt = f(\tau)$ sous les mêmes hypothèses que ci-dessus (vérifier qu'on obtient également cette relation par changement de variable). On admettra cette propriété pour toute fonction continue.

(b) La distribution de Dirac est symétrique $\delta(t) = \delta(-t)$ (vérifier).

(c) Finalement, pour toute fonction continue, on la propriété essentielle (noter la convolution) :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t-u)\, du = f(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(u)f(t-u)\, du$$

Exercice 2: filtrage Soit $\beta > 0$ une constante et le filtre défini par sa réponse impulsionnelle

$$h(t) = \delta(t) - \beta e^{-\beta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{cases} \delta(t) - \beta e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

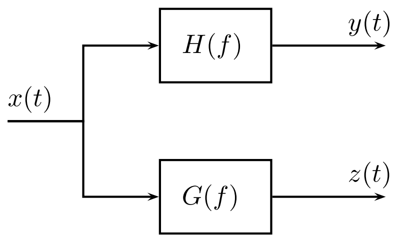
1. Le filtre est-il causal ? Justifier.

2. Le filtre est-il stable ? Justifier.

3. Exprimer la réponse en fréquence $H(f)$ de ce filtre. Est-ce un passe-haut, passe-bas, passe-bande ou coupe-bande ?

4. On définit un filtre complémentaire par sa réponse en fréquence $G(f) = 1 - H(f)$. Donner la réponse impulsionnelle $g(t)$ correspondante.

5. Soit $x(t)$ un signal de densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ et qui attaque en entrée les filtres $H(f)$ et $G(f)$. On note $y(t)$ et $z(t)$ les sorties correspondantes.



Calculer la densité spectrale de $y(t) + z(t)$ en fonction de $\Gamma_x(f)$.

6. Calculer la densité spectrale de $y(t) - z(t)$ en fonction de $\Gamma_x(f)$.