

Traitement du signal avancé (SIC4102)

Marc Castella
marc.castella@telecom-sudparis.eu

Télécom SudParis

January 28, 2026

Part I

Présentation du module

Liste des séances programmées

- mer 04/02 10h00 - 13h15
- mar 24/02 10h00 - 13h15 (report possible)
- ven 27/02 10h00 - 13h15 (report possible)
- mar 10/03 10h30 - 13h15
- mer 11/03 10h00 - 13h15
- mar 17/03 10h00 - 13h15
- lun 23/03 10h00 - 13h15
- mer 25/03 10h00 - 13h15
- mar 07/04 14h30 - 17h45
- ven 10/04 10h00 - 13h15
- mar 21/04 14:30-16:30 : **contrôle final**
 - ▶ Questions de type QCM,
 - ▶ Exercices simples et questions de cours.
 - ▶ **Pas de CF2.**
- TP: intégrés au cours + travail personnel en autonomie

Prérequis du module

Liste incomplète de notions utiles:

- algèbre linéaire:
 - ▶ produit matriciel, bases, espace vectoriel, norme, produit scalaire et projection orthogonale
- théorie du signal:
 - ▶ filtre, convolution
 - ▶ signaux à temps discret
 - ▶ échantillonnage
- probabilités et statistiques:
 - ▶ signaux aléatoires, espace des variables aléatoires de carré sommable
 - ▶ bases du cours de statistiques
- bases de programmation Python Scientifique (environnement au choix: iPython, Notebook, Jupyter Lab, ...)

Présentation du module

Thème: Reconstruction de signaux dans les modèles linéaires

- Apprentissage supervisé
 - ▶ filtre inverse, **filtre de Wiener**; application en communications numériques (**égalisation**)
 - ▶ **approximation** de signaux (choix de critère, régularisation)
 - ▶ **estimation** (régularisation, interprétation bayésienne)
- Apprentissage aveugle et séparation de sources
 - ▶ analyse en composantes principales (PCA), décomposition en valeurs singulières (SVD)
 - ▶ analyse en composantes indépendantes (**ICA**)
 - ▶ statistiques d'ordre supérieur (cumulants)
 - ▶ principes statistiques et critères de théorie de l'information
- Travaux pratiques «BYOD»
- Compléments et rappels (optimisation, dérivation)

Part II

Filtre de Wiener

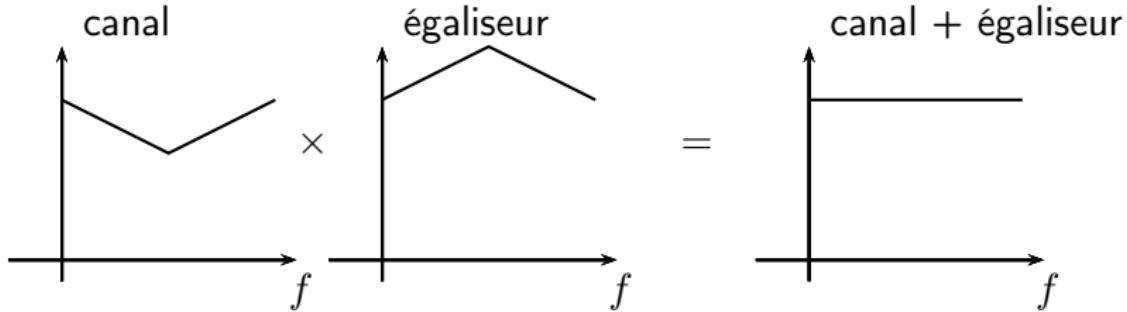
Aspect fréquentiel du problème d'égalisation



- Egaliseur audio:

→ (pré-)amplifier des fréquences absorbées/compenser imperfections de la chaîne d'écoute

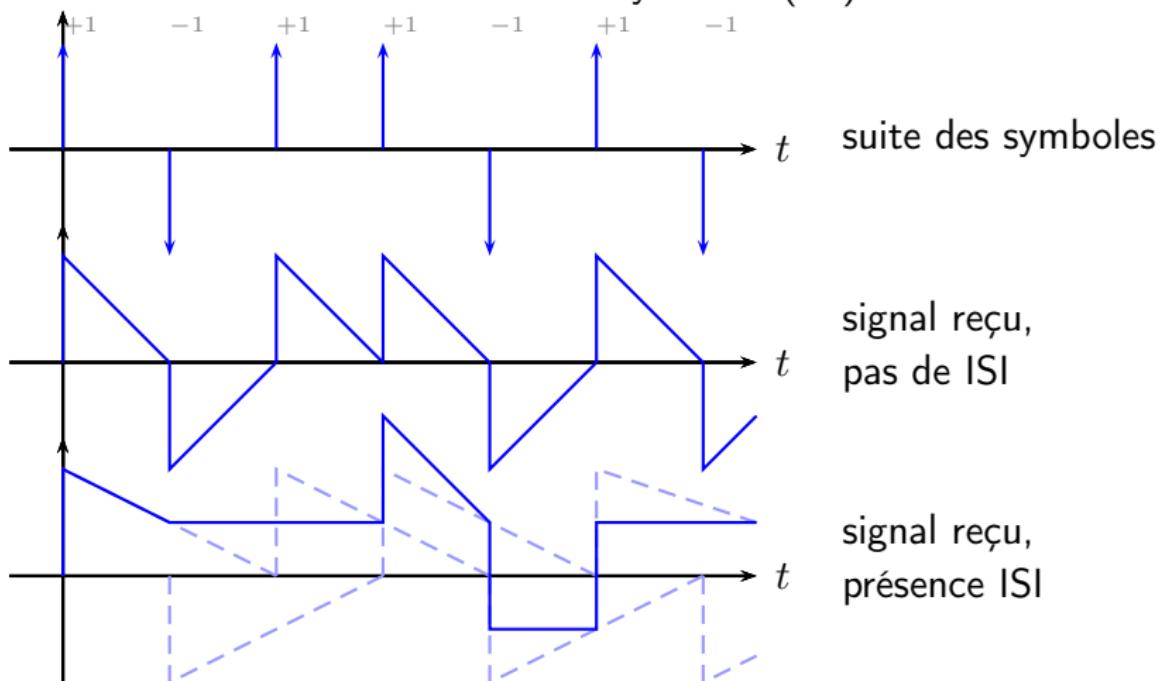
- En communications numériques:



- égalisation ↔ compenser les effets du canal de propagation

Aspect temporel du problème d'égalisation

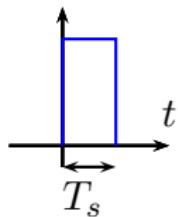
- Phénomène d'interférence entre symboles (ISI)



- Diagramme de l'oeil (simulation)

Signal analogique en bande de base

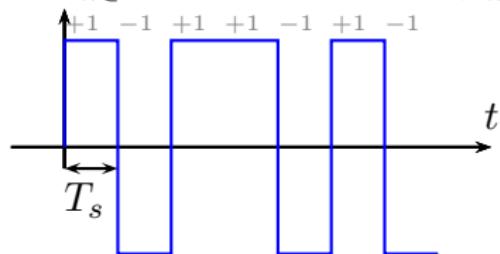
- symboles à transmettre: $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ à la période symbole T_s



- impulsion/filtre de mise en forme: $\Pi(t)$

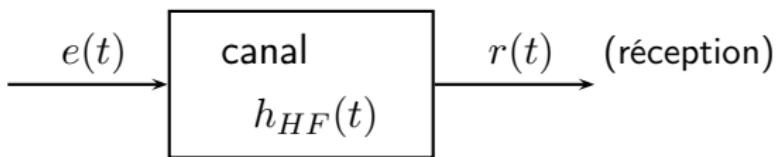
- signal en bande de base

$$d(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Pi(t - kT_s) = \left(\sum_k a_k \delta(t - kT_s) \right) \star \Pi(t)$$



- Rq: souvent, $a_k \in \mathbb{C}$ (transmission de plusieurs bits sur un symbole)
et $d(t) \in \mathbb{C}$

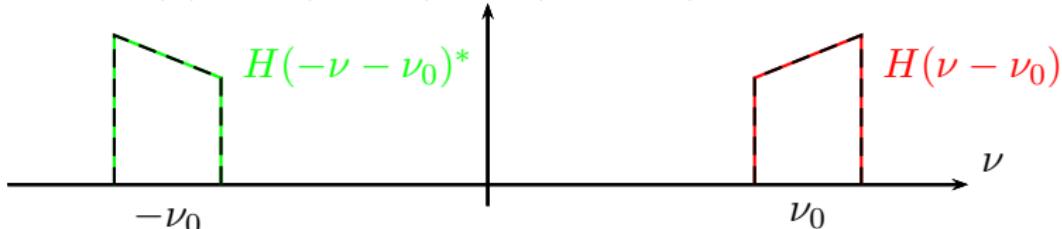
Modulation, enveloppe complexe



- $d(t) = p(t) + iq(t)$: enveloppe complexe du signal émis
- signal émis: bande étroite autour de ν_0 (modulation)

$$e(t) = \Re\{d(t)e^{i2\pi\nu_0 t}\} = p(t) \cos(2\pi\nu_0 t) - q(t) \sin(2\pi\nu_0 t)$$

- filtre canal $h_{HF}(t)$ réel et opère sur bande de $e(t)$
- $\rightsquigarrow H_{HF}(\nu) = H(\nu - \nu_0) + H(-\nu - \nu_0)^*$



Enveloppe complexe, filtre passe-bas équivalent

En émission:

$$e(t) = \Re\{d(t)e^{i2\pi\nu_0 t}\} = \frac{1}{2} \left(d(t)e^{i2\pi\nu_0 t} + d(t)^* e^{-i2\pi\nu_0 t} \right)$$

$$E(\nu) = \frac{1}{2}(D(\nu - \nu_0) + D(-\nu - \nu_0)^*)$$

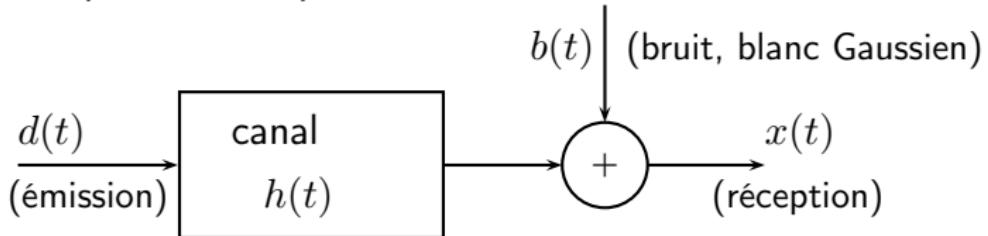
En réception:

$$\begin{aligned} R(\nu) &= H_{HF}(\nu)E(\nu) \\ &= \frac{1}{2} \left(H(\nu - \nu_0) + H(-\nu - \nu_0)^* \right) \left(D(\nu - \nu_0) + D(-\nu - \nu_0)^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{H(\nu - \nu_0)D(\nu - \nu_0)}_{X(\nu - \nu_0)} + \underbrace{H(-\nu - \nu_0)^*D(-\nu - \nu_0)^*}_{X(-\nu - \nu_0)^*} \right) \\ r(t) &= \Re\{x(t)e^{i2\pi\nu_0 t}\} \quad \text{où: } x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) = H(\nu)D(\nu) \end{aligned}$$

⇒ enveloppes complexes $d(t)$, $x(t)$ et filtre passe-bas équivalent $H(\nu)$ au lieu de $e(t)$, $r(t)$ et $H_{HF}(\nu)$.

Modèle équivalent en bande de base (1/2)

- Signaux émis $e(t)$ et reçu $r(t)$ représentés par leurs enveloppes complexes $d(t)$ et $x(t)$.
- Canal «haute-fréquence» H_{HF} représenté par son passe-bas équivalent $H(\nu)$
- Modèle avec prise en compte d'un bruit additif:

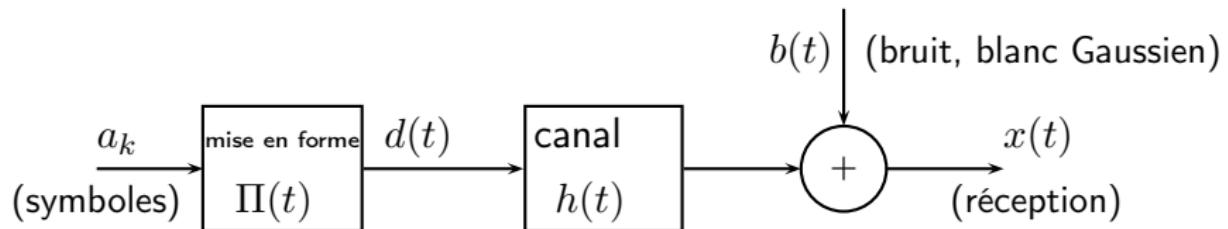


$$x(t) = h(t) \star d(t) + b(t)$$

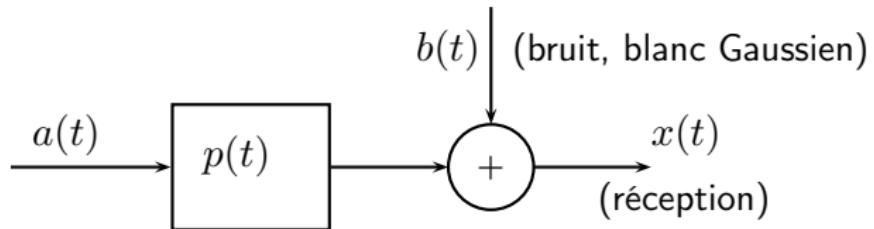
$$X(\nu) = H(\nu)X(\nu) + B(\nu)$$

avec mise en forme: $d(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) \star \Pi(t)$

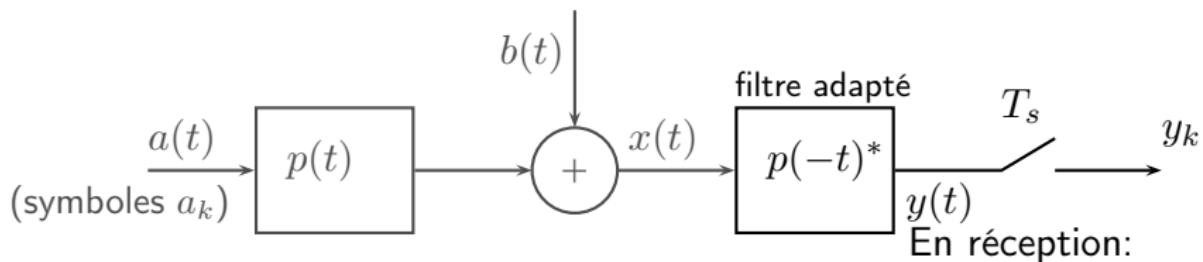
Modèle équivalent en bande de base (2/2)



- Avec $p(t) = h(t) \star \Pi(t)$ et $a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s)$:



Filtrage adapté, échantillonnage



$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT_s) + b(t)$$

- Réponse impulsionnelle filtre adapté: $y(t) = x(t) \star p(-t)^*$

- Echantillonnage au rythme symbole T_s

$$y_n = y(nT_s) = \int x(u)p(u - nT_s)^* du$$

⇒ les $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent un résumé exhaustif de $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

Modèle temps discret

- Mise en forme, canal + bruit:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k p(t - kT_s) + b(t) \quad \text{où: } p(t) = h(t) \star \Pi(t)$$

- Après filtre adapté

$$y(t) = x(t) \star p(-t)^*$$

$$y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(t - kT_s) + \underbrace{w(t)}_{\text{bruit coloré}}$$

avec: $g(t) = p(t) \star p(-t)^*$ $w(t) = p(-t)^* \star b(t)$

- Echantillonnage $y_n = y(nT_s)$ et en posant $g_n = g(nT_s)$,
 $w_n = w(nT_s)$:

$$y_n = \sum_k a_k g_{n-k} + w_n$$

Critère de Nyquist

- Avec $g_n = g(nT_s)$:

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{n-k} + \underbrace{w_n}_{\text{bruit coloré}}$$

- Pour éviter interférence entre symboles (ISI), il faut et il suffit que (en notant $g(t) \xrightarrow{\text{TF}} G(\nu)$):

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ g_k = 0, k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_k g_k e^{-i2\pi\nu T_s}}_{\frac{1}{T_s} \sum_k G(\nu + \frac{k}{T_s})} = 1 \quad \forall \nu \in \left[\frac{-1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s} \right]$$

$$\Rightarrow \text{critère de Nyquist: } \frac{1}{T_s} \sum_k G\left(\nu + \frac{k}{T_s}\right) = 1$$

Propriété et factorisation spectrale

- $g(t) = p(t) \star p(-t)^*$ (fonction autocorrélation déterministe)
- si $p(t)$ s'étale sur L symboles, $g(t)$ sur $2L$ symboles
- $g_n = g_{-n}^*$ et $G(z) = \sum_n g_n z^{-n}$ vérifie $G(z) = (G(1/z^*))^*$
- si ξ_0 est racine de $G(z)$, alors $1/\xi_0^*$ aussi
- ⇒ il existe une factorisation spectrale

$$G(z) = F(z)F(1/z^*)^* \quad \text{avec } F(z) = \alpha \prod_{n=1}^L (1 - \xi_n z^{-1})$$

(correspond à la factorisation d'une densité spectrale).

- Rq: en prenant dans $F(z)$ les L zéros à l'intérieur du cercle unité, on obtient $F(z)$ à minimum de phase.

Blanchiment

- On a le modèle discret:

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{n-k} + \underbrace{w_n}_{\text{bruit coloré}}$$

- si $g_k \xrightarrow{Tz} G(z) = F(z)F(1/z^*)^*$, alors le filtre $B(z) = \frac{1}{F(1/z^*)^*}$ permet de blanchir le bruit.

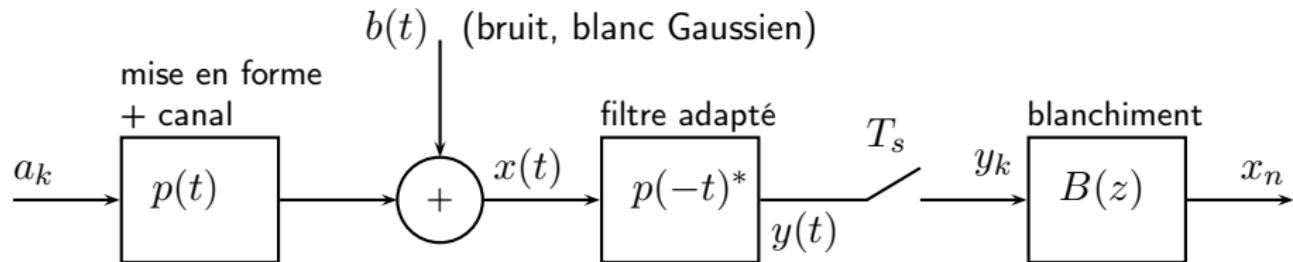
Preuve:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{w_k w_l^*\} &= \mathbb{E}\left\{\iint b(t)p(t - kT_s)^* b(\tau)p(\tau - lT_s) dt d\tau\right\} \\ &= 2N_0 \int p(t - kT_s)^* p(\tau - lT_s) dt = 2N_0 \int p(t)p(t - (k-l)T_s)^* dt \\ &= 2N_0 [p(t) \star p(-t)^*]_{(k-l)T_s} = 2N_0 g((k-l)T_s) = 2N_0 g_{k-l} \end{aligned}$$

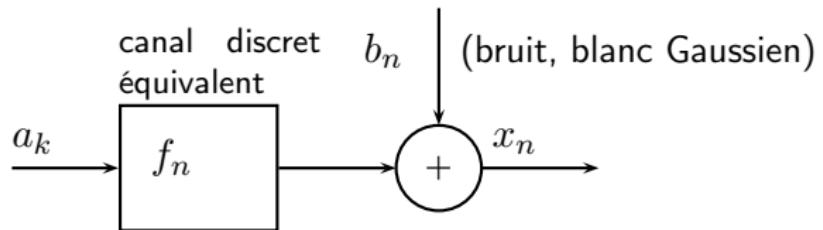
- Modèle après blanchiment:

$$x_n = \sum_k a_k f_{n-k} + b_n \quad \text{avec } b_n: \text{bruit blanc}$$

Résumé de la chaîne de traitement



Modèle équivalent:



$$x_n = \sum_k a_k f_{n-k} + \underbrace{b_n}_{\text{bruit blanc}}$$

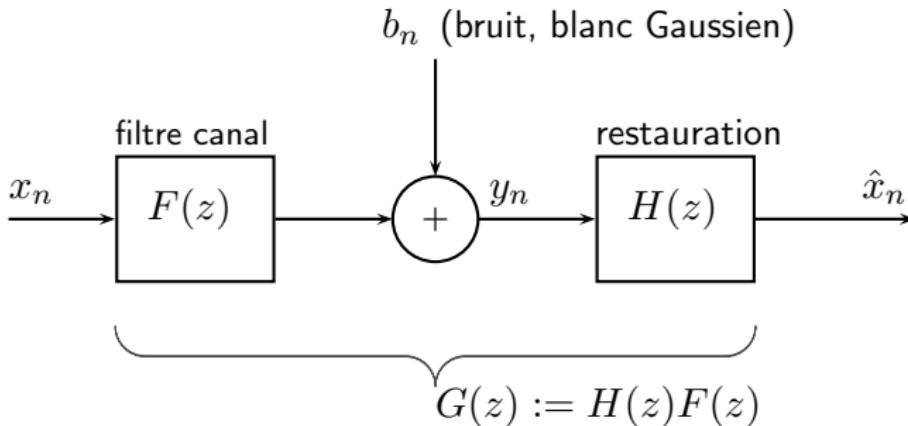
Insuffisances du modèle

- canal inconnu: filtrage adapté difficile, blanchiment délicat
- filtre non causaux et RII → tronquer RI et introduire retard
- choix des instants d'échantillonnage → problème de synchronisation
- - ▶ égalisation fractionnée (FSE: fractionnally spaced equalizer)
 - ▶ voir cours plus avancés ...

Critères d'égalisation et stratégies

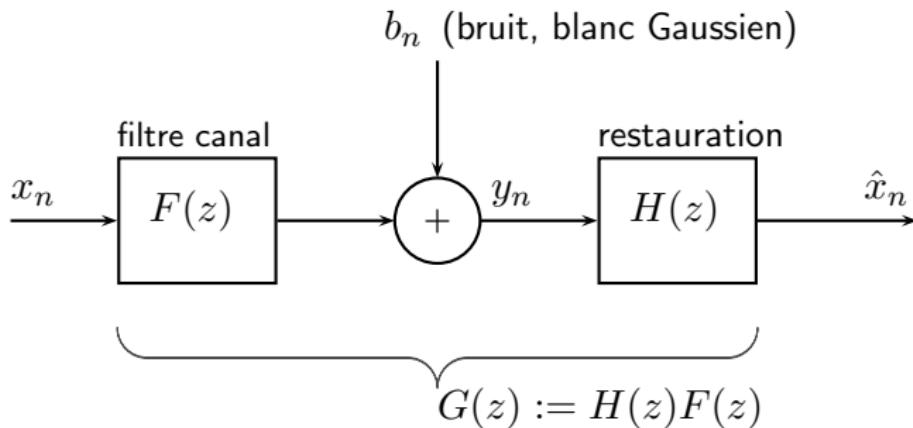
- Diagramme de l'oeil : qualitatif, empirique
- Probabilité d'erreur sur un symbole (BER: bit error rate)
 - ▶ critère le plus pertinent. Souvent, tracé de BER fonction du SNR
 - ▶ difficulté conception
 - ▶ égaliseur Optimum MLSE (maximum likelihood sequence estimation)
- Erreur quadratique moyenne (MSE: mean square error)
 - ▶ $MSE = \mathbb{E}\{|\hat{a}_n - a_n|^2\}$
 - ▶ pas de lien simple entre MSE et BER (mais en général bon BER si MSE faible)
 - ▶ égaliseur MMSE (minimum mean square error)
- Taux d'interférence entre symboles (ISI: inter-symbol interference)
 - ▶
$$ISI = \frac{\sum_{k \neq 0} |g_k|^2}{|g_0|^2}$$
 - ▶ le plus simple, utilisé quand autres critères non disponibles
 - ▶ égaliseur ZF (zero-forcing)

Modèle



- Signal non observé à reconstruire: $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
- Observations: $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
- Filtre dégradation: $F(z)$
- Filtre restauration: $H(z)$
- Chaîne globale: $G(z) = H(z)F(z)$
- Signal estimé après restauration: $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Modèle



- Signal non observé à reconstruire: $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
- Observations: $y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k x_{n-k} + b_n = f_n \star x_n + b_n$
- Signal estimé: $\hat{x}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k y_{n-k} = h_n \star y_n$
- Chaîne globale: $g_n = h_n \star f_n$

Expression matricielle du modèle

Canal RIF

- Canal supposé RIF (f_0, \dots, f_{K-1})
- Signal reçu: $y_n = \sum_{k=0}^{K-1} f_k x_{n-k} + b_n$
- Forme matricielle (avec ici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+K)}$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{K-1} & \dots & f_0 \\ f_{K-1} & \dots & f_0 \\ \ddots & & \ddots \\ & f_{K-1} & \dots & f_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{-K+1} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Filtre inverse

(égalisation ZF: Zero Forcing)

- Bruit négligé:

$$\hat{x}_n = h_n \star y_n \quad y_n = f_n \star x_n \text{ et donc puisque } g_n = h_n \star f_n:$$

$$\hat{x}_n = g_n \star x_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k x_{n-k} = g_0 x_n + \underbrace{\sum_{k \neq 0} g_k x_{n-k}}_{\text{interf. entre échantillons}}$$

- Objectif: annuler l'interférence ISI = $\frac{\sum_{n \neq 0} |g_n|^2}{|g_0|^2}$
 - Solution: $g_0 = 1$ et $g_k = 0, k \neq 0$ et donc $G(z) = 1$
- ⇒ le filtre inverse:

$$H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{F(z)}$$

annule les interférences entre échantillons successifs de x_n .

Filtre inverse en présence de bruit

- En présence de bruit:

$$\hat{x}_n = h_n \star y_n = h_n \star (f_n \star x_n + b_n)$$

$$\hat{x}_n = g_n \star x_n + h_n \star b_n = g_0 x_n + \underbrace{\sum_{k \neq 0} g_k x_{n-k}}_{=x_n \text{ si filtre inverse}} + \underbrace{h_n \star b_n}_{\text{bruit par le filtre inverse}}$$

- Filtre canal sélectif en fréquence: $F(e^{i\omega}) \xrightarrow[\omega \rightarrow \omega_0]{} 0$. Alors:

$$H_{\text{inv}}(e^{i\omega}) = \frac{1}{F(e^{i\omega})} \xrightarrow[\omega \rightarrow \omega_0]{} \infty$$

⇒ Amplification possible du bruit, éventuellement incontrôlée!

Filtre de Wiener

(égalisation MMSE: Minimum Mean Square Error)

- Estimation $n^{\text{ème}}$ symbole: $\hat{x}_n = h_n \star y_n = \sum_k h_k y_{n-k}$
- Erreur d'estimation: $\epsilon_n = x_n - \hat{x}_n$
- Objectif: minimiser erreur quadratique moyenne

$$\text{min. MSE} := \mathbb{E}\{|\epsilon_n|^2\}$$

→ projection orthogonale sur $\overline{\text{span}}\{y_{n-p}\}_{p \in \mathbb{Z}}$.

- Condition d'orthogonalité $\forall p$, $\epsilon_n \perp y_{n-p}$ donne équations vérifiées par la réponse impulsionnelle $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \gamma_{xy}(p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \gamma_y(p - k)$$

Expressions du filtre de Wiener (1/2)

- Réponse en fréquence:

$$H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = \frac{\Gamma_{xy}(e^{i\omega})}{\Gamma_y(e^{i\omega})}$$

Avec:

$\Gamma_y(e^{i\omega})$: densité spectrale de puissance de y_n

$\Gamma_{xy}(e^{i\omega})$: densité inter-spectrale de puissance de x_n et y_n

- Transformée en z :

$$H_{\text{Wiener}}(z) = \frac{\Gamma_{xy}(z)}{\Gamma_y(z)}$$

Expressions du filtre de Wiener (2/2)

- Hypothèses:

- ▶ signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. centré, $\mathbb{E}\{|x_n|^2\} = \sigma_x^2$
- ▶ bruit additif blanc Gaussien $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indépendant, puissance σ_b^2 (centré)
- ▶ $y_n = \sum_k f_k x_{n-k} + b_n$ et $f_k \xrightarrow{\text{Tz}} F(z)$.

- Réponse en fréquence:

$$H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = \frac{F(e^{i\omega})^*}{|F(e^{i\omega})|^2 + \sigma_b^2/\sigma_x^2}$$

- Transformée en z :

$$H_{\text{Wiener}}(z) = \frac{F(1/z^*)^*}{F(z)F(1/z^*)^* + \sigma_b^2/\sigma_x^2}$$

Comportement du filtre de Wiener

$$H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = \frac{F(e^{i\omega})^*}{|F(e^{i\omega})|^2 + \sigma_b^2/\sigma_x^2}$$

- Bruit faible $\frac{\sigma_b}{\sigma_x} \rightarrow 0$: $H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = H_{\text{inv}}(e^{i\omega})$ = filtre inverse.
- Bruit fort $\frac{\sigma_b}{\sigma_x} \rightarrow \infty$: $H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = 0$ (signal noyé sous le bruit, reconstruction impossible)
- Comportement intermédiaire entre les cas ci-dessus en fonction rapport signal/bruit $\frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2}$ et amplification/atténuation du filtre canal $|F(e^{i\omega})|^2$ à chaque fréquence ω .

Illustration

- Les trois canaux test A, B, C (Proakis).
- Simulation du filtre inverse (égaliseur ZF).
- Simulation du filtre de Wiener (égaliseur MMSE).

Filtre de Wiener RIF à horizon fini (1/2)

- Réponse impulsionnelle finie: $h_k = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, L-1\}$
- Filtrage: $\hat{x}_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k y_{n-k}$
- min. $\mathbb{E}\{|x_n - \hat{x}_n|^2\}$ donne:

$$\forall p \in \{0, \dots, L-1\} \quad \mathbb{E}\{(x_n - \hat{x}_n)y_{n-p}^*\} = 0$$

càd avec $\gamma_{xy}(p) := \mathbb{E}\{x_n y_{n-p}^*\}$ et $\gamma_y(p) := \mathbb{E}\{y_n y_{n-p}^*\}$:

$$\forall p \in \{0, \dots, L-1\} \quad \gamma_{xy}(p) = \sum_{k=0}^{L-1} h_k \gamma_y(p-k)$$

Filtre de Wiener RIF à horizon fini (2/2)

- Réponse impulsionnelle (h_0, \dots, h_{L-1}) donnée par:

$$\forall p \in \{0, \dots, L-1\} \quad \gamma_{xy}(p) = \sum_{k=0}^{L-1} h_k \gamma_y(p-k)$$

- Forme matricielle:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{xy}(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(L-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\underline{xy}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_y(0) & \gamma_y(-1) & \dots & \dots & \gamma_y(-L+1) \\ \gamma_y(1) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_y(-1) \\ \gamma_y(L-1) & \dots & \dots & \gamma_y(1) & \gamma_y(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\underline{yy}}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

- $\mathbf{h}_{\text{Wiener}} = \mathbf{R}_{\underline{yy}}^{-1} \mathbf{R}_{\underline{xy}}$

Expression matricielle du modèle

Canal RIF

- Canal supposé RIF (f_0, \dots, f_{K-1})
- Signal reçu: $y_n = \sum_{k=0}^{K-1} f_k x_{n-k} + b_n$
- Forme matricielle (avec ici $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+K)}$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{K-1} & \dots & f_0 \\ f_{K-1} & \dots & f_0 \\ \ddots & & \ddots \\ & f_{K-1} & \dots & f_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{-K+1} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Expression matricielle filtre de Wiener

- Forme matricielle: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$
 - ▶ \mathbf{A} : matrice donnée (ici: Toeplitz, taille $\mathbb{C}^{n \times p}$)
 - ▶ \mathbf{x} : suite d'échantillons i.i.d., $\mathbb{E}\{x_i\} = 0$, $\mathbb{E}\{|x_i|^2\} = \sigma_x^2$
 - ▶ \mathbf{b} : bruit i.i.d. indépendant de \mathbf{a} , $\mathbb{E}\{b_i\} = 0$, $\mathbb{E}\{|b_i|^2\} = \sigma_b^2$
- estimation: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_{\text{Wiener}} \mathbf{y}$ avec:

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} = \operatorname{Arg\,min}_{\mathbf{H}} \mathbb{E}\{\|\mathbf{Hy} - \mathbf{x}\|^2\}$$

- Après développement MSE, en posant $\lambda = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2}$:

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} = \operatorname{Arg\,min}_{\mathbf{H}} \operatorname{Tr} [(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})^H + \lambda \mathbf{HH}^H]$$

- Annulation gradient ou projection orthogonale sur $\operatorname{span} \mathbf{y}$ donnent:

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} = \mathbf{A}^H (\mathbf{AA}^H + \lambda \mathbf{Id})^{-1}$$

Filtre de Wiener

Calcul (1/2)

$\rightarrow \forall p, \epsilon_n \perp y_{n-p}$ d'où:

$$0 = \mathbb{E}\{\epsilon_n y_{n-p}^*\} = \mathbb{E}\left\{ \left(x_n - \sum_k h_k y_{n-k} \right) y_{n-p}^* \right\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\{x_n y_{n-p}^*\}}_{\gamma_{xy}(p)} - \sum_k h_k \underbrace{\mathbb{E}\{y_{n-k} y_{n-p}^*\}}_{\gamma_y(p-k)}$$

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \gamma_{xy}(p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \gamma_y(p-k) \text{ et après T.z:}$$

$$\Gamma_{xy}(z) = H(z) \Gamma_y(z) \text{ d'où: } H_{\text{Wiener}}(z) = \frac{\Gamma_{xy}(z)}{\Gamma_y(z)}$$

Filtre de Wiener

Calcul (2/2)

$$\gamma_{xy}(p) = \mathbb{E}\{x_n y_{n-p}^*\} = \mathbb{E}\left\{x_n \left(\sum_k x_k f_{n-p-k} + b_{n-p}\right)^*\right\} = \sigma_x^2 f_{-p}^*$$

d'où $\Gamma_{xy}(z) = \sigma_x^2 F(1/z^*)^*$

$$\gamma_y(p) = \mathbb{E}\{y_n y_{n-p}^*\} = \dots = \sigma_x^2 f_n \star f_{-n}^* + \sigma_b^2 \delta_p$$

d'où $\Gamma_y(z) = \sigma_x^2 F(z) F(1/z^*)^* + \sigma_b^2$

$$H_{\text{Wiener}}(z) = \frac{F(1/z^*)^*}{F(z) F(1/z^*)^* + \sigma_b^2 / \sigma_x^2}$$

$$H_{\text{Wiener}}(e^{i\omega}) = \frac{F(e^{i\omega})^*}{|F(e^{i\omega})|^2 + \sigma_b^2 / \sigma_x^2}$$

Détails calcul (1/3: MSE)

Modèle d'observation $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$
 $(\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times p}$ donnée, ici Toeplitz)

- \mathbf{x} : suite d'échantillons i.i.d., $\mathbb{E}\{x_i\} = 0$, $\mathbb{E}\{|x_i|^2\} = \sigma_x^2$
- \mathbf{b} : bruit i.i.d. indépendant de \mathbf{x} , $\mathbb{E}\{b_i\} = 0$, $\mathbb{E}\{|b_i|^2\} = \sigma_b^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\|\mathbf{Hy} - \mathbf{x}\|^2\} &= \mathbb{E}\{\|(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})\mathbf{x} + \mathbf{Hb}\|^2\} \\ &= \mathbb{E}\{\text{Tr} [(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})\mathbf{x} + \mathbf{Hb})(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})\mathbf{x} + \mathbf{Hb}]^H\} \\ &= p\sigma_x^2 \text{Tr} [(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})^H] + p\sigma_b^2 \text{Tr} [\mathbf{HH}^H]\end{aligned}$$

et donc avec $\lambda = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\text{Wiener}} &= \text{Arg min}_{\mathbf{H}} \text{Tr} [(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})(\mathbf{HA} - \mathbf{Id})^H + \lambda \mathbf{HH}^H] \\ &= \text{Arg min}_{\mathbf{H}} \mathbb{E}\{\|\mathbf{Hy} - \mathbf{x}\|^2\}\end{aligned}$$

Détails calcul (2/3: gradient)

Critère MSE: $\mathcal{J}(\mathbf{H}) = \text{Tr} \left[(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id})(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id})^H + \lambda \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{H} + \mathbf{E}) &= \text{Tr} \left[(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id} + \mathbf{E}\mathbf{A})(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id} + \mathbf{E}\mathbf{A})^H \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\mathbf{H} + \mathbf{E})(\mathbf{H} + \mathbf{E})^H \right] \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{H}) + \text{Tr} \left[(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id})\mathbf{A}^H \mathbf{E}^H + \mathbf{E}\mathbf{A}(\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id})^H \right. \\ &\quad \left. + \lambda(\mathbf{H}\mathbf{E}^H + \mathbf{E}\mathbf{H}^H) \right] + o(\mathbf{E}) \end{aligned}$$

d'où la dérivée:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \overline{\mathbf{H}}} = (\mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{Id})\mathbf{A}^H + \lambda \mathbf{H}.$$

Annulation de la dérivée pour $\mathbf{H}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H + \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{A}^H$ et donc:

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} = \text{Arg min}_{\mathbf{H}} \mathcal{J}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H + \lambda \mathbf{Id})^{-1}$$

Détails calcul (3/3: projection orthogonale)

- $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_{\text{Wiener}} \mathbf{y}$ est tel que $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ càd:

$$\mathbb{E}\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\mathbf{y}^H\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{H}_{\text{Wiener}} \mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{y}^H\} = \mathbf{0} \quad \text{d'où:}$$

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{y}\} \text{ donc:}$$

- En utilisant les hypothèses du modèle $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^H\} = \sigma_x^2 \mathbf{A}\mathbf{A}^H + \sigma_b^2 \mathbf{I}\mathbf{d}$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{y}^H\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^H\} = \sigma_x^2 \mathbf{A}^H$$

- Finalement avec $\lambda = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_x^2}$:

$$\mathbf{H}_{\text{Wiener}} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{y}\} \mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\}^{-1} = \mathbf{A}^H (\mathbf{A}\mathbf{A}^H + \lambda \mathbf{I}\mathbf{d})^{-1}$$

Part III

Linear models

Approximation problem

Given a signal with samples \mathbf{y} in \mathbb{R}^m , find its best linear representation on a signal basis $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$:

$$\mathbf{y} \approx x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Norm minimization problem:

$$\min_{\mathbf{x}} \| \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} \|$$

where $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with $m \geq n$.

Interpretations of $\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \| \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} \|$:

- geometric: $\mathbf{A}\mathbf{x}^*$ is the point in $\text{Span}(\mathbf{A})$ closest to \mathbf{y} .
- estimation: linear measurement $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ where \mathbf{n} is a measurement error or additive noise and \mathbf{x} unknown.
- optimal design/synthesis: \mathbf{x} are variables, $\mathbf{A}\mathbf{x}$ is result; \mathbf{x}^* is design that gives best desired result \mathbf{y} .

Norm minimization

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|$$

with $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.

- $\|\cdot\|_2$ norm: least-squares approximation. Solution satisfies:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{Ax}^* = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$$

and if $\text{rank } \mathbf{A} = n$, $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$.

- $\|\cdot\|_\infty$ norm: Chebyshev approximation.
- $\|\cdot\|_1$ norm: minimize sum of absolute residuals.

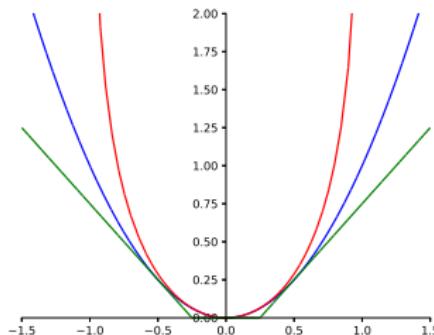
Rq: no analytic solution to last two problems, but can be solved as LPs.

Penalty function approximation

$$\begin{aligned} & \text{min. } \phi(r_1) + \cdots + \phi(r_m) \\ & \text{s.t. } \mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{y} \end{aligned}$$

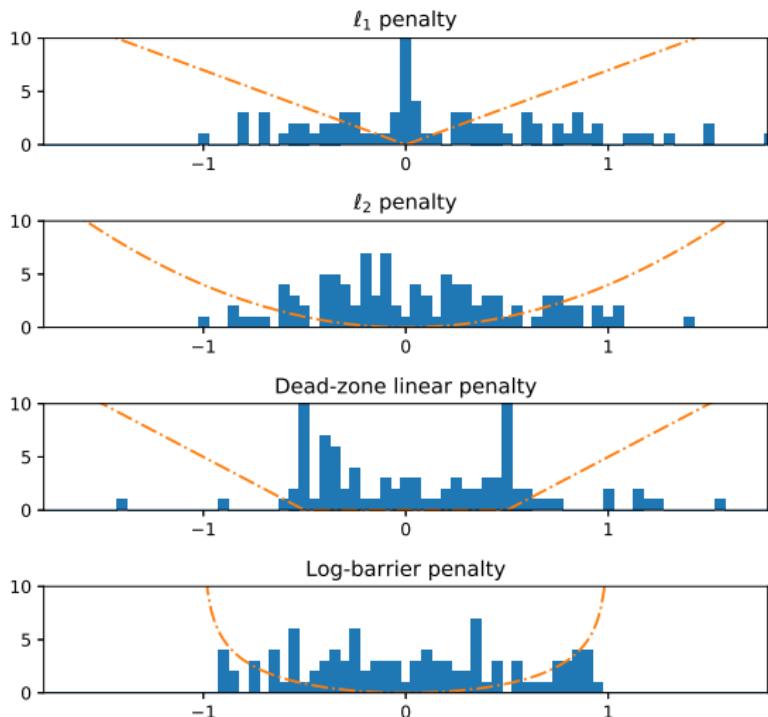
with $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and ϕ a convex penalty function.

- **quadratic**: $\phi(u) = u^2$
- **dead-zone linear**: $\phi(u) = [|u| - \alpha]_+$
- **log-barrier**: $\phi(u) = \begin{cases} -a^2 \log(1 - (\frac{u}{a})^2) & |u| < a, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$



Penalty function approximation

Residuals histograms for the different penalties



Robustness, robust regression

- Outlier: measurement $y_i = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + n_i$ with large noise value n_i .
- Penalty function that avoid sensitivity to outliers:

$$\phi(u) = \begin{cases} u^2 & |u| < M, \\ M^2 & |u| \geq M. \end{cases}$$

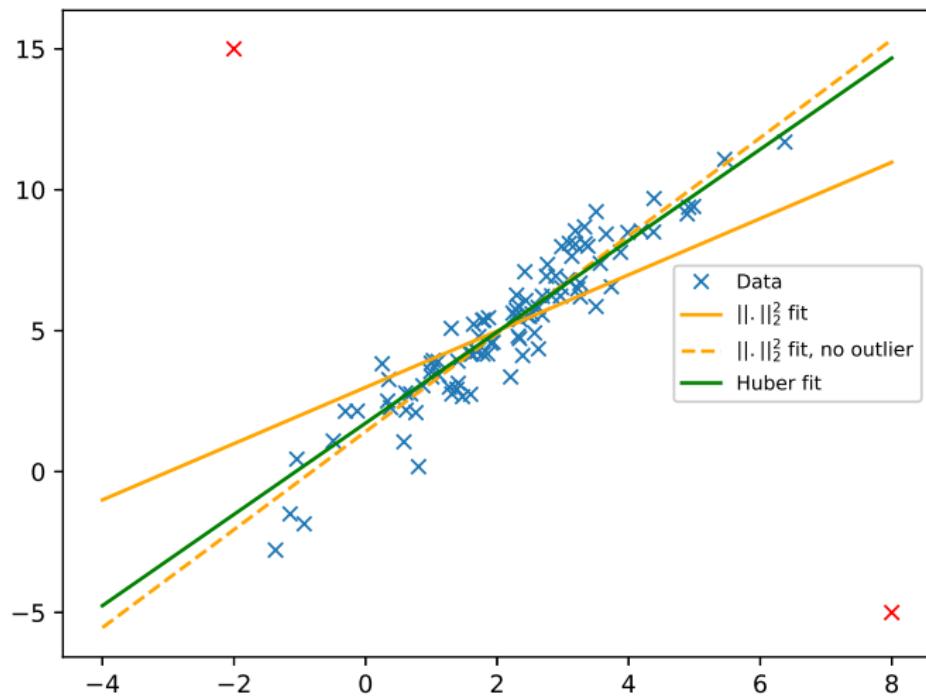
Non convex!

- **Huber** penalty function:

$$\phi_{\text{hub}}(u) = \begin{cases} u^2 & |u| < M, \\ M(2|u| - M) & |u| \geq M. \end{cases}$$

Robust regression

Example



Least-norm problems

$$\begin{aligned} & \min. \| \mathbf{x} \| \\ & \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

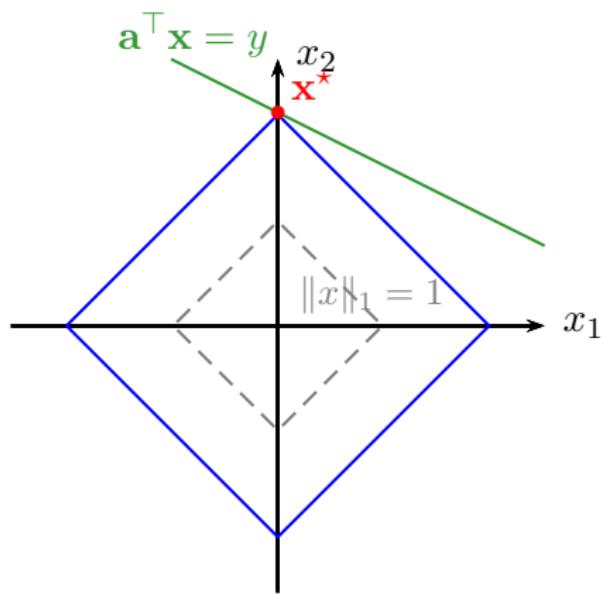
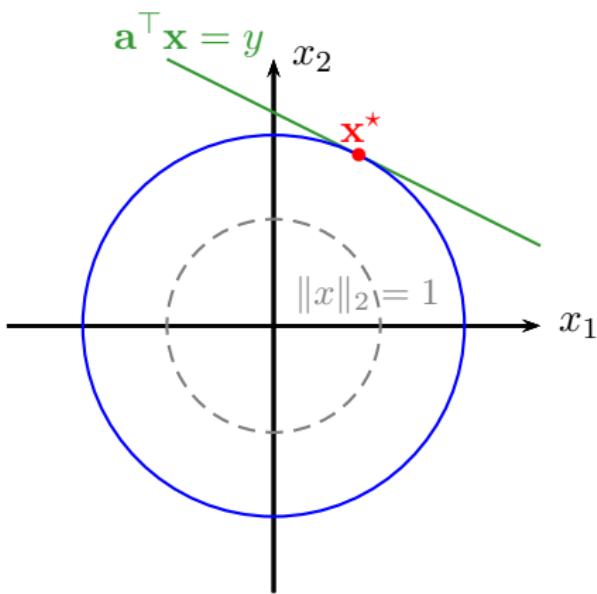
with $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$.

- $\| \cdot \|_2$: least-squares solution of linear equations.
can be solved via optimality conditions.
- $\| \cdot \|_1$: minimum sum of absolute values: tends to produce a **sparse** solution.
can be solved as an LP.

Comparison between ℓ_2 and ℓ_1 norms

$$\text{min. } \|\mathbf{x}\|$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = y$$



Interpretation of ℓ_1 as a convex relaxation

- Original ℓ_0 cardinality problem:

$$\begin{cases} \min. \|\mathbf{x}\|_0 \\ \text{s.t. } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq R \\ \mathbf{x} \in \mathcal{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min. \mathbf{1}^\top z \\ \text{s.t. } |x_i| \leq Rz_i \\ x \in \mathcal{C}, \quad z_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

- Relaxation of ℓ_0 to ℓ_1 :

$$\begin{cases} \min. \mathbf{1}^\top z \\ \text{s.t. } |x_i| \leq Rz_i \\ x \in \mathcal{C}, \quad 0 \leq z_i \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min. \frac{1}{R} \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t. } x \in \mathcal{C} \end{cases}$$

Iterated weighted ℓ_1

- Cardinality problem: $\min. \|\mathbf{x}\|_0$ s.t. $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$
- Iterated weighted ℓ_1 : Set $\mathbf{w} = \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned} & \min. \|\text{diag}(\mathbf{w})\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ & w_i := 1/(\epsilon + |x_i|) \end{aligned}$$

- Interpretation for $\mathbf{x} \succeq 0$ (no loss of generality: $x = x^+ - x^-$): Approximate ℓ_0 with $\log(1 + \cdot)$

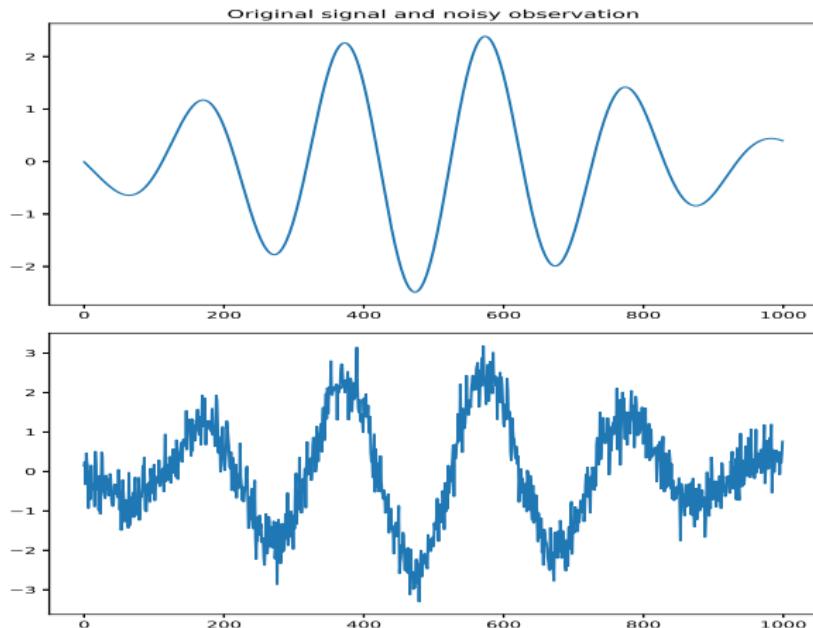
$$\min. \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{x_i}{\epsilon}\right) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{x} \succeq 0$$

and linearize at current iteration point:

$$\log\left(1 + \frac{x_i}{\epsilon}\right) \approx \log\left(1 + \frac{x_i^{(k)}}{\epsilon}\right) + \frac{x_i - x_i^{(k)}}{\epsilon + x_i^{(k)}}$$

Signal reconstruction problem

- Observed signal: $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{n}$ where \mathbf{n} is noise.



- Objective: reconstruct the unknown signal $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$

Signal reconstruction

- Observed signal: $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{n}$ where \mathbf{n} is noise.
- Objective: reconstruct the unknown signal $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$
- Minimize two objectives (w.r.t. \mathbf{x}):
 - ▶ data fidelity term: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
 - ▶ regularization term: $\phi(\mathbf{x})$ where $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- Penalized criterion minimization: $\min. \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\phi(\mathbf{x})$
- Examples:

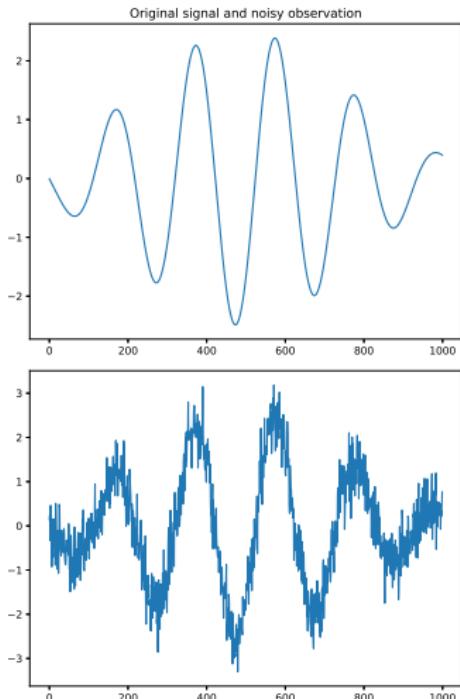
quadratic smoothing

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

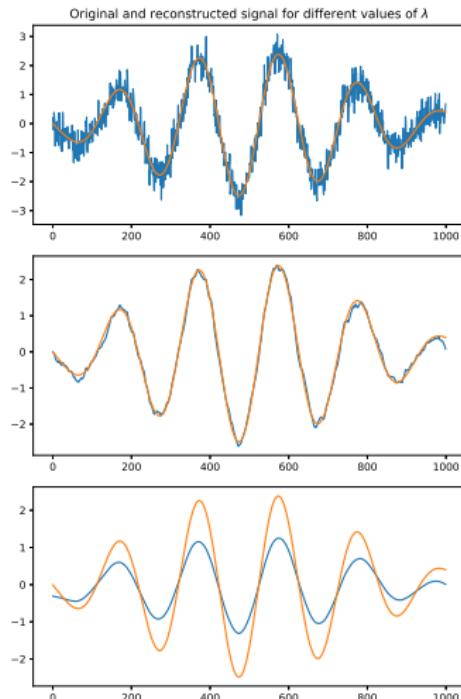
total variation denoising

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

Quadratic smoothing (example 1)

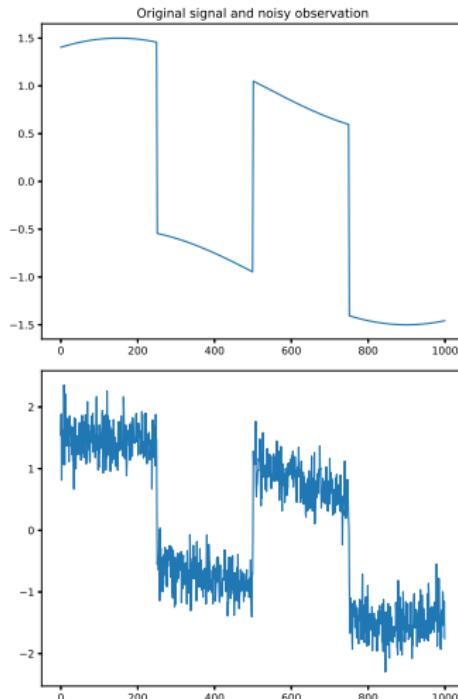


original and noisy signal

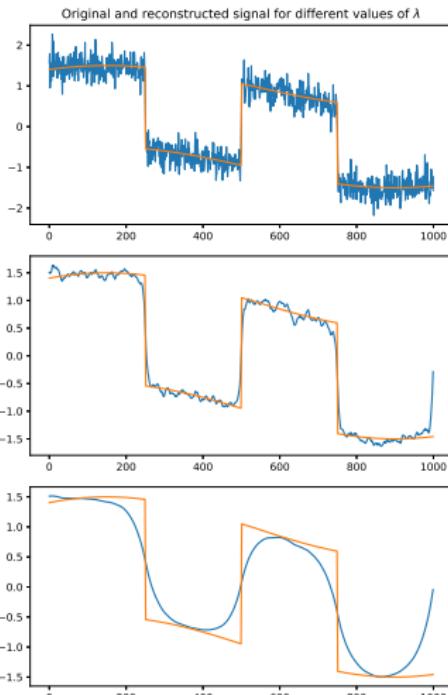


three reconstructed signals
for different λ

Quadratic smoothing (example 2)

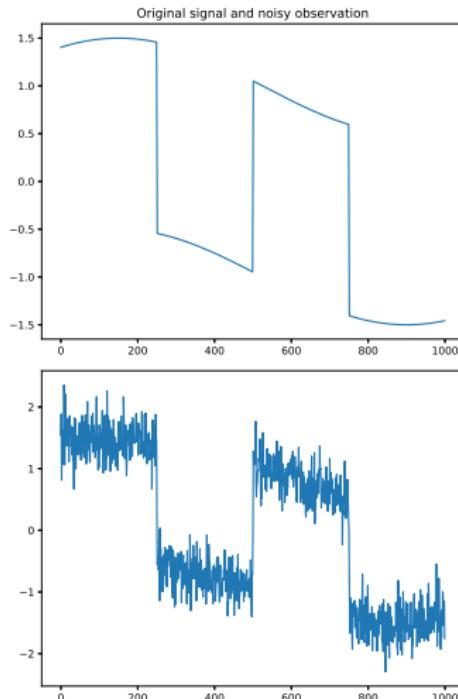


original and noisy signal

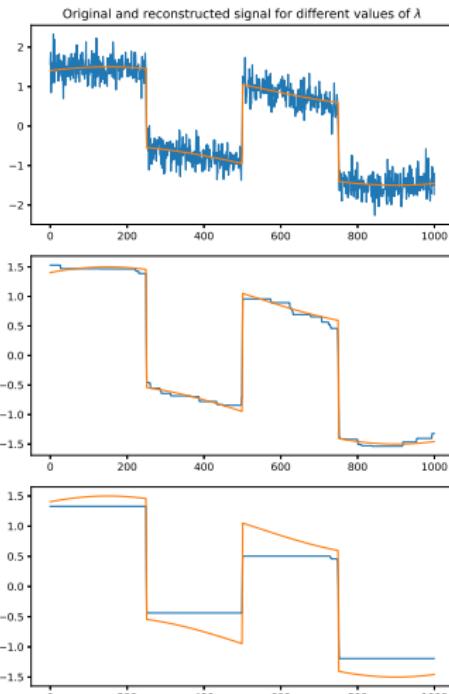


three reconstructed signals
for different λ

Total variation denoising



original and noisy signal



three reconstructed signals
for different λ

Maximum likelihood estimation

- Gaussian noise: least-squares, best linear unbiased estimator (BLUE)
- Laplacian noise: ℓ_1 norm approximation
- uniform noise: ℓ_∞ norm

Maximum a posteriori estimation

- Gaussian noise:
- Gaussian regularization: RIDGE estimator (link with MMSE/Wiener filtering)
- Laplace regularization: ℓ_1 prior term
- uniform prior: ℓ_∞ constraint

Perfect (non noisy) observations:

- Gaussian prior: least ℓ_2 solution
- Laplace prior: least ℓ_1 solution, link with basis pursuit/compressive sensing

Maximum likelihood

Parametric estimation

- Observation: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$; unknown parameter to be estimated
- Parametric probability law: $\mathbf{y} \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$

Maximum likelihood. For a given realization of \mathbf{y}

- likelihood: $\boldsymbol{\theta} \mapsto p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$
- log-likelihood: $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$
- maximum likelihood estimator:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}} &= \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{\theta}} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \\ &= \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

Remark: If above maximization is a convex problem, constraint $\boldsymbol{\theta} \in C$ with C convex can be added.

Observation model

Assumed model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b} \quad \text{where:}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \text{ i.i.d.}$$

- ▷ **linear model with additive noise** reads also ($\forall i = 1, \dots, m$)
 $y_i = \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta} + b_i$ with b_i i.i.d. noise with pdf $b_i \sim p_b(\cdot)$ and \mathbf{a}_i given.
- ▷ Likelihood: $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta})$
- ▷ Log-likelihood: $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^m \log p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta})$

Gaussian noise

Assume noise $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, that is $p_b(\cdot) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\cdot)^2}{2\sigma^2}}$.

▷ Log-likelihood:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^m \log p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta})^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \underbrace{-\frac{m}{2} \log(2\pi\sigma^2)}_{\text{cst.}} - \frac{1}{2\sigma^2} \underbrace{\sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta})^2}_{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2}\end{aligned}$$

▷ Maximum likelihood estimator is least-squares / least ℓ_2 norm approximation:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}} = \operatorname{Arg} \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 := \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ls}}$$

See properties of least-squares / "BLUE" estimator in exercise.

Laplace noise

Assume noise has density $p_b(.) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|.|}{\alpha}}$ ($\alpha > 0$ given)

- ▷ Log-likelihood:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^m \log p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[-\log(2\alpha) - \frac{|y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}|}{\alpha} \right] \\
 &= \underbrace{-m \log(2\alpha)}_{\text{cst.}} - \frac{1}{\alpha} \underbrace{\sum_{i=1}^m |y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}|}_{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_1}
 \end{aligned}$$

- ▷ Maximum likelihood estimator is least ℓ_1 norm approximation:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}} = \operatorname{Arg} \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_1$$

Uniform noise

Assume uniform noise with density $p_b(\cdot) = \frac{1}{2\alpha} \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\cdot)$ ($\alpha > 0$ given)

▷ Likelihood:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{2\alpha} \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\alpha)^m} & \forall i, -\alpha \leq y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta} \leq \alpha \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

▷ Maximum likelihood estimator such that $-\alpha \leq y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta} \leq \alpha$ for all $i = 1, \dots, m$ is given by ℓ_∞ norm minimization:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}} &= \operatorname{Arg min}_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_\infty \\ \text{given by: } &\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ML}}\|_\infty \leq \alpha \end{aligned}$$

Maximum a posteriori

- Observation: $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$; unknown parameter to be estimated is a **random variable**.

Prior density: $p(\boldsymbol{\theta}) = \int p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$

- Posterior density: $p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})}{p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})}$
- Maximum a posteriori. For a given realization of \mathbf{y} :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} &= \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}/\mathbf{y}) \\ &= \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) \quad \text{taking log:}\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{\theta}} \left[\log p(\boldsymbol{\theta}) + \operatorname{log} p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) \right]$$

- $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) \leftrightarrow p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$ is the likelihood term.

Observation model

Assumed model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b} \quad \text{where:}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \text{ i.i.d.}$$

- ▷ linear model with independent additive noise reads also $(\forall i = 1, \dots, m) y_i = \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta} + b_i$ with b_i i.i.d. noise with pdf $b_i \sim p_b(\cdot)$ and \mathbf{a}_i given.
- ▷ Joint distribution: $p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^m p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta})$
- ▷ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \text{Arg max}_{\boldsymbol{\theta}} \left[\log p(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^m \log p_b(y_i - \mathbf{a}_i^\top \boldsymbol{\theta}) \right]$

Gaussian prior: RIDGE estimator

- Assumption:
- noise $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I})$
 - prior $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{I})$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \propto \exp \left[-\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|_2^2}{2\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^2} \right] \exp \left[-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2}{2\sigma_b^2} \right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{Arg\,min}} \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^2} \|\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \right]$$

Defining, $\lambda = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^2}$ above estimator known as «RIDGE»:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{ridge}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{Arg\,min}} \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \right]$$

Above cost is the sum of:

- data fidelity term \leftrightarrow fit to the data
- regularization / penalization term \leftrightarrow prior distribution / information

See properties of RIDGE compared to least-squares in exercise.

Double exponential prior: LASSO estimator

Assumption:

- noise $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$
- prior $\boldsymbol{\theta} \sim \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|\theta_j|}{2\alpha}}$ (iid + Laplace)

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} \sum_{j=1}^n |\theta_j| \right] \exp \left[-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2}{2\sigma_b^2} \right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \operatorname{Arg} \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \frac{\sigma_b^2}{\alpha} \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \right]$$

Defining, $\lambda = \frac{\sigma_b^2}{\alpha}$ above estimator known as «LASSO»:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{lasso}} = \operatorname{Arg} \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \right]$$

Above cost is the sum of:

- data fidelity term \leftrightarrow fit to the data
 - regularization / penalization term \leftrightarrow prior distribution / information
- ℓ_1 -norm promotes **sparse** solutions

Uniform prior

- Assumption:
- noise $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$
 - prior $\boldsymbol{\theta} \sim \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\alpha} \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\theta_j)$ (iid + uniform)

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \propto \prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\theta_j) \exp \left[-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2}{2\sigma_b^2} \right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \underset{\|\boldsymbol{\theta}\|_\infty \leq \alpha}{\operatorname{Arg\,min}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2^2$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}}$ is constrained least-squares

Perfect linear observations

- Assumption:
- **no noise:** $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - prior $\boldsymbol{\theta} \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$

If $m \geq n$, more equations than unknowns, at most one solution to $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$.

If $m < n$, less equations than unknowns and:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{Arg\,min}} \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \text{ s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$$

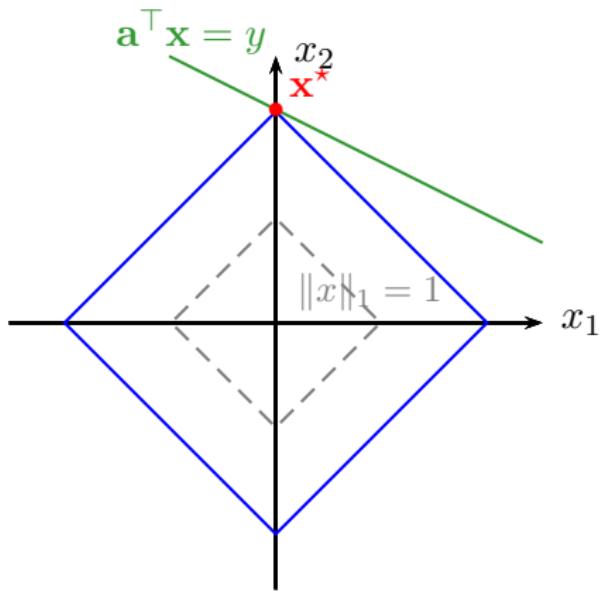
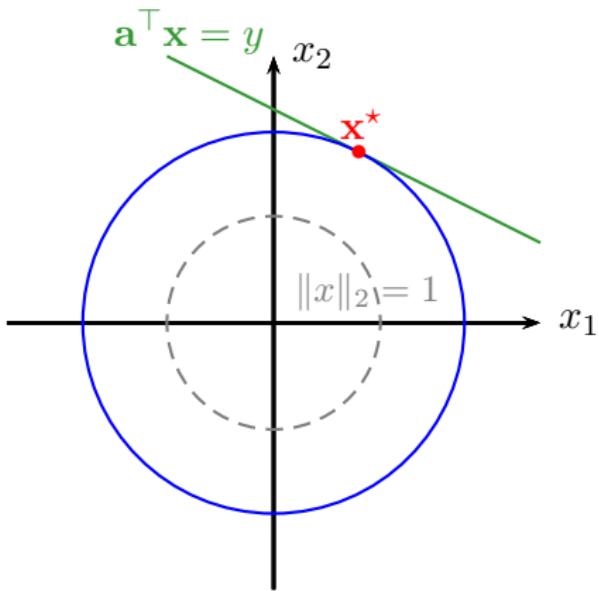
- If $\boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{Id})$: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{Arg\,min}} \|\boldsymbol{\theta}\|_2^2$ s.t. $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$
(least ℓ_2 -norm solution to linear equation)
- If $\boldsymbol{\theta} \sim \text{double-exponential}$: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{Arg\,min}} \|\boldsymbol{\theta}\|_1$ s.t. $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$
(least ℓ_1 -norm solution to linear equation: basis pursuit)

Comparison ℓ_2 vs ℓ_1 norm: ℓ_1 promotes sparse solutions

Comparison between ℓ_2 and ℓ_1 norms

$$\text{min. } \|\mathbf{x}\|$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = y$$



Part IV

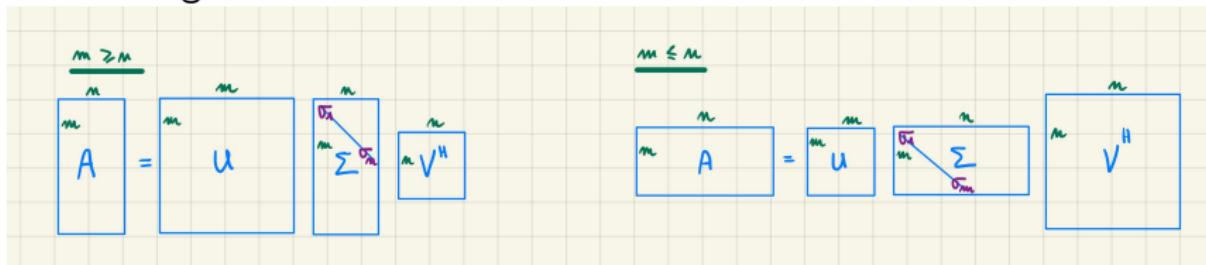
Principal Component Analysis

Singular Value Decomposition (SVD)

Any matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ can be factorized:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$$

- $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitary matrices ¹
- $\Sigma = \text{Diag}(\sigma_i)_{i=1}^{\min(m,n)}$ diagonal
- $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$ are **singular values**: unique and square roots of eigenvalues of $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ or $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$.



- With $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]$ and $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$, sum of rank-1 matrices:

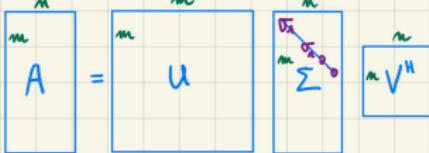
$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H$$

¹ $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{Id}_m$ and $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{Id}_n$

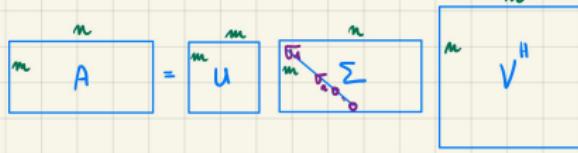
"Economy size" SVD

If $\text{rank } \mathbf{A} = r$, then $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m,n)} = 0$ and $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H$

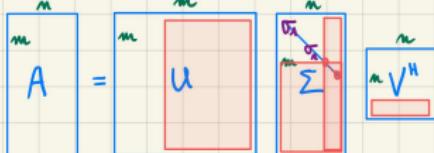
$$\underline{m \geq n \quad \text{rank } A = r}$$



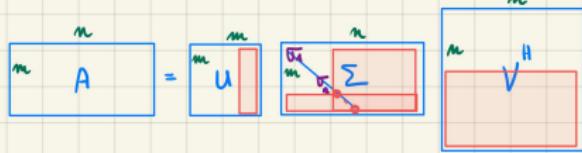
$$\underline{m \leq n \quad \text{rank } A = r}$$



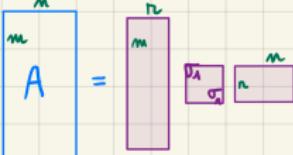
$$\underline{m \geq n \quad \text{rank } A = r}$$



$$\underline{m \leq n \quad \text{rank } A = r}$$



$$\underline{m \geq n \quad \text{rank } A = r}$$



$$\underline{m \leq n \quad \text{rank } A = r}$$



Matrix norms

Write SVD decomposition: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ $\Sigma = \text{Diag}(\sigma)$, with singular values vector $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}$.

- ℓ_2 (or **Schur/spectral**) norm: $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^r \sigma_i$.

Prop: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$ is the **operator norm**.

- **Frobenius** norm: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$.

Prop: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{A}]}$ corresponds to scalar product $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \text{Tr}[\mathbf{X}^H \mathbf{Y}]$.

- **nuclear** norm (or trace norm): $\|\mathbf{A}\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i$

- Norm on matrix \leftrightarrow norm on vector of singular values:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\sigma\|_\infty \quad \|\mathbf{A}\|_F = \|\sigma\|_2 \quad \|\mathbf{A}\|_* = \|\sigma\|_1$$

Eckart-Young theorem

Let $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ or rank r and let $\|\cdot\|$ be either $\|\cdot\|_2$ or $\|\cdot\|_F$. Write $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ the SVD.

The solution to:

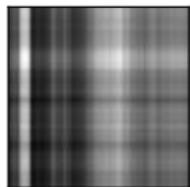
$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|\mathbf{A} - \mathbf{X}\| \quad \text{s.t. } \text{rank } \mathbf{X} \leq p$$

is given by $\mathbf{X}_p = \mathbf{U}\Sigma_p\mathbf{V}^H$ where Σ_p obtained from Σ by setting the $r - p$ smallest singular values to zero: $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_r = 0$

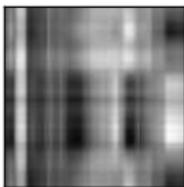
Low-rank approximation

Example on on image

1 sing. val.



2 sing. val.



4 sing. val.



8 sing. val.



16 sing. val.



32 sing. val.



64 sing. val.



128 sing. val.



All 512 sing. val.



PCA: Maximizing variance

Random $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, centered, covariance $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top$ with $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)_{i=1}^n$ and $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, \mathbf{U} orthogonal.

Objective: find uncorrelated and maximal variance linear combinations of \mathbf{x}
 \rightsquigarrow find unit norm vectors $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^p$ such that:

- $y_1 = \mathbf{w}_1^\top \mathbf{x}$: $\mathbb{E}\{y_1^2\}$ is maximal $\rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$
- $y_2 = \mathbf{w}_2^\top \mathbf{x}$: $\mathbb{E}\{y_2 y_1\} = 0$ and $\mathbb{E}\{y_2^2\}$ is maximal $\rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$
- $y_3 = \mathbf{w}_3^\top \mathbf{x}$ such that: $\mathbb{E}\{y_3 y_1\} = \mathbb{E}\{y_3 y_2\} = 0$ and $\mathbb{E}\{y_3^2\}$ maximal
 $\rightarrow \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3$
- ...

Solution:

$\mathbb{E}\{y_1^2\} = \mathbf{w}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_1$ yields:

$$\mathbf{w}_1 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|_2=1} \mathbf{w}_1^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$$

PCA: Maximizing variance

Random $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, centered, covariance $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top$ with $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)_{i=1}^n$ and $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, \mathbf{U} orthogonal.

Objective: find uncorrelated and maximal variance linear combinations of \mathbf{x}
 \rightsquigarrow find unit norm vectors $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^p$ such that:

- $y_1 = \mathbf{w}_1^\top \mathbf{x}$: $\mathbb{E}\{y_1^2\}$ is maximal $\rightarrow \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$
- $y_2 = \mathbf{w}_2^\top \mathbf{x}$: $\mathbb{E}\{y_2 y_1\} = 0$ and $\mathbb{E}\{y_2^2\}$ is maximal $\rightarrow \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$
- $y_3 = \mathbf{w}_3^\top \mathbf{x}$ such that: $\mathbb{E}\{y_3 y_1\} = \mathbb{E}\{y_3 y_2\} = 0$ and $\mathbb{E}\{y_3^2\}$ maximal
 $\rightarrow \mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3$
- ...

Solution:

$\mathbb{E}\{y_2^2\} = \mathbf{w}_2^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_2$ and $\mathbb{E}\{y_2 y_1\} = \mathbf{w}_2^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{w}_2^\top \mathbf{u}_1$ yield:

$$\mathbf{w}_2 = \arg \max_{\|\mathbf{w}\|_2=1, \mathbf{w}^\top \mathbf{u}_1=0} \mathbf{w}_2^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$$

PCA: Minimizing quadratic error

Random $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, centered, covariance $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\}$

Objective: find p -dimensional linear subspace $\subset \mathbb{R}^n$ such that projection of \mathbf{x} minimizes quadratic error:

$$\min_{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p} \mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^p (\mathbf{w}_i^\top \mathbf{x}) \mathbf{w}_i \right\|_2^2 \right\}$$

where $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ orthonormal basis ($\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \mathbf{Id}_p$).

$$\underbrace{\mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^p (\mathbf{w}_i^\top \mathbf{x}) \mathbf{w}_i \right\|_2^2 \right\}}_{\text{minimize error}} = \text{Tr}(\mathbf{C}) - \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbf{w}_i^\top \mathbf{C} \mathbf{w}_i}_{\text{maximize variance}}$$

→ similar to previous problem, same solution.

Whitening

Random $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, centered, covariance $\mathbf{C} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top$
 with $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n]$ orthogonal.

Let $\mathbf{y} = \mathbf{W}^\top \mathbf{x}$.

- With PCA, $\mathbf{W} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_p]$:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^\top\} = \mathbf{W}^\top \mathbf{C} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Data has been decorrelated.

- With $\mathbf{W} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_p] \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p^{-1/2} \end{bmatrix}$:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^\top\} = \mathbf{Id}_p$$

Data has been whitened.

Empirical data point of view

- $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T] \in \mathbb{R}^{n \times T}$: set of T vector samples
- Empirical covariance $\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{T}\mathbf{XX}^\top$
- For any $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_p]$ with orthonormal columns:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underbrace{\left\| \mathbf{x}_t - \sum_{i=1}^p (\mathbf{w}_i^\top \mathbf{x}_t) \mathbf{w}_i \right\|_2^2}_{\text{quadratic error}} = \text{Tr}(\hat{\mathbf{C}}) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \underbrace{\|\mathbf{W}^\top \mathbf{x}_t\|_2^2}_{\text{norm of projection}}$$

→ minimize quadratic error \leftrightarrow maximize norm of projection

SVD based PCA

Compute "economy size" SVD of set of T vector samples

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T] \in \mathbb{R}^{n \times T} :$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$$

where $\text{rank } \mathbf{X} = p$ and $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \end{bmatrix}$

- Empirical covariance: $\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{T}\mathbf{X}\mathbf{X}^\top = \frac{1}{T}\mathbf{U}\Sigma^2\mathbf{U}^\top$
- PCA readily obtained (vectors in \mathbf{U})
- $\mathbf{W} = \mathbf{U}\Sigma^{-1}$ is a whitening matrix and $\mathbf{Y} = \mathbf{W}^\top\mathbf{X}$
- If $p < n$, rows of \mathbf{X} linearly dependent and $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times T}$: dimension reduction has been performed.

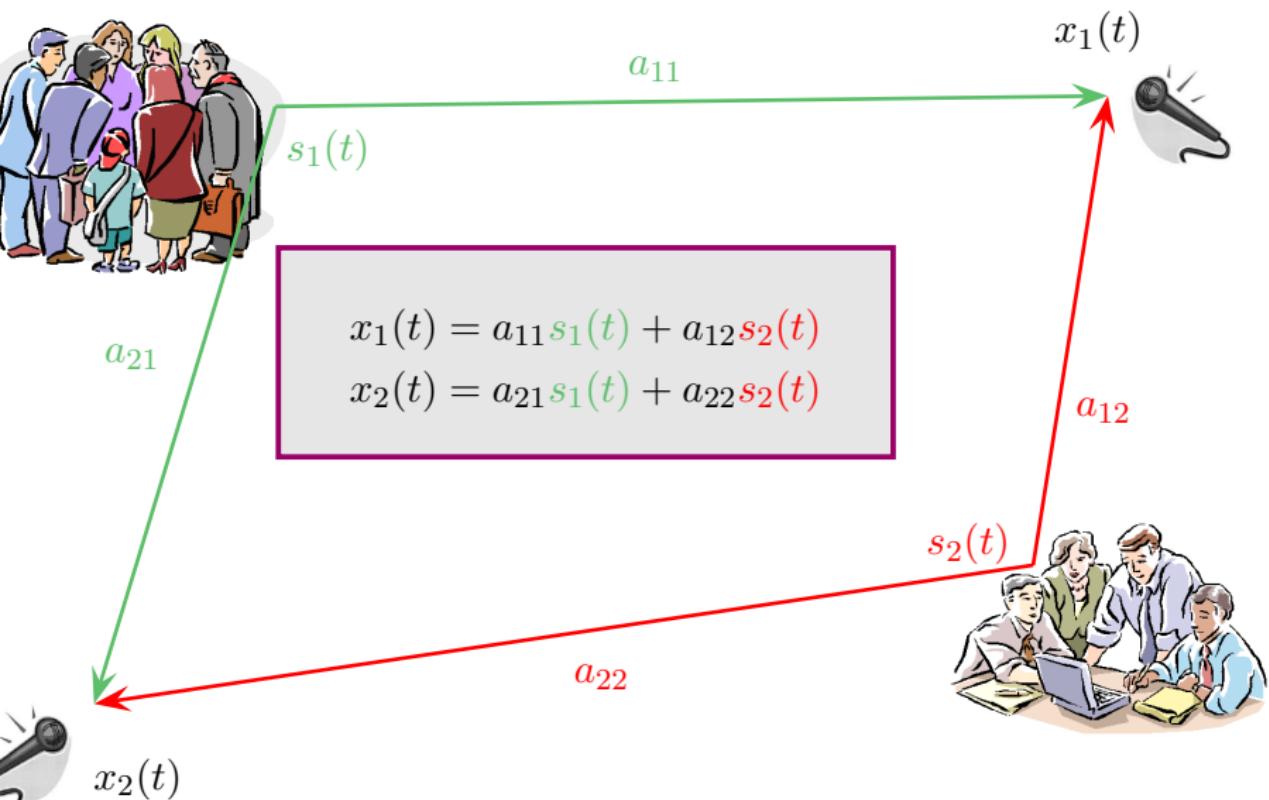
Example on MNIST dataset



Part V

Independent Component Analysis

«Cocktail party» problem



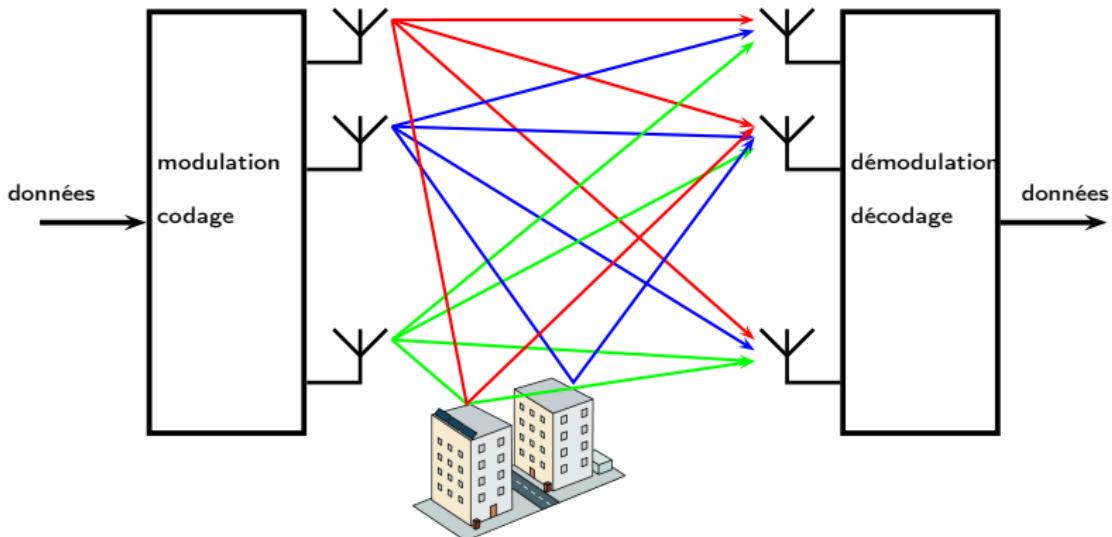
Mélange linéaire instantané

- $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$: vecteur des **sources**
- $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$: vecteur des **observations**
- \mathbf{A} : **matrice de mélange** de taille 2×2
- lien sources - observations:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

↔ Plus généralement dans ce cours:
nombre de sources = nombre d'observations = $N \geq 2$

- Transmission hertzienne «classique»: 1 émetteur - 1 récepteur
- Cas MIMO: multi intput - multi output



- ⇒ augmenter la fiabilité et le débit pour les réseaux locaux sans fils, téléphonie mobile, ...

Autres applications possibles

- Parole, audio, son
- Image : décomposition d'une image, watermarking
- Biomédical :
 - ▶ magnéto- et électroencéphalographie et/ou IRMf (reconstruction des sources neuronales)
 - ▶ électrocardiogramme du fœtus
- Télécommunications
- Cosmologie: extraction du CMB (Cosmic Microwave Background)
- Sismique, géophysique
- *etc.*

Cadre aveugle

- Modèle instantané considéré:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{As}(t) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} s_1(t) + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} s_2(t)$$

- But : reconstruire les sources $s_1(t), s_2(t)$ à partir des observations $x_1(t), x_2(t)$, càd trouver \mathbf{B} tel que:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Bx}(t) \quad \text{et:} \quad \mathbf{y}(t) \leftrightarrow \mathbf{s}(t)$$

- Approches possibles:

- ▶ Connaissances sur le mélange (modèle physique de propagation, ...) : problème de reconstruction inverse.
- ▶ **Pas de connaissances sur A** : cadre **aveugle**. \rightsquigarrow nécessite des hypothèses sur les sources.

Séparation de signaux sonores

- Sources : 3 signaux sonores provenant d'enregistrement CD échantillonnage à 44100Hz, 221088 échantillons (durée approx. 5s).
- Mélange par la matrice (tirée aléatoirement):

$$\begin{pmatrix} -0.2507 & 0.1714 & 0.9637 \\ -0.9653 & -0.6833 & -0.0305 \\ 0.0726 & 0.7098 & 0.2652 \end{pmatrix}$$

- Algorithme utilisé: CoM2 (voir [5] et page web correspondante)
- ↪ Objectifs du cours: présenter quelques principes de base de la séparation aveugle

Est-ce possible en aveugle?

- **Indéterminations :**

- ▶ ordre des sources
→ reconstitution à une permutation près
- ▶ facteur multiplicatif pour chaque source

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} s_i(t) \quad x_j(t) = \sum_{i=1}^N \frac{a_{ij}}{\lambda_i} \lambda_i s_i(t)$$

→ normalisation : $\langle s_1(t)^2 \rangle = \langle s_2(t)^2 \rangle = 1$

($\langle . \rangle$ = valeur moyenne)

~~ dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), indétermination de signe (resp. rotation complexe).

- Hypothèse forte, mais souvent plausible:
indépendance statistique des sources.

Sources indépendantes

Deux sources s_1 et s_2 distribuées uniformément et indépendantes:

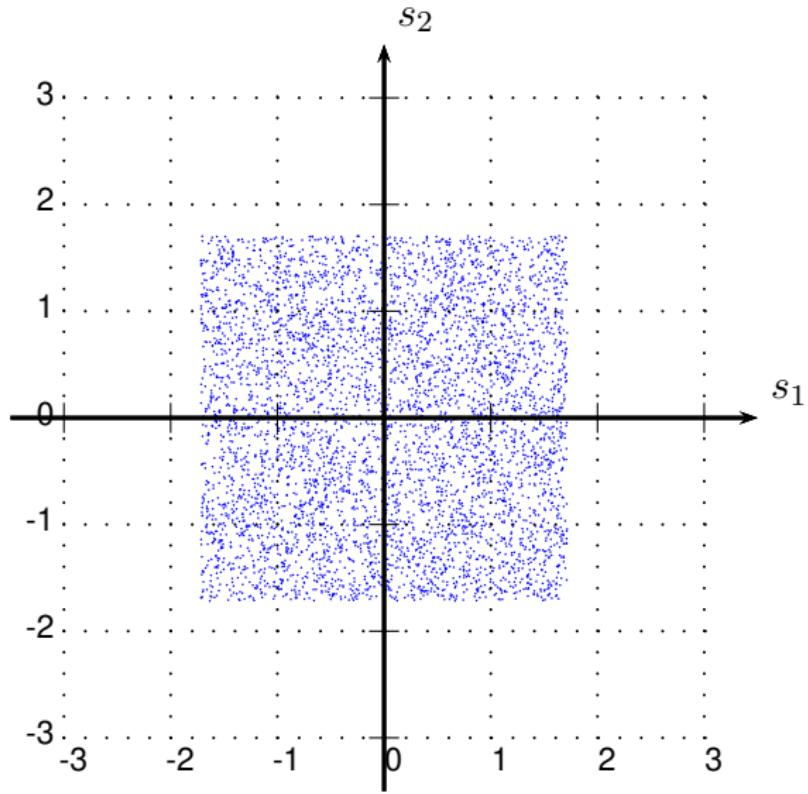
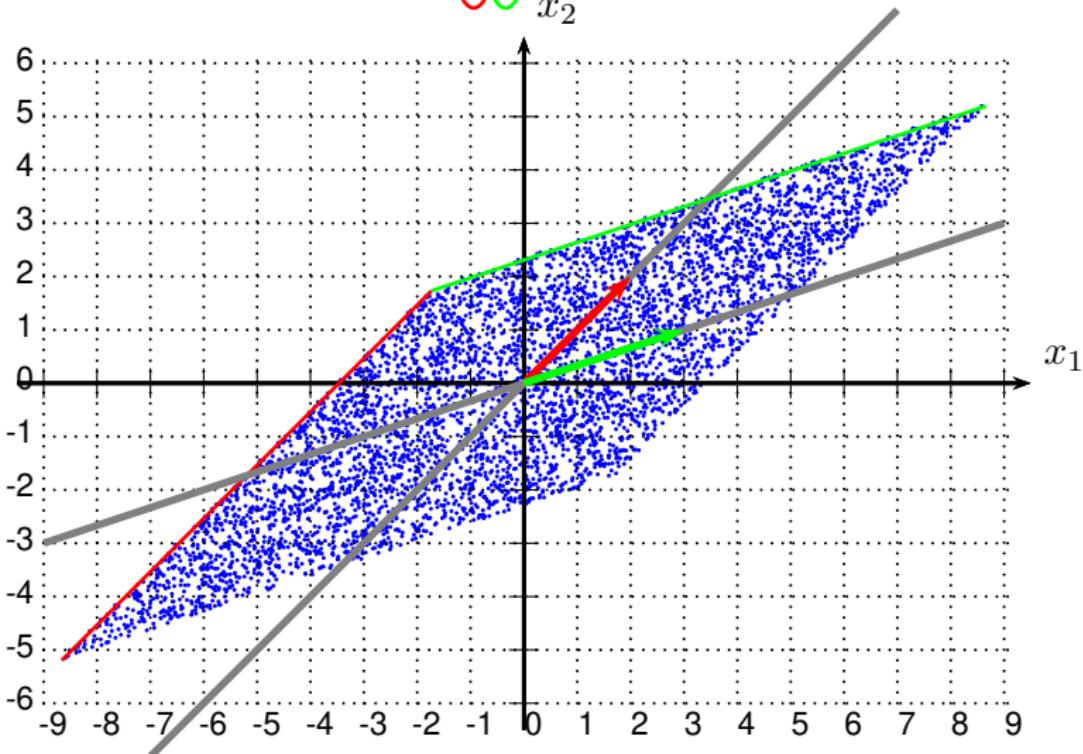


Illustration du cas aveugle

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

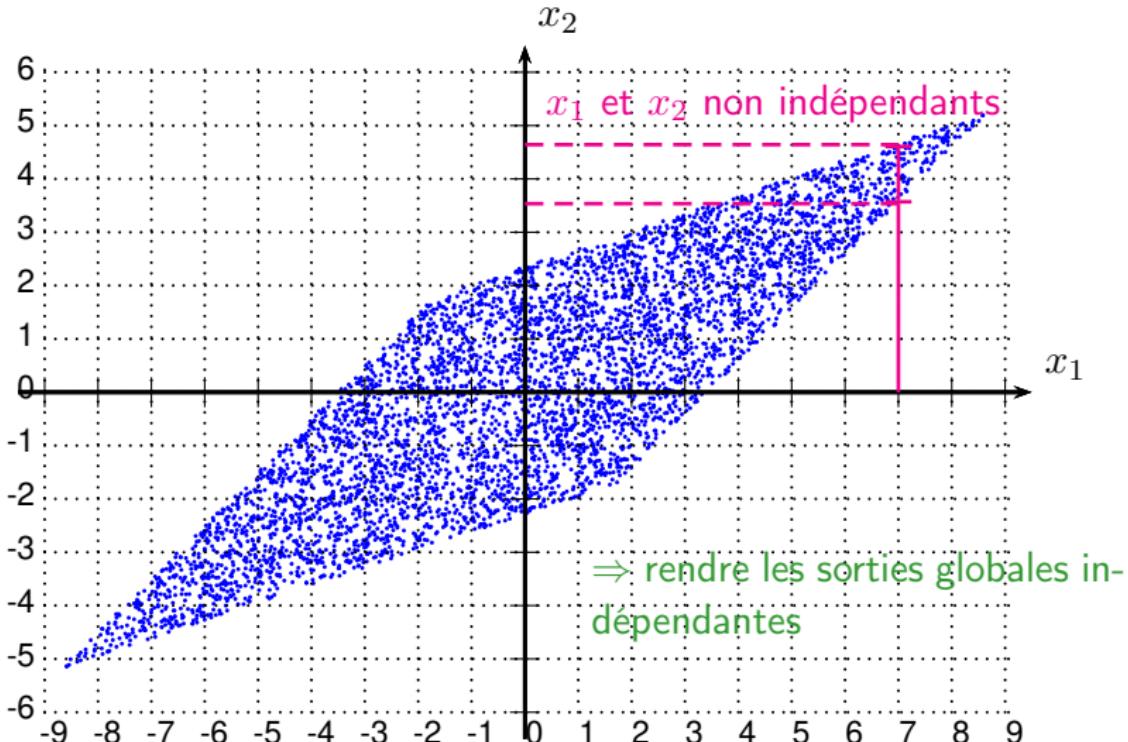
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Utiliser l'indépendance

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Séparation aveugle de sources / ICA

- Détermination des sources $s_i(t)$ à partir des $x_j(t)$:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^N a_{ij} s_i(t) \quad / \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

⇒ Séparation aveugle de sources

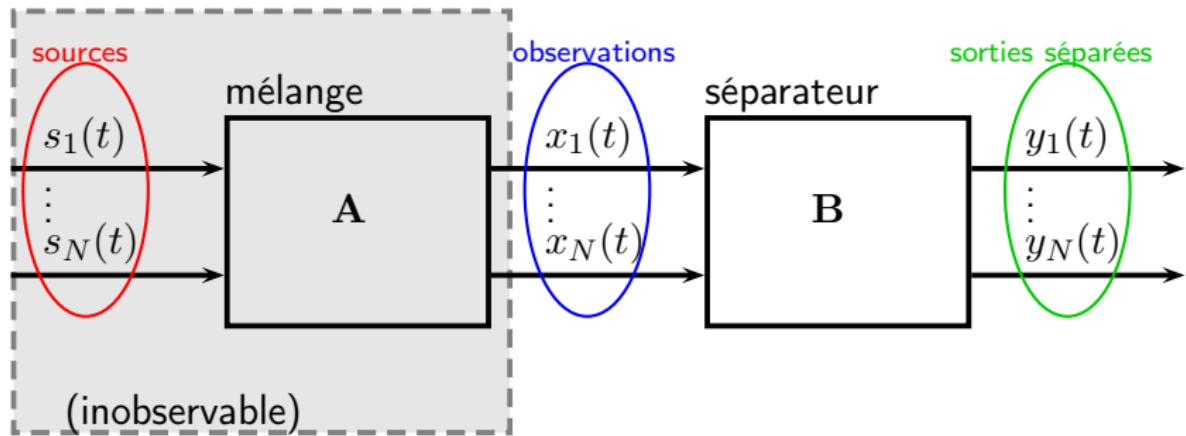
(Blind Source Separation, BSS)

- Détermination des composantes indépendantes:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Ni} \end{pmatrix}}_{\text{composante indépendante}} s_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

⇒ ICA: Independent Component Analysis

Notations



- Equations correspondantes:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

- En posant $\mathbf{G} := \mathbf{BA}$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Gs}(t)$$

Cadre considéré

- Sources temporellement indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$$

avec \mathbf{s} , \mathbf{x} : vecteurs aléatoires taille N .

~ Dans ce cadre, la structure temporelle des signaux n'est pas prise en compte.

- Sources centrées et de variance unité:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \mathbb{E}\{s_i\} = 0 \quad \mathbb{E}\{|s_i|^2\} = 1$$

Indépendance de variables aléatoires (1/2)

- s_1 et s_2 sont **indépendantes** lorsque:

$$f_{s_1,s_2}(u, v) = f_{s_1}(u)f_{s_2}(v)$$

où: $f_{s_1}(u) = \int f_{s_1,s_2}(u, v) dv$ et: $f_{s_2}(v) = \int f_{s_1,s_2}(u, v) du$

⇒ Pour toutes fonctions h_1 et h_2 :

$$\mathbb{E}\{h_1(s_1)h_2(s_2)\} = \mathbb{E}\{h_1(s_1)\}\mathbb{E}\{h_2(s_2)\}$$

Indépendance de variables aléatoires (2/2)

- Les composantes de $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$ sont (**mutuellement**) **indépendantes** lorsque:

$$f_{\mathbf{s}}(s_1, \dots, s_N) = \prod_{k=1}^N f_{s_k}(s_k)$$

⇒ Pour toutes fonctions h_1, \dots, h_N :

$$\mathbb{E}\{h_1(s_1) \dots h_N(s_N)\} = \mathbb{E}\{h_1(s_1)\} \dots \mathbb{E}\{h_N(s_N)\}$$

- Attention à ne pas confondre avec l'**indépendance par paires**:
 - Si (s_1, \dots, s_N) sont indépendantes mutuellement, elles le sont deux par deux.
 - L'indépendance par paires n'entraîne pas (en général) l'indépendance mutuelle.

Décorrélation de variables aléatoires

- Deux variables aléatoires s_1 et s_2 sont **décorrélées** lorsque :

$$\mathbb{E}\{s_1 s_2\} = \mathbb{E}\{s_1\} \mathbb{E}\{s_2\}$$

- variables aléatoires indépendantes \Rightarrow décorrélées

MAIS réciproque fausse.

- \rightsquigarrow La décorrélation est un (premier) pas vers l'indépendance
- Pour $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)^\top$, on définit sa matrice de covariance

$$\mathbf{R}_s := \mathbb{E}\{\mathbf{s}\mathbf{s}^\top\} \quad \text{càd: } (\mathbf{R}_s)_{ij} = \mathbb{E}\{s_i s_j\}$$

Le vecteur est décorrélé lorsque \mathbf{R}_s est diagonal.

Rq: vecteur décorrélé \Leftrightarrow toutes les paires sont décorrélées

Blanchiment

Rappel: modèle $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ / objectif: trouver \mathbf{B} telle que $\mathbf{BA} = \mathbf{Id}$.

Blanchir les données: trouver une transformation linéaire qui rende les nouvelles données **décorrélées**

- Sorties décorrélées notées $\mathbf{z} := \mathbf{Wx}$
- Contrainte de décorréléation :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{zz}^T\} = \mathbf{Id}_N$$

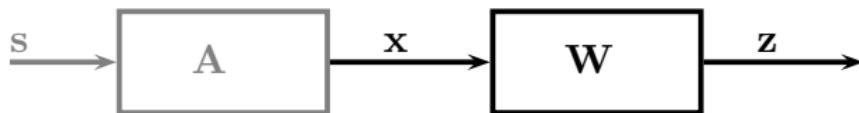
↔ par symétrie, $N(N + 1)/2$ équations

→ **insuffisant** pour la détermination des N^2 paramètres de \mathbf{A} (ou \mathbf{B}).

- Rq: mise en œuvre du blanchiment aisée (SVD)

Conséquence(s) du blanchiment

- $\mathbf{z} := \mathbf{Wx} = \mathbf{WA}\mathbf{s}$ avec: $\mathbb{E}\{\mathbf{zz}^T\} = \mathbf{Id}_N \rightarrow$ insuffisant

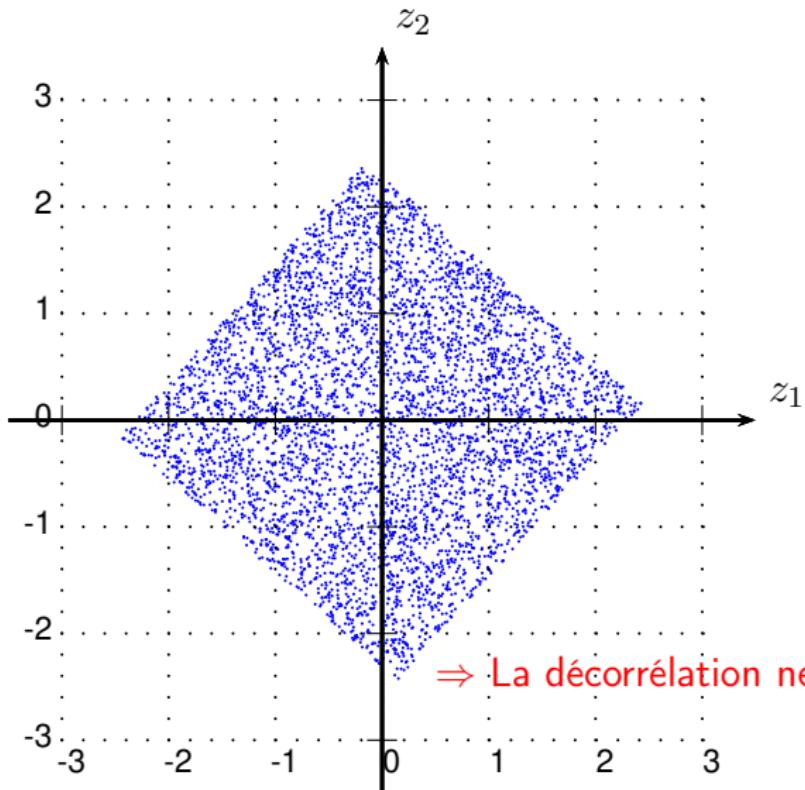


- En posant $\mathbf{C} = \mathbf{WA}$, nouveau mélange $\mathbf{z} = \mathbf{Cs}$ qui vérifie:

$$\mathbf{Id}_N = \mathbb{E}\{\mathbf{zz}^T\} = \mathbf{C}\mathbb{E}\{\mathbf{ss}^T\}\mathbf{C}^T = \mathbf{CC}^T$$

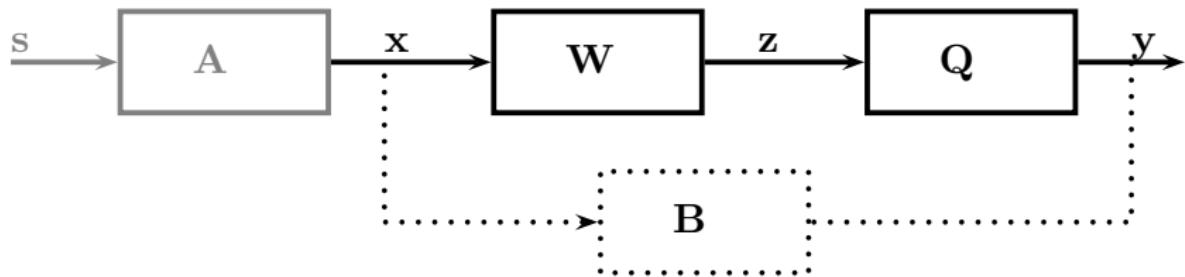
- ~ matrice mélange équivalente \mathbf{C} orthogonale ($\mathbf{CC}^T = \mathbf{Id}$)
- ~ transformation isométrique

Illustration du blanchiment



Conséquence(s) du blanchiment

- En posant $\mathbf{C} = \mathbf{W}\mathbf{A}$, nouveau mélange $\mathbf{z} = \mathbf{Cs}$ avec $\mathbf{C}^\top\mathbf{C} = \mathbf{Id}$.



- Inverse du mélange blanchi: $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{C}^{-1}$
 \mathbf{Q} cherché est $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^\top$, donc orthogonale
 \rightsquigarrow paramétrisation de \mathbf{Q} par des angles (Jacobi)
- Matrice de séparation a été décomposée en $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{W}$

Statistiques d'ordre supérieur

Rappel: s_1, \dots, s_N sont **indépendantes** lorsque pour toutes fonctions h_1, \dots, h_N :

$$\mathbb{E}\{h_1(s_1) \dots h_N(s_N)\} = \mathbb{E}\{h_1(s_1)\} \dots \mathbb{E}\{h_N(s_N)\}$$

- Décorrélation/blanchiment: (**insuffisant**)

$$\mathbb{E}\{z_i z_j\} = \mathbb{E}\{z_i\} \mathbb{E}\{z_j\} \text{ pour toutes les paires } i, j$$

→ Introduire des produits de $k > 2$ termes: $\mathbb{E}\{z_{i_1} \dots z_{i_k}\}$

Prendre des fonctions h_i polynomiales (monômes degré > 2)

~~> **Statistiques d'ordre supérieur (à deux)**

Moments

- Variable aléatoire r
Moment d'ordre k de r : $\mathbb{E}\{r^k\}$
- Vecteur aléatoire $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^\top$:
Moment (croisé) d'ordre k : $\mathbb{E}\{r_{i_1} \dots r_{i_k}\}$
- Moment d'ordre supérieur (à deux): $k > 2$
- manipulation peu pratique (pas de relation pour le moment d'une somme, en cas indépendance, ...)
- Rq: les moments apparaissent dans le développement de la première fonction caractéristique

$$\varphi(u) = \mathbb{E}\{e^{iur}\} \quad (\text{cas scalaire})$$

$$\varphi(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\{e^{i\mathbf{u}^\top \mathbf{r}}\} \quad (\text{cas vectoriel})$$

Cumulants

Cumulants d'ordre k : s'expriment polynomialement en fonction moments d'ordre $\leq k$ (et réciproquement).

- Pour des variables centrées ($\mathbb{E}\{r_i\} = 0$):

$$\text{Cum}\{r_1, r_2\} = \mathbb{E}\{r_1 r_2\}$$

$$\text{Cum}\{r_1, r_2, r_3\} = \mathbb{E}\{r_1 r_2 r_3\}$$

$$\text{Cum}\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \mathbb{E}\{r_1 r_2 r_3 r_4\} - \mathbb{E}\{r_1 r_2\} \mathbb{E}\{r_3 r_4\}$$

$$- \mathbb{E}\{r_1 r_3\} \mathbb{E}\{r_2 r_4\} - \mathbb{E}\{r_1 r_4\} \mathbb{E}\{r_2 r_3\}$$

- Cumulant d'ordre quatre (**kurtosis**) d'une variable r centrée:

$$\text{Cum}\{r, r, r, r\} = \mathbb{E}\{r^4\} - 3(\mathbb{E}\{r^2\})^2 =: \kappa(r)$$

- Rq: les cumulants apparaissent dans le développement de la deuxième fonction caractéristique

$$\psi(u) = \log \mathbb{E}\{e^{iur}\} \quad (\text{cas scalaire})$$

$$\psi(\mathbf{u}) = \log \mathbb{E}\{e^{i\mathbf{u}^\top \mathbf{r}}\} \quad (\text{cas vectoriel})$$

Propriétés des cumulants (1/3)

(i) **symétrie**: pour toute permutation des indices:

$$\text{Cum} \{r_1, \dots, r_k\} = \text{Cum} \{r_{i_1}, \dots, r_{i_k}\}$$

(ii) **multilinéarité** (par rapport à chacun des arguments):

$$\text{Cum} \{a + b, r_2, \dots, r_k\} = \text{Cum} \{a, r_2, \dots, r_k\} + \text{Cum} \{b, r_2, \dots, r_k\}$$

$$\text{Cum} \{\lambda a, r_2, \dots, r_k\} = \lambda \text{Cum} \{a, r_2, \dots, r_k\}$$

Vérification aisée dans le cas des expressions du transparent 105.

Propriétés des cumulants (2/3: indépendance)

- (iii) s'il existe un sous-ensemble de variables $(a_i)_{i=1,\dots,m}$ **indépendantes** des autres $(b_j)_{j=1,\dots,n}$:

$$\text{Cum} \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\} = 0$$

\Updownarrow

- (iii') Si $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ **indépendantes** de $(b_j)_{j=1,\dots,k}$,

$$\text{Cum} \{a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k\} = \text{Cum} \{a_1, \dots, a_k\} + \text{Cum} \{b_1, \dots, b_k\}$$

ATTENTION: l'indépendance par paires ne suffit pas!

Vérification aisée dans le cas des expressions du transparent 105.

(iii) \Leftrightarrow (iii') évident avec la multi-linéarité.

Propriétés des cumulants (3/3: cas gaussien)

(iv) pour un vecteur (a_1, \dots, a_k) **gaussien**:

$$\text{Cum} \{a_1, \dots, a_k\} = 0 \quad (k > 2)$$

Pour r variable aléatoire gaussienne, le kurtosis est nul:

$$\kappa(r) = 0$$

- CONSEQUENCE(s) pour un vecteur gaussien:
 - ▶ statistiques d'ordre deux définissent sa loi,
 - ▶ décorrélation (par paires) équivaut à indépendance (mutuelle),
 - ▶ le blanchiment exploite toute l'information.

Sources non gaussiennes?

- Variable aléatoire gaussienne:

- ▶ définie par ses deux premiers moments
- ▶ décorrélation \Leftrightarrow indépendance

\Rightarrow Toute l'information statistique prise en compte lors du blanchiment.

- Hypothèses fondamentales de l'analyse en composantes indépendantes

(ICA) :

H.1 Les sources sont mutuellement indépendantes

H.2 Les sources ont une distribution de probabilité non gaussienne (sauf éventuellement une seule d'entre elles).

Identifiabilité

Justification théorique (théorème de Darmois-Skitovitch, 1953):

Soit $s = (s_1, \dots, s_N)$ un vecteur aléatoire.

Si

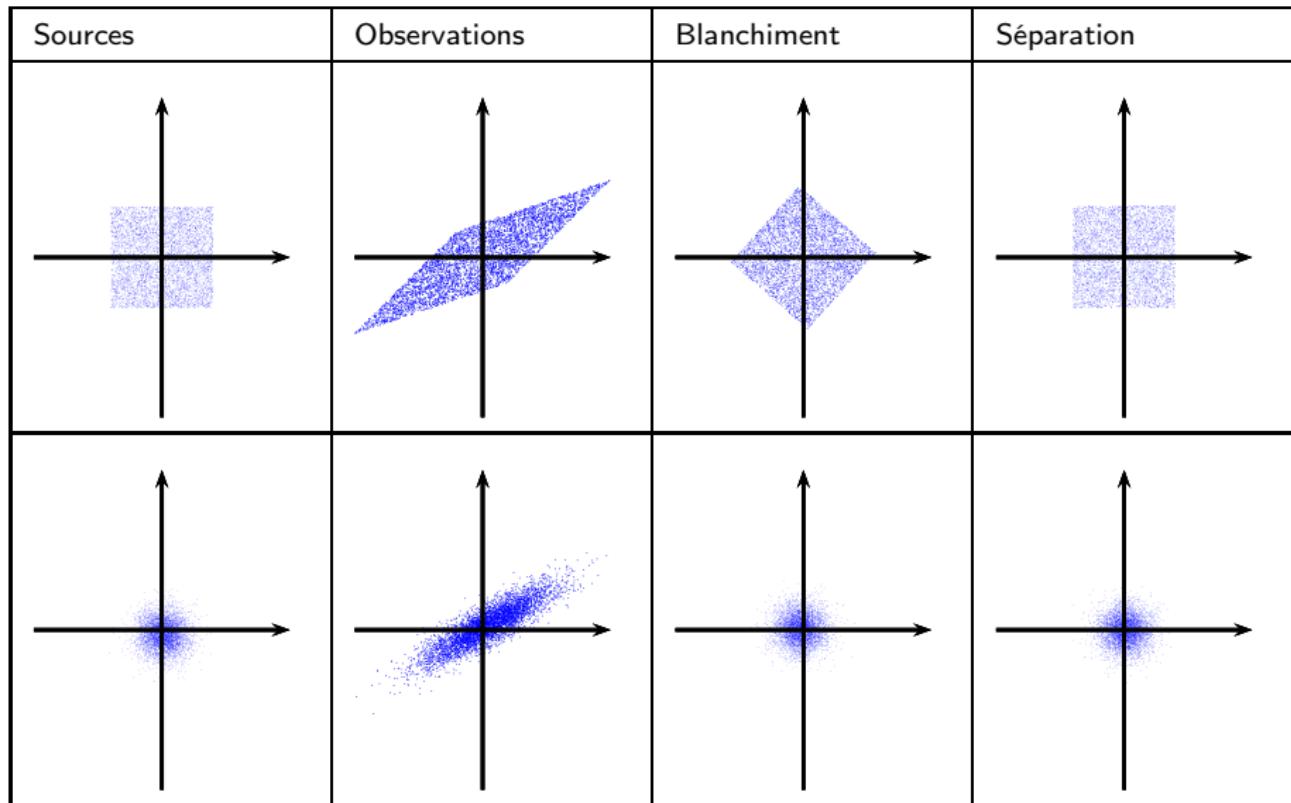
- composantes de s indépendantes,
- au plus l'une d'entre elles est gaussienne,

alors:

- composantes de $y = Gs$ indépendantes $\Leftrightarrow G = PD$.
(P : permutation, D : matrice diagonale)

~ «**non-gaussianité**» et **indépendance** sont les deux hypothèses centrales pour identifier un mélange de sources (cas i.i.d.)

Distributions uniforme et gaussienne



ICA et PCA

Analyse en composantes principales (PCA)

- Si données gaussiennes, ICA n'apporte rien de plus que PCA.
- PCA unique car condition de décorrélation couplée à contrainte $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{Id}$.
- PCA recherche des composantes par ordre décroissant d'énergie.
- PCA plus modeste, mais toujours possible.
- Algorithme PCA universel et simple, pas ICA.

Fonction de contraste

Fonction de **contraste** ϕ : critère dont la maximisation permet de séparer les sources.

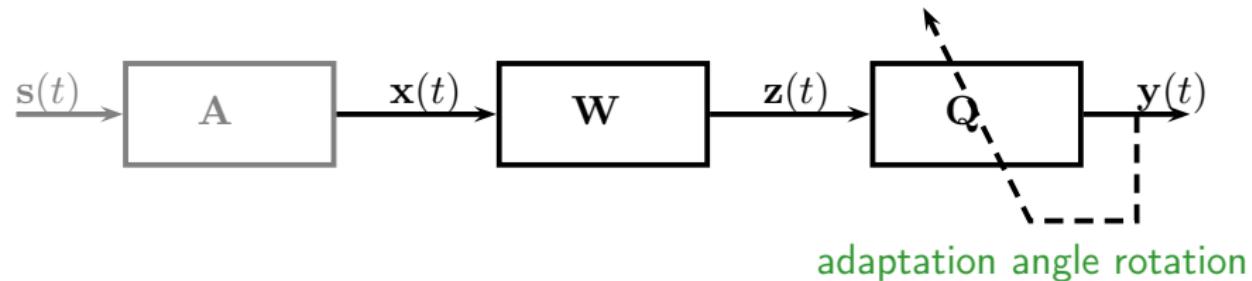
- Différents cadres de validité:
 - ▶ séparation de *toutes* les sources
 - ▶ extraction d'*une* source
 - ▶ avec/sans blanchiment
- Definition (adaptée au 1er cadre): Avec s : vecteur de sources indépendantes, ϕ est une fonction de contraste si et seulement si:
 - (i) $\forall A \quad \phi(As) \leq \phi(s)$
 - (ii) Si $A = PD$, alors $\phi(As) = \phi(s)$
 - (iii) Si $\phi(As) = \phi(s)$, alors A s'écrit $A = PD$.

(**P**: permutation, **D**: matrice diagonale)

Somme des kurtosis

- Cadre et hypothèses:

- ▶ blanchiment
- ▶ sources indépendantes
- ▶ $\kappa(s_i) \neq 0$ pour tout i (sauf éventuellement une).



- **Contraste:** $\max. \mathcal{J}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N |\kappa(y_i)|$

Rq:

- ▶ $\kappa(s_i) \neq 0 \Rightarrow s_i$ non gaussienne
- ▶ $\kappa(\cdot) \leftrightarrow$ écart à la «gaussiannité»
- ▶ $\max. \sum_{i=1}^N (\kappa(y_i))^2$ est aussi un contraste.

Justification contraste p.114 (1/3: exprimer les cumulants)

- Matrice globale sources/sorties séparées notée $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{ij}$.

$$y_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} s_j$$

-

$$\kappa(y_i) = \text{Cum} \{y_i, y_i, y_i, y_i\}$$

par multilinéarité:

$$\kappa(y_i) = \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \sum_{j_3=1}^N \sum_{j_4=1}^N G_{ij_1} G_{ij_2} G_{ij_3} G_{ij_4} \text{Cum} \{s_{j_1}, s_{j_2}, s_{j_3}, s_{j_4}\}$$

par indépendance des sources:

$$\kappa(y_i) = \sum_{j=1}^N G_{ij}^4 \kappa(s_j)$$

Justification contraste p.114 (2/3: majorer le critère)

- Blanchiment: $\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{s}$ avec \mathbf{G} orthogonale ($\mathbf{G}^\top \mathbf{G} = \mathbf{Id}$)
-

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^N |\kappa(y_i)| = \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N G_{ij}^4 \kappa(s_j) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{ij}^4 |\kappa(s_j)| \quad \text{par convexité} \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{ij}^2 |\kappa(s_j)| \quad \text{car } |G_{ij}| \leq 1 \\
 &\leq \sum_{j=1}^N |\kappa(s_j)| \quad \text{car } \sum_{i=1}^N G_{ij}^2 = 1
 \end{aligned}$$

Justification contraste p.114 (3/3: si majorant atteint)

- En cas d'égalité précédemment, puisque $\kappa(s_j) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (G_{ij}^2 - G_{ij}^4) |\kappa(s_j)| = 0 \text{ entraîne } G_{ij} \in \{0, -1, +1\}$$

- **G** étant orthogonale par blanchiment, c'est une matrice «triviale» (permutation+changement de signe)

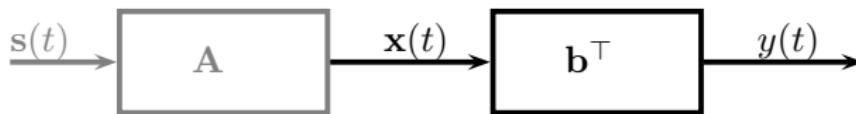
Mise en œuvre

- estimation cumulants: à partir **estimateurs empiriques** des moments
- paramétrisation de **Q** par des angles de **Jacobi**
- solution explicite de la maximisation uni-dimensionnelle et balayage cyclique des angles de Jacobi (voir algos CoM2 et CoM1).
- autres algorithmes disponibles: JADE, FastICA

Kurtosis (1/2)

- Cadre:

- ▶ extraction d'une source sans blanchiment
- ▶ sources indépendantes
- ▶ $\kappa(s_i) \neq 0$ pour tout i dont extraction souhaitée
- ▶ \mathbf{b}^\top : filtre ligne extracteur, sortie scalaire: $y = \sum_{i=1}^N b_i x_i$



- Contraste:

$$\max. \mathcal{I}(y) = |\kappa(y)| \text{ sous contrainte } \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$$

Rq: forme normalisée pour implantation pratique:

$$\max. \left| \frac{\kappa(y)}{\mathbb{E}\{|y|^2\}^2} \right| \text{ sous contrainte } \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$$

Justification du contraste p. 119

Avec $\mathbf{g}^\top := \mathbf{b}^\top \mathbf{A}$, on a $y = \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}^\top \mathbf{A}\mathbf{s}$.

$$y = \mathbf{g}^\top \mathbf{s} = \sum_{i=1}^N g_i s_i$$

$$\begin{aligned}\kappa(y) &= \text{Cum} \left\{ \mathbf{g}^\top \mathbf{x}, \mathbf{g}^\top \mathbf{x}, \mathbf{g}^\top \mathbf{x}, \mathbf{g}^\top \mathbf{x} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N g_i^4 \kappa(s_i) \quad (\text{multilinéarité+indépendance})\end{aligned}$$

Sous la contrainte $\|\mathbf{g}\|^2 = \sum_{i=1}^N g_i^2 = 1 \leftrightarrow \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$:

$$|\kappa(y))| \leq \sum_{i=1}^N g_i^4 |\kappa(s_i)| \leq \sum_{i=1}^N g_i^2 |\kappa(s_i)| \leq \max_{i=1}^N |\kappa(s_i)|$$

Maximum atteint si et seulement si \mathbf{g} est séparant.

Kurtosis (2/2)

- Contraste kurtosis au carré:

$$\text{max. } \mathcal{J}(y) = (\kappa(y))^2 \text{ sous contrainte } \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$$

- Contraste kurtosis en valeur absolue (équivalent):

$$\text{max. } |\kappa(y)| \text{ sous contrainte } \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$$

- Si $\kappa(s_i) < 0$ pour tout i dont extraction souhaitée:

$$\text{min. } \kappa(y) \text{ sous contrainte } \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$$

- Rq: formes normalisées (sous contrainte $\mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$):

$$\max. \left(\frac{\kappa(y)}{\mathbb{E}\{|y|^2\}^2} \right)^2 \quad \mid \quad \max. \left| \frac{\kappa(y)}{\mathbb{E}\{|y|^2\}^2} \right| \quad \mid \quad \min. \frac{\kappa(y)}{\mathbb{E}\{|y|^2\}^2}$$

Module constant (CMA)

- Valeurs dans \mathbb{C} , signaux centrés et circulaires:

$$\kappa(y) = \text{Cum} \{y, y, y^*, y^*\} = \mathbb{E}\{|y|^4\} - \underbrace{\mathbb{E}\{y^2\}|^2}_{=0 \text{ (circularité)}} - 2\mathbb{E}\{|y|^2\}^2$$

- Contraste si $\kappa(s_i) < 0$:

$$\min. \kappa(y) = \mathbb{E}\{|y|^4\} - 2$$

- Algorithme **module constant** (CMA):

$$\min. \mathbb{E}\{(|y|^2 - \alpha)^2\} = \mathbb{E}\{|y|^4\} - 2\alpha\mathbb{E}\{|y|^2\} + \alpha^2$$

↔ identiques avec la contrainte $\alpha = \mathbb{E}\{|y|^2\} = 1$.

Mise en œuvre

- estimation cumulants: à partir **estimateurs empiriques** des moments
- algorithme:
 - ▶ gradient / gradient projeté
 - ▶ forme normalisée des critères
 - ▶ pas optimal à chaque optimisation unidimensionnelle: racine d'un polynôme
- extraction de plusieurs sources par déflation

Déflation

- Mélange $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$.

Une source connue ou précédemment extraite: $y = \alpha s_1$
 (facteur multiplicatif α près)

- «Déflation»: recherche d'un vecteur colonne \mathbf{h} tel que:

$$\tilde{\mathbf{h}} := \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{x} - \mathbf{h}y\|^2 \text{ et définir: } \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{h}}y$$

- Mélange de $N - 1$ sources après déflation: $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=2}^N \mathbf{a}_i s_i$
 En effet:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{h}y\|^2 = \|(\mathbf{a}_1 - \alpha \mathbf{h})s_1\|^2 + \left\| \sum_{i=2}^N \mathbf{a}_i s_i \right\|^2$$

- Reconstruction de toutes les sources par extraction/déflation.

Maximum de vraisemblance

- Modèle $\mathbf{x} = \mathbf{As}$ paramétré par \mathbf{A} et la densité de probabilité supposée des sources $q(\mathbf{s})$.

⇒ Densité de probabilité de \mathbf{x} :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{A}, q) = |\det \mathbf{A}|^{-1} q(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x})$$

⇒ Log-vraisemblance normalisée de T échantillons

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(T)):$$

$$\frac{1}{T} \log p(\mathbf{X}|\mathbf{A}, q) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log q(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}(t)) - \log |\det \mathbf{A}|$$

Divergence de Kullback-Leibler

- On vient de voir:

$$\frac{1}{T} \log p(\mathbf{X}|A, q) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log q(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}(t)) - \log |\det \mathbf{A}|$$

- d'où:

$$\frac{1}{T} \log p(\mathbf{X}|\mathbf{A}, q) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} -D(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}|\mathbf{s}) + \text{cste}$$

⇒ Contraste associé:

$$\phi_{\text{MV}}(\mathbf{y}) = -D(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}|\mathbf{s})$$

↔ principe «Infomax», connu dans la communauté réseaux de neurones.

Information mutuelle (1/2)

- $\tilde{\mathbf{y}}$ vecteur aléatoire:
 - composantes indépendantes
 - mêmes marginales que \mathbf{y}
- $I(\mathbf{y}) = D(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) =$ information mutuelle du vecteur \mathbf{y} .
-

$$D(\mathbf{y}|\mathbf{s}) = D(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{y}}) + D(\tilde{\mathbf{y}}|\mathbf{s})$$

Information mutuelle (2/2)



$$D(y|s) = D(y|\tilde{y}) + D(\tilde{y}|s)$$

max vrais = info mut + adéquation données

→ Max de vraisemblance optimise la somme:

- terme d'indépendance
- terme ajustement à la distribution supposée de s.

⇒ Contraste associé: $\phi_{IM}(y) = -I(y)$

Entropie différentielle

- Définition:

$$H(\mathbf{y}) = -\mathbb{E}\{\log p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})\} = - \int p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \log p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

- Lien avec l'information mutuelle:

$$I(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N H(y_i) - H(\mathbf{y})$$

Néguentropie (1/2)

- $\mathbf{y}_{\text{gauss}}$ vecteur/variable aléatoire:
 - gaussienne,
 - même matrice de covariance que \mathbf{y}
- Néguentropie:

$$J(\mathbf{y}) = H(\mathbf{y}_{\text{gauss}}) - H(\mathbf{y})$$

- Néguentropie:

$$J(\mathbf{y}) = D(\mathbf{y} | \mathbf{y}_{\text{gauss}})$$

- Conséquence: $J(\mathbf{y}) \geq 0$ et $J(\mathbf{y}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{gauss}}$.

Néguentropie (2/2)

- Avec $\mathbf{y} = \mathbf{Gs}$:

$$\phi_{IM}(\mathbf{y}) = -I(\mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^N H(y_i) + \log |\det \mathbf{G}| + H(\mathbf{s})$$

- Sous contrainte de blancheur $|\det \mathbf{G}| = \text{cste}$

⇒ Contraste associé:

$$\phi_{IM}^o(\mathbf{y}) = -\sum_{i=1}^N H(y_i) = \sum_{i=1}^N J(y_i) + \text{cste}$$

→ maximiser la «non-gaussianité»

Contrastes

- Regarder l'écart entre les cumulants seulement au lieu des densités de probabilité:

$$\phi_2(\mathbf{y}) \triangleq \sum_{ij} (\kappa_{ij}(\mathbf{y}) - \kappa_{ij}(\mathbf{s}))^2$$

$$\phi_4(\mathbf{y}) \triangleq \sum_{ijkl} (\kappa_{ijkl}(\mathbf{y}) - \kappa_{ijkl}(\mathbf{s}))^2$$

→ ϕ_2 ne traduit que la décorrélation.

ϕ_4 est un contraste.

- Approximation du maximum de vraisemblance:

$$\phi_{\text{MV}}(\mathbf{y}) = -D(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \approx -\frac{1}{48} (12\phi_2(\mathbf{y}) + \phi_4(\mathbf{y}))$$

Contrastes, cas «orthogonal»

- blanchiment \Rightarrow contrainte $\phi_2(\mathbf{y}) = 0$ imposée
- Dans ce cas, ϕ_4 devient:

$$\phi_4^o(\mathbf{y}) = -2 \sum_i k_i \kappa_{iiii}(\mathbf{y}) \quad (\mathcal{C}_4 \text{ dans TP})$$

où k_i = cumulant supposé des sources dans la modélisation.

- Minimisation de ϕ_4^o par rapport aux k_i donne:

$$\phi_{\text{ICA}}^o(\mathbf{y}) = - \sum_i \kappa_{iiii}(\mathbf{y})^2 = \sum_{i,j,k,l \neq i,i,i,i} \kappa_{ijkl}(\mathbf{y})^2 + \text{cste}$$

(\mathcal{C}_3 dans TP)

Conclusion

- Mélange linéaire instantané, cadre aveugle
- Hypothèses: sources indépendantes, non gaussiennes
- Approches:
 - ▶ globales, avec blanchiment
 - ▶ extraction d'une source + déflation (sans blanchiment)
- Fonctions de contraste
 - ▶ statistiques d'ordre supérieur
 - ▶ kurtosis
- Points non abordés:
 - ▶ prise en compte du bruit
 - ▶ algorithmes
 - ▶ signaux dans \mathbb{C} (avec éventuelle circularité)
 - ▶ approche maximum de vraisemblance, théorie de l'information
 - ▶ problèmes liés: modèles linéaires convolutifs, égalisation

Bibliographie

 [http://tsi.enst.fr/~cardoso/stuff.html.](http://tsi.enst.fr/~cardoso/stuff.html)

 [http://www.cis.hut.fi/projects/ica/.](http://www.cis.hut.fi/projects/ica/)

 [http://www.cnl.salk.edu/~tewon/ICA/display.htm.](http://www.cnl.salk.edu/~tewon/ICA/display.htm)

 J.-F. Cardoso.

Blind signal separation: statistical principles.

Proceedings of the IEEE, special issue on blind identification and estimation,
90(8):2009–2026, October 1998.

 P. Comon.

Independent component analysis, a new concept.

Signal Processing, 36(3):287–314, April 1994.

 A. Hyvärinen and E. Oja.

Independent component analysis: Algorithms and applications.

Neural Networks, 13(4-5):411–430, 2000.