SIC3601 : TD numéro 10

La transformée de Hilbert du signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (où f_0 est une constante positive) :

$\boxed{1}$ vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2}\Big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\Big)$.

$\boxed{2}$ vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\Big)$.

$\boxed{3}$ vaut $\widehat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

$\boxed{4}$ vaut $\widehat{x}(t) = e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}$.

Exercice 1: équivalence filtrage analogique/numérique On considère $h_a(t)$ et $x_a(t)$, deux signaux analogiques déterministes continus, à bande limitée $[-B, B]$ et tels que $\int |h_a(t)|\, dt < \infty$ et $\int |x_a(t)|\, dt < \infty$.

Le but de l'exercice est de démontrer une équivalence entre filtrage analogique et numérique. Ceci est représenté par les deux schémas de la figure 1, sur lequel on souhaite obtenir le lien entre $y_a(\frac{n}{2B})$ et y_n.

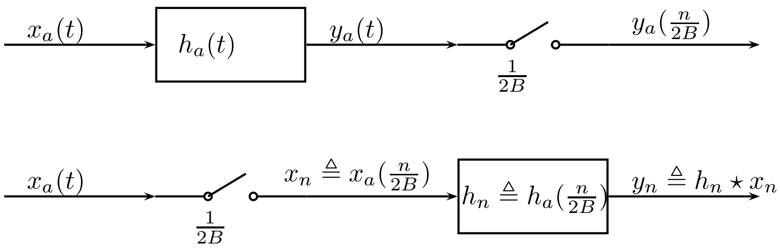

FIGURE 1 – Filtrage analogique avant échantillonnage / Filtrage numérique après échantillonnage

1. Le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$ est-il stable ?

2. Soit $y_a(t)$ le résultat du filtrage de $x_a(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h_a(t)$.

(a) Comment s'écrit $y_a(t)$ sous forme d'une intégrale ?

(b) On note $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$ les transformées de Fourier temps continu respectives des signaux $x_a(t)$, $y_a(t)$ et $h_a(t)$ (la lettre f représente la fréquence). Quel est le lien entre $X_a(f)$, $Y_a(f)$ et $H_a(f)$?

(c) En déduire :

$$y_a(t) = \int_{-B}^{B} e^{\mathrm{i}2\pi f t} H_a(f) X_a(f)\, df$$

3. On forme par échantillonnage les signaux $x_n \triangleq x_a(\frac{n}{2B})$ et $h_n \triangleq h_a(\frac{n}{2B})$. On suppose aussi pour des raisons techniques $\sum |x_n| < \infty$ et $\sum |h_n| < \infty$. La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est-elle vérifiée ?

4. y_n est le résultat du filtrage numérique de x_n par le filtre de réponse impulsionnelle h_n.

(a) Comment s'écrit y_n sous forme d'une somme ?

(b) On note $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$ les transformées de Fourier temps discret respectives des signaux x_n, y_n et h_n ($\tilde{f}$ représente la fréquence normalisée). Quel est le lien entre $X(\tilde{f})$, $Y(\tilde{f})$ et $H(\tilde{f})$?

(c) En déduire que :

$$y_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\mathrm{i}2\pi n\tilde{f}} H(\tilde{f}) X(\tilde{f})\, d\tilde{f}$$

5. On admet pour les signaux $x_a(t)$ et $h_a(t)$ que la formule sommatoire de Poisson est vérifiée :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a(f-2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-\mathrm{i}2\pi k\frac{f}{2B}} \quad \text{et :} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} H_a(f-2Bk) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-\mathrm{i}2\pi k\frac{f}{2B}}$$

(a) Rappeler la définition de $X(\tilde{f})$ et en déduire que l'on a pour $\tilde{f} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$: $X(\tilde{f}) = 2BX_a(2B\tilde{f})$. Quelle relation a-t-on entre $H(\tilde{f})$ et $H_a(f)$?

(b) En déduire $y_n = 2By_a(\frac{n}{2B})$ et la relation :

$$y_a\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2B}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_a\left(\frac{k}{2B}\right) x_a\left(\frac{n-k}{2B}\right)$$

Exercice 2: échantillonnage de l'enveloppe complexe

1. On considère un signal analogique $x(t)$ à bande limitée qui occupe une bande $[-B, B]$.

(a) Quelle est la fréquence minimale à laquelle il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ?

(b) On construit le signal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence fixée et grande par rapport à B.

Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ en fonction de $X(f)$, tranformée de Fourier de $x(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de problème d'existence). Représenter schématiquement $Y(f)$ et $X(f)$.

(c) Quelle est la bande $[-C, C]$ occupée par $y(t)$? Si on applique directement le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$?

Ce résultat vous inspire-t-il un commentaire en comparaison du résultat de la question 1a ?

Nous allons maintenant montrer comment il est possible d'échantillonnner un signal bande étroite à une fréquence inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

2. On considère un signal $s(t)$ à *valeurs réelles* et à bande étroite. On note f_0 la fréquence centrale de $s(t)$; $[f_0 - B, f_0 + B]$ désigne la bande des fréquences positives occupés par $s(t)$ (f_0 grand par rapport à B).

(a) Tracer schématiquement le spectre de $s(t)$ en faisant apparaître les fréquences positives et négatives.

(b) Rappeler la définition de $z_s(t)$, signal analytique associé à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

(c) Rappeler la définition de $\xi_s(t)$, enveloppe complexe associée à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

3. (a) Quelle est la bande occupée par $\xi_s(t)$? En déduire la fréquence minimale à laquelle on peut échantillonner $\xi_s(t)$ sans perdre d'information.

(b) Expliquer brièvement comment à partir d'échantillons de $\xi_s(t)$ prélevés à la fréquence $2B$, on peut reconstituer $s(t)$. Conclure.