SIC3601 : TD numéro 2

Pour un signal temps discret $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, quel lien existe-t-il entre sa transformée en z (notée $X[z]$) et sa transformée de Fourier temps discret (notée $X(f)$) ?

$\boxed{1}$ Lorsque le cercle unité appartient au domaine de convergence de la transformée en z, on a $X(f) = X[e^{\mathrm{i}2\pi f}]$.

$\boxed{2}$ Il n'existe aucun lien entre les deux. La transformée de Fourier indique les fréquences présentes dans le signal, tandis que la transformée en z indique la relation de récurrence qui définit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\boxed{3}$ Lorque l'axe imaginaire pur appartient au domaine de convergence de la transformée en z, on a $X(f) = X[\mathrm{i}2\pi f]$.

$\boxed{4}$ Lorque l'axe réel pur appartient au domaine de convergence de la transformée en z, on a $X(f) = X[2\pi f]$.

Exercice 1: transformée en z

1. Transformée en z (et domaine de définition) de :

$$x_n = \begin{cases} \frac{\beta^n}{n!} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

oú $\beta \in \mathbb{C}$.

2. Transformée en z (et domaine de définition) de :

$$y_n = \begin{cases} n\alpha^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

3. Les signaux x_n et y_n sont délivrés chacun à une période T par deux sources avec un retard $T/2$ entre les deux. On construit le signal multiplexé s_n en prenant : $s_0 = x_0, s_1 = y_0, s_2 = x_1, s_3 = y_1, \ldots$. Transformée en z de s_n ?

Exercice 2: transformée de Fourier temps discret Calculer la transformée de Fourier temps discret du signal :

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3: inversion de la transformée en z Calculer les signaux à temps discret dont la transformée en z a pour expression :

$$X[z] = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

Exercice 4: transformée en z

1. Calculer la transformée en z de $a_n = \cos(n\theta)$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

2. Calculer la transformée en z de $b_n = n + 1$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

3. Calculer la transformée en z de $c_n = \frac{n+1}{n!}$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

4. Calculer la transformée en z de la suite causale définie par la relation de récurrence $\forall n \geq 0,\ d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} + 1$ (on appelle suite causale une suite telle que $d_n = 0$ pour tout $n < 0$). En déduire l'expression de d_n en fonction de n.