SIC3601 : TD numéro 9

? La transformée de Fourier à temps discret :

$\boxed{1}$ est obtenue par échantillonnage de la transformée de Fourier à temps continu.

$\boxed{2}$ est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période 1.

$\boxed{3}$ est définie pour des signaux à temps discret et est périodique de période 2π.

$\boxed{4}$ est définie pour des signaux périodiques de période 1.

Exercice 1: décimation, interpolation Soit $s(t)$ un signal à bande limitée $[-B, B]$ dont l'allure du spectre est représentée schématiquement sur la figure 1.

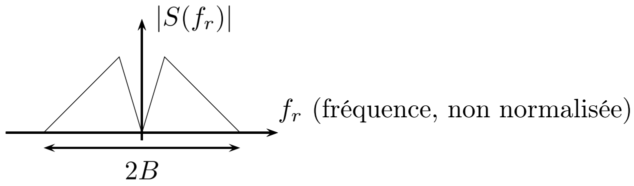

FIGURE 1 – Spectre schématique du signal $s(t)$

1. On définit les signaux à temps discret :

$$\forall n : \qquad x_n = s\left(\frac{n}{2B}\right) \qquad z_n = s\left(\frac{n}{4B}\right)$$

Comment s'appelle l'opération qui consiste à recueillir les signaux ci-dessus à partir de $s(t)$? La condition du théorème de Shannon-Nyquist est-t-elle vérifiée pour x_n ? pour z_n ?

2. Tracer l'allure schématique des spectres des signaux à temps discret x_n et z_n (on tracera l'allure des transformées de Fourier à temps discret respectives $X(f)$ et $Z(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

3. On définit le signal à temps discret y_n par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair } (n = 2p), & y_{2p} = x_p \\ \text{Si } n \text{ est impair } (n = 2p+1), & y_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

Calculer la transformée en z de y_n (notée $Y[z]$) en fonction de celle de x_n (notée $X[z]$).

4. Quel est le lien entre $Y[z]$ et la transformée de Fourier à temps discret de y_n (notée $Y(f)$) ? En déduire un lien entre $Y(f)$ et $X(f)$. Représenter alors l'allure de $Y(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$.

5. Montrer que par un filtrage passe-bas numérique de y_n, il est possible de retrouver z_n.

6. On souhaite obtenir la formule correspondant à l'interpolation précédemment décrite en fréquence.

(a) Considérer $Z(f)$ sur l'intervalle $[-1/4, 1/4]$, décomposer cette fonction en série de Fourier sur cet intervalle et montrer que cette décomposition s'écrit :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2 z_{2p} e^{-i4\pi pf} \qquad \text{(sur l'intervalle } [-1/4, 1/4])$$

Rappel : Pour une fonction g périodique de période a, on rappelle qu'une écriture de la décomposition en série de Fourier est donnée par $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-i2\pi kx/a}$ avec $c_k = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(x) e^{+i2\pi kx/a}\, dx$.

(b) Exprimer z_n en fonction de $Z(f)$ puis en déduire la relation suivante qui exprime z_n en fonction des échantillons pairs :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

(c) En déduire z_n en fonction des x_n.

Exercice 2: transformée en cosinus discrète Cet exercice redémontre quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète (TFD) et introduit à partir de celle-ci la transformée en cosinus discrète qui est très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG,...).

1. On considère les N échantillons $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ d'un signal à temps discret de durée finie. On rappelle que la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ s'exprime par la somme (ici finie) :

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\mathrm{i}2\pi kf}$$

On notera $(X_n)_{n=0,\ldots,N-1}$ la TFD de $(x_n)_{n=0,\ldots,N-1}$.

(a) Rappeler comment la TFD s'interprète comme les valeurs de la TFTD en N points de l'intervalle unité. Donner l'expression de $(X_n)_{n=0,\ldots,N-1}$. Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{W}$ est la matrice $\mathbf{W} = (w^{(k-1)(l-1)})_{k,l=1,\ldots,N}$, avec $w \in \mathbb{C}$ à préciser.

(b) Calculer $\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}$. En déduire le lien entre $\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$ et $\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ ainsi que la formule de la TFD inverse.

2. A partir de maintenant, on pose $N = 2P$ et on suppose que $(x_n)_{n=0,\ldots,2P-1}$ est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients X_k ?

3. On fait l'hypothèse supplémentaire que $\forall n \in \{0,\ldots,2P-1\} \qquad x_{2P-1-n} = x_n$.
Montrer que cela permet d'écrire :

$$\forall k \in \{0,\ldots,P\} \qquad \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi k}{2P}\right) X_k = A_k$$

où $A_k \in \mathbb{R}$ est à préciser.

4. Que vaut X_P ?

5. En déduire que $\forall n \in \{0,\ldots,P-1\}, \qquad x_n = \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n+\frac{1}{2})\right)\right).$

6. La transformée en cosinus discrète de $(x_n)_{n=0,\ldots,P-1}$ est définie par les coefficients $(\widetilde{A}_k)_{k=0,\ldots,P-1}$ tels que :

$$\widetilde{A}_k = \begin{cases} \frac{A_0}{2\sqrt{P}} & \text{si } k=0, \\ \frac{A_k}{\sqrt{2P}} & \text{si } k \in \{1,\ldots,P-1\}. \end{cases}$$

Vérifier que cette transformation conserve l'énergie du signal, càd que $\sum_{n=0}^{P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2$.