SIC3601 : TD numéro 4

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal d'énergie finie notée E_x. On note $(\gamma_x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ sa fonction d'autocorrélation en énergie et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

$\boxed{1}$ $E_x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_x(k)$.

$\boxed{2}$ $E_x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_x(k)|^2$.

$\boxed{3}$ $E_x = \Gamma_x(0)$.

$\boxed{4}$ $E_x = \int_0^1 \Gamma_x(f)\, df$.

$\boxed{5}$ $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f)\, df$.

$\boxed{6}$ $E_x = \int_0^{+\infty} \Gamma_x(f)\, df$.

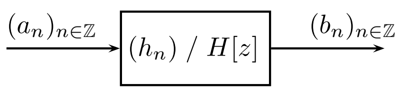
$\boxed{7}$ $E_x = \gamma_x(0)$.

Exercice 1: fonction d'autocorrélation / densité spectrale d'énergie Soit le signal à temps discret ($\alpha > 0$ est une constante)

$$x_n = \begin{cases} e^{-\alpha n} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que x_n est un signal d'énergie finie et calculer son énergie E_x.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation en énergie $\gamma_x(k)$ et retrouver la valeur de E_x.
3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$.
4. Retrouver E_x à partir de $\Gamma_x(f)$.
5. Exprimer (sans calculer) l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences $[-1/4, 1/4]$.

Exercice 2: filtre à temps discret On s'intéresse à un filtrage à temps discret dont le schéma ci-dessous donne les notations :



La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -1/2 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Uniquement à partir de la réponse impulsionnelle, dire (en justifiant) si le filtre est :
- stable ?
- causal ?

2. Exprimer à un instant n donné la sortie $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre ci-dessus en fonction de l'entrée $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

3. Déterminer la fonction de transfert en z $H[z]$ ainsi que la réponse en fréquence $H(f)$ de ce même filtre.

4. Calculer $|H(f)|^2$ et tracer son allure en fonction de f. En déduire le type de filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande).

5. On s'intéresse maintenant au filtre causal, inverse du filtre précédent :

$$(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \boxed{(g_n)\ /\ G[z]} \longrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Exprimer à un instant n donné la sortie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du filtre ci-dessus en fonction de cette sortie avant l'instant n et de l'entrée $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Calculer la fonction de transfert $G[z]$.

6. Préciser le domaine de convergence de $G[z]$ et en déduire la stabilité (ou non) du filtre $G[z]$.

7. Calculer la réponse impulsionnelle de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et retrouver la stabilité (ou non) du filtre à partir de $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

8. Parmi les acronymes AR, MA, ARMA, RIF, RII, dire en précisant leur signification, ceux que l'on donne aux filtres de fonction de transfert $H[z]$ et $G[z]$ respectivement.

Exercice 3: fonction d'autocorrélation / densité spectrale (énergie) Soit le signal suivant (A et α sont des constantes positives strictement) :

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $x(t)$ est un signal d'énergie finie et calculer l'énergie E_x.

2. Calculer la fonction d'autocorrélation (en énergie) $\gamma_x(\tau)$ et retrouver la valeur de E_x à partir de $\gamma_x(\tau)$.

3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$ du signal et retrouver la valeur de E_x à partir de $\Gamma_x(f)$.

4. Calculer l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences $[-\frac{\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}]$.