Calculs spécifiques aux programmes « Digimco » et « Funambule »

Marc

11 janvier 2020

1 Mouvement de corps rigide le plus proche

Digimco détermine un champ de déplacement noté $\overrightarrow{U}(U, V)$ aux points $\overrightarrow{OM}(X, Y)$. Afin de rendre l'affichage plus parlant on représente le champ de déplacement auquel on a retiré le mouvement de corps solide. Celui-ci est noté $\overrightarrow{U}_{cs}(U_{cs}, V_{cs})$ et dépend de la translation (u_0, v_0) et la rotation θ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U}_{cs} &= \overrightarrow{u}_0 + \theta \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} \\
U_{cs} &= u_0 - \theta Y \\
V_{cs} &= v_0 + \theta X
\end{aligned}$$

en supposant un petit déplacement. Le mouvement de corps rigide le plus proche est obtenu par minimisation de la distance :

$$\begin{aligned}
\min_{u_0, v_0, \theta} \sum \|\overrightarrow{U} - \overrightarrow{U}_{cs}\|^2 \\
\min_{u_0, v_0, \theta} \sum (U - u_0 + \theta Y)^2 + (V - v_0 - \theta X)^2
\end{aligned}$$

Par dérivation par rapport à (u_0, v_0, θ) on obtient :

$$\begin{aligned}
n u_0 &= \sum U + \theta \sum Y \\
n v_0 &= \sum V - \theta \sum X \\
\sum YU - u_0 \sum Y + \theta \sum Y^2 &= \sum XV - v_0 \sum X - \theta \sum X^2
\end{aligned}$$

où n est le nombre de points du champ. En injectant les deux premières dans la troisième, on obtient θ, puis les deux premières donnent u_0 et v_0. En introduisant les termes de moyenne (barrés) on obtient :

$$\begin{aligned}
\theta\left(\overline{X^2} - \bar{X}\bar{X} + \overline{Y^2} - \bar{Y}\bar{Y}\right) &= \overline{XV} - \bar{X}\bar{V} - \overline{YU} + \bar{Y}\bar{U} \\
u_0 &= \bar{U} + \theta\bar{Y} \\
v_0 &= \bar{V} - \theta\bar{X}
\end{aligned}$$

Cette solution est exacte quelque soit le nombre de points et leur positions respective. Elle est cependant dépendante de l'hypothèse de petits déplacement faite au début. Elle est implémentée dans le code SORTIES.m.