

# DIC revisitée et indépendance des champs

M. François

4 mars 2020

## 1 Notations

- $F$  Image initiale
- $G$  Image finale
- $\lambda_q$  Paramètres du champ de déplacement
- $n$  leur nombre
- $\Phi$  écart quadratique entre les deux images
- $\vec{X}$  les coordonnées des pixels de  $F$  (pixel, entiers)
- $\vec{x}$  les coordonnées des pixels de  $G$  déplacés vers  $F$  (pixel, non entiers)
- $(p_l, p_c, p)$  nombre de pixels en ligne et en colonne de  $F$  ou  $G$  en  $x$ , en  $y$  et une moyenne des deux
- $n$  le pas courant de calcul
- $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  la base orthonormée

## 2 Objectifs et principes de la DIC

## 3 La fonction de minimisation

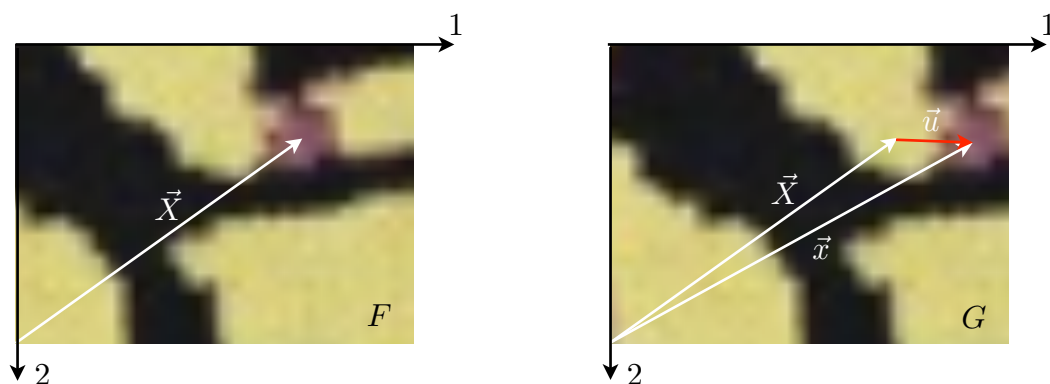


FIGURE 1 – La cinématique

On recherche le champ de déplacement  $\vec{u}$  qui fait correspondre au mieux les images  $F$  (initiale) et  $G$  (finale) (Figure 1). Ce champ correspond à la différence entre les vecteurs position  $\vec{x}$  de

l'image finale G et  $\vec{X}$  de l'image initiale F.

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \quad (1)$$

Le vecteur position initiale  $\vec{X}$  est celui des pixels de l'image initiale F. Il est connu et composé d'entiers. Le vecteur position finale  $\vec{x}$  est défini pour tout  $\vec{X}$  par un jeu de  $n$  paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $n$  est petit devant les  $2p_l p_c$  inconnues du champ  $\vec{x}$ ) et donc il faut considérer :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2)$$

Les paramètres optimaux définis comme ceux pour lesquels l'écart quadratique moyen suivant :

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{S} \iint_{\mathcal{D}} \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right)^2 dS \quad (3)$$

est minimal. Dans cette expression,  $f \in [0, 1]$  et  $g \in [0, 1]$  sont les niveaux de gris des images et le domaine  $\mathcal{D}$  correspond à l'ensemble des points tels que  $\vec{x}$  demeure dans le domaine de définition de l'image G :

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_1 \leq p_c \\ 1 &\leq x_2 \leq p_l \end{aligned} \quad (4)$$

La surface  $S$  est celle du domaine  $\mathcal{D}$ ; elle est égale au nombre de pixels pris en compte dans la corrélation (l'unité de longueur est le pixel). La variable retenue pour le calcul de l'intégrale est  $\vec{X}$  et donc l'élément de surface :

$$dS = \|d\vec{X}\| \quad (5)$$

ne dépend pas des paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Depuis l'équation 3 il vient :

$$0 \leq \Phi \leq 1. \quad (6)$$

Si l'image G est une transformation (bijection) de l'image F et si  $\vec{x}$  est idéal alors  $\Phi = 0$ . Ce cas est improbable suite aux interpolations que nous verrons ensuite, aux inévitables défauts optiques et du capteur de l'appareil photo (variations de l'éclairage, distorsions, fluctuations thermiques) et de part la discrétisation (en 8 ou plus rarement en 16 bits) des niveaux de gris. Le cas  $\Phi = 1$  est encore plus improbable car il correspond à des images F et G en noir et blanc et en opposition totale. Si une des images possède un niveau de gris uniforme, la valeur de  $g(\vec{x}) - f(\vec{X})$  est invariante : la corrélation d'image requiert une texture pour pouvoir fonctionner. Cette texture ne doit pas être régulière (comme un damier) car alors, la corrélation serait invariante par tout champ de translation correspondant au pas de la texture. Elle consiste en général en un mouchetis aléatoire, que l'on peut réaliser avec deux bombes de peinture ou alors qui préexistent sur certains matériaux (bitumes, bétons...).

## 4 Condition de stationnarité et linéarisation

Le minimum de  $\Phi$  correspond à la stationnarité de cette fonction, c'est à dire aux  $n$  conditions  $d\Phi/d\lambda_p = 0$  (obtenues depuis 3, 2) suivantes :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_p} = \Phi \frac{\partial S}{\partial \lambda_p} \quad (7)$$

$$2 \iint_{\mathcal{D}} (g - f) \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} dS + \int_{\delta \mathcal{D}} (g - f)^2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \cdot \vec{\nu} dl = \Phi \frac{\partial S}{\partial \lambda_p} \quad (8)$$

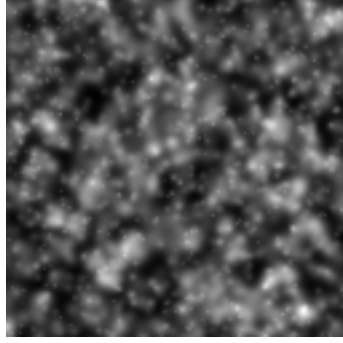


FIGURE 2 – Un exemple de mouchetis (artificiel)

En toute rigueur, cette expression est valable si le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  ne varie pas. Cela revient à négliger l'effet de la variation du domaine d'intégration, ce qui sera vrai proche de la solution.

Ordre de grandeur du terme de bords ( $p$  nombre de pixels)

$$\int_{\delta D} (g - f)^2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \cdot \vec{\nu} dl \simeq 4pk^2 < \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \right\| > \quad (9)$$

$$2 \iint_{\mathcal{D}} (g - f) \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} dS \simeq 2p^2 k < \|\vec{\nabla} F\| > < \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \right\| > \quad (10)$$

Où  $< \bullet >$  représente la moyenne sur l'image. Le rapport des deux est :

$$\frac{2k}{p < \|\vec{\nabla} F\| >} \quad (11)$$

$p$  nombre de pixels,  $0 \leq k \leq 1$ . Si  $\vec{\nabla} F$  pas trop petit (du contraste, des structures dans  $F$ ), alors terme de bord négligeable.

On linéarise le problème en supposant que ces conditions sont obtenues pour le jeu de variables  $\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \dots, \lambda_n + \Delta\lambda_n$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  est le jeu de paramètre actuel et  $\Delta\lambda_1, \dots, \Delta\lambda_n$  le correcteur que l'on cherche à obtenir pour le pas de calcul suivant :

$$\varphi_p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \iint_{\mathcal{D}} \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right) \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} dS \quad (12)$$

$$\varphi_p(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \dots, \lambda_n + \Delta\lambda_n) = 0 \quad (13)$$

$$\simeq \varphi_p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_1} \Delta\lambda_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_n} \Delta\lambda_n \quad (14)$$

Soit, en notation abrégée :

$$-\frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_q} \Delta\lambda_q = \varphi_p \quad (15)$$

Cette dernière équation correspond à un système linéaire de rang  $n$ , le nombre de paramètres. Il reste maintenant à expliciter le terme  $\partial \varphi_p / \partial \lambda_q$ . Considérant 2, la dérivée de  $\varphi_p$  s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_q} = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda_q} \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} + \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right) \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_q \partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} + \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \lambda_p} \right) \right) dS \quad (16)$$

La dérivée de  $g$  est :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_q} = \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \quad (17)$$

et la dérivée seconde croisée est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_q \partial \vec{x}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda_q} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} + \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \vec{x}} \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} + \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_q} \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \end{aligned} \quad (18)$$

Au final on (1+e) :

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial \lambda_q} = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \right) + \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right) \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} + \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \lambda_p} \right) dS \quad (19)$$

On remarque que M est symétrique. Le système 15 à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{D}} \left( f(\vec{X}) - g(\vec{x}) \right) \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} dS = \\ &\left[ \iint_{\mathcal{D}} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \right) + \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right) \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} + \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \lambda_p} \right) \right) dS \right] \Delta \lambda_q \end{aligned} \quad (20)$$

On remarque que ce système correspond aussi à l'expression utilisée dans la méthode VIC (DETAILLER).

## 5 Hypothèse fondamentale

On considère que, proche de la solution,  $f(\vec{X}) = g(\vec{x}(\vec{X}, \lambda_q)) + c$  où  $c$  est une constante représentant une possible variation d'intensité lumineuse globale entre les images initiales et finales. Ceci implique que :

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{x}}(\vec{x}(\vec{X}, \lambda_q)) \simeq \frac{\partial f}{\partial \vec{X}}(\vec{X}) = \vec{\nabla} F \quad (21)$$

En premier lieu le gradient  $\vec{\nabla} F$  ne dépend pas des paramètres  $\lambda_i$  : cela permet de ne le calculer qu'une fois en début de calcul et induit un gain considérable de temps CPU. En second lieu la

dérivée croisée de l'équation 18

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda_q \partial \vec{x}} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_q} \left( \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_q} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{X}} \right) \\
&\simeq 0
\end{aligned} \tag{22}$$

s'annule. Le hessien de  $G$  présent dans l'équation 18 n'est donc pas à calculer et c'est bien car c'est un calcul très sensible au bruit numérique et à l'interpolation choisie pour calculer  $g$  aux points  $\vec{x}$ . Compte tenu de cette hypothèse, le système 20 se réécrit comme :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{D}} \left( f(\vec{X}) - g(\vec{x}) \right) \vec{\nabla} F \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} dS = \\
&\left[ \iint_{\mathcal{D}} \left( \left( \vec{\nabla} F \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \right) \left( \vec{\nabla} F \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \right) + \left( g(\vec{x}) - f(\vec{X}) \right) \left( \vec{\nabla} F \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \lambda_p} \right) \right) dS \right] \Delta \lambda_q \tag{23}
\end{aligned}$$

Ce système correspond à celui proposé par Hild et Roux, en introduisant cependant le dernier membre. En première approche, on ne peut pas le négliger. Cependant on verra que, au moins dans le cadre de la mesure de champs homogènes (paragraphe ??), il peut être négligé.

## 6 Généralités sur les paramétrages des champs de déplacement

Le choix des paramètres de contrôle obéit à quelques règles, concernant les champs  $\vec{x}(\vec{X}, \lambda_q)$  et  $\partial \vec{x} / \partial \lambda_q$  :

1. Afin de démarrer le calcul sur un déplacement nul, on doit avoir

$$\vec{x}(\vec{X}, \lambda_q = 0) = \vec{X} \tag{24}$$

2. Ces champs doivent être indépendants. Si ce n'est pas le cas, la matrice  $M$  sera mal conditionnée.
3. On fera en sorte qu'une variation de  $\lambda_q$  de 1 corresponde approximativement à une variation de position de 1 pixel, de manière à ce que tous les champs aient un poids comparable et que la matrice soit raisonnablement conditionnée.

$$\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_q} \right\| \simeq 1 \tag{25}$$

### ET AUTRE CONDITION (1+E) ZEOR VOIR PRESNETATION ORLEANS

Dans le cas général, on pourra calculer numériquement ces gradients. Toutefois, quand cela est possible, on aura intérêt à les calculer analytiquement.

Le calcul de corrélation peut nécessiter une évaluation approximative du champ avant de commencer car, si le champ initial (généralement  $\vec{x} = \vec{X}$ ) est trop éloigné de la solution, l'algorithme ne convergera pas. Cette étape de mesure grossière peut être demandée à l'utilisateur, en lui demandant de cliquer 3 points correspondant sur chaque image. Tout ou partie des paramètres du champ sont calculés depuis ces trois points.

Une autre manière d'aider le calcul est de procéder à un floutage des images F et G lors d'un premier calcul. Ce flou  $(1+e)$  pour effet de grossir la taille des taches du mouchetis et de permettre de trouver un champ de déplacement important. Toutefois, il convient de faire un second calcul (en partant des paramètres  $\lambda_q$  obtenus) afin de profiter de la finesse de l'image de départ et d'obtenir la précision maximale.

La nature de la minimisation, en moindres carrés, rend le procédé quasiment insensible à des variations de luminosité, même entre les images F et G. Seule la valeur de  $\Phi$  sera affectée, mais le champ  $\vec{u}$  ne le sera que très peu.

## 7 Bases de champs

La DIC globale suppose l'existence d'une base de champ. Celle-ci est déjà présente dans l'expression globale (2)  $\vec{x}(\vec{X}, \lambda_i)$ , dans laquelle  $\vec{X}$  et  $\vec{x}$  représentent la position d'un même point matériel respectivement dans le repère de l'image initiale F et de l'image finale G. Cependant ces repères sont dans une métrique associée à l'image (pixel) qui ne correspond pas forcément, ni en échelle ni en orientation, à celle du problème mécanique que retenu. On introduit alors une troisième configuration, celle du problème mécanique, dans laquelle le point matériel est repéré par le vecteur  $\vec{\Xi}$  pour la configuration initiale et  $\vec{\xi}$  pour la configuration déformée. Dans ce repère, la métrique peut être physique (mètres) ou unitaire. Cette configuration commune est recommandée dans l'article de (Kolev, Desmorat, 2019, Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus), qui appellent "plongement" le passage du repère physique (ou image) au repère mécanique. En résumé on a, pour un même point matériel :

- $\vec{X}$  sa position dans le repère image F
- $\vec{\Xi}$  sa position dans le repère mécanique en configuration initiale M
- $\vec{\xi}$  sa position dans le repère mécanique en configuration finale m
- $\vec{x}$  sa position dans le repère image G

L'équation (2) se traduit alors comme l'emboîtement suivant :

$$\vec{x}(\vec{\xi}(\vec{\Xi}(\vec{X}))) \quad (26)$$

La transformation purement mécanique  $\vec{\xi}(\vec{\Xi})$  est supposée connue. Différents exemples seront

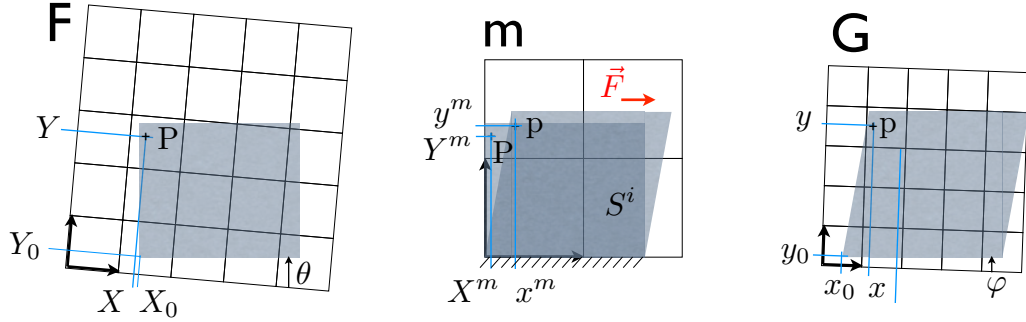


FIGURE 3 – Les différents repères ( $\Rightarrow$  il faudra adapter les notations)

donnés dans la section suivante. Nous supposons que les passages des repères-image aux repères mécaniques directs  $\vec{\Xi}(\vec{X})$  et inverses  $\vec{x}(\vec{\xi})$  sont des simples mouvements de corps rigides (dus au possible mouvement de la camera ou de l'objet), associés avec un effet de changement d'échelle (variation de la distance objet-camera ou éventuellement images prises avec deux capteurs de résolutions différentes). Afin d'introduire une symétrie des transformations directes et indirectes, on pose :

$$\vec{\Xi} = \frac{1}{1+E} \begin{vmatrix} (X_1 - X_{01}) \cos \Theta_0 + (X_2 - X_{02}) \sin \Theta_0 \\ -(X_1 - X_{01}) \sin \Theta_0 + (X_2 - X_{02}) \cos \Theta_0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

où  $(X_{01}, X_{02})$  sont la translation,  $\Theta_0$  la rotation et  $(1+E)$  le facteur d'échelle. et

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + (1+e) \begin{vmatrix} \xi_1 \cos \theta_0 - \xi_2 \sin \theta_0 \\ \xi_1 \sin \theta_0 + \xi_2 \cos \theta_0 \end{vmatrix} \quad (28)$$

où  $(x_{01}, x_{02})$  sont la translation,  $\theta_0$  la rotation et  $(1+e)$  le facteur d'échelle. On note que chacune de ces transformations correspond à l'identité si les paramètres sont à 0. Afin de garantir une initialisation "raisonnable" du calcul on garantira de même que le champ mécanique obéit lui aussi à  $\vec{\Xi}(\vec{\xi}, \lambda_p = 0) : \vec{\xi}$ . On remarque que la composition de ces deux transformations donne l'identité si  $(X_{01}, X_{02}, \Theta_0, E) = (x_{01}, x_{02}, \theta_0, e)$  et si la transformation mécanique est l'identité  $\vec{\Xi} = \vec{\xi}$ . On note que, dans ce cas le plus général, huit paramètres  $\lambda_i$  sont utilisés pour définir ces transformations. Les paramètres supplémentaires  $\lambda_p$  seront utilisés pour définir la transformation mécanique  $\vec{\Xi}(\vec{\xi}, \lambda_p)$ .

### 7.1 Dérivées des champs de plongement

Les dérivées  $\partial \vec{x} / \partial \lambda_i$  sont demandées par le calcul. Les fonctions sont imbriquées de la sorte :

$$\vec{x}(\vec{\xi}(\vec{\Xi}(\vec{X}, \lambda_r), \lambda_q), \lambda_p) \quad (29)$$

et donc plusieurs cas sont à considérer.

$$\begin{aligned} \lambda_p \in \{x_{01}, x_{02}, \theta_0, e\} &\rightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} \\ \lambda_q \notin \{x_{01}, x_{02}, \theta_0, e, X_{01}, X_{02}, \Theta_0, E\} &\rightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \lambda_q} \\ \lambda_r \in \{X_{01}, X_{02}, \Theta_0, E\} &\rightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_r} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{\Xi}} \cdot \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial \lambda_i} \end{aligned} \quad (30)$$

On trouve aisément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_{01}} &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_{02}} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta_0} &= (1+e) \begin{vmatrix} -\xi_1 \sin \theta_0 - \xi_2 \cos \theta_0 \\ \xi_1 \cos \theta_0 - \xi_2 \sin \theta_0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial e} &= \begin{vmatrix} \xi_1 \cos \theta_0 - \xi_2 \sin \theta_0 \\ \xi_1 \sin \theta_0 + \xi_2 \cos \theta_0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} &= (1+e) \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial X_{01}} &= \frac{1}{1+E} \begin{vmatrix} -\cos \Theta_0 \\ \sin \Theta_0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial X_{02}} &= \frac{1}{1+E} \begin{vmatrix} -\sin \Theta_0 \\ -\cos \Theta_0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial \Theta_0} &= \frac{1}{1+E} \begin{vmatrix} -(X_1 - X_{01}) \sin \Theta_0 + (X_2 - X_{02}) \cos \Theta_0 \\ -(X_1 - X_{01}) \cos \Theta_0 - (X_2 - X_{02}) \sin \Theta_0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{\Xi}}{\partial E} &= -\frac{1}{(1+E)^2} \begin{vmatrix} (X_1 - X_{01}) \cos \Theta_0 + (X_2 - X_{02}) \sin \Theta_0 \\ -(X_1 - X_{01}) \sin \Theta_0 + (X_2 - X_{02}) \cos \Theta_0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$



Les termes manquants  $\partial\vec{\xi}/\partial\lambda_p$  et la matrice  $\partial\vec{\xi}/\partial\vec{\Xi}$  dépendent du problème mécanique  $\vec{\xi}(\vec{\Xi})$  considéré. Dans de nombreux cas on sera amené à bloquer des paramètres. Si, par exemple, on force  $E = 0$ , on pourra se contenter de réduire le jeu de paramètres. Au contraire, si on force l'égalité de deux paramètres  $\lambda_p = \lambda_r$ , par exemple  $\theta_0 = \Theta_0$ , on devra considérer, depuis (29) on aura :

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial\lambda_p} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\lambda}_p} + \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}} \cdot \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial\vec{\Xi}} \cdot \frac{\partial\vec{\Xi}}{\partial\vec{\lambda}_r} \quad (32)$$

## 7.2 Condition d'indépendance de la base de champ

Pour fonctionner, la DIC a besoin que les champs choisis soient linéairement indépendants. Par exemple, dans le cas ci-dessus où le champ mécanique est l'identité ( $\vec{\xi} = \vec{\Xi}$ ), tous les jeux de paramètres tels que  $x_{01} = X_{01}$ ,  $x_{02} = X_{02}$ ,  $\Theta_0 = \theta_0$ ,  $E = e$  donnent la même transformation identité ( $\vec{x} = \vec{X}$ ) : la solution n'est pas unique et la DIC ne pourra pas converger. Il faudra réduire le jeu de paramètres.

Les champs sont indépendants, au voisinage d'un état donné, si les dérivées  $\partial\vec{x}/\partial\lambda_i$  le sont, indépendamment du point  $\vec{X}$  considéré. Dans le cas contraire, deux jeux de paramètres différents donneraient le même champ de positions  $\vec{x}$  (donc de déplacement  $\vec{u}$ ) en tout point. La condition d'indépendance linéaire s'écrit :

$$\nexists \mu_j \neq 0 \quad | \quad \forall \vec{X}, \quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\lambda_j} \mu_j = 0 \quad (33)$$

La recherche du noyau de cette application linéaire peut être longue. On préférera utiliser la forme suivante, équivalente si les dérivées  $\partial\vec{x}/\partial\lambda_i$  sont linéairement indépendantes, en au moins un point (dans le cas contraire, le champ de déplacement serait unidimensionnel).

$$\nexists \mu_j \neq 0 \quad | \quad \forall \vec{X}, \quad \left( \frac{\partial\vec{x}}{\partial\lambda_i} \cdot \frac{\partial\vec{x}}{\partial\lambda_j} \right) \mu_j = 0 \quad (34)$$

Cela correspond à vérifier, analytiquement, que le noyau de la matrice est indépendant de  $\vec{X}$ . Notons que le déterminant de la matrice n'est ici pas un bon indicateur. Sa nullité indique une au moins valeur propre à 0 mais, si celles-ci sont relatives à des vecteurs propres  $\mu_j$  indépendants de  $\vec{X}$ , alors le champ est indépendant.

Les résultats seront détaillés dans les exemples ci-dessous

## 7.3 Condition d'initialisation à l'identité

Le calcul de VIC démarre avec les paramètres  $\lambda_i = 0$ . La condition la plus naturelle d'initialisation du calcul est de commencer à supposer aucune transformation entre F et G *i.e.* :

$$\vec{x}(\vec{X}, \lambda_i = 0) = \vec{X} \quad (35)$$

## 8 Quelques champs

N champs sont présentés dans ce document. Le premier est un mouvement de corps solide associé à une dilatation. Il est utile pour mesurer le déplacement d'une structure dans son ensemble (toute l'image) ou pour mesurer un champ de déplacement en DIC locale, en considérant une

collection d'images. La dilatation, non mécanique en général, peut provenir d'une variation de distance entre la surface de l'objet et la camera.

Le second est une déformation homogène, avec translation et rotation. Il correspond à une jauge de déformation 2D. Ce champ est utile pour la mesure sur éprouvette mécanique, par définition une zone de champ homogène.

## 8.1 Mouvement de corps solide

Le champ mécanique retenu est celui d'un mouvement de corps rigide de translation  $\vec{x}_0$  et de rotation  $\theta_0$ , accompagné d'une dilatation  $(1 + e)$ . Afin de garantir l'indépendance de la base de champs, on définira les deux plongements à l'identité :  $\vec{\Xi} = \vec{X}$  et  $\vec{x} = \vec{\xi}$ . L'expression globale du champ est alors :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + e)(X_1 \cos \theta_0 - X_2 \sin \theta_0) + x_{01} \\ (1 + e)(X_1 \sin \theta_0 + X_2 \cos \theta_0) + x_{02} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Ce champ inclue déjà les effets de rotation et de mise à l'échelle. Les paramètres du champ sont alors :

$$\lambda_i = \{x_{01}, x_{02}, \theta_0, e\} \quad (37)$$

La condition d'initialisation (35) est vérifiée. Les dérivées de ce champ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_3} &= (1 + e) \begin{pmatrix} -X_1 \sin \theta_0 - X_2 \cos \theta_0 \\ X_1 \cos \theta_0 - X_2 \sin \theta_0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_4} &= \begin{pmatrix} X_1 \cos \theta_0 - X_2 \sin \theta_0 \\ X_1 \sin \theta_0 + X_2 \cos \theta_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Le noyau de la matrice  $\partial \vec{x} / \partial \lambda_i \cdot \partial \vec{x} / \partial \lambda_j$ , au voisinage de  $(\theta_0, e) = (0, 0)$ , a pour base les "vecteurs" suivants :

$$\begin{aligned} {}^1\mu &= \{-X_1/(X_1^2 + X_2^2), X_2/(X_1^2 + X_2^2), 1, 0\} \\ {}^2\mu &= \{-X_2/(X_1^2 + X_2^2), -X_1/(X_1^2 + X_2^2), 0, 1\} \end{aligned} \quad (39)$$

Ces paramètres sont objectivement dépendants des variables d'espace  $(X_1, X_2)$  donc la condition (34) est vérifiée donc ce champ est linéairement indépendant. L'utilisateur peut, à volonté, bloquer un des paramètres à 0. Par exemple, si aucune dilatation ne peut être présente, on pourra imposer  $e = 0$ .

## 8.2 Jauge de déformation

Le champ mécanique correspond à une transformation mécanique à gradient constant  $\mathbf{F}$ . Cette transformation contient naturellement les déplacements de translation (par  $\mathbf{T}$ ), de rotation (inclus dans la partie antisymétrique de  $\mathbf{F}$ ) et de dilatation (associée à la trace de  $\mathbf{F}$ ). L'indépendance des champs requiert que les plongements soient réduits à l'identité :  $\vec{\Xi} = \vec{X}$  et  $\vec{\xi} = \vec{x}$ . L'expression retenue pour le champ complet est :

$$\vec{x} = \mathbf{F} \cdot (\vec{X} + \vec{X}_0) \quad (40)$$

Les paramètres du champ sont les deux composantes du vecteur translation  $\vec{X}_0$  et les quatre composantes du tenseur  $\mathbf{F}$  :

$$\lambda_i = \{X_{01}, X_{02}, F_{11} - 1, F_{12}, F_{21}, F_{22} - 1\} \quad (41)$$

Grâce à cette formulation, la condition d'initialisation (34) est vérifiée. Les dérivées du champ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_1} &= \begin{vmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{vmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_2} &= \begin{vmatrix} F_{12} \\ F_{22} \end{vmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_3} &= \begin{vmatrix} X_1 + X_{01} \\ 0 \end{vmatrix} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_4} &= \begin{vmatrix} X_2 + X_{02} \\ 0 \end{vmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_5} &= \begin{vmatrix} 0 \\ X_1 + X_{01} \end{vmatrix} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_6} &= \begin{vmatrix} 0 \\ X_2 + X_{02} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Le noyau de la matrice  $\partial \vec{x} / \partial \lambda_i \cdot \partial \vec{x} / \partial \lambda_j$ , au voisinage de  $((\theta_0, e) = (0, 0, 0, 0))$  a pour base les quatre jeux de paramètres suivants :

$$\begin{aligned} {}^1\mu &= \{-X_1, 0, 1, 0, 0, 0\} \\ {}^2\mu &= \{-X_2, 0, 0, 1, 0, 0\} \\ {}^3\mu &= \{0, -X_1, 0, 0, 1, 0\} \\ {}^4\mu &= \{0, -X_2, 0, 0, 0, 1\} \end{aligned} \quad (43)$$

Ces jeux de paramètres ne sont pas indépendants de  $\vec{X}$  donc ce champ respecte la condition d'indépendance (34). Depuis la valeur du tenseur gradient  $\mathbf{F}$  obtenu à convergence, on peut en déduire la valeur du tenseur des petites déformations  $\varepsilon$ , de Green-Lagrange  $(\mathbf{1} + \mathbf{E})$ , des rotations  $\mathbf{R}$  :

$$\varepsilon = (\mathbf{F} - \mathbf{I})^s \quad (44)$$

$$(\mathbf{1} + \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (45)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F})^{-\frac{1}{2}} \quad (46)$$

où  $\mathbf{F}^s$  représente le tenseur symétrisé et  $\mathbf{F}'$  l'opération de transposition.

### Exemple d'utilisation

L'action consistait à mesurer les déformations d'une tôle en traction biaxiale non équilibrée (Figure 8.2). Les surfaces ont été préparées avec un mouchetis peint à la bombe. Les photos font  $3012 \times 4516$  pixels. Le résultat de ce calcul est :

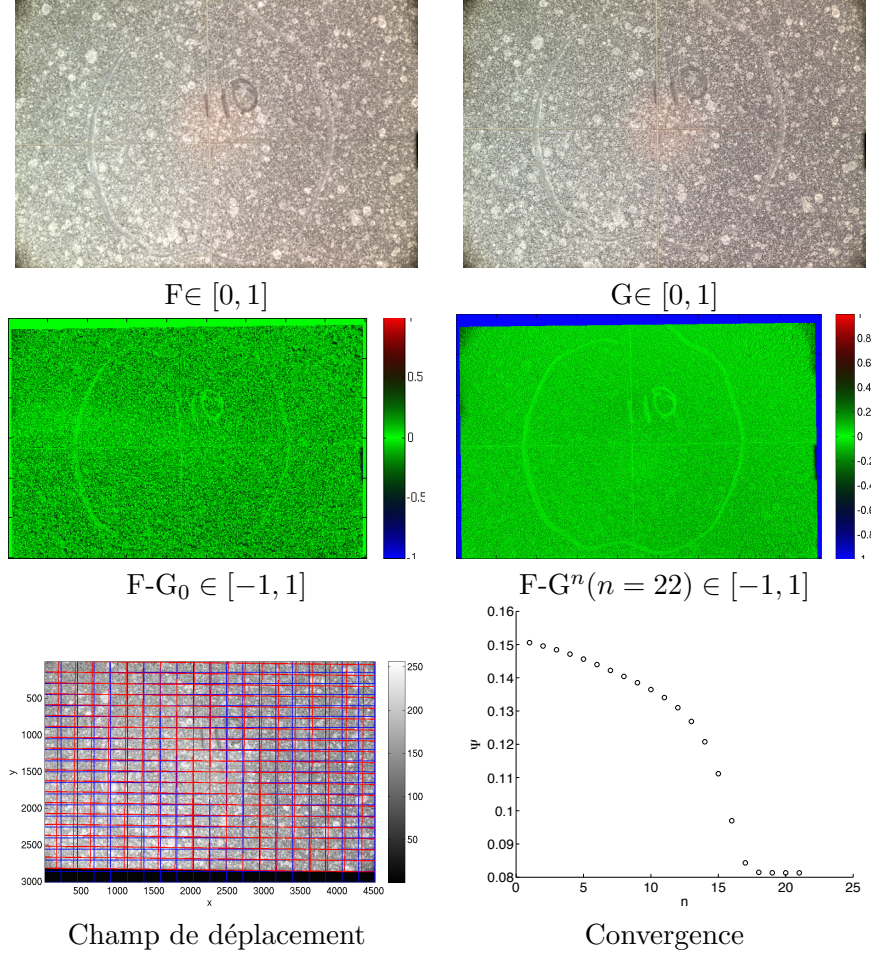
$$(\mathbf{1} + \mathbf{E}) = 10^{-3} \begin{bmatrix} 26,881 & 0,099 \\ 0,099 & -13,679 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\theta = -0,011 \text{ rd} \quad (48)$$

$$X_{01} = -40,474 \text{ pixels} \quad (49)$$

$$X_{02} = -157,373 \text{ pixels} \quad (50)$$

Bien que les images soient faiblement contrastées, vignettées et présentent un reflet, le calcul converge rapidement (ces défauts, à très grande longueur d'onde, n'influencent pas la corrélation). Répété plusieurs fois (l'étape initiale dépend du choix de points de l'utilisateur, donc du positionnement de l'image  $G_0$ ), les résultats en déformations varient au plus de quelques  $10^{-6}$ . En tant que jauge, il est rare que les translations soient d'un grand intérêt (sauf si on a à mesurer un déplacement de corps rigide). La rotation est exploitable si l'on est sûr que l'appareil photo n'a pas tourné (utilisation d'une table ou d'un pied). Les zones uniformes sur les images G-F et



$G^n - F$  correspondent aux pixels perdus, c'est à dire aux points pour lesquels le déplacement  $\vec{x}$  est hors du domaine de définition de l'image (Inéquations 4). Attention, sauf à utiliser un objectif télécentrique (comme ici), une variation de distance entre l'objectif et l'objet induit un champ de dilatation.

## 9 Champ générique de type éléments finis

Un champ élément fini peut être utilisé pour la corrélation d'images [Hild, XXXX]. À cause de la matrice pixel, il est plus simple de s'orienter vers des éléments finis carrés. Nous présenterons ici la méthode pour des éléments finis Q4, les plus simple possibles.

La transformation  $\vec{X} \rightarrow \vec{x}$  est alors donnée, pour un point courant  $\vec{X}$  situé entre 4 nœuds de positions  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_4$  de déplacements respectifs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  disposés comme sur la figure 4 par :

$$\vec{x} = \vec{X} + \frac{1}{4}(1-s)(1-t)\vec{u}_1 + \frac{1}{4}(1+s)(1-t)\vec{u}_2 + \frac{1}{4}(1+s)(1+t)\vec{u}_3 + \frac{1}{4}(1-s)(1+t)\vec{u}_4 \quad (51)$$

où  $s \in [-1, 1]$  et  $t \in [-1, 1]$  sont les coordonnées réduites du point courant dans la base centrée

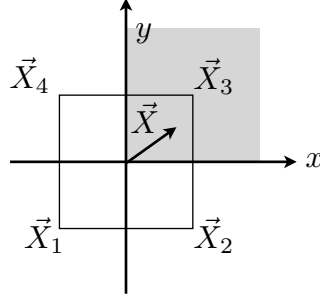


FIGURE 4 – Nœuds et points courants d'un élément fini Q4

au milieu des quatre nœuds :

$$s = \frac{2x - (X_1 + X_2)}{T} \quad (52)$$

$$t = \frac{2y - (Y_1 + Y_4)}{T} \quad (53)$$

où  $T$  est la taille de l'élément fini carré (i.e.  $T = X_2 - X_1 = Y_4 - Y_1$ ). Le déplacement du point courant est donc donné par des fonctions linéaires des déplacements des quatre nœuds qui l'entourent. Une autre façon équivalente de considérer ce champ est de voir que chaque nœud influence le domaine des quatre éléments connexes selon des fonctions linéaires ; pour tout point  $\vec{X}$  de ce domaine (par exemple le domaine grisé autour de  $\vec{X}_3$  dans la figure 4). Au final, le déplacement d'un point quelconque de l'image est donné par :

$$\vec{x} = \vec{X} + \sum_I \frac{(T - |x - X_i|)(T - |y - Y_i|)}{T^2} \vec{u}_I \quad (54)$$

Les  $2N$  paramètres  $\lambda_i$  de la corrélation vont naturellement être les composantes des déplacements des  $N$  nœuds :

$$i = 2I - 1 \Rightarrow \lambda_i = u_I \quad (55)$$

$$i = 2I \Rightarrow \lambda_i = v_I \quad (56)$$

Au niveau du calcul, les dérivées sont simples :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda_p} = \sum_I \frac{(T - |x - X_i|)(T - |y - Y_i|)}{T^2} \vec{e}_\alpha \quad (57)$$

ou  $\alpha = 1$  si  $i$  est impair et  $\alpha = 2$  si non. On remarque que ces dérivées sont indépendantes de la valeur des paramètres  $\lambda_i$  et peuvent donc être calculées une fois pour toutes au début du calcul, de même que leur produit scalaire avec le gradient de l'image  $\vec{\nabla} F$  (équation 23). Enfin on remarque que les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \lambda_q \partial \lambda_p} = 0 \quad (58)$$

sont identiquement nulles, ce qui simplifie le calcul (il n'en serait pas de même avec des éléments plus complexes).

PARLER DU POST PRO QUI DONNE LES DEFORMATIONS. VOIR LA NOTE DE CALCULS DANS LE FICHIER MATHS POUR LE CALCUL DE F.

## 10 Autres champs

### 10.1 Le champ de distorsion de l'objectif

Les objectifs photographiques présentent une aberration géométrique en général décrite sous la forme d'une série harmonique de champs. Ce champ de déplacement d'origine optique  $\vec{u}^o$  est nécessaire afin de ramener les images de départ et d'arrivée à leur géométrie exacte. Il est parfois possible de trouver ces champs ; on pourra, sinon, établir une procédure de mesure basée sur la photographie d'une grille (non présentée ici).

Ces champs seront appliqués sur chaque image  $F \rightarrow \vec{u}^o(F)$  et  $G \rightarrow \vec{u}^o(G)$  avant tout traitement ultérieur : ils n'apparaissent pas dans ce document. On peut aussi utiliser des objectifs à distorsion nulle et s'affranchir de cette étape. Dans le cas contraire, il faut faire attention à avoir un réglage identique de l'appareil photo pour chaque image  $F$  et  $G$  (bloquer le zoom mais aussi l'autofocus qui peut conduire à des variations à ce niveau).

Notons à ce sujet que l'on peut aussi corriger le défaut de vignettage. Il ne s'agit pas d'un déplacement, mais d'une correction des niveaux de gris de l'image, généralement fonction de la distance au centre de l'image. Un étalonnage (de l'ensemble appareil photo, objectif et éclairage) sera possible (non décrit) sur une surface de teinte uniforme.

### 10.2 le champ de déplacement complet BAK BAK BAK

On obtient le champ de déplacement  $\vec{u}$  complet s'obtient par assemblage des transformations précédentes :

$$\vec{u} = \vec{x}^g - \vec{x}^f \quad (59)$$

Il dépend des paramètres de pilotage  $\lambda_q = (t_x^f, t_y^f, r^f, (1+e)^f, t_x^g, t_y^g, r^g, (1+e)^g, FS_p)$ . Cette dépendance peut être considérée comme linéaire si les rotations sont faibles et que le problème mécanique est linéaire et, dans ce cas, les dérivées  $\partial \vec{u} / \partial \lambda_q$  peuvent théoriquement n'être calculés qu'une fois. Cependant, l'algorithme induisant le re-calcul de l'image initiale  $F \rightarrow F^n$ , il sera obligatoire de procéder à chaque itération au calcul de ces dérivées.

### 10.3 Indépendance des champs

L'algorithme ne peut converger que si les champs  $\partial \vec{x} / \partial \lambda_q$  sont indépendants. Dans le cas contraire, la matrice  $M$  est mal définie. Cela restreint le domaine des possibles. Par exemple, considérons l'identification du module de compressibilité  $K$  dans un essai de pression  $P$  connue. Le champ sera radial  $\vec{u}^g = (P/3K)(x_1 \vec{1} + e_1 + x_2 \vec{1} + e_2)$ . Ce champ est similaire à la transformation de mise à l'échelle (conditionnée par  $(1+e)^f$  et  $(1+e)^g$ ) alors il ne sera possible de déterminer  $K$  que si le facteur d'échelle est donné et le même pour les deux images :  $(1+e)^f = (1+e)^g$ .