

# Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images et applications en mécanique des solides

François HILD

Notes de cours IPSI :

Identification du comportement mécanique des matériaux et  
et de la rupture des structures à l'aide de méthodes optiques

Septembre 2003

---

LMT-Cachan (Laboratoire de Mécanique et Technologie)  
ENS Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson  
94235 Cachan Cedex  
France



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>9 Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images</b>	<b>5</b>
9.1 Principe de mesure de déplacement et de déformation par corrélation d'images . . . . .	6
9.1.1 Qu'est-ce que la corrélation? . . . . .	6
9.1.1.1 Cas unidimensionnel continu . . . . .	6
9.1.1.2 Cas unidimensionnel discret . . . . .	9
9.1.1.3 Remarque : précaution à prendre . . . . .	11
9.1.1.4 Décalage par TFR . . . . .	11
9.1.2 La corrélation d'images . . . . .	13
9.1.3 Différentes mesures de déformations . . . . .	16
9.1.3.1 Déformations infinitésimales . . . . .	16
9.1.3.2 Introduction aux déformations finies . . . . .	17
9.1.3.3 Cinématique en grandes déformations . . . . .	18
9.2 Algorithme multi-échelle de corrélation d'images . . . . .	20
9.2.1 Approche classique . . . . .	20
9.2.2 Définition des images et des échelles . . . . .	24
9.2.3 Algorithme de corrélation multi-échelle . . . . .	26
9.2.4 Contrôle de l'estimation du déplacement . . . . .	26
9.3 Performances de la technique . . . . .	28
9.3.1 Utilisation d'images déformées artificiellement . . . . .	28
9.3.2 Analyse d'un essai de traction sur alliage d'aluminium . . . . .	30
<b>10 Vers l'identification de champs de propriétés</b>	<b>35</b>
10.1 Applications en mécanique des solides déformables . . . . .	36
10.1.1 Essai de traction sur alliage d'aluminium . . . . .	36
10.1.1.1 Alignement de l'éprouvette . . . . .	36
10.1.1.2 Estimation des propriétés élastiques . . . . .	37
10.1.1.3 Estimation des propriétés plastiques . . . . .	38
10.1.1.4 Analyse de la rupture . . . . .	39
10.1.1.5 Conclusion . . . . .	40
10.1.2 Essai de reprise d'épaisseur de laine de verre . . . . .	41
10.1.3 Essai de bicompression sur AMF . . . . .	44
10.1.4 Essai biaxial sur du béton haute performance . . . . .	48
10.1.4.1 Béton à ultra hautes performances armé de fibres . . . . .	49
10.1.4.2 Essai de bitraction sur éprouvette cruciforme . . . . .	49

10.1.4.3	Résultats d'essai . . . . .	51
10.1.4.4	Conclusion . . . . .	52
10.2	Identification de champs de propriétés élastiques et d'endommagement	55
10.2.1	Analyse d'un essai brésilien . . . . .	56
10.2.1.1	Démarche d'identification et application . . . . .	56
10.2.1.2	conclusion . . . . .	58
10.2.2	Identification de champs d'endommagement avec des mesures cinématiques . . . . .	59
10.2.2.1	Analyse par éléments finis standard . . . . .	59
10.2.2.2	Étude préliminaire . . . . .	61
10.2.2.3	Approche par éléments finis particulière : écart à l'équi- libre . . . . .	61
10.2.2.4	Résolution . . . . .	62
10.2.2.5	Applications avec des mesures "EF" . . . . .	64
10.2.2.6	Analyse d'un essai biaxial sur un matériau composite	68
10.2.2.7	Conclusions . . . . .	69
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>
	<b>Annexe</b>	<b>79</b>

# Introduction

Le développement de techniques fiables de mesures de champs de déplacements et de déformations est primordial si l'on veut caractériser les effets (hétérogènes) mécaniques à une échelle fine. En effet des matériaux, homogènes sous sollicitations complexes ou hétérogènes, font apparaître des champs dont l'analyse multi-échelle est indispensable en relation avec leur microstructure ou le type de chargement imposé. Ces développements s'inscrivent dans la dialectique essai/calcul en modélisation des matériaux hétérogènes et des structures dans laquelle les mesures de champ jouent un rôle primordial.

Parmi les différentes techniques utilisées [12, 11, 60, 77, 10], la corrélation d'images est un moyen séduisant pour le mécanicien des solides. Elle est rapide, précise, sensible, dotée d'une grande résolution spatiale et d'une dynamique de niveaux de gris de plus en plus étendue, autorisant le traitement de chargements rapides ou l'analyse en temps réel. Les développements très rapides de caméras CCD (Annexe) peu onéreuses, de mise en œuvre facile, simples pour choisir le grandissement (*i.e.*, l'échelle pertinente) permettent l'utilisation de moyens de mesure non intrusifs, sans contact (*i.e.*, adaptables à des conditions d'ambiance difficile et/ou corrosive, haute température, enceinte climatique).

Le traitement d'image fait appel à la notion de corrélation déjà opérationnelle depuis les développements de la VIP ("Vélocimétrie par Imagerie de Particule") en mécanique des fluides ou PIV en anglais [33, 72]. Elle peut également être adaptée à la mesure de déplacements en mécanique des solides. Les hétérogénéités de texture à la surface d'observation sont utilisées dans les techniques d'intercorrélation d'images numériques prises en lumière blanche. On exploite la texture de surface, naturelle ou artificielle, pour l'appariement de zones entre deux images (états de référence et déformé). Ceci nécessite une préparation minimale voire nulle de la surface à observer. D'autre part, le matériel nécessaire à sa mise en œuvre pratique ne requiert qu'une caméra CCD ou un appareil photo numérique, une carte d'acquisition rapide et un micro-ordinateur (figure 1). Il s'agit d'enregistrer une série d'images de la surface à analyser. Le champ de déplacement plan est obtenu par intercorrélation d'une série d'images de référence et d'images de la surface déformée. Il s'agit d'apparier des couples d'images et leur décalage correspond au déplacement plan que l'on recherche.

Ceci conduit au complément "expérimental" d'analyses multi-échelles en mécanique des matériaux et des structures. Les premiers développements de ces tech-

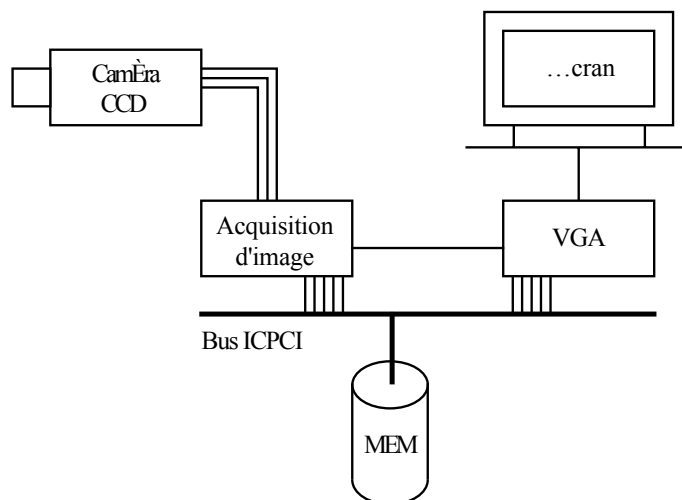


Figure 1 – *Matériel nécessaire à l'enregistrement d'images numériques avec une caméra CCD.*

niques de mesures remontent aux années 1980 [8, 82]. Avec l'avènement des ordinateurs personnels et des puissances de calcul comparables à celles de stations de travail, le traitement d'images de plus de 1 Mpixels est possible dans des temps raisonnables. On peut noter qu'une bonne partie des méthodes développées en France et à l'étranger sont faites dans l'espace réel [52, 60, 10] de la mécanique des solides. Cette méthode est développée ici dans l'espace de Fourier. Ceci conduit à plusieurs avantages, notamment en ce qui concerne la rapidité des calculs et par conséquent la possibilité d'utiliser l'outil lors de la mise au point d'essais thermomécaniques [45, 9, 73].

Cette technique, dans sa version de base (CORRELI<sup>LMT</sup> [45, 43]), est devenue un outil standard utilisé dans l'expérimentation mécanique au LMT-Cachan. Les applications concernent non seulement des essais uniaxiaux mais également des essais multiaxiaux sur la machine triaxiale ASTRÉE. La résolution de la méthode (inférieure à  $10^{-4}$  en déformation moyenne pour une caméra 8 bits et de l'ordre de  $1/100^e$  de pixel pour une caméra 12 bits) permet de mesurer des variations de déformations suffisantes pour évaluer des propriétés thermomécaniques [76]. Au cours de développements récents, des améliorations ont été faites et une approche multi-échelle est opérationnelle sur des matériaux tels que la laine de verre comprimée pour laquelle l'intensité lumineuse varie d'une image à la suivante. La technique est suffisamment robuste pour pouvoir mesurer des déformations de l'ordre de 30% avec une bonne précision [43, 46].

Ces deux chapitres s'adressent en premier lieu à un lecteur photomécanicien qui non seulement s'intéresse au développement de méthodes optiques pour les mesures cinématiques, mais également à leur utilisation en mécanique des solides et des structures. Cela nécessite des connaissances minimales en traitement du signal dont quelques rappels nécessaires au traitement des images sont donnés. De même, en mécanique, on rappellera certaines notions liées à la mesure de déformation et au calcul

par éléments finis. La présentation qui suit est organisée de la manière suivante. Un premier chapitre est consacré au principe de la mesure de champ de déplacement par corrélation d'images. Un algorithme multi-échelle est ensuite présenté en détail. Ses performances sont évaluées sur des cas théoriques et pratiques. Un second chapitre discute d'applications de la technique. Une première série d'exemples concerne des applications de la technique en mécanique des solides. Enfin, une dernière partie traite de problèmes d'identification de propriétés mécaniques à partir de mesures de champs de déplacement. Ainsi, le lecteur intéressé par le développement de la technique lira en priorité le premier chapitre. Quant au mécanicien, utilisateur potentiel de la technique de mesure, il se tournera davantage vers le second chapitre.





# Chapitre 9

## Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images

*Ce chapitre est consacré au principe de la mesure de champ de déplacement par corrélation d'images. Un algorithme multi-échelle est ensuite présenté en détail. Ses performances sont évaluées sur des cas théoriques et pratiques.*

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Principe de mesure de déplacement et de déformation par corrélation d'images . . . . .</b>	<b>6</b>
9.1.1	Qu'est-ce que la corrélation? . . . . .	6
9.1.2	La corrélation d'images . . . . .	13
9.1.3	Différentes mesures de déformations . . . . .	16
<b>9.2</b>	<b>Algorithme multi-échelle de corrélation d'images . . . . .</b>	<b>20</b>
9.2.1	Approche classique . . . . .	20
9.2.2	Définition des images et des échelles . . . . .	24
9.2.3	Algorithme de corrélation multi-échelle . . . . .	26
9.2.4	Contrôle de l'estimation du déplacement . . . . .	26
<b>9.3</b>	<b>Performances de la technique . . . . .</b>	<b>28</b>
9.3.1	Utilisation d'images déformées artificiellement . . . . .	28
9.3.2	Analyse d'un essai de traction sur alliage d'aluminium . . . . .	30

---

## 9.1 Principe de mesure de déplacement et de déformation par corrélation d'images

### 9.1.1 Qu'est-ce que la corrélation ?

En pratique, on veut déterminer le champ de déplacement qui s'est produit entre deux instants pour lesquels on a acquis une image. Le déplacement d'un "point" correspond à la valeur moyenne du déplacement d'une imagerie (que l'on appellera par la suite zone d'étude centrée au point considéré). Le principe de la corrélation consiste à apparier le motif correspondant à la zone d'étude dans les deux images afin de pouvoir déterminer le déplacement du centre de la zone (figure 9.1). Il s'agit de rechercher dans l'image déformée l'endroit où on atteint le maximum de vraisemblance avec l'imagerie considérée dans l'image de référence. Le déplacement entre deux zones d'étude s'apparente à un décalage entre deux signaux bidimensionnels. En effet, une image correspond aux variations de la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan observé.

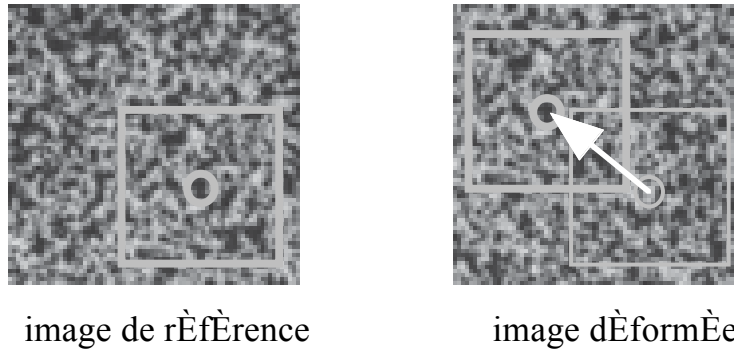


Figure 9.1 – Zones d'étude sur une image de référence et sur une image "déformée".

L'intercorrélation consiste donc à rechercher des vraisemblances entre deux signaux (enregistrés à deux instants différents). Cette méthode permet, notamment en traitement du signal, de déterminer des décalages entre signaux. Ce décalage correspond, dans le cas présent, au déplacement inconnu que l'on cherche à déterminer.

#### 9.1.1.1 Cas unidimensionnel continu

Étant donnés deux signaux (réels)  $f(x)$ , représentatif de l'image de référence, et  $g(x) = f(x - u) + b(x)$ , représentatif de l'image décalée, le second étant translaté (de  $u$ ) et bruité (par un bruit  $b(x)$ ) par rapport au premier, l'estimation de  $u$  peut se faire en minimisant par rapport à  $d$  une norme "bien choisie" de la différence entre  $g(x)$  et  $f(x - d)$

$$\min_d \|g - f(\cdot - d)\|^2. \quad (9.1)$$

On choisit généralement la norme  $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ . Le problème de minimisation se ramène alors à *maximiser* la quantité  $h(d)$  par rapport à  $d$

$$h(d) = (g \star f)(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x - d) dx. \quad (9.2)$$

Le symbole  $\star$  représente l'intercorrélation des fonctions. Lorsque  $f \equiv g$  et  $b(x) = 0$ , on parle d'autocorrélation.

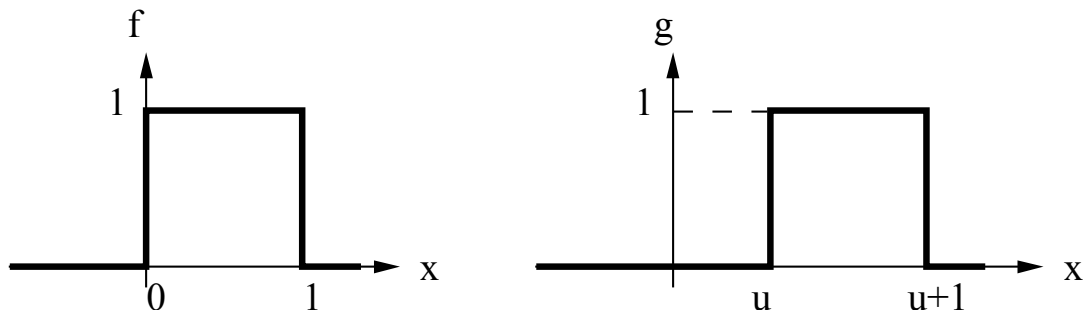


Figure 9.2 – Fonctions  $f$  et  $g$  décalées l'une par rapport à l'autre d'une quantité  $u$ .

Lors de l'enregistrement d'images numériques, les fonctions  $f$  et  $g$  représentent une distribution de niveaux de gris avant et après déplacement et/ou déformation. Afin d'illustrer ce concept, considérons un créneau de largeur unité et d'intensité unité : c'est la fonction  $f$ . Supposons que ce créneau subisse un déplacement  $u$  inconnu : c'est la fonction  $g$  (cf. figure 9.2). La fonction  $f(\cdot - d)$  prendra une valeur non nulle lorsque  $d \leq x \leq d + 1$ . Ainsi, lorsque  $d \geq u + 1$ , il n'y a pas de recouvrement entre les deux fonctions, l'intercorrélation est nulle ; il en est de même pour  $d \leq u - 1$ . Dans le cas contraire, on montre que la fonction de corrélation est linéaire et que son maximum est atteint pour  $d = u$  (cf. figure 9.3). Comme annoncé, une détermination de l'inconnue  $u$  revient donc à rechercher le maximum de la fonction de corrélation.

Si l'on suppose que les deux fonctions sont déformées l'une par rapport à l'autre d'une quantité  $\epsilon$  et que le niveau associé à la deuxième fonction est divisé par deux, on obtient une fonction de corrélation tracée sur la figure 9.4. Si l'on utilise une interpolation (parabolique) au voisinage du maximum, on peut déterminer aisément le maximum en  $\epsilon/2$ , qui correspond au déplacement moyen de la fonction  $g$  par rapport à  $f$ . Le choix du type d'interpolation n'est pas anodin : une interpolation parabolique peut donner cette information. On notera que la diminution de niveau de la fonction  $g$  par rapport à la fonction  $f$  n'a pas d'influence significative sur le résultat : on peut déterminer le maximum sans ambiguïté.

Tous ces calculs peuvent être conduits directement dans l'espace réel. On peut aussi les mener dans l'espace de Fourier. La transformation de Fourier est un outil mathématique fondamental dans les domaines aussi divers que l'optique, l'acoustique, la théorie des systèmes, etc. L'application la plus importante concerne le traitement des signaux et le calcul spectral. La transformée de Fourier conduit à un spectre discret pour des fonctions périodiques et à un spectre continu pour des fonctions apériodiques. On appelle transformée de Fourier  $\tilde{f}$ , la fonction

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\omega x) dx. \quad (9.3)$$

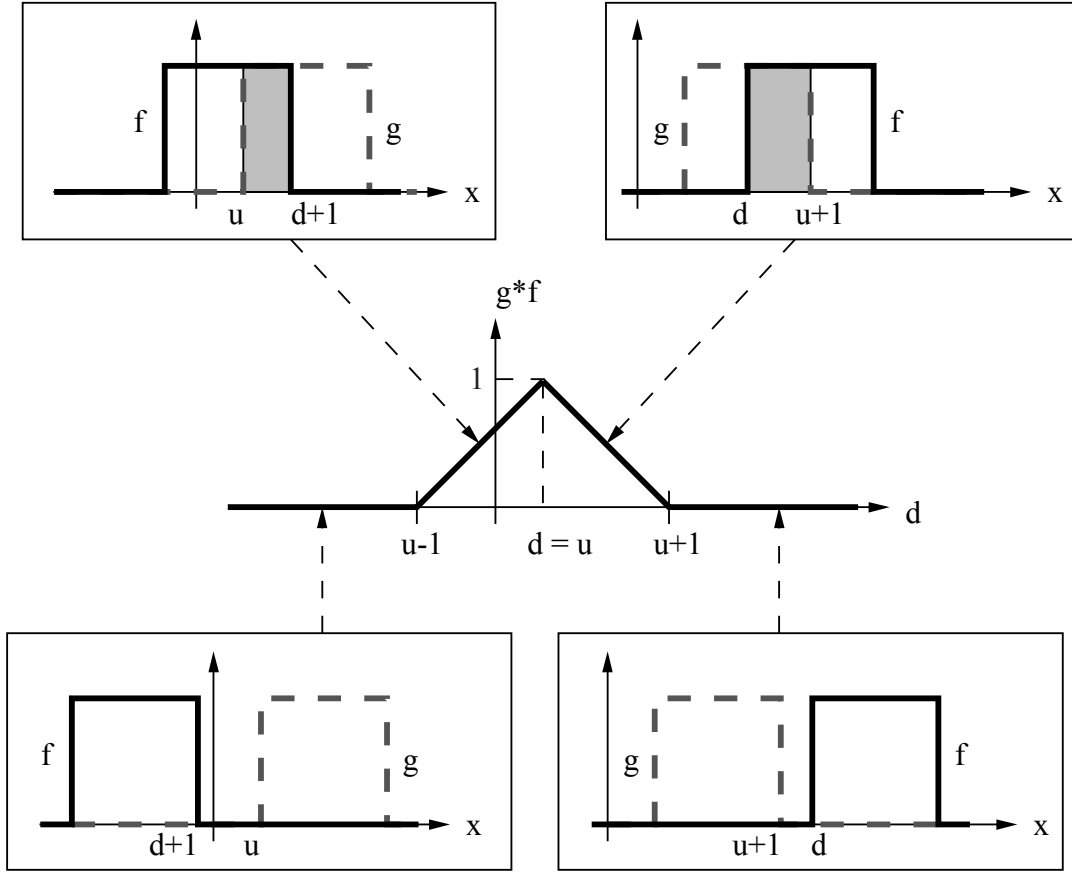


Figure 9.3 – Intercorrélation de deux fonctions semblables décalées l'une par rapport à l'autre d'une valeur  $u$ .

Lorsque  $f$  et  $\tilde{f}$  sont “rapidement décroissantes” à l’infini, on a la formule d’inversion

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(+2\pi j\omega x) d\omega. \quad (9.4)$$

En utilisant la transformation de Fourier, on peut maintenant calculer la quantité suivante

$$\tilde{g}(\omega) \overline{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\tilde{f}(\omega)} g(\xi) \exp(-2\pi j\omega \xi) d\xi, \quad (9.5)$$

où  $\overline{\bullet}$  correspond à la conjugaison complexe de  $\bullet$ . En notant que les fonctions  $f$  et  $g$  sont réelles, l’équation (9.5) devient

$$\tilde{g}(\omega) \overline{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi) g(\xi) \exp[-2\pi j\omega(\xi - \varphi)] d\xi d\varphi. \quad (9.6)$$

En effectuant le changement de variable défini par :  $x = \xi - \varphi$ , on obtient

$$\tilde{g}(\omega) \overline{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (g \star f)(x) \exp(-2\pi j\omega x) dx. \quad (9.7)$$

Soit

$$g \star f = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}[g] \overline{\mathcal{F}[f]} \right). \quad (9.8)$$

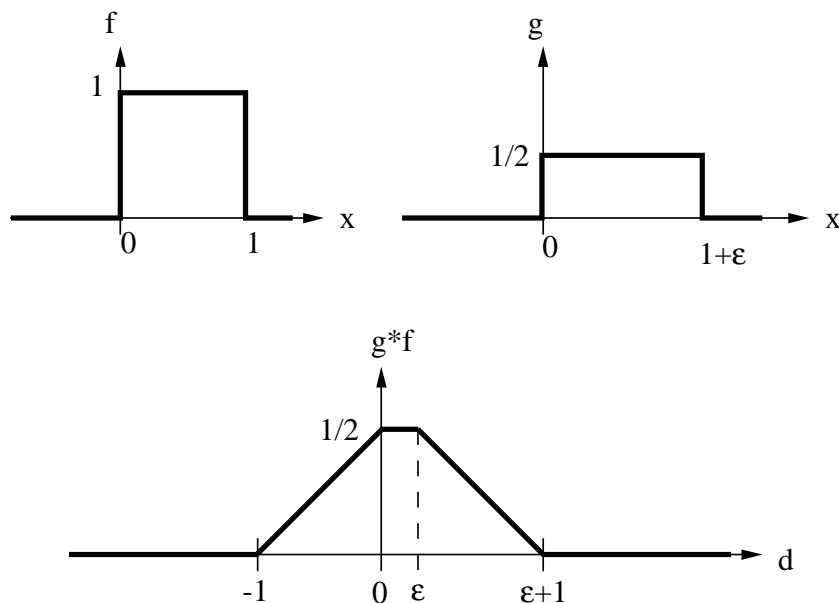


Figure 9.4 – Intercorrélation de deux fonctions semblables déformées l'une par rapport à l'autre d'une quantité  $\epsilon$ .

Ce résultat n'est en soi important que s'il peut être transcrit dans le cas discret et peut, en pratique, être utilisé de manière rapide. Le paragraphe suivant a pour but de montrer que tel est effectivement le cas.

### 9.1.1.2 Cas unidimensionnel discret

Dans le domaine du traitement du signal ou de l'imagerie, on travaille avec des signaux échantillonnés. La transformée de Fourier discrète de la fonction

$$f_n = f(x_0 + n\Delta x) \quad \text{avec} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.9)$$

devient une somme

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-2\pi jnk/N). \quad (9.10)$$

La transformation inverse s'écrit

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k \exp(+2\pi jnk/N). \quad (9.11)$$

les sommations étant souvent (mais pas nécessairement) effectuées entre 0 et  $N-1$ .

La transformation de Fourier continue ou discrète peut s'avérer longue et fastidieuse. Depuis 1965, ce calcul est devenu "rapide" grâce au fameux algorithme décrit par Cooley et Tuckey [31]. Cet algorithme (connu sous le nom de transformée de Fourier rapide, ou TFR... en français et FFT en anglais) a révolutionné le traitement du signal : c'est l'un des outils de base de la discipline, qui s'est enrichie

d'autres outils tout aussi puissants au cours des années suivantes : la transformée en ondelettes (rapide) en est un exemple [67]. L'équation (9.8) a son équivalent discret

$$g \star f = \sqrt{N} \text{TFR}^{-1} \left( \text{TFR}[g] \overline{\text{TFR}[f]} \right). \quad (9.12)$$

L'exemple suivant reprend le résultat discuté dans le paragraphe précédent dans le cas d'une fonction déformée. Le signal est échantillonné à une valeur de 1/4 par rapport à l'axe continu. La fonction de corrélation est calculée en utilisant l'équation (9.12). La figure 9.5 montre le résultat de ce calcul dans le cas où le niveau maximal des deux fonctions reste identique et la déformation est égale à 1/4, c'est-à-dire égale à une unité d'échantillonnage. On remarquera que, pour des raisons de périodicité, la fonction de corrélation a la même allure que celle illustrée en figure 9.4.

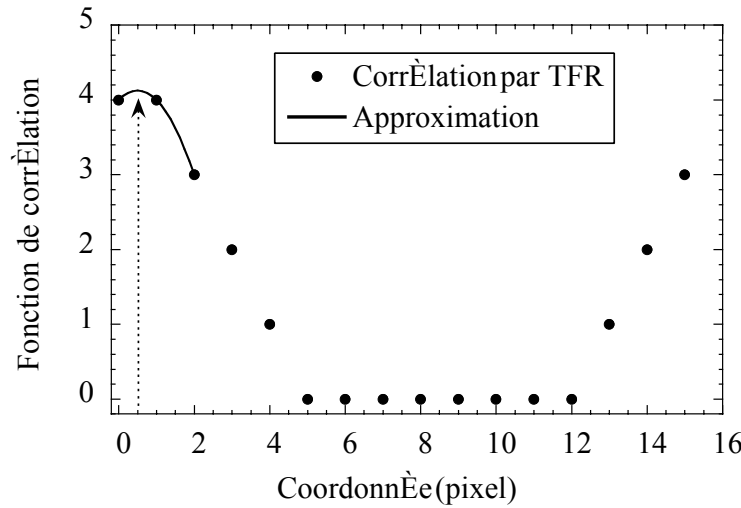
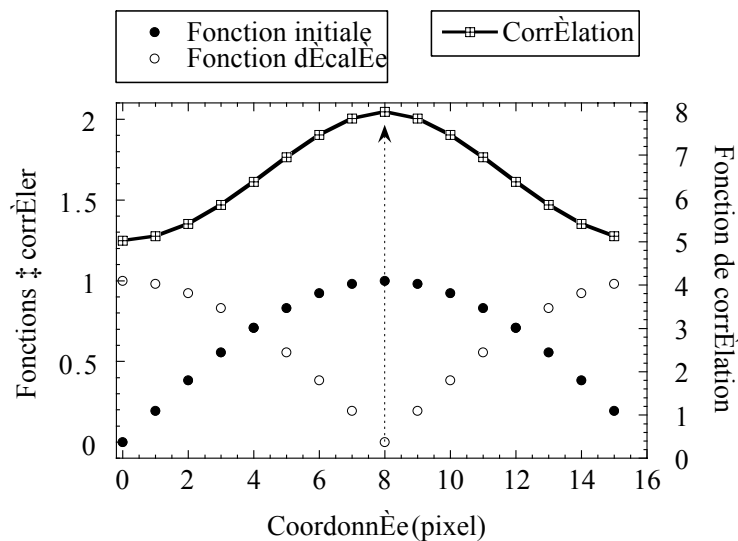


Figure 9.5 – *Interprétation discrète de deux fonctions déformées l'une par rapport à l'autre. Une approximation parabolique est opérée au voisinage du maximum de la fonction de corrélation.*

Le résultat d'une interpolation parabolique au voisinage du maximum de corrélation (le maximum de corrélation et les deux points voisins ont été considérés) conduit à une valeur maximale égale à 0.5, ce qui correspond au déplacement moyen de la fonction.

Le second exemple consiste à corréler une arche sinusoïdale déplacée d'une demi-période avec une arche de référence. La figure 9.6 montre les deux fonctions ainsi que l'intercorrélation calculée de manière discrète. On remarquera que le maximum est atteint pour le huitième échantillon, ce qui correspond à la période moitié du signal (donc à la valeur du déplacement imposé).

Il a été montré comment déterminer un déplacement inconnu par intercorrélation d'image. De plus, par interpolation au voisinage du maximum de corrélation, le déplacement moyen peut être déterminé dans le cas où une déformation existe. On notera que ce maximum n'est pas forcément atteint en un des points d'échantillonnage, c'est-à-dire pour un nombre entier de pixels dans le cas d'images numériques. On obtient ainsi une estimation *sub-pixel* du déplacement.


 Figure 9.6 – *Intercorrélation discrète de deux fonctions sinusoïdales déplacées.*

### 9.1.1.3 Remarque : précaution à prendre

Lors d'opérations dans le plan de Fourier, il faut se souvenir que les coefficients de la transformée de Fourier sont généralement rangés en commençant par la fréquence nulle et par ordre croissant de fréquence jusqu'à  $N/2 - 1$ , puis ce sont les termes de fréquence négative en commençant par  $-N/2$  puis en croissant jusqu'à  $-1$ . Ce mode de rangement est relativement classique mais doit être vérifié lors d'une première utilisation d'une TFR dans un logiciel numérique quelconque.

### 9.1.1.4 Décalage par TFR

Le paragraphe précédent a permis de mettre en place un outil d'analyse de corrélation à l'aide de la TFR. Une estimation sub-pixel du maximum de corrélation a été obtenue. Dans ce paragraphe, il s'agit de mettre en place un outil de décalage sub-pixel.

On va utiliser l'analyse de Fourier pour garder le même cadre que précédemment. On rappelle une des propriétés remarquables de la transformation de Fourier qui s'intitule "translation-modulation". Pour cela, considérons l'opérateur de translation par  $d$  défini par  $[T_d f](x) = f(x - d)$  et calculons sa transformée de Fourier

$$[\widetilde{T_d f}](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi - d) \exp(-2\pi j \omega \xi) d\xi, \quad (9.13)$$

que l'on réécrit

$$[\widetilde{T_d f}](\omega) = \exp(-2\pi j \omega d) \widetilde{f}(\omega). \quad (9.14)$$

En introduisant l'opérateur de modulation  $E_d$  tel que :  $[E_d f](x) = \exp(-2\pi j dx) f(x)$ , on obtient le résultat simple

$$\widetilde{T_d f} = E_d \widetilde{f}, \quad (9.15)$$

que l'on écrit de manière discrète

$$\text{TFR}[T_d f] = E_d \text{TFR}[f], \quad (9.16)$$

avec  $[E_d f]_k = \exp(-2\pi jdk/N)f_k$ .

Afin d'illustrer cette méthode, reprenons les exemples de fonctions décalées du paragraphe précédent. Le premier exemple concerne une arche sinusoïdale décalée d'un demi-pixel par rapport à une arche de référence. La figure 9.7 montre la fonction décalée par TFR en utilisant les résultats précédents. Le résultat tracé est le module de la transformation de Fourier. On vérifie aisément que la puissance du signal décalé (module du signal au carré) est conservée par rapport à celle du signal original. L'écart absolu entre la solution exacte et le calcul numérique sur 16 pixels ne dépasse pas  $4/100^{\text{es}}$  de pixel.

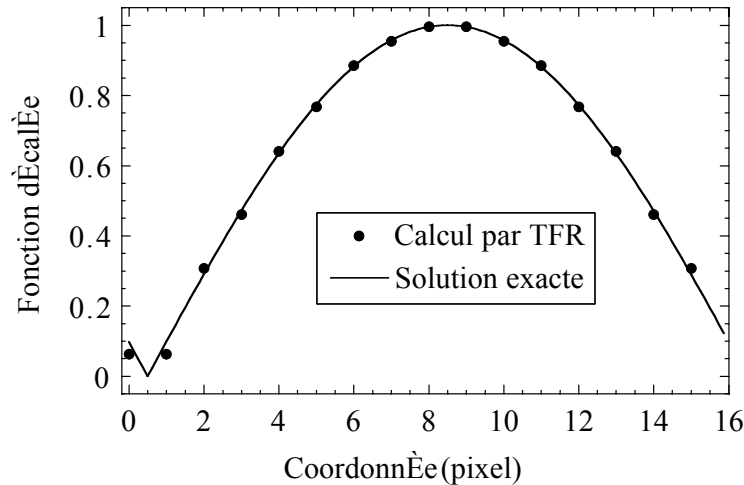


Figure 9.7 – Arche sinusoïdale discrétisée sur 16 pixels et décalée d'un demi-pixel.

Le second exemple concerne un créneau défini sur 16 pixels. C'est un cas limite pour lequel la transformée de Fourier (discrète) est mise en difficulté. En effet, la présence de discontinuités nécessite un grand nombre de termes de la série car leur décroissance est très lente. Cette fonction est décalée d'un demi-pixel et le résultat est donné sur la figure 9.8-a. On observe des oscillations au voisinage des sauts. Ces oscillations décroissent lentement (en  $1/k$ ). En augmentant le nombre de pixels décrivant le créneau, on aurait limité la zone sur laquelle ces oscillations sont visibles, sans pour autant les faire disparaître (sauf asymptotiquement...) : lorsque le créneau est décrit par 16 (resp. 256) pixels, l'amplitude maximale du signal est égale à 1.1376 (resp. 1.1366) pixels. Le signal précédent est préalablement filtré à l'aide d'un filtre passe-bas gaussien défini dans l'espace fréquentiel par

$$W_k = \exp\left(-\frac{k^2}{s}\right), \quad (9.17)$$

où  $s$  est le paramètre du filtre (typiquement de l'ordre de grandeur de la taille du signal). Ce filtre est illustré sur la figure 9.8-b. La figure 9.9-a montre le résultat d'un tel filtre sur un créneau discrétisé sur 16 pixels. À partir du signal filtré, on peut à nouveau décaler d'un demi pixel. Ce résultat est donné sur la figure 9.9-b. Les oscillations observées sur la figure 9.8-a ont disparu et la qualité du signal décalé est nettement améliorée par rapport au cas précédent. Tous ces exemples montrent que le décalage sub-pixel est possible grâce à l'utilisation de la TFR, mais il



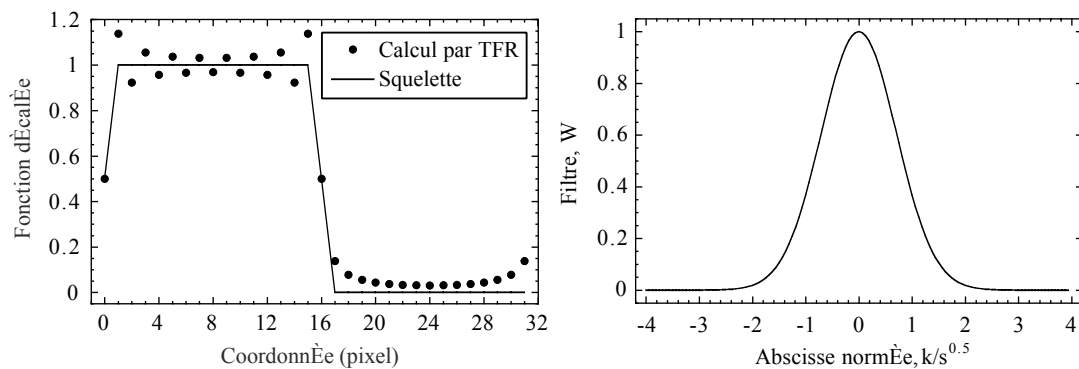


Figure 9.8 – (a) Fonction créneau discrétisée sur 16 pixels et déplacée d'un demi-pixel. (b) Filtre gaussien.

nécessite des précautions élémentaires qui font principalement référence au problème d'échantillonnage lié au théorème de Shannon (pour éviter le repliement de spectre). Ainsi, si le signal est à trop large bande, il faut effectuer un filtrage préalable, destiné à supprimer les trop hautes fréquences. Les deux derniers exemples traités illustrent ce phénomène.

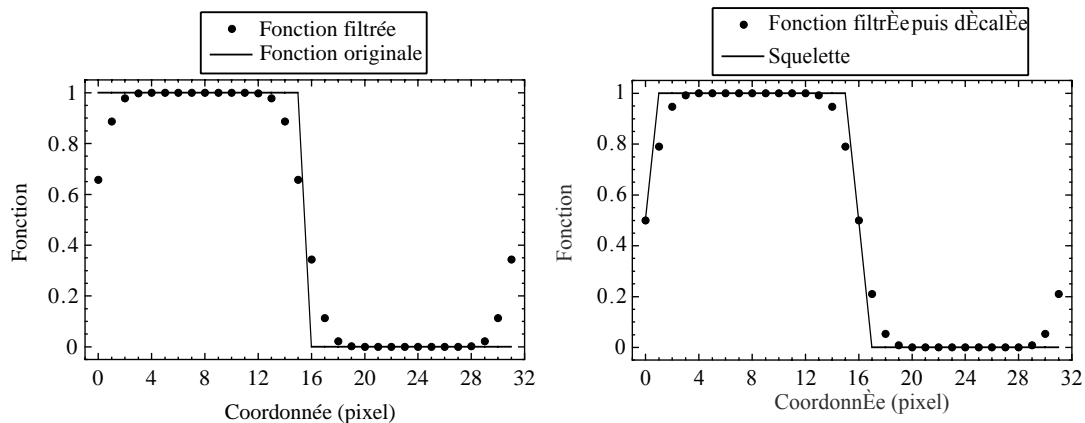


Figure 9.9 – (a) Fonction créneau discrétisée sur 16 pixels et filtrée ( $s = 32$ ). (b) Fonction créneau discrétisée sur 16 pixels et filtrée ( $s = 32$ ) puis déplacée d'un demi-pixel.

### 9.1.2 La corrélation d'images

On considère maintenant des signaux “bidimensionnels” représentés par des fonctions (de la position  $\mathbf{x}$  et du vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ )  $g(\mathbf{x})$  qui sont des perturbations d'un signal décalé  $f(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  par rapport à un signal de référence  $f(\mathbf{x})$

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}), \quad (9.18)$$

où  $\mathbf{u}$  est le *champ* de déplacement inconnu et  $b(\mathbf{x})$  un bruit aléatoire (*e.g.*, bruit de photon, bruit de numérisation, bruit d'obscurité pour des caméras CCD [48]). Le

problème à résoudre consiste à déterminer  $\mathbf{u}$  à partir de la seule connaissance de  $f$  et  $g$ . Ce problème est *mal posé* tant qu'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires quant à la régularité du champ recherché pour que l'information à disposition soit suffisante à sa détermination avec une précision raisonnable [49]. Soit la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  d'un champ de déplacement test  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\mathcal{E}[\mathbf{v}] = \|g - f(\cdot - \mathbf{v})\|_{\Omega}^2, \quad (9.19)$$

où '.' correspond à une variable muette. Les formulations variationnelles qui en découlent sont en général basées sur la conservation du flot optique. Lorsque l'on choisit la norme quadratique habituelle  $\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ , on aboutit à la méthode de minimisation de la différence quadratique (ou MQD en anglais) utilisée en mécanique des fluides [40] dans le cas d'un champ localement constant. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{E}_2$

$$\mathcal{E}_2[\mathbf{v}] = \int_{\Omega} [g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x}. \quad (9.20)$$

Cette fonctionnelle atteint sa valeur minimale, 0, lorsque  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  [cf. équation (9.18)]. L'espace des vecteurs déplacements tests  $E_K$  est introduit et vérifie l'hypothèse de régularité (par exemple en utilisant des filtres passe-bas). Supposons que  $f$  and  $g$  soient suffisamment régulières aux petites échelles, et que le déplacement soit petit en amplitude pour que l'on puisse faire un développement de Taylor au premier ordre de  $\mathcal{E}_2$

$$\mathcal{E}_2[\mathbf{v}] = \int_{\Omega} [g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}. \quad (9.21)$$

Il n'est a priori pas nécessaire de rajouter de pénalisation pour assurer la régularité de la solution [49] car le champ de déplacement test la vérifie déjà. On notera cependant que le développement de Taylor suppose implicitement la régularité de  $f$ . On peut montrer que cette condition, qui peut paraître contraignante, permet néanmoins de traiter des cas de textures qui ne sont pas différentiables [85]; la régularité de  $\mathbf{v}$  permet de s'affranchir d'une certaine manière de celle a priori nécessaire de  $f$  par une intégration par parties et un filtrage passe-bas.

Le champ de déplacement test est alors écrit comme une combinaison linéaire dans une base de  $E_K$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{v}_i \Psi_i(\mathbf{x})$ , tel que  $\mathcal{E}_2[\mathbf{v}]$  est une forme quadratique en amplitudes de vecteurs  $\mathbf{v}_i$  inconnus. La condition d'extrémalité nécessite que pour tout  $i$  l'on ait

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} (\nabla f \otimes \nabla f)(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) \Psi_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \mathbf{v}_k \\ &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] \nabla f(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Ce système (*linéaire*) peut être écrit sous forme matricielle

$$M_{ik} v_k = A_i. \quad (9.23)$$

Le produit tensoriel  $(\nabla f \otimes \nabla f)$  ne peut pas être inversé (il a toujours une valeur propre nulle dans la direction normale au gradient de  $f$ ). Cette formule ne peut pas être utilisée pour déterminer  $\mathbf{v}$ , lorsque  $\Psi$  tend vers une distribution de Dirac. Ce

résultat est attendu vu la discussion sur la condition nécessaire de régularité de  $\mathbf{v}$ . Quand l'espace  $E_K$  est restreint aux longueurs d'onde très supérieures à la longueur de corrélation de la texture, l'opérateur à gauche de l'égalité devient positif défini et le produit  $\Psi_j \Psi_k$  peut être considéré comme le filtrage de l'opérateur  $(\nabla f \otimes \nabla f)$ .

Lorsque le déplacement test  $\mathbf{v}$  est supposé  $\Omega$ -périodique dans les deux directions, il est intéressant de travailler dans l'espace de Fourier, dans lequel la transformée  $\tilde{f}$  d'une fonction  $f$  est définie par

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9.24)$$

L'espace des vecteurs déplacements périodiques  $E_K$  est introduit de telle manière que  $\tilde{v}(\mathbf{k}) = 0$  quand  $|\mathbf{k}| < K$ . Ce choix a été fait par Wagne *et al.* [85]. Dans une formulation spectrale, une forme approximative de  $\mathbf{M}^{-1}$  est accessible, ce qui permet de résoudre le système linéaire par une technique de point fixe. D'autres choix ont été proposés dans la littérature pour vérifier des conditions spécifiques. En particulier, des ondelettes sont adaptées à ce type de problème [7]. On peut également utiliser des champs de déplacement adaptés aux simulations par éléments finis (*e.g.*, champs Q1 [81] ou Q2 [25]).

Enfin, lorsque l'on suppose que  $\mathbf{v}$  est une translation de corps rigide, le problème précédent peut être résolu par des techniques d'intercorrélation qui consistent à maximiser les superpositions de  $f$  translaté et  $g$  [82, 81]. En effet, la minimisation précédente est *équivalente* à maximiser la quantité  $h(\mathbf{v})$

$$h(\mathbf{v}) = (g \star f)(\mathbf{v}) \equiv \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (9.25)$$

où  $\star$  est l'opérateur d'intercorrélation. Le déplacement qui maximise le produit d'intercorrélation est noté  $\mathbf{w}$  et correspond à une évaluation du déplacement inconnu  $\mathbf{u}$ . Le calcul d'un produit d'intercorrélation est conduit dans l'espace de référence ou dans l'espace de Fourier, par utilisation d'une transformée de Fourier rapide

$$g \star f = \text{TFR}^{-1} \left( \text{TFR}[g] \overline{\text{TFR}[f]} \right), \quad (9.26)$$

Cette dernière technique, très rapide, sera abondamment utilisée dans la suite. L'inconvénient majeur concerne la périodicité supposée du signal. Celle-ci peut être atténuée en utilisant des fenêtrages particuliers (*e.g.*, fenêtre de Hanning ou flou localisé).

Pour déterminer le champ de déplacement entre deux instants, on considère alors plusieurs zones d'étude (*i.e.*, des fenêtres d'interrogation carrées de taille petite par rapport à celle de l'image) pour lesquelles on détermine un champ de déplacement constant. Le but de la corrélation est d'apparier les ZE dans les deux images (figure 9.10). Dans le cas présent, l'image de référence correspond à la texture d'un échantillon de laine de roche. Le déplacement d'une ZE par rapport à l'autre est le décalage d'un signal d'intensité acquis par une caméra CCD ou un appareil photo numérique. L'estimation d'un décalage d'un signal par rapport à un autre est basée sur la fonction d'intercorrélation.

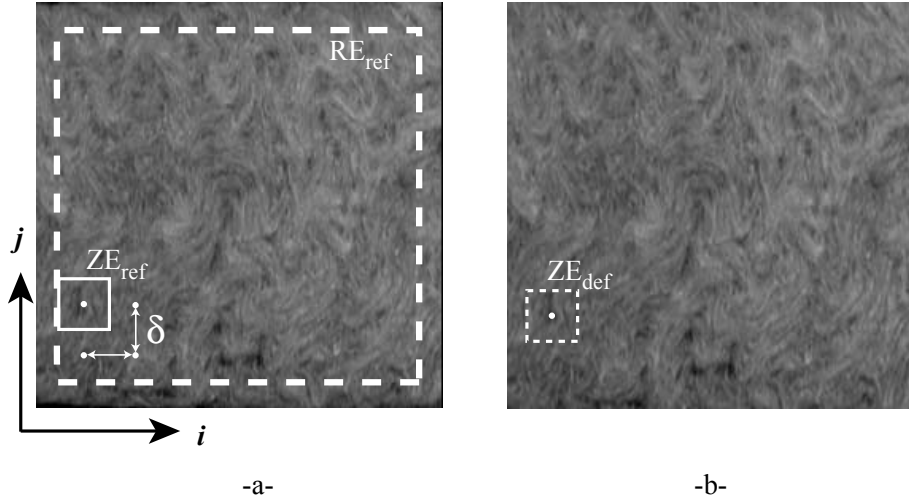


Figure 9.10 – Images de référence (a) et déformée artificiellement  $E_{yy} = 0.05$  (b) d'un échantillon de laine de roche. La région d'étude ( $RE_{ref}$ ) et deux zones d'étude ( $ZE_{ref}$  et  $ZE_{def}$ ) sont tracées. Quatre centres de ZE sont montrés sur l'image de référence ( $\delta$ : décalage entre deux ZE consécutives).

### 9.1.3 Différentes mesures de déformations

#### 9.1.3.1 Déformations infinitésimales

La déformation mécanique est généralement définie en terme de variation relative de longueur  $\Delta L$  d'une ligne (de longueur initiale  $L_0$ ) reliant deux points matériels d'un corps déformable

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (9.27)$$

De manière plus précise, le déplacement d'un point  $P(x,y,z)$  est défini par trois composantes  $(u,v,w)$  d'un vecteur  $\mathbf{u}$  dans un repère cartésien (choisi dans un état non déformé)

$$P(x,y,z) \rightarrow P'(x+u,y+v,z+w). \quad (9.28)$$

Un deuxième point  $Q(x+dx,y+dy,z+dz)$ , au voisinage de  $P$  se déplace en  $Q'$

$$Q(x+dx,y+dy,z+dz) \rightarrow Q'(x+dx+u+du,y+dy+v+dv,z+dz+w+dw). \quad (9.29)$$

Les grandeurs  $du, dv, dw$  correspondent aux déplacements relatifs. Lorsque  $dx, dy, dz$  sont suffisamment petits, *i.e.*, infinitésimaux, on peut écrire

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Ces relations peuvent être écrites sous forme vectorielle avec l'opérateur gradient  $\nabla$

$$d\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (9.31)$$

On obtient 9 grandeurs que l'on regroupe de la manière suivante

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Ceci provient de la décomposition en partie symétrique et anti-symétrique du gradient

$$\nabla \cdot = \nabla^s \cdot + \nabla^a \cdot. \quad (9.33)$$

de telle manière que le tenseur de déformation infinitésimale  $\epsilon$  s'écrit

$$\epsilon = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad (9.34)$$

où  $^t$  est l'opérateur de transposition, et le tenseur (anti-symétrique du second ordre) de rotation

$$\omega = \nabla^a \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u}), \quad (9.35)$$

qui ne conduit pas à des changements de forme du solide. Le tenseur de rotation est lié au vecteur rotation par

$$\omega d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{x}, \quad (9.36)$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel.

### 9.1.3.2 Introduction aux déformations finies

La théorie des déformations finies considère le rapport de variation de longueur d'une ligne joignant deux points dans un état de référence ( $dl = PQ$ ) et un état déformé ( $dL = P'Q'$ )

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ dL^2 &= (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Le rapport de longueur s'écrit

$$\frac{dL^2}{dl^2} = \frac{(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2}{dl^2} \quad (9.38)$$

avec, en utilisant l'équation (9.31),

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl} \quad \dots \quad (9.39)$$

soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL}{dl}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{dy}{dl} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dl}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{dz}{dl} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dl}\right)^2. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Les déformations sont exprimées par rapport à un état non déformé. La ligne  $dl$  a pour cosinus directeurs

$$a = \frac{dx}{dl} \quad , \quad b = \frac{dy}{dl} \quad , \quad c = \frac{dz}{dl}. \quad (9.41)$$

Soit encore, par définition,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL}{dl}\right)^2 &= (1 + 2E_{xx})a^2 + (1 + 2E_{yy})b^2 + (1 + 2E_{zz})c^2 \\ &+ 4E_{yz}bc + 4E_{zx}ca + 4E_{xy}ab. \end{aligned} \quad (9.42)$$

On obtient ainsi 6 composantes

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \right], \\ E_{yy} &= \frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \right], \\ E_{zz} &= \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \right], \\ 2E_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy}, \\ 2E_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy} \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{dw}{dz}, \\ 2E_{zx} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} + \frac{du}{dz} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{dw}{dx}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

On peut réécrire ce résultat de manière intrinsèque et ainsi obtenir le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{GL}$

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}). \quad (9.44)$$

### 9.1.3.3 Cinématique en grandes déformations

En mécanique des solides, on choisit le plus souvent comme configuration de référence la configuration initiale du solide (*i.e.*, avant déformation) ce qui permet de repérer la configuration de référence  $\Omega_0$  et la configuration actuelle  $\Omega_t$  dans le même système d'axes. Il est néanmoins préférable, pour éviter toute confusion, de traiter séparément ces deux systèmes et de distinguer les coordonnées lagrangiennes,  $\mathbf{x}$ , pour  $\Omega_0$  et eulérienne,  $\mathbf{x}'$ , pour  $\Omega$ . Ces deux systèmes seront choisis cartésiens orthonormés et nous utiliserons pour chacun la convention de sommation (*i.e.*, indice répété). Il est habituel d'introduire le vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , c'est-à-dire d'écrire  $\mathbf{x}'$  sous la forme équivalente

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (9.45)$$

mais, contrairement à ce qui se passe en petites déformations, le déplacement  $\mathbf{u}$  ne pourra pas être supposé petit et on ne pourra pas identifier la configuration de

référence et la configuration actuelle. Chaque grandeur pourra être définie soit dans  $\Omega_0$  (description lagrangienne), soit dans  $\Omega_t$  (description eulérienne). Par exemple, le tenseur des déformations se séparera en plusieurs tenseurs différents suivant la description utilisée. La fonction  $\mathbf{x}'(\mathbf{x}, t)$  définit le mouvement global du solide. Localement, c'est-à-dire pour décrire ce qui se passe au voisinage  $d\mathbf{x}$  d'un point  $\mathbf{x}$  donné, on introduit le tenseur gradient  $\mathbf{F}$

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{F}d\mathbf{x}, \quad (9.46)$$

soit

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}'}{d\mathbf{x}} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}. \quad (9.47)$$

Ce tenseur gradient ou application linéaire tangente permet de passer de la configuration  $\Omega_0$  à la configuration  $\Omega_t$ . La relation (9.46) donne en effet la loi de transformation du vecteur matériel  $d\mathbf{x}$ .

Le tenseur gradient décrit le mouvement local du solide. Pour définir sa déformation, c'est-à-dire ses changements de forme, il faut, comme en petites déformations, éliminer sa rotation. Pour caractériser les changements de forme, il faut déterminer les variations de longueur et les variations d'angles, soit en fait les variations des produits scalaires. En partant des deux vecteurs matériels  $d\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{x}'$ , nous pouvons écrire

$$d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^t \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (9.48)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit. De la même manière, on obtient

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}' \quad (9.49)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^t$  est le tenseur de Cauchy-Green gauche.

Les tenseurs lagrangiens sont construits à l'aide de  $\mathbf{C}$ . Il est possible de définir plusieurs opérateurs, chacun d'entre eux correspond à une mesure de déformation. L'utilisation de l'une ou l'autre des mesures est une question de *choix*. On impose à tout opérateur de déformation :

- de se réduire à  $\mathbf{0}$  lorsque la déformation est nulle, c'est-à-dire lorsque le mouvement est de corps rigide. Rappelons que  $\mathbf{F}$  est alors une rotation (*i.e.*, un opérateur orthogonal,  $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{1}$ );
- de conduire à des mesures “positives” en extension et “négatives” en contraction.

Dans la famille des mesures lagrangiennes, les tenseurs de déformation  $\mathbf{e}_m$  sont définis par [47]

$$\mathbf{e}_m = \begin{cases} \frac{1}{2m} (\mathbf{C}^m - \mathbf{1}) & \text{lorsque } m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \ln(\mathbf{C}) & \text{lorsque } m \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (9.50)$$

où  $\mathbf{1}$  le tenseur unitaire d'ordre 2. Lorsque  $m = 1$ , on obtient le tenseur de Green-Lagrange,  $m = 1/2$  correspond au tenseur de Cauchy-Biot (ou nominal) et conduit à  $\Delta L/L_0$  pour une élongation uniaxiale, où  $L_0$  est une longueur de référence et  $\Delta L$  la variation de longueur. Le cas  $m \rightarrow 0^+$  correspond au tenseur de déformation logarithmique (ou de Hencky). Ce dernier correspond à une mesure de déformation

additive. En hypothèse de petites perturbations (*i.e.*, petits déplacements, petites rotations, petites déformations), toutes les mesures de déformations convergent vers le tenseur des déformations infinitésimales  $\epsilon$  défini par

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) . \quad (9.51)$$

À titre d'illustration, considérons un mouvement de rotation de solide rigide. Le champ de déplacement s'écrit

$$\mathbf{u} = (\mathbf{R} - \mathbf{1})\mathbf{x} \quad (9.52)$$

où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal du second ordre. Le tenseur de Cauchy-Green droit est égal à l'identité ( $\mathbf{C} = \mathbf{R}^t \mathbf{R} = \mathbf{1}$ ) si bien que toutes les mesures  $\mathbf{e}_m$  sont nulles. Par contre, le tenseur de déformations infinitésimales s'écrit

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^t + \mathbf{R}) - \mathbf{1}. \quad (9.53)$$

Il ne s'annule que pour des rotations infinitésimales. En effet, si l'on suppose une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  d'axe  $(O, \mathbf{k})$ , deux composantes de déformation ne s'annulent pas

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \cos \theta - 1 \quad (9.54)$$

sauf lorsque l'angle  $\theta$  est très petit.

Si l'on veut déterminer les déformations principales, on procède comme suit. On dit qu'un vecteur non nul  $\mathbf{t}$  est vecteur propre d'un tenseur  $\mathbf{T}$  si le vecteur  $\mathbf{T}\mathbf{t}$  est colinéaire à  $\mathbf{t}$ . Tout vecteur colinéaire à un vecteur propre est également vecteur propre. La direction d'un vecteur propre est par définition une direction principale du tenseur. Le vecteur  $\mathbf{t}$  doit vérifier

$$(\mathbf{T} - t\mathbf{1})\mathbf{t} = \mathbf{0}. \quad (9.55)$$

Le vecteur  $\mathbf{t}$  étant non nul, le système admet des solutions non nulles si

$$\det(\mathbf{T} - t\mathbf{1}) = 0. \quad (9.56)$$

Cette équation possède généralement trois racines distinctes appelées valeurs propres ou valeurs principales. À chaque valeur principale correspond une direction principale. Dans le cas de tenseurs symétriques, nous avons les deux propriétés fondamentales :

- les valeurs propres sont réelles ;
- les directions principales sont orthogonales.

Dans la base principale, les éléments d'un tenseur d'ordre 2 s'écrivent suivant une matrice diagonale.

## 9.2 Algorithme multi-échelle de corrélation d'images

### 9.2.1 Approche classique

En pratique, deux images sont utilisées. La première est dite image de référence et la seconde image déformée. L'algorithme qui suit est résumé sur la figure 9.11. On



détermine tout d'abord le déplacement moyen en déterminant la plus grande valeur  $P$  d'une zone inscrite (de taille  $2^P \times 2^P$  pixels) et centrée dans la région d'étude (RE). La région située au même endroit est considérée dans l'image déformée. Une première corrélation (par TFR) permet d'évaluer le déplacement moyen  $\mathbf{w}_0$  entre deux instants. Les composantes du vecteur déplacement sont des nombres entiers de pixels obtenus à partir du maximum de la fonction d'intercorrélation. Cette première étape permet de déterminer l'ensemble des pixels à conserver pour la suite de l'analyse. Le centre de la RE de l'image déformée est alors décalé d'une valeur  $\mathbf{w}_0$ .

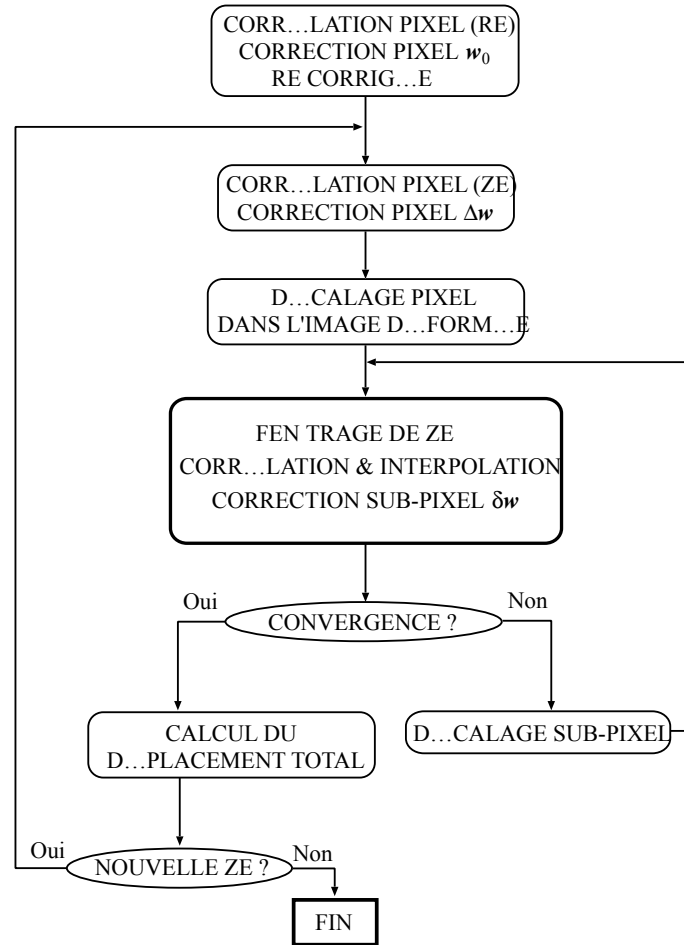


Figure 9.11 – Organigramme montrant les étapes principales d'un algorithme de corrélation classique.

L'utilisateur impose la taille des fenêtres d'interrogation (ou ZE) en choisissant une valeur  $p < P$  de telle manière que la taille de ZE vaille  $2^p \times 2^p$  pixels. Afin de recouvrir toute l'image, le second paramètre est le décalage entre deux ZE consécutives  $\delta = \|\delta\mathbf{x}\| = \|\delta\mathbf{y}\|$  : en général,  $1 \leq \delta \leq 2^p$  pixels. Ce paramètre définit le maillage formé par les centres de chaque ZE utilisée pour déterminer le champ de déplacement (figure 9.10). Une analyse indépendante pour chaque ZE est alors lancée. Une première corrélation par TFR est calculée et une correction  $\Delta\mathbf{w}$  en nombre entier de pixels est obtenue. La ZE dans l'image déformée est décalée de cette valeur. Les résidus de déplacement sont alors inférieurs à un demi pixel dans

chaque direction. Un algorithme sub-pixel peut alors être utilisé.

Cette première procédure est adaptée pour des niveaux de déformations de l'ordre du pourcent. Si aucun autre décalage de ZE n'est opéré, la norme du déplacement  $\Delta \mathbf{w}$  doit être limitée. Dans le cas contraire, la corrélation sera erronée. Pour illustrer cet effet, une analyse classique est conduite entre l'image de référence ( $512 \times 512$  pixels, numérisation sur 8 bits) de la figure 9.10 et une image déformée artificiellement dans la direction verticale (*i.e.*,  $\mathbf{j}$ ). L'image déformée est calculée en utilisant l'équation (9.18) et une interpolation linéaire des niveaux de gris pour obtenir la valeur de chaque pixel de l'image déformée. Aucun bruit n'est ajouté (*i.e.*,  $b(.) = 0$ ) mais le signal est également codé sur 8 bits. Une RE de  $512 \times 512$  pixels est considérée pour différentes valeurs de  $p$ . Dans le cas présent, la correction initiale  $\mathbf{w}_0$  est nulle. La mi-hauteur de l'image est une ligne de symétrie du champ de déplacement. La figure 9.12 montre l'écart type du déplacement vertical  $w_y$  pour chaque position verticale de ZE  $y$  lorsque  $\delta = 16$  pixels ; plus l'écart type est petit, plus le calcul du déplacement est précis. Par raison de symétrie, l'écart type  $\overline{\overline{w}}_y$  est interpolé par un polynôme d'ordre 2

$$\overline{\overline{w}}_y(y) = \alpha(p) + \beta(p)(255.5 - y)^2 \quad (9.57)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes dépendant de la taille des ZE (*i.e.*,  $2^p \times 2^p$  pixels). Une limite arbitraire  $\overline{\overline{w}}_{\max}$  est fixée de telle manière qu'en dessous de celle-ci une évaluation du déplacement est considérée comme bonne. Une valeur de 1 pixel est choisie. Des corrections de déplacement  $\Delta w$  variant entre  $\pm 7$  pixels peuvent être mesurées de manière acceptable lorsque  $p = 4$  et entre  $\pm 13$  pixels lorsque  $p = 5$ . Pour des valeurs de  $p$  supérieures à 5, aucune intersection n'est obtenue pour une déformation moyenne de 0.05 (Fig. 9.12). En première approximation, une correction de déplacement supérieure à  $\pm 3 \times 2^{p-3}$  pixels conduit à une perte de précision de l'évaluation. On notera qu'une valeur de 0.6 à la place de 1 conduit à des estimations plus précises et la règle du quart est obtenue (*i.e.*, le déplacement maximal mesurable est égal au quart de la taille de la ZE [54]). Ces résultats montrent que les premières étapes de la corrélation, en particulier la détermination de  $\mathbf{w}_0$ , sont cruciales pour la mesure de déplacements. Ainsi, pour des images telles que la distance horizontale ou verticale maximale de deux ZE est de l'ordre de 1024 pixels, la déformation maximale mesurable est de l'ordre de  $3 \times 2^{p-12}$ , soit de 0.05 environ lorsque  $p = 6$ .

De très faibles niveaux de déformation peuvent être mesurés lorsqu'on utilise un algorithme sub-pixel. Une nouvelle intercorrélation est calculée. Une correction sub-pixel  $\delta \mathbf{w}$  est obtenue par la recherche du maximum de la fonction d'intercorrélation interpolée au voisinage du maximum. En utilisant la propriété de "décalage-modulation" de la transformée de Fourier, qui n'est autre qu'un changement de phase, la ZE déformée peut être décalée de  $-\delta \mathbf{w}$ . Sachant que l'on a interpolé, on induit de petites erreurs qui nécessitent de ré-itérer en considérant la nouvelle ZE déformée jusqu'à convergence. Le critère de convergence choisi consiste à vérifier que le maximum de corrélation interpolé augmente avec les itérations. Dans le cas contraire, les itérations s'arrêtent.

Afin de limiter les effets de bord liés à la périodicité supposée du signal, on peut utiliser une fenêtre [24]

$$\widetilde{\text{ZE}} = \text{ZE} \chi \otimes \chi, \quad (9.58)$$

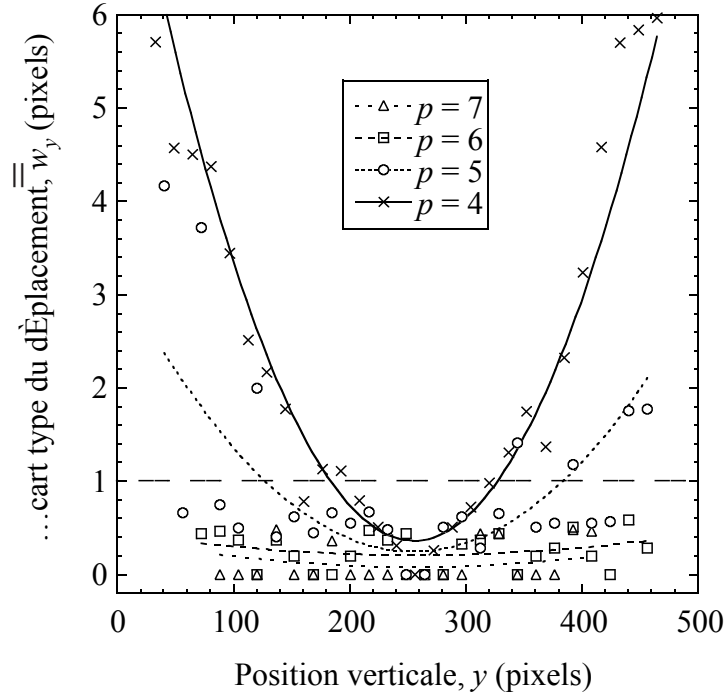


Figure 9.12 – Écart type du déplacement en fonction de la position verticale  $y$  de la ZE lorsqu'une déformation  $E_{yy} = 0.05$  est imposée (cf. figure 9.10). Une procédure classique de corrélation est utilisée pour différentes tailles ( $2^p \times 2^p$  pixels) de ZE avec un même décalage  $\delta = 16$  pixels.

où  $\widetilde{ZE}$  est la ZE fenêtrée,  $\otimes$  le produit tensoriel et  $\chi$  une fenêtre de Hanning modifiée

$$\chi(I) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{4\pi I}{2^p - 1} \right) \right] & \text{lorsque } 0 \leq I < 2^{p-2}, \\ 1 & \text{lorsque } 2^{p-2} \leq I < 3 \times 2^{p-2}, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{4\pi I}{2^p - 1} \right) \right] & \text{lorsque } 3 \times 2^{p-2} \leq I < 2^p - 1. \end{cases} \quad (9.59)$$

La valeur  $2^{p-2}$  correspond à un optimum [45]. Par la suite on introduit un autre fenêtrage qui consiste à construire une ZE périodisée  $\widehat{ZE}$  pour laquelle les bords sont flous. Il s'agit de "périodiser" les pixels des bords

$$\widehat{ZE} = W_b ZE W_b \quad (9.60)$$

où la matrice  $W_b$  est égale à la matrice identité exception faite des quatre coins qui valent  $1/2$ . Le programme, CORRELI<sup>LMT</sup> utilisant cette méthode, est implémenté dans MATLAB<sup>TM</sup> [64]. Cependant, vu la limitation des déformations maximales mesurables, une procédure multi-échelle a été développée en vue d'augmenter celles-ci sans pour autant perdre la résolution que l'on peut atteindre avec un algorithme sub-pixel.

### 9.2.2 Définition des images et des échelles

Deux étapes supplémentaires sont ajoutées à la démarche précédente. Contrairement à des techniques de décalage local adaptatif [15, 41], on utilise différentes échelles : la première échelle est celle de l'image de départ (*i.e.*, typiquement 0.5 à 1 Mpixels avec des caméras CCD). Ceci correspond à l'échelle N°0 (figure 9.13). Dans cette image, la RE est une partie plus petite : elle définit la zone sur laquelle on appliquera l'approche multi-échelle. Ceci correspond à l'échelle N°1 (figure 9.13).

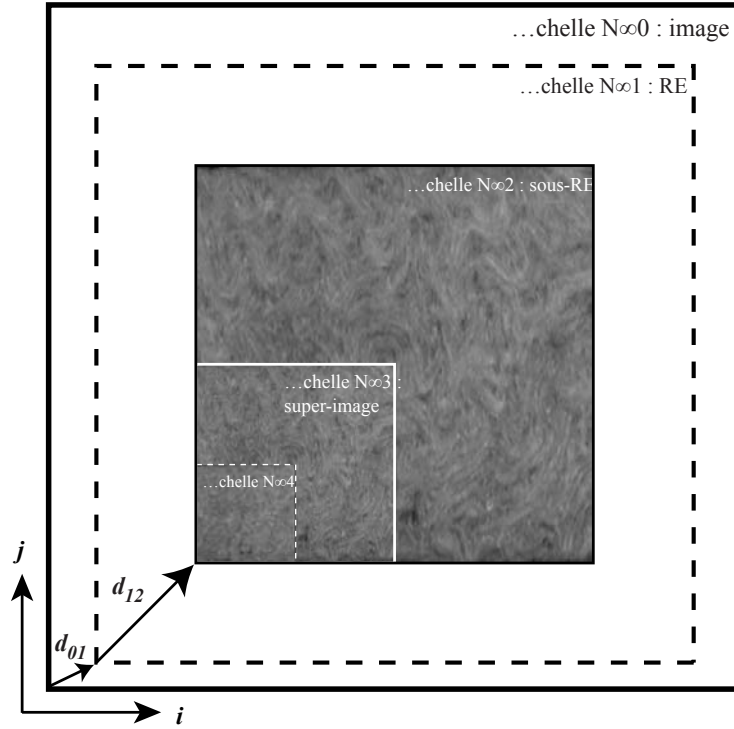


Figure 9.13 – Différentes notations utilisées dans l'algorithme multi-résolution appliqué à une RE (échelle N°1). Sous-RE d'une image de référence (échelle N°2) et super-images correspondant aux échelles N°3 et 4.

Soit  $\mathbf{d}_{01}$  le vecteur joignant l'origine du repère image à l'origine de la RE. En supposant un cas sans rotation de corps rigide, le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$  dans un cas de déformation homogène sans distorsion s'écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}, \quad (9.61)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 \\ 0 & A_{yy} \end{bmatrix}, \quad (9.62)$$

où  $\mathbf{A}$  est un tenseur plan qui caractérise la déformation moyenne (*i.e.*, le tenseur gradient de transformation  $\mathbf{F} = \mathbf{A}$ ), et  $\mathbf{a}$  est un vecteur déplacement constant. Le tenseur de Cauchy-Green droit s'écrit

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^2, \quad (9.63)$$

et dans ce cas particulier, le tenseur  $\mathbf{A}$  est le tenseur des déformations nominales,  $\mathbf{e}_{1/2} = \mathbf{E} = \mathbf{A}$ . Dans la suite, par souci de simplicité, le tenseur de déformation nominale sera noté  $\mathbf{E}$ .

Dans le repère de la RE, un point courant est décrit par  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_{01}$ , et le champ de déplacement devient

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{A} \mathbf{x}_1 + (\mathbf{a} + \mathbf{A} \mathbf{d}_{01}). \quad (9.64)$$

On détermine les valeurs maximales  $P$  and  $Q$  de la sous-RE de taille  $2^P \times 2^Q$  pixels centrée et inscrite dans la RE. Cette sous-RE est adaptée pour des calculs par TFR et définit l'échelle N°2 (figure 9.13). Soit  $\mathbf{d}_{12}$  le vecteur joignant l'origine de la RE à celle de la sous-RE. Dans le repère de la sous-RE ( $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{d}_{12}$ ), on a

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{A} \mathbf{x}_2 + [\mathbf{a} + \mathbf{A} (\mathbf{d}_{01} + \mathbf{d}_{12})]. \quad (9.65)$$

À partir de l'échelle N°3, chaque transition d'échelle est caractérisée par la définition de super-pixels (figure 9.13). Le super-pixel est défini de manière récursive d'une échelle à la suivante en moyennant les niveaux de gris de  $2 \times 2$  pixels consécutifs. À l'échelle N° $n \geq 3$ , le champ de déplacement s'exprime par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{A} \mathbf{x}_n + 2^{2-n} [\mathbf{a} + \mathbf{A} (\mathbf{d}_{01} + \mathbf{d}_{12})]. \quad (9.66)$$

Les équations (9.61), (9.64), (9.65) et (9.66) montrent que l'amplitude de déformation reste inchangée alors que le déplacement moyen décroît à partir de l'échelle N°3. Cette procédure se poursuit tant que la taille minimale d'une super-image est égale à 128 pixels. La taille de chaque super-ZE est telle que  $p = 5$  pour les échelles N°2 à  $n$ . Pour l'échelle N°1, l'utilisateur choisit la taille des ZE. Un algorithme itératif est appliqué à chaque échelle. Le but est d'évaluer une première fois le champ de déplacement interpolé (*i.e.*,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}$ ) à partir des échelles élevées jusqu'à l'échelle N°1 pour laquelle l'amplitude déplacement peut être supérieure à la taille des ZE (*i.e.*, la règle du quart ne s'applique plus à l'échelle N°1 mais à l'échelle N° $n$ ).

Le déplacement maximal mesurable est noté  $\Delta w_{\max} \approx 3 \times 2^{p-2}$  pixels (cf. paragraphe 9.2.1). Cette valeur est *indépendante* de l'échelle considérée. Ceci correspond à une propriété *intrinsèque* de la technique de corrélation. La déformation maximale mesurable  $E_1 = \max(|A_{xx}|, |A_{yy}|)$  pour l'échelle N°1, lorsqu'on n'utilise pas d'algorithme multi-échelle, s'exprime par

$$E_1 = \frac{\Delta w_{\max}}{(N-1)\delta}, \quad (9.67)$$

où  $N$  est le nombre maximal de centres de ZE dans la direction horizontale ou verticale. Lorsque  $(N-1)\delta \approx 512$  pixels, quatre échelles peuvent être définies de telle manière que la taille de la super-image à l'échelle N°4 est :  $L_4 = 128$  pixels. La déformation maximale mesurable  $E_4$  à cette échelle est

$$E_4 = \frac{\Delta w_{\max}}{L_4}, \quad (9.68)$$

et peut donc être de l'ordre de quatre fois la valeur à l'échelle N°1. Chaque transition d'échelle laisse le tenseur  $\mathbf{A}$  inchangé, ce résultat montre l'intérêt d'une approche multi-échelle.

### 9.2.3 Algorithme de corrélation multi-échelle

Les principales étapes de l'algorithme de corrélation multi-échelle sont résumées dans l'organigramme de la figure 9.14. En commençant par l'échelle la plus élevée (*i.e.*, la plus grossière), une première corrélation est calculée pour chaque super-ZE. À l'aide de ce premier calcul, le champ de déplacement est interpolé [cf. équation (9.66)]

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{B}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n, \quad (9.69)$$

où  $\mathbf{B}_n$  et  $\mathbf{b}_n$  sont les premières estimations du tenseur de déformation [cf. équation (9.62)] et du déplacement de corps rigide. Pour vérifier cette première estimation, le centre de chaque ZE dans la super-image déformée est décalé en utilisant l'interpolation. Une nouvelle corrélation est calculée et les corrections sont estimées. Les itérations se poursuivent tant qu'il y a au moins une correction non nulle. Cette itération ralentit le calcul mais rend la technique beaucoup plus robuste. On notera que si le champ de déplacement est mal interpolé aux échelles les plus élevées, ceci conduira à un échec de la procédure. Lorsque les itérations s'arrêtent à l'échelle N° $n$ , on traite l'échelle N° $(n-1)$ . À cette échelle on utilise l'interpolation finale de l'échelle N° $n$  et les ZE sont positionnées en utilisant les règles de transformations inversées par rapport à celles données dans le paragraphe précédent. Cette démarche se poursuit jusqu'à l'échelle N°2. En pratique, l'utilisateur peut choisir d'itérer ou non à chaque échelle dans la mesure où il est intéressé par un calcul rapide ou robuste. Pour l'échelle N°1, l'utilisateur choisit entre une évaluation pixel ou sub-pixel. Dans les deux cas, la démarche développée dans la méthode classique est appliquée.

Lorsqu'une série de plus de deux images a été enregistrée, deux alternatives se présentent. La première consiste à toujours considérer la même image de référence. Les erreurs éventuelles ne sont pas cumulées d'une image à l'autre. Par contre, il existe un déplacement maximal observable. La seconde consiste à réactualiser l'image de référence à chaque nouvelle analyse. Sous ces hypothèses, il n'y a pas de réelle limitation si ce n'est que les erreurs se cumulent au fur et à mesure. Des déformations de l'ordre de 1 et plus peuvent alors être mesurées, même avec une technique classique de corrélation d'images numériques [24].

### 9.2.4 Contrôle de l'estimation du déplacement

La procédure précédente est encore améliorée en tenant compte de variations sévères de texture au cours de l'essai. De manière classique, de petites variations d'intensité se produisent mais restent limitées. Par contre, dans le cas d'essais de compression sur laine de verre où l'image est obtenue par transmission, cet effet peut devenir très important. Deux tests sont donc rajoutés.

D'une part, on peut remarquer que si le niveau de gris est uniforme sur une ZE, le déplacement ne peut pas être déterminé par corrélation [*i.e.*, la dérivée du signal est primordiale pour minimiser la fonctionnelle (9.19)]. Ceci est notamment le cas de la partie basse des images de la figure 10.9. Lorsque l'écart quadratique moyen de texture d'une ZE est inférieur à 1 niveau de gris, le déplacement interpolé est utilisé. Ceci est vrai quelle que soit l'échelle considérée.

D'autre part, pour quantifier la qualité de la mesure, un indicateur d'erreur qui soit *indépendant* du produit de corrélation adimensionné ou non est introduit.

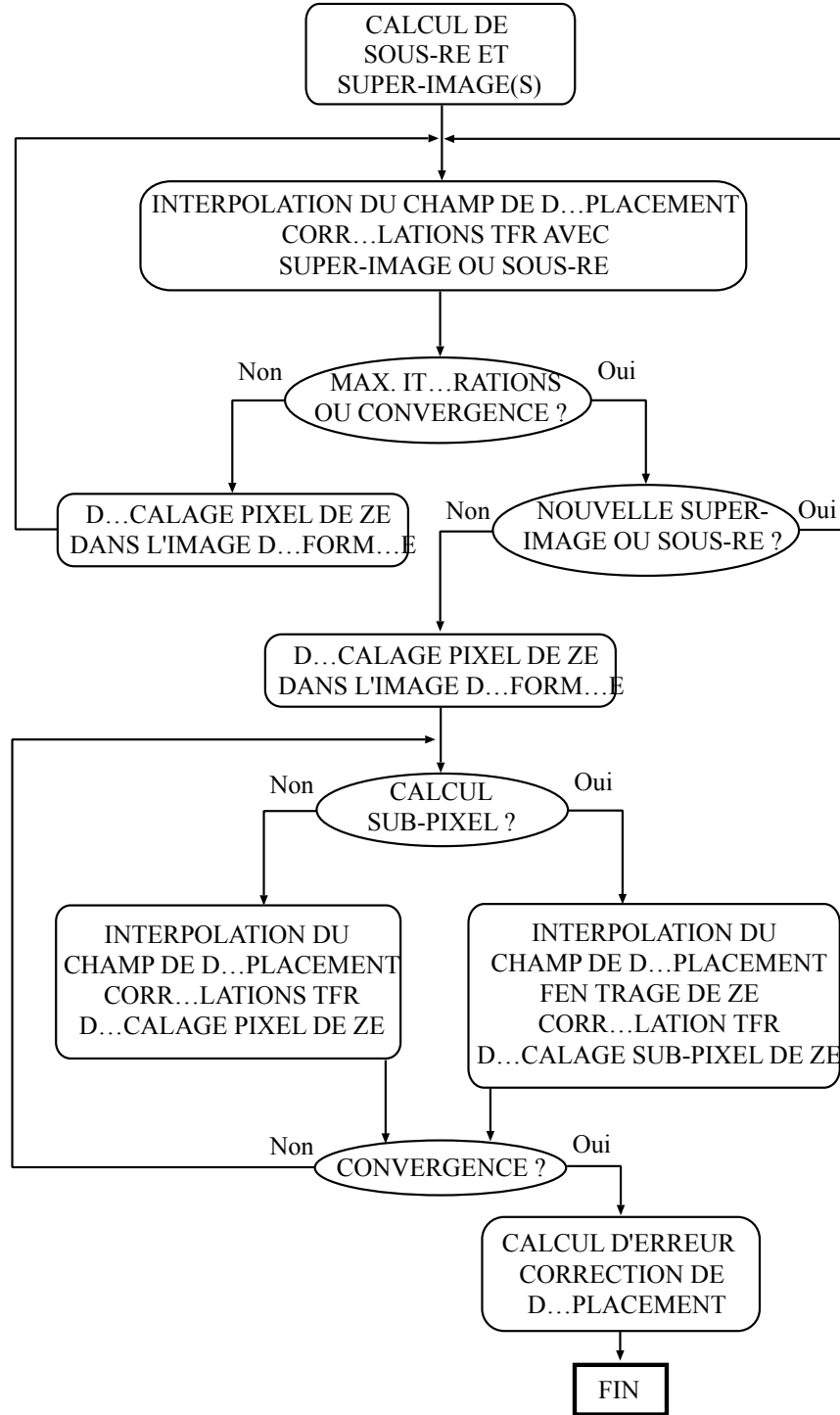


Figure 9.14 – Organigramme montrant les étapes principales d'un algorithme de corrélation multi-échelle.

L'indicateur suivant a donné satisfaction

$$\zeta = \left| \frac{\text{MOY}(ZE_{\text{ref}})}{\text{MOY}(RE_{\text{ref}})} - \frac{\text{MOY}(ZE_{\text{def}})}{\text{MOY}(RE_{\text{def}})} \right| \sqrt{\text{MOY}(ZE_{\text{ref}})\text{MOY}(ZE_{\text{def}})} \quad (9.70)$$

où MOY est la moyenne sur la zone considérée, l'indice <sub>ref</sub> correspond à l'image de

référence et  $\text{def}$  à l'image déformée à convergence. Un second test est ajouté : lorsque  $\zeta \geq 4$  niveaux de gris pour une image codée sur 8 bits, la corrélation est considérée fautive et le déplacement interpolé est conservé. Cet indicateur permet de considérer des variations d'intensité moyenne durant un essai grâce au terme en racine carrée.

## 9.3 Performances de la technique

### 9.3.1 Utilisation d'images déformées artificiellement

Dans un premier temps, nous allons étudier un signal 1D artificiel (figure 9.15).

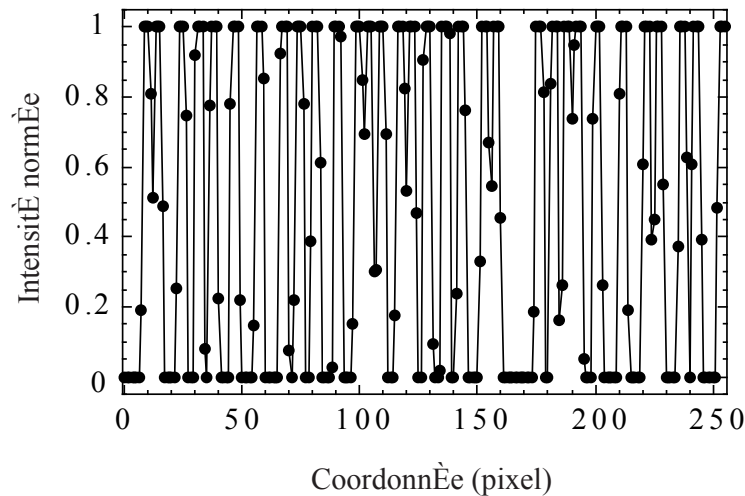


Figure 9.15 – *Mouchetis synthétique* [45].

On suppose un codage sur  $b$  bits. La conséquence immédiate de cette hypothèse est que le capteur CCD sera “aveugle” à tout déplacement inférieur à  $2^{-b}$  pixel. Ceci détermine le déplacement *minimal* que l'on peut estimer. Les valeurs minimales de déplacements observables diminuent pour des codages sur 10, 12 et 16 bits par rapport à un codage sur 8 bits. La figure 9.16 illustre ce phénomène pour quatre codages différents. En conséquence, si l'un des objectifs est de mesurer de très petits déplacements, il faut considérer l'achat d'une caméra permettant d'atteindre la résolution souhaitée.

Pour atteindre des valeurs de déformations inférieures avec une bonne précision, il faut augmenter le nombre de bits. Pour des longueurs de jauge égales à 1024 pixels et 512 pixels, des déformations de l'ordre de  $10^{-5}$  sont mesurables avec des erreurs relatives inférieures à 5% pour des codages sur 12 et 16 bits. Avec un codage sur 16 bits, des déformations *homogènes* de l'ordre de  $10^{-6}$  sont mesurables avec des erreurs relatives inférieures à 5% sur une longueur de jauge de 1024 pixels.

Dans la suite de ce paragraphe, on utilise l'image de référence de la figure 9.10 pour évaluer les performances de l'algorithme multi-échelle [43]. Les images sont à nouveau déformées de la manière que lors de l'étude qui a permis d'obtenir les résultats donnés en figure 9.12. La figure 9.13 montre la sous-RE de l'image de référence et les super-images correspondant aux échelles  $N^n = 3, 4$ . La figure 9.17



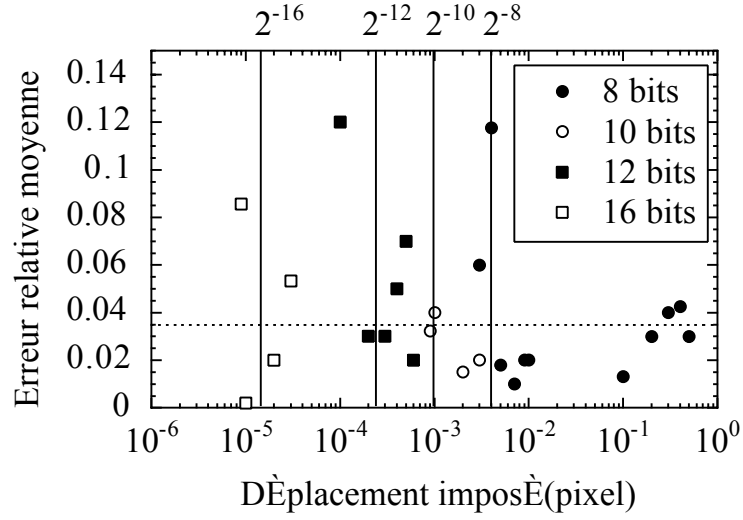


Figure 9.16 – *Erreur relative moyenne en fonction du déplacement imposé pour quatre codages différents.*

montre les résultats obtenus avec la procédure multi-échelle pour une déformation nominale de 0.35 avec  $p = 4$  et  $\delta = 16$  pixels. La valeur prédite est  $0.3501 \pm 0.0001$  lorsque l'option sub-pixel est utilisée et  $0.3496 \pm 0.0001$  lorsque l'option pixel est utilisée. Lorsque l'option sub-pixel est utilisée, l'écart type varie entre 0.13 et 0.26 pixel (valeur moyenne : 0.2 pixel) et reste très inférieur à la limite choisie (*i.e.*, 0.6 ou 1 pixel). Ce cas est hors de portée d'une approche classique (cf. paragraphe 9.2.1).

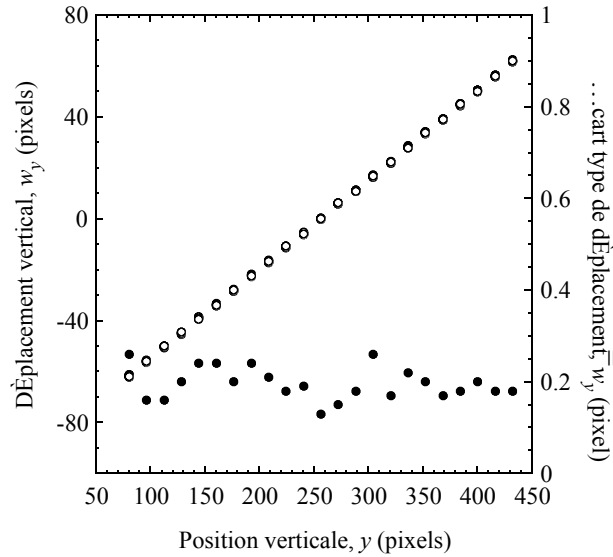


Figure 9.17 – *Déplacement vertical (○) et écart type correspondant (●) en fonction de la position  $y$  de chaque ZE pour une déformation nominale  $E_{yy} = 0.35$  imposée. L'algorithme multi-échelle a été utilisé ( $p = 4, \delta = 16$  pixels).*

Les déplacements interpolés et imposés ayant les mêmes propriétés de linéarité, l'approche multi-échelle permet des amplitudes de déplacement beaucoup plus

grandes que la taille des ZE. Dans l'exemple, l'amplitude de déplacement (*i.e.*, 120 pixels) est 7.5 fois plus grande que la taille de la ZE (*i.e.*, 16 pixels). La limitation est maintenant donnée par la plus grande échelle (*i.e.*, dans le cas présent,  $n = 4$ ) par opposition à l'échelle N°1 dans une approche classique de corrélation. La figure 9.18 montre comment évolue la déformation moyenne durant les itérations. Bien que la première estimation soit de l'ordre de la moitié de la valeur imposée, ceci est suffisant pour obtenir un bon résultat. Par contre, sans les itérations à chaque échelle, on aboutit à un échec. Dans cet exemple extrême, on montre l'intérêt d'une approche multi-échelle itérative. Ce cas correspond aux limites de la technique dans sa version actuelle. Elle rend possible la mesure pour de petites déformations ainsi que de très grandes.

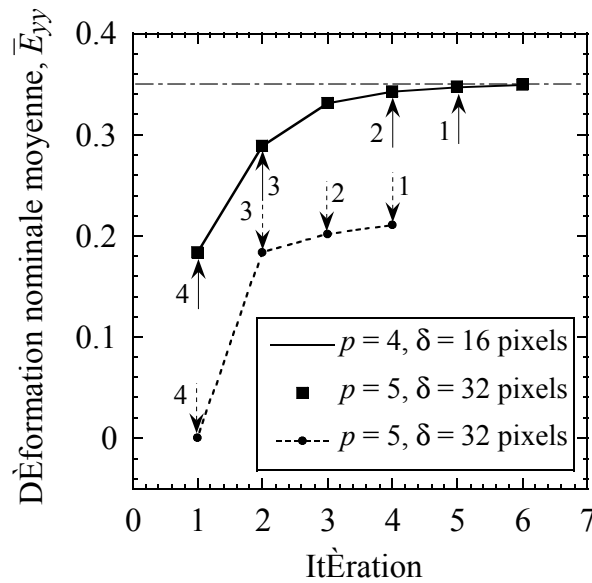


Figure 9.18 – Déformation moyenne en fonction des itérations pour différentes tailles de ZE ( $2^p \times 2^p$  pixels) et décalages  $\delta$ . La ligne en pointillé correspond à un calcul sans itérations à chaque échelle. Chaque flèche montre la première fois où l'on utilise une échelle dont la numérotation est rappelée. Une déformation nominale  $E_{yy} = 0.35$  a été imposée.

### 9.3.2 Analyse d'un essai de traction sur alliage d'aluminium

La figure 9.19 montre des résultats de mesure de déplacement sub-pixel. Une éprouvette en alliage d'aluminium (AU4G) a été utilisée et est déplacée à l'aide de la traverse d'une machine électrohydraulique asservie.

La surface est recouverte d'un mouchetis de peinture afin d'obtenir une texture aléatoire. Le déplacement est mesuré à l'aide d'un LVDT (échelle maximale :  $\pm 3 \mu\text{m}$ ) et par la technique de corrélation. On observe une erreur relative moyenne inférieure à  $2/100^{\text{es}}$  de pixel dans laquelle l'erreur liée à la numérisation du signal (ici sur 8 bits) est incluse. Dans le cas présent, des déplacements de l'ordre de  $1 \mu\text{m}$  sont mesurés avec une bonne précision (la résolution étant de l'ordre de  $0.5 \mu\text{m}$  ou inférieure à  $4/100^{\text{es}}$  de pixel).

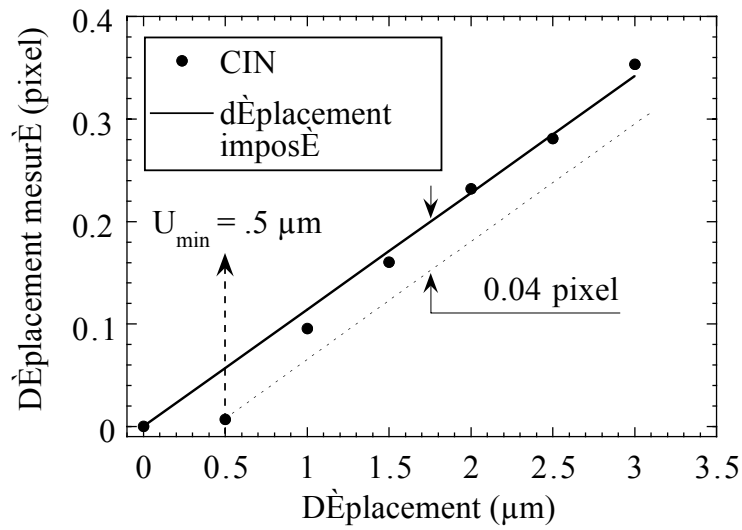


Figure 9.19 – *Déplacement mesurés par corrélation d’images numériques (CIN) en utilisant un algorithme sub-pixel ( $p = 6$ ,  $\delta = 64$  pixels) en fonction du déplacement imposé à l’aide d’un LVDT.*

La figure 9.20 montre des mesures de déformations obtenues à l’aide de jauges et une comparaison avec des prévisions obtenues par corrélation d’images numériques ( $1008 \times 1016$  pixels, codage sur 8 bits). Les déformations longitudinale et transver-

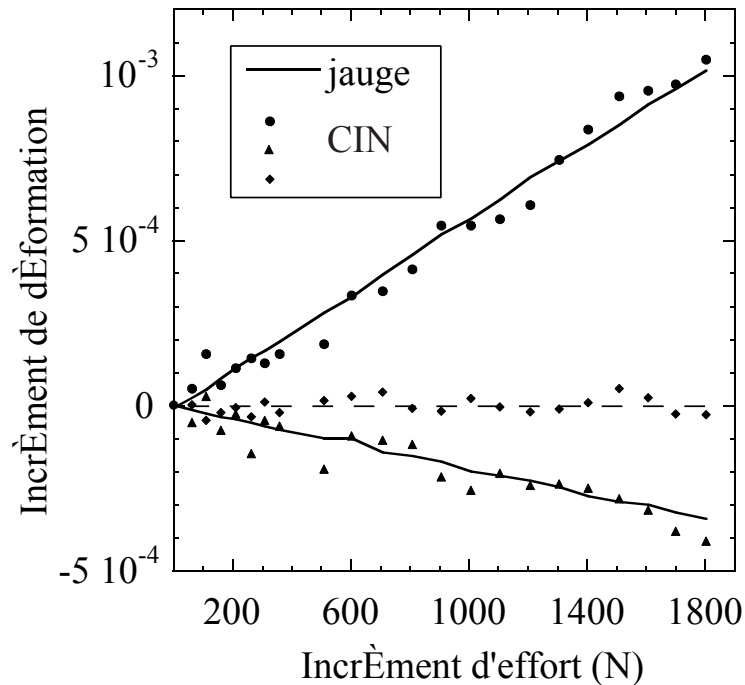


Figure 9.20 – *Déformations mesurées par jauge et par corrélation d’images numériques (CIN) en utilisant un algorithme sub-pixel ( $p = 6$ ,  $\delta = 64$  pixels).*

sale ont été mesurées lors d’un essai de traction avec un montage spécial [42] destiné

à tester des matériaux pour lesquels les niveaux de déformations restent très faibles (*e.g.*, un matériau fragile comme les céramiques [44] ou des composites C/C [78]). C'est pourquoi un soin particulier est porté sur la conception du montage de traction (figure 9.21) qui, grâce à deux liaisons souples croisées, permet d'éliminer les flexions parasites. Un microscope longue distance permet d'examiner une surface de  $4 \text{ mm}^2$

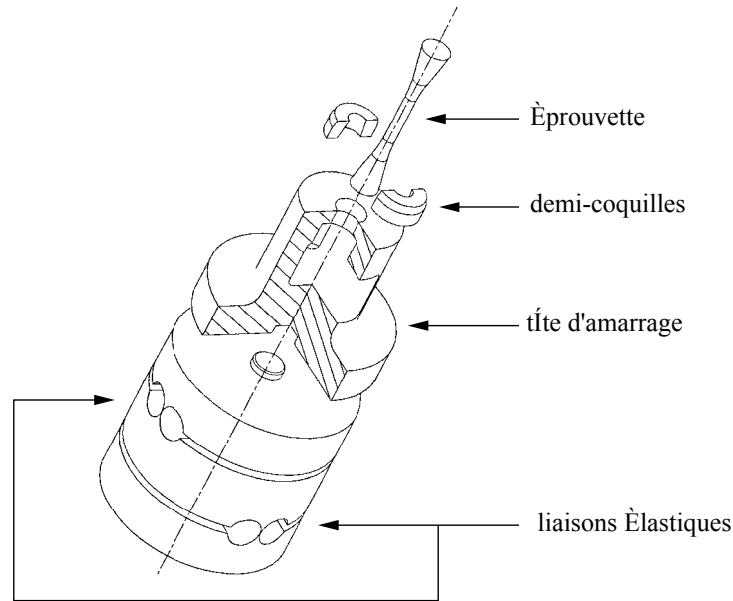


Figure 9.21 – Montage (breveté [42]) de traction pour matériau à comportement fragile.

(figure 9.22). Une taille de ZE de  $64 \times 64$  pixels (correspondant à une surface de  $0.13 \times 0.13 \text{ mm}^2$ ) a été utilisée. L'écart quadratique moyen entre mesure par jauge et par corrélation d'images est de  $6 \times 10^{-5}$ . Des déformations de l'ordre de  $10^{-4}$  peuvent être mesurées de manière fiable. À l'aide de ces mesures par corrélation d'images on a obtenu un module d'Young de  $72 \pm 3 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson de  $0.3 \pm 0.03$  pour des contraintes moyennes variant de 10 à 90 MPa. Ces valeurs sont en concordance avec celles données pour ce type d'alliage [61] ( $72 \text{ GPa}$  et  $0.32$ , respectivement) et avec celles déduites des mesures par jauges ( $76 \pm 0.5 \text{ GPa}$  et  $0.33 \pm 0.005$ , respectivement).

## Conclusion

La résolution de la technique de corrélation d'images est suffisante pour permettre une identification des propriétés élastiques de nombreux solides. Ceci nécessite cependant quelques précautions expérimentales et l'utilisation d'au moins une dizaine d'images pour avoir un nombre suffisant d'informations résolues.

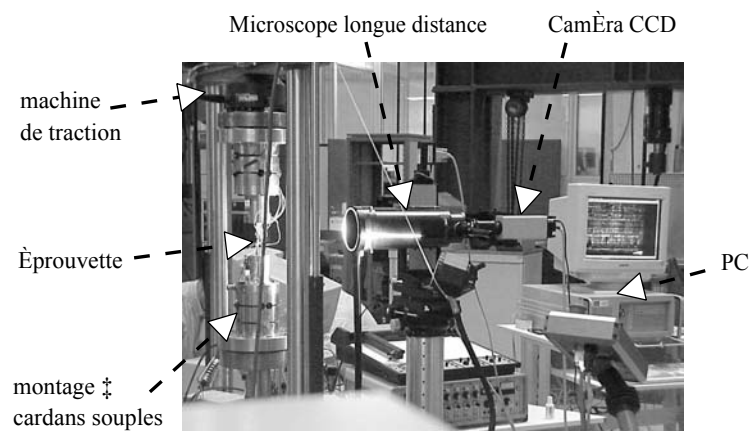


Figure 9.22 – *Vue générale d'un essai de traction avec microscope longue distance.*



# Chapitre 10

## Vers l'identification de champs de propriétés

*Ce chapitre discute d'applications de la technique de mesure de champ de déplacements par corrélation d'images. Une première série d'exemples concerne des applications de la technique en mécanique des solides. Enfin, une dernière partie traite de problèmes d'identification de propriétés mécaniques à partir de mesures de champs de déplacement.*

### Sommaire

---

<b>10.1 Applications en mécanique des solides déformables . . . . .</b>	<b>36</b>
10.1.1 Essai de traction sur alliage d'aluminium . . . . .	36
10.1.2 Essai de reprise d'épaisseur de laine de verre . . . . .	41
10.1.3 Essai de bicompression sur AMF . . . . .	44
10.1.4 Essai biaxial sur du béton haute performance . . . . .	48
<b>10.2 Identification de champs de propriétés élastiques et d'en-</b>	
<b>dommagement . . . . .</b>	<b>55</b>
10.2.1 Analyse d'un essai brésilien . . . . .	56
10.2.2 Identification de champs d'endommagement avec des mesures	
cinématiques . . . . .	59

---

## 10.1 Applications en mécanique des solides déformables

L'objectif de cette première partie est de montrer l'intérêt de mesures de champs cinématiques lors d'essais sur des matériaux solides.

### 10.1.1 Essai de traction sur alliage d'aluminium

Le matériau étudié ici est à nouveau un alliage d'aluminium. Les essais de caractérisation mécanique en traction ont pour but de mesurer les valeurs suivantes :

- le module d'Young  $E$ ,
- le coefficient de Poisson  $\nu$ ,
- la limite d'élasticité conventionnelle  $\sigma_y$ ,
- la contrainte et la déformation totale à rupture  $\sigma_r, \epsilon_r$ ,

avec les champs de déplacement obtenus par corrélation d'images. Pour l'acquisition des images, deux caméras ont été utilisées (codage sur 8 bits et 10.5 bits). Dans le cadre d'une approche macroscopique de l'écrouissage du matériau, la loi de Ludwik a été utilisée

$$\sigma_{eq} - \sigma_y = K p^n \quad (10.1)$$

où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalent de von Mises,  $p$  la déformation plastique cumulée,  $K$  et  $n$  des paramètres à identifier.

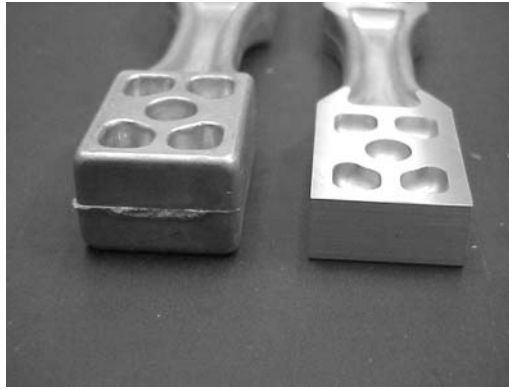


Figure 10.1 – *L'éprouvette avant et après usinage.*

L'éprouvette testée a été usinée (figure 10.1) afin de pouvoir utiliser les mors hydrauliques de la machine de traction / compression du LMT-Cachan. Dans la suite, on s'attachera à estimer les propriétés élasto-plastiques de ce matériau et à analyser les signes avant-coureurs de la rupture.

#### 10.1.1.1 Alignement de l'éprouvette

Une attention particulière a été portée sur l'alignement des éprouvettes. La figure 10.2 montre l'exemple d'une éprouvette pour laquelle le champ de déplacement est mesuré avec les deux caméras. Dans le cas présenté, l'alignement a été déclaré



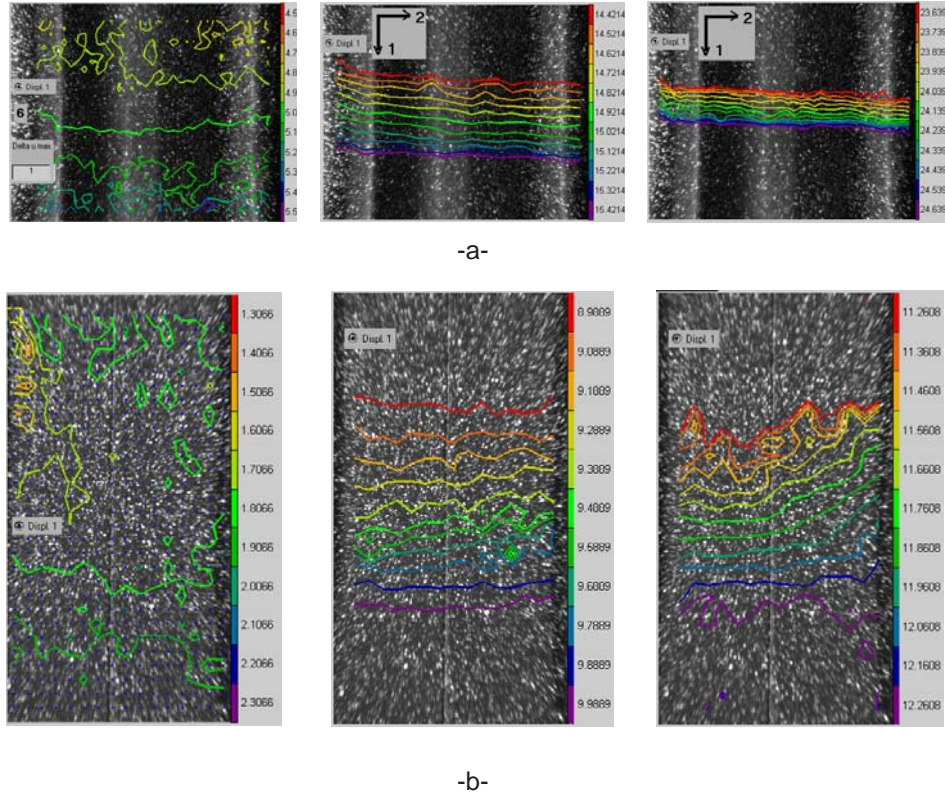


Figure 10.2 – *Déplacements dans la direction de sollicitation (1) mesurés avec une caméra 8 bits (a) et 10.5 bits (b) pour différentes valeurs d'effort : 3,6 kN (gauche), 18,8 kN (centre) et 32 kN (droit).*

bon. Cependant, on notera que pour de faibles valeurs d'effort, l'alignement n'est pas optimal. On remarque également que les deux caméras donnent ici des résultats très similaires.

#### 10.1.1.2 Estimation des propriétés élastiques

Les réponses élastiques linéaires sont étudiées ci-dessous. Les deux caméras ont été utilisées, visant la partie utile de l'éprouvette perpendiculairement l'une par rapport à l'autre. La caméra 8 bits vise la partie lisse de l'éprouvette et la caméra 10.5 bits vise la partie nervurée de l'éprouvette. La figure 10.3 montre les points utilisés pour l'identification du module d'Young  $E$ . On remarque que les valeurs sont proches, bien que le coefficient de corrélation soit significativement plus faible pour la caméra avec le codage le plus bas.

Le même type de conclusion peut être obtenu pour l'estimation du coefficient de Poisson (figure 10.4) avec une conséquence plus marquée sur la valeur trouvée. En effet, le coefficient de Poisson nécessite des mesures de déformations très précises dans le domaine  $10^{-4}$  ce qui est de l'ordre de la résolution pour des images codées sur 8 bits. Ces résultats montrent qu'une caméra à dynamique plus importante (*i.e.*, 12 bits voire 16 bits) permettra une identification des paramètres élastiques plus robuste que celle obtenue ici.

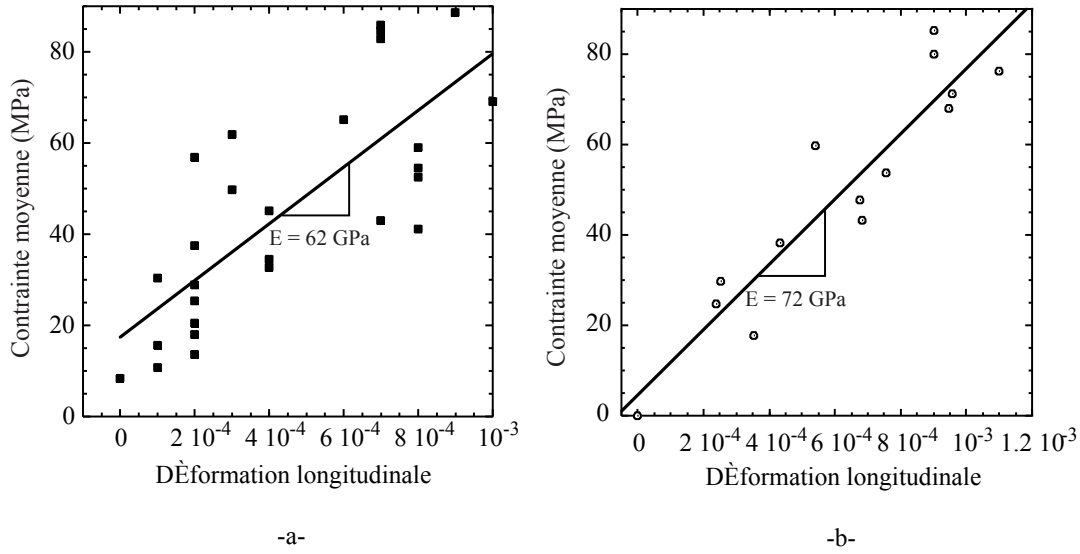


Figure 10.3 – *Module d'Young estimé à partir des mesures avec une caméra 8 bits (a) et 10.5 bits (b). Un coefficient de corrélation de 0.77 (a) et 0.93 (b) est obtenu à l'aide d'une identification par moindres carrés.*

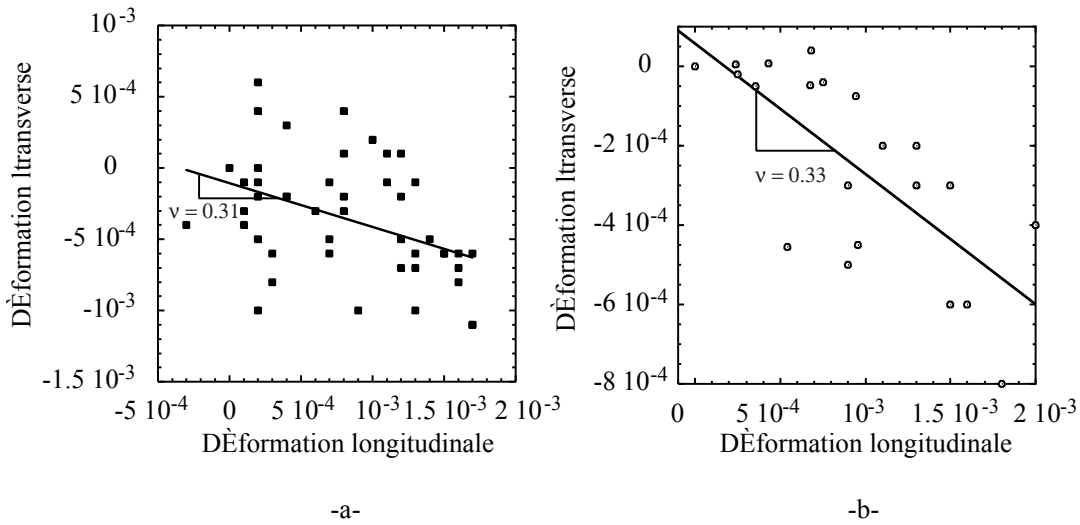


Figure 10.4 – *Coefficient de Poisson estimé à partir des mesures avec une caméra 8 bits (a) et 10.5 bits (b). Un coefficient de corrélation de 0.42 (a) et 0.73 (b) est obtenu à l'aide d'une identification par moindres carrés.*

### 10.1.1.3 Estimation des propriétés plastiques

L'identification de la loi de Ludwik est consignée en figure 10.5. On remarquera que les deux courbes ont la même allure, les paramètres de l'identification sont du même ordre de grandeur. Dans ce cas, les informations données par les deux caméras sont suffisamment proches pour conduire à des estimations très bonnes (le coefficient de corrélation est supérieur à 0.99). La figure 10.6 résume l'ensemble des mesures. On peut voir que globalement les mesures à partir des images prises par les deux

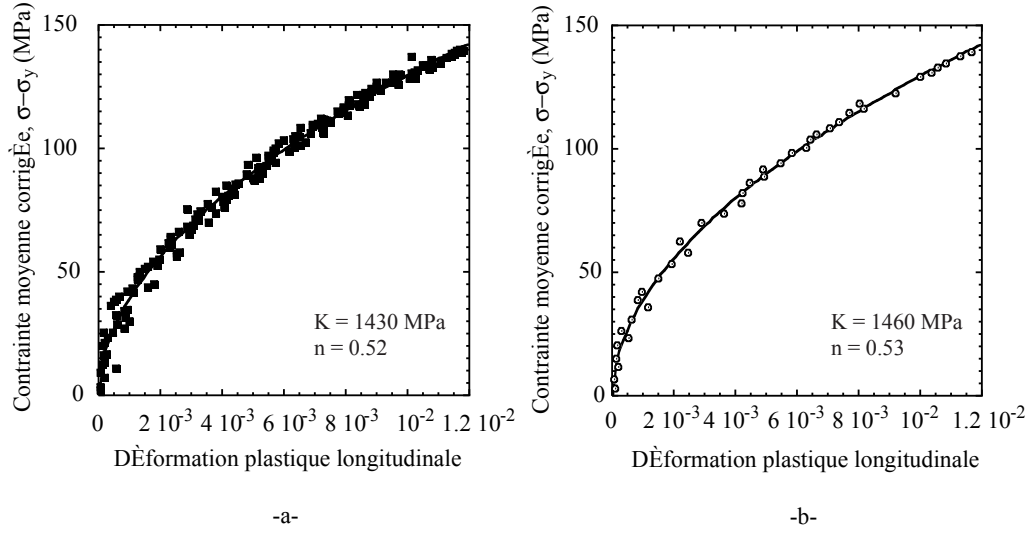


Figure 10.5 – Coefficients de la loi de Ludwik estimés à partir des mesures avec une caméra 8 bits (a) et 10.5 bits (b). Un coefficient de corrélation de 0.995 (a) et 0.998 (b) est obtenu à l'aide d'une identification par moindres carrés.

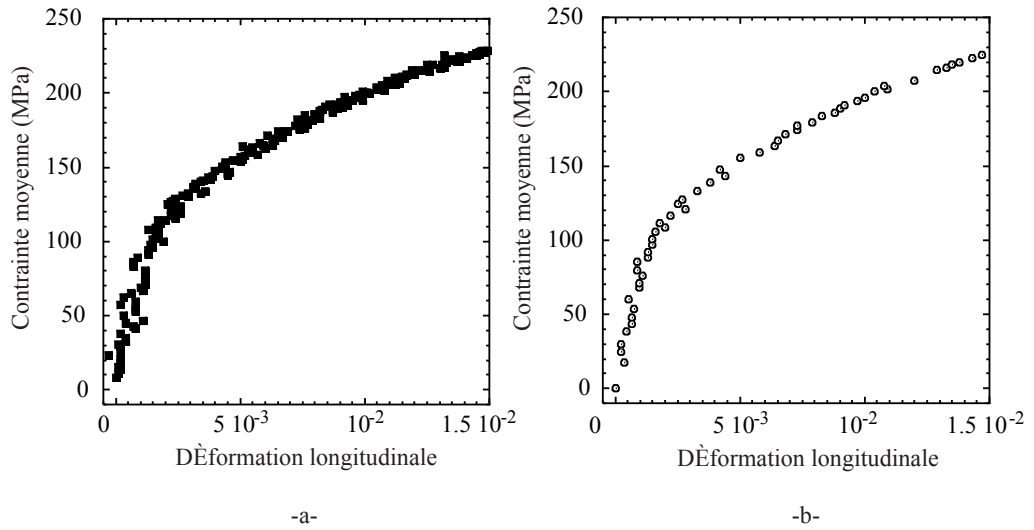


Figure 10.6 – Courbes de traction à partir des mesures avec une caméra 8 bits (a) et 10.5 bits (b).

caméras sont cohérentes. Ceci est d'autant plus remarquable que la zone visée par celles-ci est différente. L'alignement a donc été correct pour cet essai.

#### 10.1.1.4 Analyse de la rupture

Lors d'un essai mené jusqu'à rupture, une séquence d'images a été prise. Sur la figure 10.7, on remarque l'apparition de la localisation des déformations dans les deux directions.

Sur la figure 10.8, on remarque clairement que la rupture a eu lieu à l'empla-

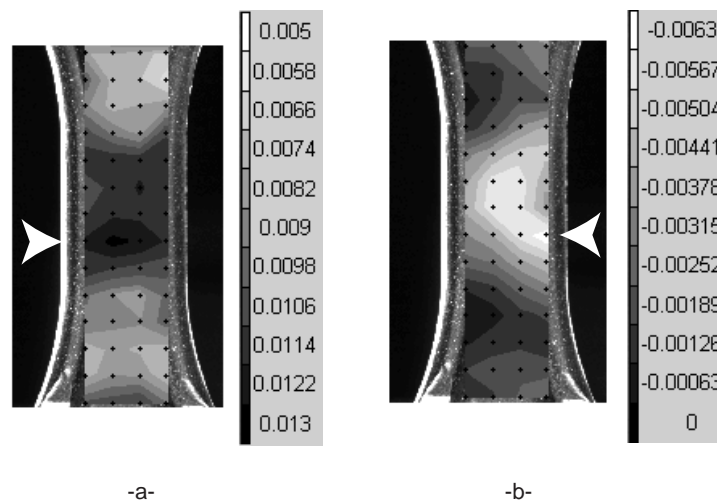


Figure 10.7 – *Champs de déformations dans l'axe de chargement (a) et l'axe perpendiculaire (b). La flèche montre le lieu probable de rupture*

cement où la localisation est visible dans les deux directions de la figure 10.7. On

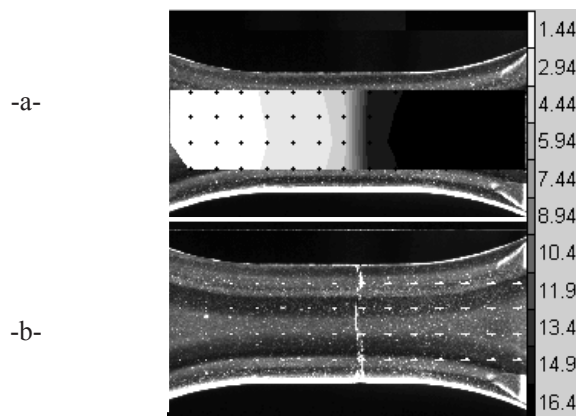


Figure 10.8 – *Déplacement longitudinal (a) et champ de déplacement (b) pour l'image correspondant à la rupture de l'éprouvette.*

peut déduire que la mesure de champ s'avère un outil intéressant pour analyser la localisation des déformations, signe précurseur de la rupture.

#### 10.1.1.5 Conclusion

La résolution de la technique de corrélation d'images est suffisante pour permettre une identification des propriétés élastiques, plastiques et même d'observer les premiers signes avant-coureurs de la rupture. Pour les premières, on peut néanmoins noter qu'une dynamique de caméra supérieure (*i.e.*, 12 bits voire 16 bits) est recommandée afin d'améliorer la qualité de l'identification.

### 10.1.2 Essai de reprise d'épaisseur de laine de verre

L'exemple qui suit traite de la reprise d'épaisseur dans les laines de verre [5], c'est-à-dire sa capacité à recouvrer en partie son épaisseur initiale après une compression très importante. Un échantillon de  $140 \times 200 \times 50 \text{ mm}^3$  est comprimé verticalement. Les images sont obtenues par transmission de la lumière sans aucune préparation (figure 10.9). De par sa structure particulière, le matériau se déforme essentiellement dans la direction verticale. La démarche multi-échelle de corrélation doit a priori fonctionner dans ce cas précis. La faible densité de ce matériau le rend intéressant pour des applications d'isolation thermique. Après fabrication, le matériau est comprimé de manière très sévère (*i.e.*, plus de 90%) et stocké sous ces niveaux de déformation. Lors de son utilisation, le matériau doit être capable de recouvrer la plus grande partie de sa hauteur initiale pour remplir les fonctions d'isolation thermique. La procédure expérimentale consiste à appliquer un déplacement maximal et de mesurer les déformations résiduelles lorsque ce déplacement est relâché. Ceci est conduit de manière séquentielle en augmentant au fur et à mesure le déplacement maximal.

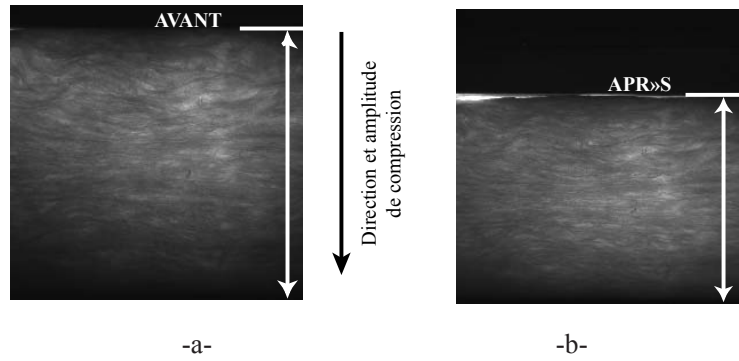


Figure 10.9 – Images initiale (a) et “déformée” à la fin de la séquence (b) d’un échantillon de laine de verre. La longueur de référence  $L_0$  et sa variation  $\Delta L$  sont tracées.

À la fin de la séquence, la déformation résiduelle apparente (*i.e.*,  $\Delta L/L_0$ , cf. figure 10.9) est de l’ordre de  $-0.25^1$ . Cette valeur aurait dû permettre une corrélation directe entre l’image de référence et la dernière image de la séquence. Cependant, la variation de texture durant l’essai empêche une application directe. Deux stratégies différentes sont utilisées pour obtenir un (bon) résultat. La première permet à l’utilisateur de repérer un segment de référence et son correspondant déformé. Un grand nombre de points ont une erreur supérieure à 4 pixels, ce qui ne permet pas une analyse détaillée des fluctuations locales de déformation. En effet, dans ce cas, l’interpolation linéaire est préférée à toute autre valeur arbitraire. Une déformation moyenne de  $0.2417 \pm 0.0002$  est obtenue avec un écart type correspondant de 0.0377. Cette valeur est cohérente avec la déformation apparente trouvée. L’erreur moyenne est égale à 9.7 niveaux de gris (valeur maximale: 71 niveaux de gris). Cette première stratégie conduit à une estimation raisonnable de la déformation moyenne, mais sous-estime les fluctuations.

1. Toutes les déformations données dans ce paragraphe sont exprimées à l’aide du tenseur de déformation nominale  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_{1/2}$ .

Sachant que 11 images ont été prises, on peut faire appel à la technique de réactualisation de l'image de référence couramment utilisée lors de mesures de grandes déformations. La RE contient 840 ZE de telle manière que 9240 analyses locales à l'échelle N°1 sont nécessaires. Elles nécessitent moins de 2 minutes lorsqu'aucune itération n'est opérée et moins de 5 minutes lorsque le schéma itératif est utilisé. Une déformation moyenne de  $-0.2501 \pm 0.0004$  et un écart type de 0.0470 sont obtenus. l'erreur moyenne vaut 2.5 niveaux de gris (valeur maximale : 22 niveaux de gris). Ce nouveau résultat est plus précis que le précédent, bien que les erreurs de mesure soient cumulées puisqu'une procédure de réactualisation a été utilisée.

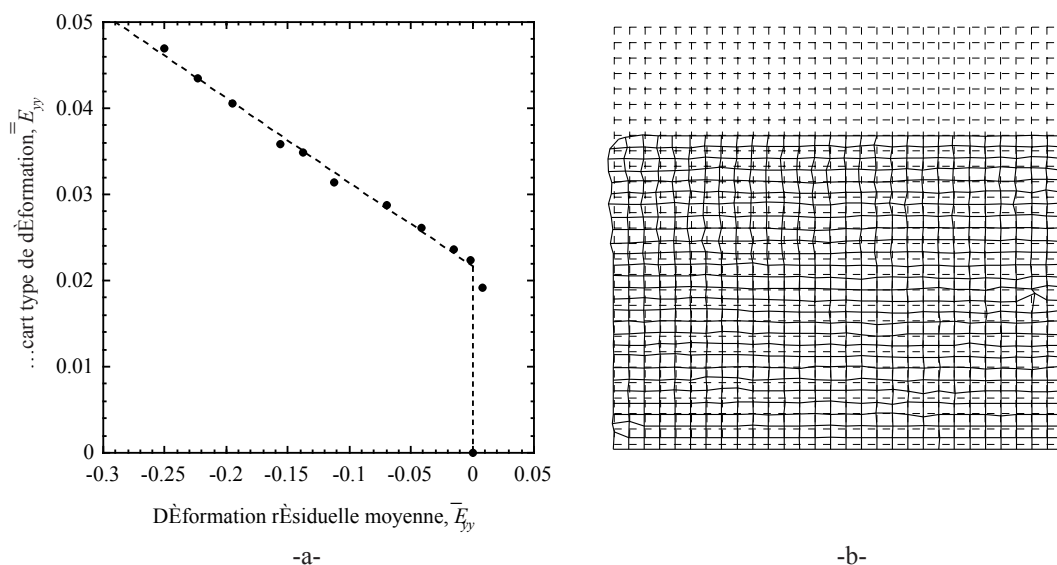


Figure 10.10 – (a) Écart type en fonction de la moyenne des déformations résiduelles pour un échantillon en laine de verre. (b) Maillages de référence et déformé à la fin de la séquence de chargement ( $p = 5, \delta = 32$  pixels).

L'évolution de l'écart type avec la valeur moyenne de la déformation résiduelle est tracée sur la figure 10.10. Lorsque la déformation maximale appliquée décroît, la déformation résiduelle moyenne décroît et l'écart type correspondant croît. Mis à part les premiers stades de compression, l'écart type croît de manière linéaire avec la déformation moyenne. De plus, les endroits qui voient les niveaux maxis (resp. minis) de déformation résiduelle par rapport à la valeur moyenne restent identiques au cours de tout l'essai. Ceci montre que les endroits faibles (resp. forts) dans le matériau le restent au cours de la déformation. Les propriétés mécaniques de la laine de verre peuvent donc être liées à la morphologie de la microstructure testée.

Lorsqu'on utilise une procédure sub-pixel à l'échelle N°1, une déformation moyenne de  $-0.2505 \pm 0.0004$  et un écart type de 0.0529 sont mesurés. L'erreur moyenne est égale à 2.5 niveaux de gris. Les maillages initial et déformé sont montrés sur la figure 10.10. La figure 10.11 compare les maillages déformés de la dernière image de la séquence avec différentes hypothèses. Le premier résultat (figure 10.11-a) correspond à un cas sans réactualisation de l'image de référence (*i.e.*, première stratégie). Le deuxième (figure 10.11-b) correspond à une réactualisation sans itérations entre les différentes échelles. Une déformation moyenne de  $-0.2573 \pm 0.0004$  et une erreur de 2.5 niveaux de gris ont été obtenus. Dans cet exemple, les itérations ne sont pas

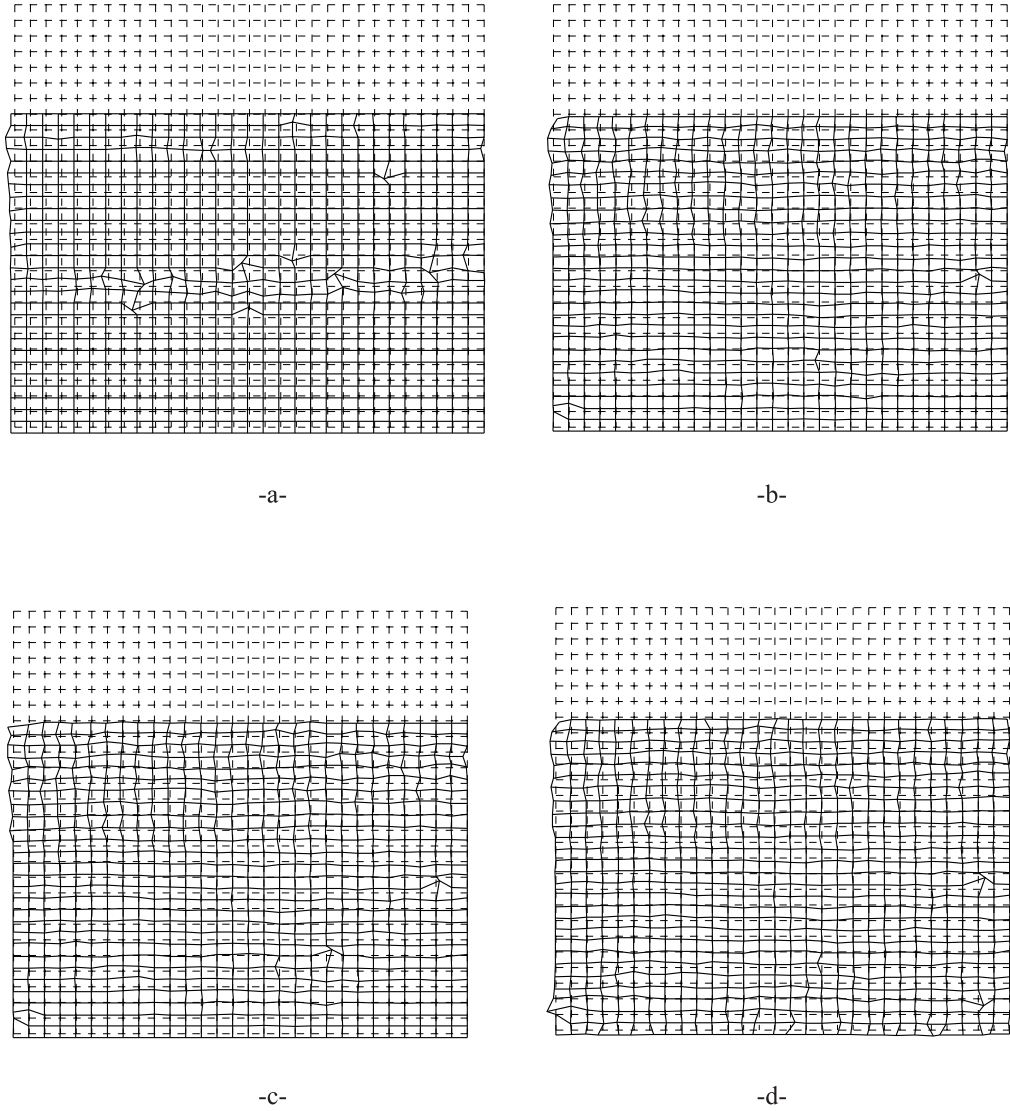


Figure 10.11 – *Comparaison des maillages de référence et déformé à la fin de l’essai sur un échantillon de laine de verre ( $p = 5, \delta = 32$  pixels). Quatre options différentes ont été utilisées : (a) pas de réactualisation de l’image de référence, (b) réactualisation de l’image de référence sans itérations, (c) réactualisation de l’image de référence sans limitation sur  $\eta$  et (d) réactualisation de l’image de référence sans test sur les fluctuations de la texture.*

nécessaires pour obtenir des résultats acceptables. Ceci est dû au fait que les déformations maximales entre deux images consécutives ne dépassent pas 0.05. L’effet de conserver les résultats même lorsque l’erreur dépasse la limite de 4 niveaux de gris est montré sur la figure 10.11-c. Les fluctuations augmentent (l’écart type est égal à  $0.0601$  pour une déformation moyenne de  $-0.2572 \pm 0.0004$  et une erreur moyenne de 2.5 niveaux de gris). Les fluctuations sont plus importantes, bien que du même ordre de grandeur que la résolution sub-pixel. Enfin la figure 10.11-d montre le résultat lorsque la corrélation est conduite quelle que soit les fluctuations de niveau de gris dans la ZE considérée. Quelques artéfacts supplémentaires apparaissent et conduisent à une légère augmentation de l’écart type (*i.e.*,  $0.0607$ ), une diminution



de la valeur moyenne (*i.e.*,  $-0.2557 \pm 0.0004$ ) et une erreur moyenne de 2.5 niveaux de gris. Les quatre résultats sont assez proches. Cependant, si l'on recherche de manière précise les fluctuations de déformation, les deux tests du paragraphe 9.2.4 sont très utiles.

## Conclusion

L'approche multi-échelle de la technique de corrélation d'images s'est avérée être un outil indispensable pour traiter l'exemple de ce paragraphe. D'autre part, pour cette classe de matériaux, la corrélation d'images est un outil idéal pour l'analyse des fluctuations qu'il s'agit ensuite de corrélérer avec des propriétés locales de texture.

### 10.1.3 Essai de bicompression sur AMF

Les essais multiaxiaux présentés ici ont tous été conduits sur la machine multiaxiale du LMT-Cachan (ASTRÉE, cf. figure 10.12-a). Chaque axe est commandé indépendamment et les signaux de pilotage sont très variés (*e.g.*, interne ou externe). Sur un axe, chaque vérin peut être actionné de manière séparée ou en mode "centroïde". Le mode centroïde consiste à imposer une relation entre les déplacements des deux vérins opposés de telle manière que le centre de l'éprouvette reste immobile. Ceci permet d'éviter des efforts parasites (*i.e.*, hors axe) sur les vérins. La figure 10.12-b illustre le principe d'un algorithme de contrôle dans un mode centroïde. Pour chaque paire de vérin (*e.g.*,  $Y^+$  et  $Y^-$ ), l'asservissement utilise la somme des forces (ou des déplacements) et la différence des déplacements le long de l'axe. À l'aide d'une mesure de déplacement par corrélation d'images et d'une éprouvette en croix (cf. paragraphe 10.2.2) on a pu montrer que le centre de l'éprouvette bougeait au maximum de  $\pm 10 \mu\text{m}$  par rapport à sa position initiale (*i.e.*, moins de 1 pixel dans chacune des directions).

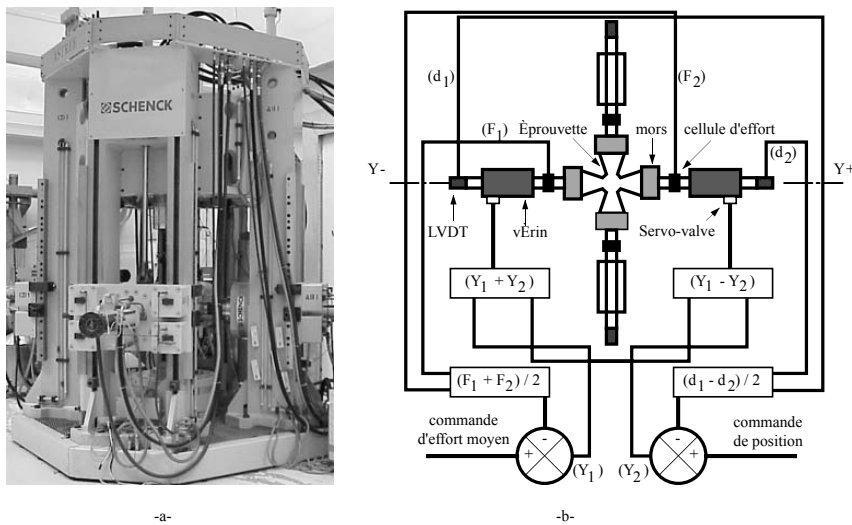


Figure 10.12 – (a) Vue générale de la machine ASTRÉE. (b) Schéma de commande en mode centroïde.



Dans ce premier exemple, il s'agit de développer un essai multiaxial de compression sur alliage à mémoire de forme (AMF). On recherche ici à analyser le comportement "pseudo-élastique" des AMF sous chargement multiaxial [17]. La déformation de transformation (qui peut être très importante) est causée par un changement de phase thermo-élastique athermal [51]. La transformation martensitique est un changement de phase cristalline qui peut être piloté par la température ou la contrainte appliquée. La transformation martensitique est un processus displacif du premier ordre dans lequel une phase cubique centrée de la phase mère (encore appelée austénite par similitude avec les alliages Fe/C) se transforme par un mécanisme de cisaillement en martensite ordonnée et maclée. L'utilisation de ces matériaux dans de nouvelles applications nécessite une prévision raisonnable du comportement hystérétique induit par la transformation de phase (figure 10.13).

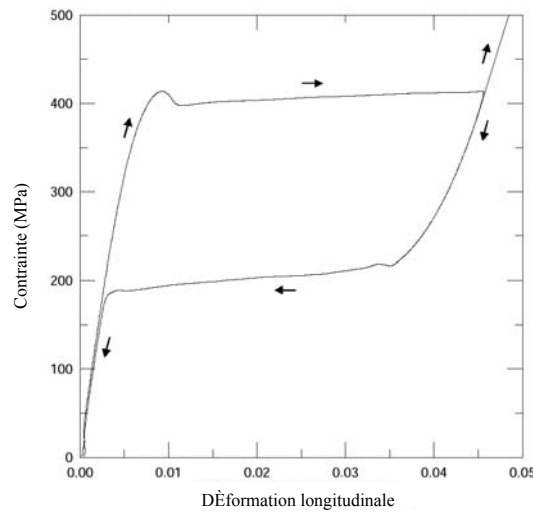


Figure 10.13 – Courbe contrainte/déformation d'un alliage à mémoire de forme (Nitinol) dans un essai de traction (d'après McKelvey et Ritchie [65]).

Jusqu'à présent, tous les modèles de la littérature ont été validés sous condition de chargement uniaxial. Des résultats plus récents obtenus en traction/torsion [80, 53, 69, 75] ou sous chargement triaxial [34] montrent que le comportement des AMF est affecté de manière significative par l'état triaxial des contraintes. Des comparaisons entre résultats expérimentaux et prévisions basées sur les modèles existants montrent le besoin de développement de bases de données expérimentales plus complètes et d'études fondamentales en vue de comprendre les mécanismes de formation et de réorientation des plaquettes de martensite sous chargements non-proportionnels. Le matériau utilisé ici est l'alliage  $\text{Cu}_{87}\text{Al}_{11}\text{Be}_2$  (pourcentage massique) fourni par Tréfinmétaux. Le traitement thermique consiste à maintenir à  $650^\circ\text{C}$  durant 20 min suivi d'une trempe à  $100^\circ\text{C}$  pendant 1 h. Les températures moyennes de transformation sont les suivantes : *austenite finish*,  $A_f = 32^\circ\text{C}$ , *austenite start*  $A_s = 19^\circ\text{C}$ , *martensite start*,  $M_s = 21^\circ\text{C}$  et *martensite finish*,  $M_f = -7^\circ\text{C}$ . L'alliage Cu-Al-Be a un comportement pseudo-élastique à la température de  $35^\circ\text{C}$ . L'idée d'un essai de compression biaxiale est de solliciter un cube de  $20 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$  [23]. La difficulté principale de cet essai est d'appliquer de manière uniforme le chargement sur

chaque face en évitant le plus possible le frottement. L'effort est transmis du vérin à l'éprouvette par un système de peignes (figure 10.14).

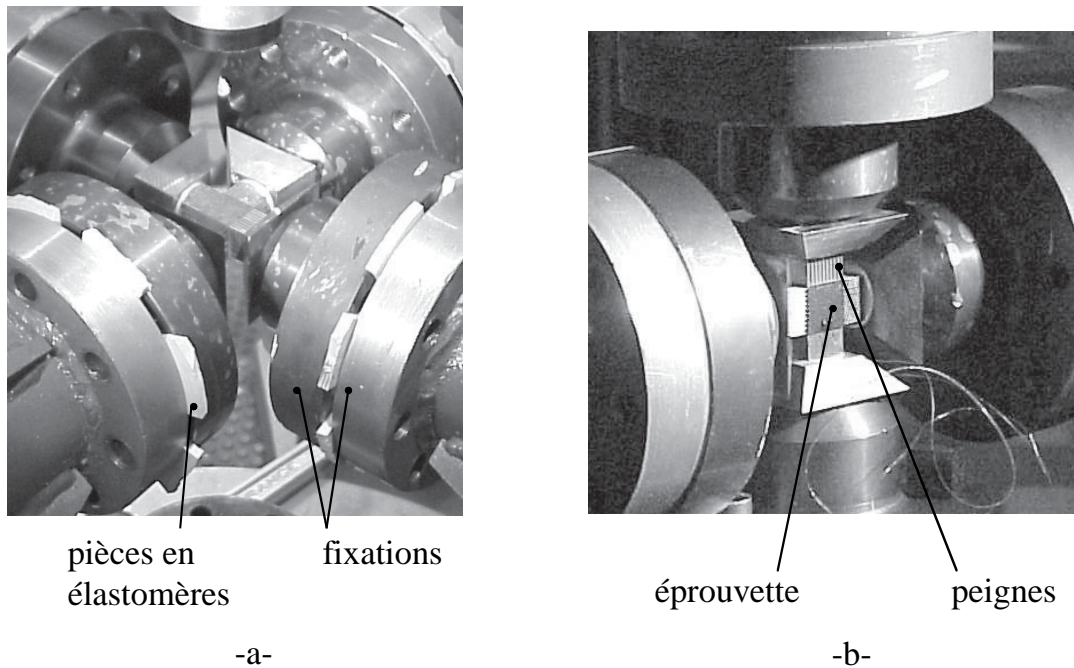


Figure 10.14 – Montage de compression multiaxiale sur cube en alliage à mémoire de forme : (a) pièces en élastomère, (b) détail du système de peignes.

La charge est appliquée sur l'éprouvette grâce à quatre vérins hydrauliques par l'intermédiaire de quatre "peignes" comportant 296 tiges métalliques. Du fait de la faible rigidité en flexion des tiges, le frottement entre l'éprouvette et le montage est éliminé et il est possible d'appliquer des niveaux de contrainte de l'ordre de  $-250$  MPa. Sur la figure 10.14 on peut apercevoir des plaques en élastomères entre la tête de vérin et l'élément d'application de l'effort. L'idée était de rendre souple la liaison entre le vérin et l'éprouvette pour rattraper les éventuels défauts d'alignement. Les premiers essais ont été effectués sans mesure de champ de déplacement par corrélation d'images. Les déformations ont été mesurées à l'aide de jauges. Dans un premier temps, un essai de compression uniaxiale a été conduit dans deux directions perpendiculaires. La figure 10.15-a montre les courbes contrainte déformation dans les deux directions.

Bien que le comportement du matériau soit *a priori* isotrope, les réponses sont différentes suivant les deux directions. En particulier, les raideurs initiales ne sont pas identiques. Ces différences sont confirmées lors d'un essai de compression équi-biaxiale (figures 10.15-b) : les courbes  $\sigma_{11}$  (resp.  $\sigma_{22}$ ) en fonction de  $\epsilon_{11}$  (resp.  $\epsilon_{22}$ ) diffèrent également. Afin de comprendre ces différences, le champ de déplacement a été mesuré au cours de l'essai (figure 10.16-a). On s'aperçoit que le champ de déplacement ne correspond pas à celui d'une bicompression, ce qui pourrait expliquer les différences de réponse dans les deux directions de chargement. À partir de ces observations, il a été décidé d'enlever les plaques en élastomère (figure 10.14-b) et de procéder à un nouvel essai. Les figures 10.15-c,d montrent les réponses pour

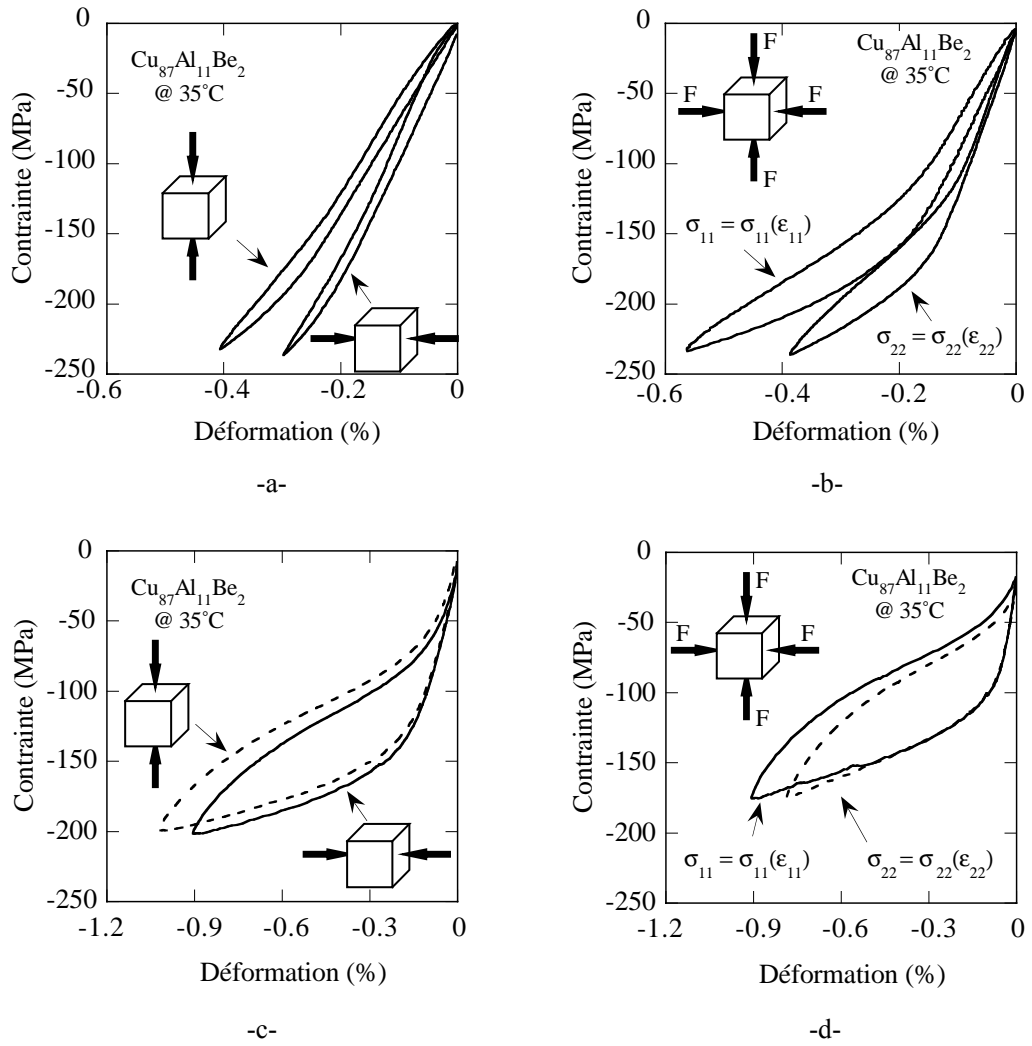


Figure 10.15 – Courbes contrainte / déformation d'un alliage à mémoire de forme : (a) essais de compression uniaxiale avant correction, (b) essai de bicompression avant correction, (c) essais de compression uniaxiale après correction, (d) essai de bicompression après correction.

les essais uniaxiaux et biaxiaux. On remarque maintenant que les comportements élastique et pseudo-élastique redeviennent isotropes. De plus, les figures 10.16-b,c,d montrent les champs de déplacement pour les niveaux maximaux d'effort lors des essais uniaxiaux et biaxiaux. Ces conditions aux limites sont satisfaisantes par rapport à l'objectif recherché et à l'isotropie de comportement du matériau. On notera en particulier la symétrie des champs de déplacement. Ce genre de démarche peut être généralisé lors de toute mise au point ou vérification d'essai. En effet, le calcul d'un champ de déplacement se fait en moins d'une minute ce qui, lors d'une phase de mise au point, est tout à fait acceptable.

## Conclusion

Une fois les conditions aux limites contrôlées, des essais proportionnels et non-

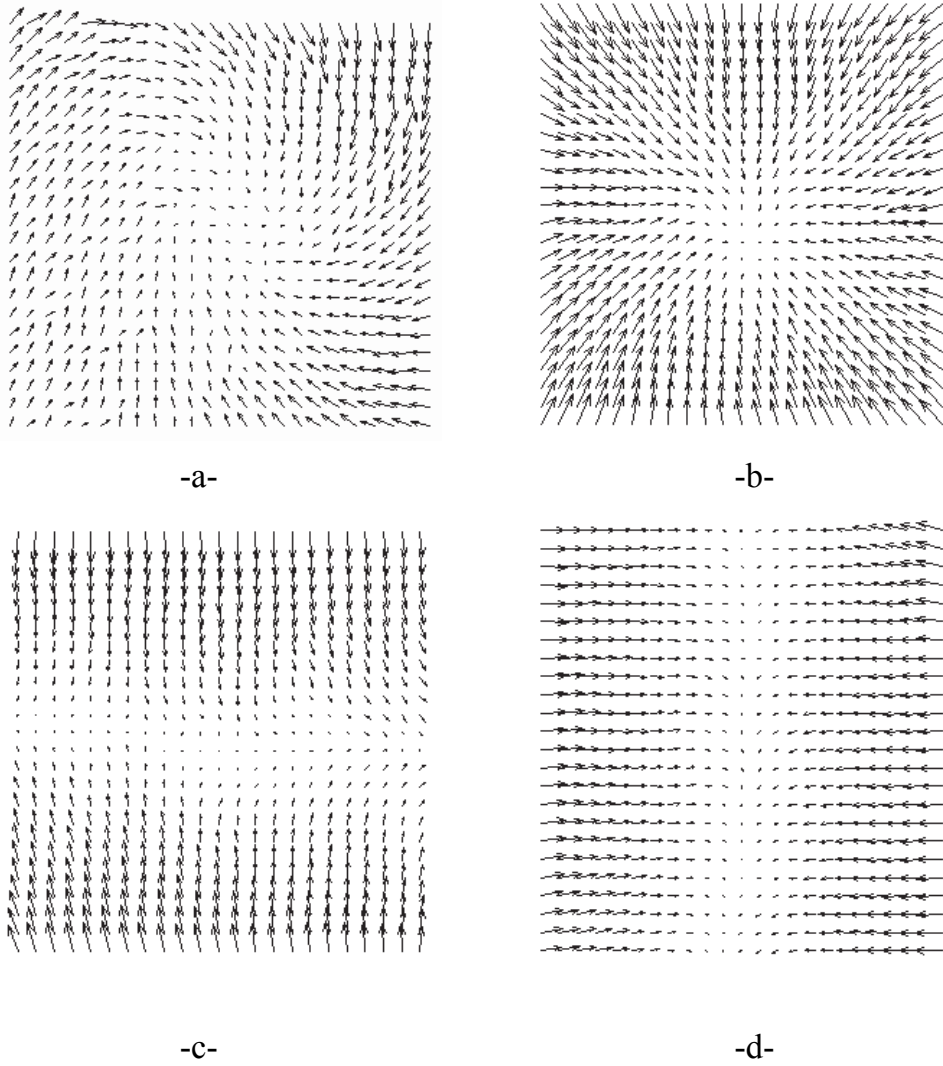


Figure 10.16 – *Champs de déplacement mesurés par corrélation d'images numériques : (a) essai de bicompression avant correction, (b) essai de bicompression après correction, (c), (d) essais de compressions uniaxiales après correction.*

proportionnels ont été conduits. La surface de début de transformation a pu être déterminée dans le quadrant correspondant à la bicompression d'un diagramme de contraintes ( $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ , cf. figure 10.17).

Une base de donnée plus complète est alors à disposition pour construire des modèles de comportement d'alliages à mémoire de forme sous chargement multiaxiaux [17]. La rapidité de calcul associée à la transformée de Fourier (rapide) permet d'utiliser la corrélation d'images lors de la mise au point d'un essai comme celui présenté ici.

#### 10.1.4 Essai biaxial sur du béton haute performance

Les essais uniaxiaux classiques sont souvent insuffisants pour décrire correctement le comportement du béton dans ses applications réelles. On se satisfait, dans

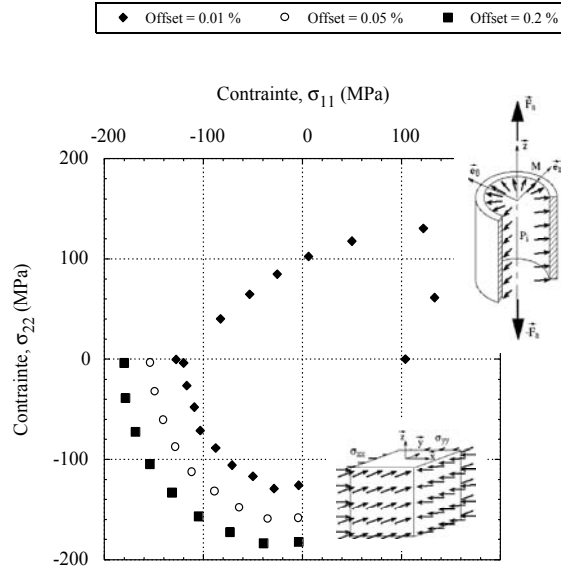


Figure 10.17 – Surface de début de transformation obtenue à partir d'essais de traction/pression interne et de bicompression (d'après Bouvet et al. [18]).

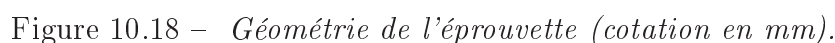
la plupart des cas, d'extrapoler les résultats d'un essai uniaxial pour décrire le comportement multiaxial. Cela peut s'expliquer par la difficulté de mise en œuvre d'un essai multiaxial sur des matériaux de type béton. On constate dans la littérature un nombre restreint d'études de ce type [55]. Par ailleurs, la nature hétérogène du microbéton armé de fibres rend compliquée la mesure des déformations, l'amorçage et la propagation des fissures ; une méthode expérimentale fiable et robuste, comme l'intercorrélation d'images, s'avère donc intéressante à mettre en œuvre. Au total deux éprouvettes sont testées, les résultats de corrélation pour la deuxième éprouvette sera donné à la fin du paragraphe accompagné des réponses de la jauge de déformation.

#### 10.1.4.1 Béton à ultra hautes performances armé de fibres

Composé de poudres (sable, ciment quartz, fumée de silice) dont la taille des plus gros grains ne dépasse pas  $500\ \mu\text{m}$ , ce type de béton possède une porosité très faible et un arrangement granulaire très optimisé. Ces matrices ont un comportement purement fragile. L'ajout de fibres modifie ce comportement en conférant une certaine ductilité. Il s'agit, pour le matériau de cette étude, de fibres d'acier de longueur  $13\ \text{mm}$  et de diamètre  $0.16\ \text{mm}$  dosées à 2% en volume. Les fibres ont pour fonction essentielle de suppléer la perte de résistance en traction de la matrice au droit d'une fissure [79]. Ce béton permet d'atteindre des résistances de  $-200\ \text{MPa}$  en compression, de  $7$  à  $12\ \text{MPa}$  en traction directe et d'obtenir des caractéristiques de durabilité supérieures à celles des bétons classiques [6].

#### 10.1.4.2 Essai de bitraction sur éprouvette cruciforme

Ce type d'essai permet la création d'états de contraintes biaxiaux réalistes et proches de ceux observés dans les structures. Il s'agit de solliciter les quatre extré-



Le dispositif expérimental comprend une caméra CCD. Les images correspondent à la surface utile de l'éprouvette (environ  $100 \times 100 \text{ mm}^2$ ) et sont prises de façon automatique au cours du chargement. Chaque image représente alors un état de charge (ou de déformation) différent. L'objectif de la caméra utilisée donne un agrandissement suffisant pour pouvoir calculer des déplacements de  $10 \text{ }\mu\text{m}$  ( $\epsilon \cong 10^{-4}$ ). Trois jauges de déformations de  $30 \text{ mm}$  superposées à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  ont été collées au

centre de la surface utile. Cette surface ne possédant pas de texture suffisante, un mouchetis blanc sur fond uniformément noir a été généré avec de la peinture. L'essai a été réalisé avec la machine multiaxiale ASTRÉE. La configuration utilisée pour l'essai de bitraction est donnée par la figure 10.19. Les sollicitations ont été appliquées dans un plan horizontal et l'observation a été réalisée à l'aide de la caméra selon l'axe vertical.

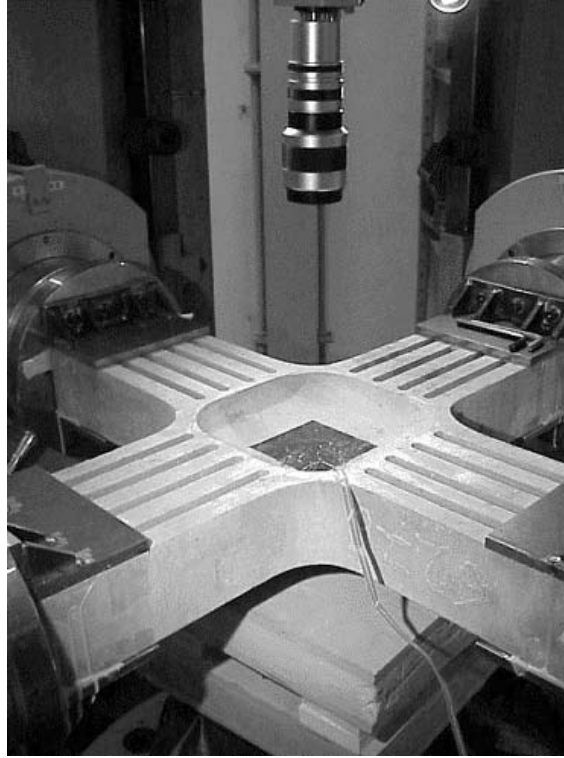


Figure 10.19 – *Configuration de l'essai.*

Après collage de l'éprouvette sur les têtes des vérins, un déplacement de 1.25 mm est imposé à chacun d'eux à vitesse constante ( $40 \mu\text{m}/\text{min}$ ). Par ailleurs, les déplacements des vérins sont asservis entre eux de telle sorte que tous les déplacements dans les deux directions soient identiques (figure 10.20). Des images ont été prises au cours de l'essai de façon automatique toutes les 15 secondes. L'image de référence est celle prise avant chargement. Les paramètres de calcul ont été choisis en utilisant des zones d'étude de 64 pixels de côté avec décalage entre zones d'étude de 32 pixels, ce qui conduit à un bon compromis pour mesurer des petits déplacements. On présente dans la suite les résultats correspondant aux images prises à la fin du comportement élastique linéaire et à l'amorçage de fissures. Une quinzaine d'images a été dépouillée dont quatre sont présentées dans cette étude afin d'étudier l'amorçage et la propagation des fissures. La figure 10.20 montre les déplacements et les charges des vérins pour chaque image.

#### 10.1.4.3 Résultats d'essai

La figure 10.21-a montre le champ de déplacement obtenu lorsque l'effort arrive à sa valeur maximale (image 01 de la figure 10.20). La figure 10.21-b montre un

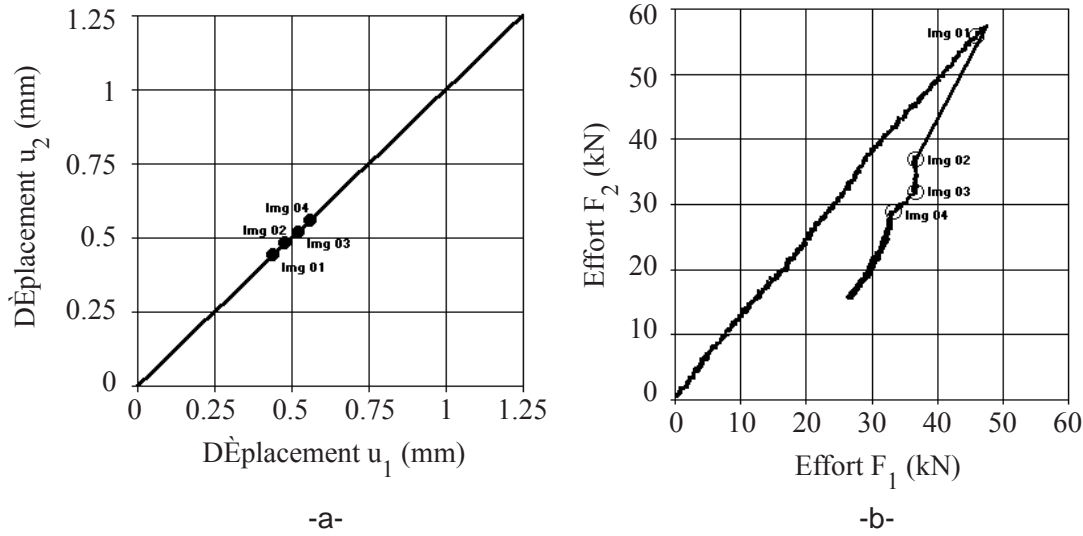


Figure 10.20 – *Déplacements des vérins (a). Efforts appliqués par les vérins (b).*

rapprochement des lignes des isovaleurs de déplacement dans la direction 1 (verticale) de l'image 02, ce qui indique l'amorçage d'une fissure qui s'accompagne d'une chute d'effort. La figure 10.21-c montre le champ de déplacement correspondant à la même image, l'amorçage y est visible. La propagation des fissures est montrée dans les figures 10.21-d,e qui visualisent le champ de déplacement pour les images 03 et 04, correspondant à la partie "post-pic" du chargement. La première fissure apparue évolue tel que l'on voit sur la photographie de fin d'essai (figure 10.21-f). On constate un bon accord des résultats issus de l'outil d'analyse avec la réalité.

Dans cette partie, les valeurs de la jauge et de mesure de champ sont analysées pour une deuxième éprouvette. Pendant cet essai, des charges et décharges sont appliquées à l'éprouvette. Sur la figure 10.22 sont présentées les réponses en déformation et les vecteurs déplacement lors du premier chargement de l'éprouvette. La différence entre les deux essais porte sur le mode de chargement et l'acquisition des images. La corrélation est faite après chaque étape de chargement. Sur la figure 10.23 est présenté le deuxième cycle de chargement. On remarque également que les valeurs des déformations mesurées par jauge et par corrélation d'images sont très proches. Sur la figure 10.24 sont présentées les réponses d'un chargement combiné, le chargement sur l'axe 1 est appliqué en premier jusqu'à la valeur de 45 kN et ensuite suivant l'axe 2 jusqu'à cet effort. Sur cette même figure est présenté le maillage déformé par rapport à celui de l'état initial.

#### 10.1.4.4 Conclusion

La corrélation d'images a été utilisée pour visualiser l'amorçage et la propagation de fissures dans une éprouvette en microbéton armé de fibres et sollicitée en bitraction. La corrélation d'images (pour le premier essai) s'est avérée un outil fiable, d'utilisation facile et robuste. Lors du second essai, le champ de déformation moyen a été utilisé comme une jauge "virtuelle" et une comparaison très précise a pu être faite avec les mesures de jauges. Une résolution en déformation inférieure à  $7.5 \times 10^{-5}$



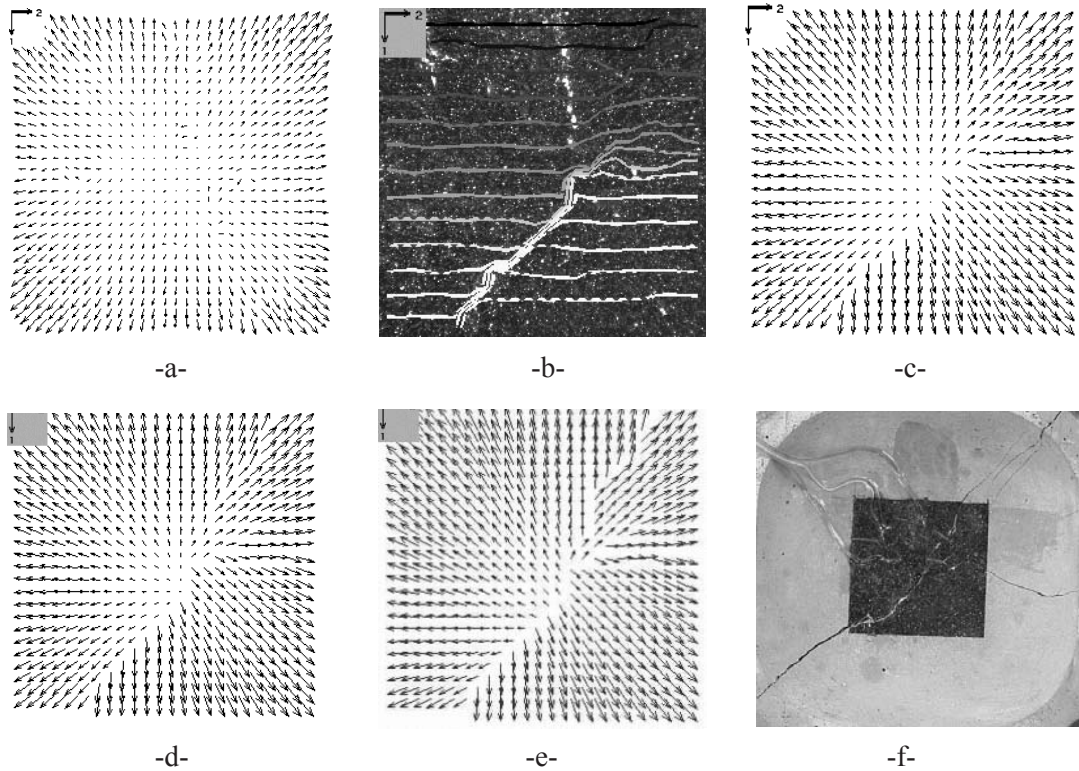


Figure 10.21 – Champ de déplacement de l'image 01 (a). Isovaleurs de déplacement de l'image 02. Champ de déplacement de l'image 02 (c). Champ de déplacement de l'image 03 (d). Champ de déplacement de l'image 04 (e). Zone utile à la fin de l'essai (f).

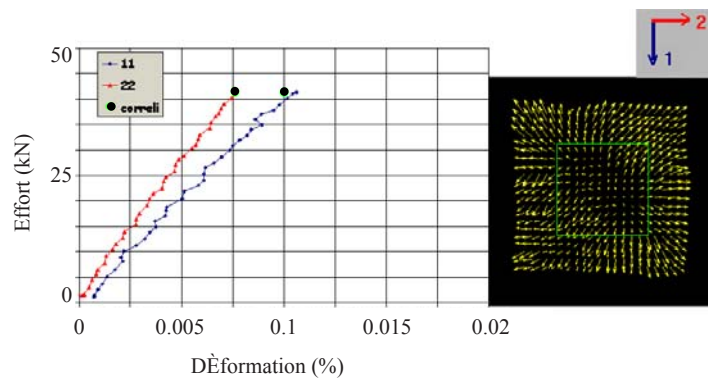


Figure 10.22 – Comparaison entre mesure de jauge et déformation moyenne sur la même base de mesure pour la corrélation d'images lors de la première charge.

a été obtenue pour une caméra 10.5 bits.

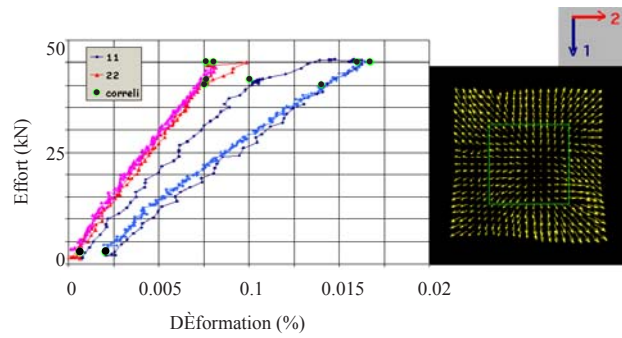


Figure 10.23 – *Comparaison entre mesure de jauge et déformation moyenne sur la même base de mesure pour la corrélation d'images lors du deuxième cycle de chargement.*

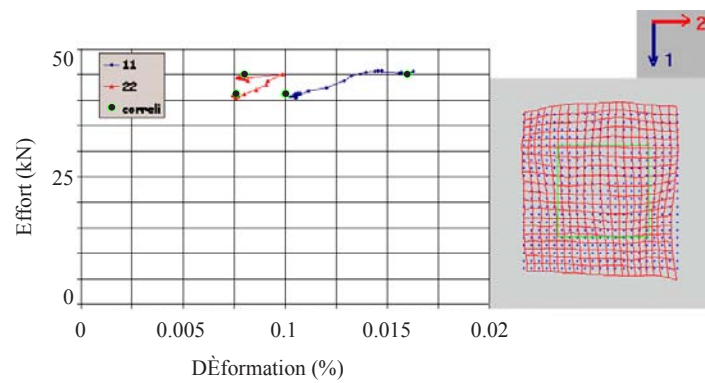


Figure 10.24 – *Comparaison entre mesure de jauge et déformation moyenne sur la même base de mesure pour la corrélation d'images lors du troisième cycle de chargement.*

## 10.2 Identification de champs de propriétés élastiques et d'endommagement

Les mesures de champs nécessitent souvent l'utilisation de techniques d'inversion pour identifier des propriétés locales des matériaux. Parmi les méthodes actuellement employées, on peut citer celles basées sur l'erreur en relation de comportement [56, 57] qui ont été utilisées pour le recalage de modèles en vibration [58] ou l'identification de champs d'endommagement [37], voire de propriétés élastiques hétérogènes [20] ou homogènes dans un essai hétérogène (*e.g.*, essai brésilien [22]). La méthode des champs virtuels [38, 39] constitue une alternative qui a été appliquée à l'identification de propriétés anisotropes (homogènes) de matériaux composites. Enfin, l'écart à la réciprocité [19] peut également être employé pour identifier des champs élastiques locaux ou détecter des fissures dans des milieux élastiques [1]. Toutes ces techniques font appel à des formulations variationnelles particulières [16]. Il s'agit d'identifier des champs de propriétés thermomécaniques à la surface de la région mesurée. Le problème peut se résumer par le schéma de la figure 10.25.

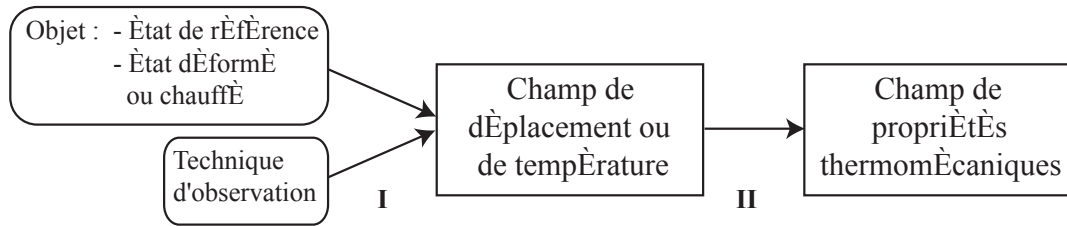


Figure 10.25 – Description du problème d'identification.

Le problème **I** est un problème *direct et d'instrumentation* [32], le problème **II** est un problème *inverse* [84, 21, 71, 32]. Dans le problème **I**, on connaît l'objet et le mécanisme d'observation, et on doit recueillir des données assez précises. Dans le problème **II**, on doit calculer des grandeurs indirectement observables, en postulant une loi de comportement. La démarche suivie ici est de développer les parties **I** et **II** pour avoir une méthode permettant de déterminer les champs de propriétés désirées directement à partir des mesures. La résolution du problème **I** a été traitée dans le chapitre précédent et le problème **II** est décrit à partir des exemples qui suivent.

Le premier concerne l'analyse d'un essai brésilien. Les mesures de champs sont couplées à une technique d'identification basée sur l'erreur en relation de comportement. Ceci constitue un moyen d'identification et de filtrage des mesures. Dans le second exemple, on développe une technique d'identification de champ d'endommagement à partir de mesures de champs de déplacement. On propose ici une technique qui ne nécessite pas d'information sur les efforts. On s'attachera à valider l'approche d'identification sur des champs mécaniques obtenus avec des calculs par éléments finis. Le champ de déplacement est considéré comme *connu*, et l'on cherche à retrouver les propriétés locales. On a donc en entrée un champ non bruité à l'exception d'un codage numérique car les déplacements sont calculés à  $10^{-4}$  près. Cette étape de validation terminée, des mesures de déplacement obtenues par corrélation d'images

numériques lors d'un essai biaxial sur un matériau composite sont utilisées pour calculer des champs d'endommagement dans des conditions réelles.

### 10.2.1 Analyse d'un essai brésilien

On se propose ici de mettre en œuvre un essai dit "brésilien" [62, 63] sur un disque circulaire mince d'épaisseur  $e = 10$  mm et de diamètre  $d = 155$  mm, réalisé en polycarbonate [22]. Il est soumis dans son plan à un effort de compression, sur une machine mécanique de traction-compression (figure 10.26-a).

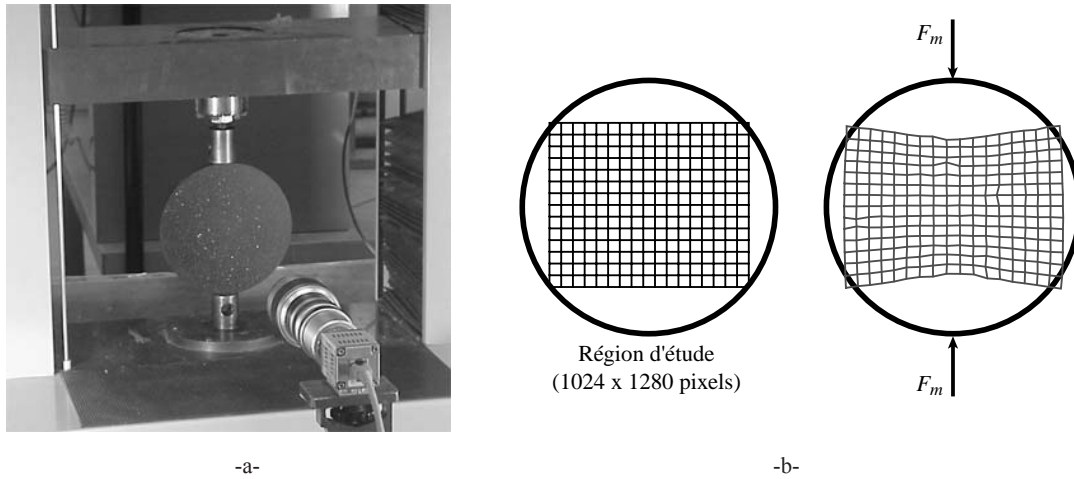


Figure 10.26 – (a) Essai brésilien, (b) Grille initiale, région d'étude utilisée et grille déformée pour un effort  $F_m = 7470$  N.

Outre la mesure de l'effort de compression, ici  $F_m = 7470$  N, à l'aide d'une cellule d'effort, le champ de déplacement  $\mathbf{u}_m$  est obtenu par corrélation d'images sur toute une zone centrale représentant ici  $1008 \times 1016$  pixels (figure 10.26-b). On notera que les résultats de mesure qui suivent ont été obtenus en 1 minute environ sur un compatible PC, Pentium III. De par l'hétérogénéité du champ de déformation sur le disque, l'identification ne peut plus se faire de façon directe à partir des quantités mesurées. Le comportement du matériau, un des liens entre les charges exercées sur le disque et les réponses mesurées, ne peut plus être atteint que par l'intermédiaire des effets de structure dans le disque. À partir de ce moment, l'identification va devoir faire intervenir une analyse inverse : on cherche la valeur des paramètres de comportement du matériau qui, intervenant dans le modèle numérique de la structure, va donner une réponse calculée la plus proche possible de la réponse mesurée. On va donc être amené à minimiser cet écart par rapport aux variables intervenant dans les coefficients du modèle de comportement cherché, et pour cela, on va devoir résoudre toute une série d'analyses directes (simulation numérique de l'essai pour des valeurs données).

#### 10.2.1.1 Démarche d'identification et application

Après essai, on dispose de la valeur de la résultante du chargement  $\mathbf{F}_m$ , et du champ de déplacement  $\mathbf{u}_m$ , mesuré dans la région d'étude (figure 10.26-b). Il s'agit de

déterminer les propriétés élastiques inconnues (i.e., module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau, supposé ici homogène et isotrope) à partir de toutes ces mesures. Une simulation de l'essai devra calculer un champ de déplacement  $\mathbf{u}_c$  et un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_s$ . Le champ  $\mathbf{u}_c$  doit être cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifier les éventuels déplacements imposés et être suffisamment régulier (on exclut ici le cas de la propagation d'une fissure). Le champ  $\boldsymbol{\sigma}_s$  doit être statiquement admissible : il doit vérifier les équations d'équilibre, et en particulier, équilibrer la résultante  $\mathbf{F}_m$  de l'effort vertical sur la partie du disque correspondant à la zone mesurée. Enfin, pour qu'ils soient solution du problème posé, ces champs doivent être reliés par la relation de comportement. Ici, on se propose d'utiliser une méthode d'identification basée sur la mesure d'écart dite en relation de comportement [59, 58].

Pour calculer ces champs, on utilise ici un modèle par éléments finis bidimensionnels (en contraintes planes) de la zone mesurée, et un maillage dont les nœuds sont les points de mesure. Une ZE correspond ici à une image de  $64 \times 64$  pixels, centrée autour de chaque "point" de mesure. Un décalage identique de 64 pixels a été utilisé entre chaque "point" de mesure. Pour simplifier, le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_s$  est représenté sur ce maillage par l'intermédiaire d'un champ de déplacement noté  $\mathbf{u}_s$ , de la façon suivante :  $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbb{C}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_s)$ , où  $\mathbb{C}$  est l'opérateur d'élasticité cherché. On cherche donc  $E$ ,  $\nu$  et les champs  $\mathbf{u}_c$  et  $\mathbf{u}_s$  admissibles, vérifiant au mieux le comportement cherché et les mesures de champs  $\mathbf{u}_m$ , c'est-à-dire qui minimisent une quantité du type

$$\rho^2 = \frac{(\{\mathbf{u}_c\} - \{\mathbf{u}_s\})^t [\mathcal{K}] (\{\mathbf{u}_c\} - \{\mathbf{u}_s\}) + (\{\mathbf{u}_c\} - \{\mathbf{u}_m\})^t [\mathcal{K}] (\{\mathbf{u}_c\} - \{\mathbf{u}_m\})}{2\{\mathbf{u}_m\}^t [\mathcal{K}] \{\mathbf{u}_m\}} \quad (10.2)$$

où  $[\mathcal{K}]$  est la matrice de rigidité associée aux éléments finis, et dépendant des constantes élastiques cherchées, et  $\{\mathbf{u}_c\}$ ,  $\{\mathbf{u}_s\}$  et  $\{\mathbf{u}_m\}$  sont les vecteurs déplacements nodaux cinématiquement admissibles, statiquement admissibles et mesurés, respectivement. Le premier terme du numérateur cherche à produire des champs  $\{\mathbf{u}_c\}$  et  $\{\mathbf{u}_s\}$  qui soient liés au mieux par la relation de comportement cherchée, et le second cherche à avoir un champ  $\{\mathbf{u}_c\}$  qui soit le plus proche du champ mesuré  $\{\mathbf{u}_m\}$ . Le compromis entre les deux donne les paramètres du modèle de matériau identifiés.

Pour l'essai brésilien, on obtient un module d'Young  $E = 2,39$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.49$  (matériau presque incompressible) avec une erreur résiduelle d'identification  $\rho = 19$  %. Ces valeurs sont cohérentes avec les données que l'on peut trouver dans la littérature ( $E = 2,35$  GPa et  $\nu = 0.48$ ). Cette erreur n'est pas nulle, ce qui est dû aux perturbations dans les mesures et au modèle choisi pour l'identification, qui représente plus ou moins bien la réalité. La figure 10.27 présente la comparaison entre les quantités mesurées et calculées. Une bonne corrélation est obtenue au niveau des déplacements. La déformation obtenue à partir du déplacement mesuré est plus perturbée que ce dernier puisqu'elle fait intervenir une dérivée des grandeurs mesurées. On peut s'attendre à ce que la mesure ne soit pas très bonne dans les zones où cette déformation est très bruitée, ce que confirme le coefficient d'erreur de la mesure (valant 0 pour une mesure estimée correcte et 1 pour une mesure estimée erronée). Enfin, on peut noter la très bonne corrélation entre ce coefficient d'erreur, obtenu à partir des seules mesures, et la contribution à l'erreur d'identification (dont l'intégrale sur le domaine calculé est  $\rho$ ) : les deux

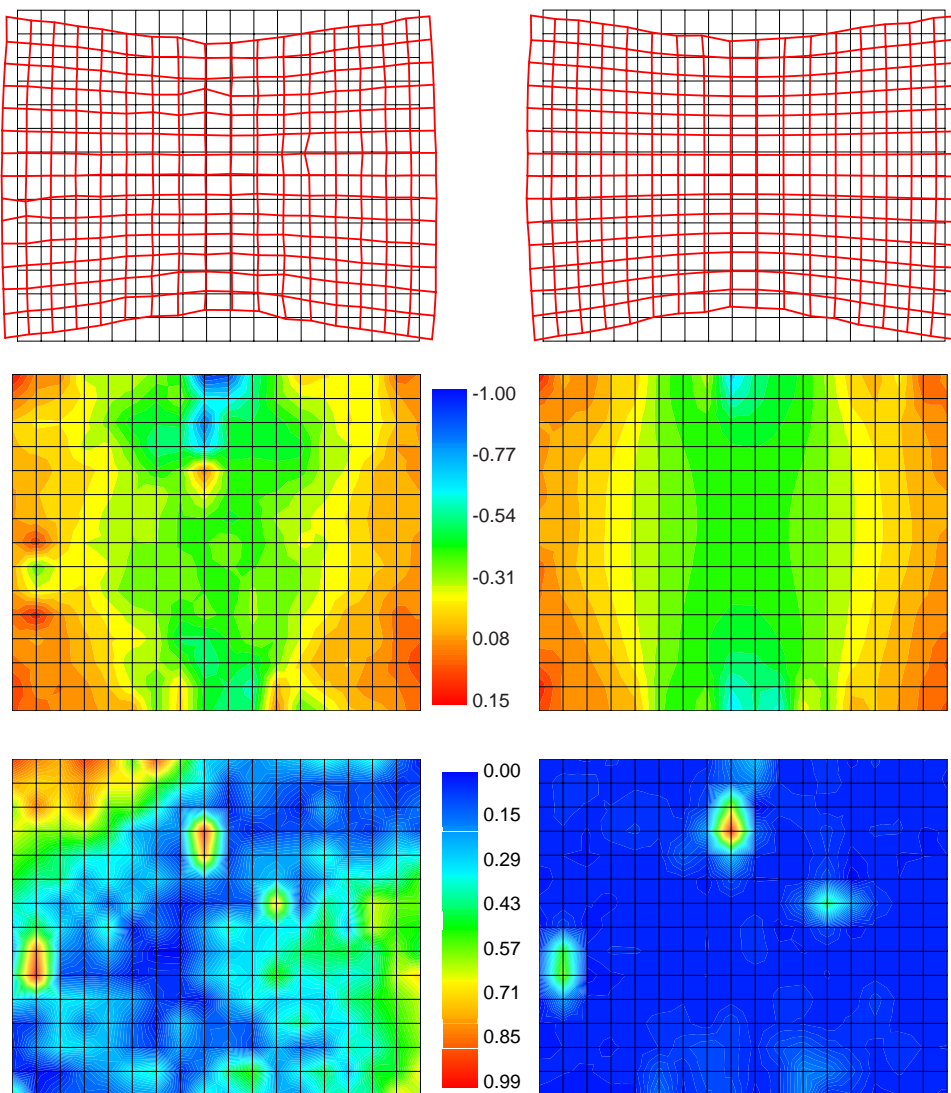


Figure 10.27 – À gauche, résultats mesurés; à droite, résultats calculés après identification. En haut: maillages initial et déformé. Au milieu: champ de déformation verticale. En bas: champ d'erreur de mesure ou d'identification.

localisent les zones les plus erronées aux mêmes endroits.

### 10.2.1.2 conclusion

On a montré dans ce premier exemple que le triplet essais-mesures-calculs devient une entité indissociable dans la stratégie d'identification inverse. De plus, une approche de type “filtrage mécanique” est ainsi obtenue: la loi de comportement sert de filtre adapté aux mesures brutes, plutôt que l'utilisation de techniques plus conventionnelles basées sur des pénalisations indépendantes du problème mécanique traité [49, 66, 50, 13, 70].

### 10.2.2 Identification de champs d'endommagement avec des mesures cinématiques

À partir de la connaissance de champs de déplacement, il est proposé d'identifier des champs de propriétés élastiques et d'endommagement à la surface d'un matériau. Une approche par éléments finis est développée pour la détermination de champs de propriétés constantes par morceaux à l'aide d'une variable d'endommagement isotrope [25, 26]. On discute de formulations continue ou discrète en vue d'identifier des propriétés élastiques locales. Puis on traite de la mise en œuvre de la technique dans le cas où l'on fait appel à une vision discrétisée (au sens des éléments finis) des propriétés élastiques. Une approche de type éléments finis est ensuite développée. L'analyse est menée pour une série de cas où la "mesure" est issue d'un calcul mécanique classique par éléments finis. Ces exemples concernent différentes distributions aléatoires d'endommagement isotrope. Enfin, un exemple pratique traite d'un essai biaxial sur un matériau composite durant lequel des mesures de champs de déplacement ont été menées.

#### 10.2.2.1 Analyse par éléments finis standard

En élasticité linéaire, la méthode des éléments finis classique est basée sur l'application du théorème de l'énergie potentielle. Le champ  $\mathbf{u}$  cinématiquement admissible, solution du problème, minimise l'énergie potentielle  $E_p$

$$E_p(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathcal{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{u} \, ds \quad (10.3)$$

où  $\mathcal{K}$  est le tenseur d'élasticité du quatrième ordre,  $\mathbf{f}^d$  correspond à la densité volumique d'effort connue et  $\mathbf{F}^d$  à la densité surfacique d'effort connue. Pour un élément dit "Q2" (*i.e.*, un élément à 8 nœuds), les champs de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  s'écrivent en fonction des déplacements nodaux  $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^8 A_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (10.4)$$

avec

- pour des nœuds "coin" :

$$A_i(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xx_i)(1 + yy_i)(xx_i + yy_i - 1), \quad (10.5)$$

- pour des nœuds "milieu" :

$$A_i(x, y) = \frac{x_i^2}{2}(1 + xx_i)(1 - y^2) + \frac{y_i^2}{2}(1 + yy_i)(1 - x^2). \quad (10.6)$$

Cette expression peut être écrite sous forme matricielle à l'aide de la matrice d'interpolation des déplacements

$$[\mathbf{A}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} A_1(x, y) & 0 & A_2(x, y) & 0 & \cdots & A_8(x, y) & 0 \\ 0 & A_1(x, y) & 0 & A_2(x, y) & \cdots & 0 & A_8(x, y) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

et du vecteur des déplacements nodaux

$$\{\mathbf{u}_e\}^t = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \cdots \ u_8 \ v_8\}. \quad (10.8)$$

De manière similaire, on peut obtenir le champ de déformation avec la matrice d'interpolation des déformations

$$[\mathbf{B}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} A_{1,x} & 0 & A_{2,x} & 0 & \cdots & A_{8,x} & 0 \\ 0 & A_{1,y} & 0 & A_{2,y} & \cdots & 0 & A_{8,y} \\ \frac{A_{1,y}}{2} & \frac{A_{1,x}}{2} & \frac{A_{2,y}}{2} & \frac{A_{2,x}}{2} & \cdots & \frac{A_{8,y}}{2} & \frac{A_{8,x}}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.9)$$

Les contraintes peuvent être reliées aux déformations par une matrice d'élasticité qui, en déformation plane, s'écrit

$$[\mathbf{L}_0] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

et en contrainte plane, il suffit de modifier le coefficient de Lamé  $\lambda$  par  $\lambda^*$

$$\lambda^* = \lambda \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (10.11)$$

On peut ainsi calculer la matrice de raideur élémentaire

$$[\mathbf{K}_{e0}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^t [\mathbf{L}_0] [\mathbf{B}] d\mathbf{x}. \quad (10.12)$$

L'énergie de déformation  $E_{de}$  d'un élément  $e$  s'écrit

$$E_{de0} = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{e0}] \{\mathbf{u}_e\}, \quad (10.13)$$

et l'énergie de déformation totale  $E_d$  s'exprime en fonction de la matrice de raideur globale  $[\mathbf{K}_0]$

$$E_{d0} = \sum_{e=1}^{N_e} E_{de0} = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^t [\mathbf{K}_0] \{\mathbf{u}\}. \quad (10.14)$$

De la même manière, on peut calculer le travail des efforts extérieurs connus  $W_d$

$$W_d = \sum_{e=1}^{N_e} W_{de} = \{\mathbf{u}\}^t \{\mathbf{F}\}. \quad (10.15)$$

L'application du théorème de l'énergie potentielle consiste à minimiser  $E_d - W_d$  par rapport à  $\{\mathbf{u}\}$ . Il s'agit de résoudre le système *linéaire* suivant

$$[\mathbf{K}_0] \{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (10.16)$$

où les inconnues sont regroupées dans le vecteur colonne  $\{\mathbf{u}\}$  et les données sont le vecteur colonne  $\{\mathbf{F}\}$ .



### 10.2.2.2 Étude préliminaire

Dans ce qui suit, on s'intéresse à une formulation de l'équilibre où les données sont les champs mécaniques mesurés (*i.e.*, déplacement) et où les inconnues du problème sont les propriétés élastiques locales. Dans les exemples traités ci-dessous, les mesures utilisées seront des champs bidimensionnels de déplacement obtenus par un calcul standard par éléments finis ou par corrélation d'images. On considère une structure continue  $\Omega$ . En l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre (intérieur) sont décrites par

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}. \quad (10.17)$$

On considère ici un cas particulier où l'hétérogénéité des propriétés élastiques peut être réduite à un champ scalaire d'endommagement isotrope  $D(\mathbf{x})$  [61]. Pour ce type de description, le coefficient de Poisson du milieu reste constant et les coefficients de Lamé peuvent s'écrire,  $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0[1 - D(\mathbf{x})]$  et  $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0[1 - D(\mathbf{x})]$ . Dans ce cas, pour  $D(\mathbf{x})$  strictement inférieur à 1, l'équation (10.17) devient

$$[2\mu_0\boldsymbol{\epsilon} + \lambda_0\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1}] \mathbf{grad}[\ln(1 - D)] + \mathbf{div}[2\mu_0\boldsymbol{\epsilon} + \lambda_0\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1}] = \mathbf{0}. \quad (10.18)$$

L'écriture ci-dessus suppose des champs de propriétés élastiques (*i.e.*, endommagements) continus et différentiables. Dans le cas où l'on représente un milieu contenant des sauts d'endommagement, il convient d'utiliser une forme adaptée des équations (10.17), *i.e.*, continuité du vecteur contrainte

$$[[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}]] = \mathbf{0}, \quad [[\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{n}]] = 0, \quad (10.19)$$

qui s'écrit pour une normale  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  à la surface de discontinuité, sous hypothèse de contrainte plane ou de déformation plane

$$[[ (1 - D) \{ \lambda_0(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + 2\mu_0\epsilon_{xx} \} ]]] = 0, \quad [[ (1 - D) \mu_0\epsilon_{xy} ]]] = 0. \quad (10.20)$$

On notera que ces équations permettent de déterminer les champs  $(1 - D)$  à une constante multiplicative près car des mesures absolues d'effort ne sont pas prises en compte.

### 10.2.2.3 Approche par éléments finis particulière : écart à l'équilibre

On applique directement les conditions de saut (10.20) à une formulation par éléments finis. À l'opposé d'une utilisation classique (cf. paragraphe ci-dessus), les déplacements nodaux sont *connus* tandis que les coefficients élastiques sont *inconnus*. La formulation par éléments finis permet une écriture "faible" de l'équation d'équilibre (10.17) qui est linéaire en déplacement et en propriété élastique. Les champs de déplacement d'un élément fini  $e$  occupant un domaine  $\Omega_e$  peuvent être écrits en fonction des quantités nodales [cf. équation (10.4)]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]\{\mathbf{u}_e\}. \quad (10.21)$$

De manière similaire, on peut obtenir le champ de déformation

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}(\mathbf{x})]\{\mathbf{u}_e\}. \quad (10.22)$$

Les contraintes sont reliées aux déformations par la loi de Hooke couplée à l'endommagement

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathcal{K}\boldsymbol{\epsilon}. \quad (10.23)$$

Dans le cas où la variable d'endommagement est *constante* dans le domaine  $\Omega_e$ , la matrice de raideur s'écrit

$$[\mathbf{K}_e] = (1 - D)[\mathbf{K}_{e0}]. \quad (10.24)$$

Enfin, l'énergie de déformation  $E_{de}$  d'un élément  $e$  s'écrit

$$E_{de} = \frac{1 - D}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{e0}] \{\mathbf{u}_e\}. \quad (10.25)$$

En l'absence de chargement extérieur aux points considérés, les équations de continuité (10.19) peuvent être écrites pour chaque nœud "milieu" 12 de deux éléments 1 et 2 voisins

$$\frac{\partial E_{m12}}{\partial \mathbf{u}_{12}} = \mathbf{0}, \quad (10.26)$$

avec  $E_{m12} = E_{m1} + E_{m2}$ . On aboutit ainsi à un système linéaire où les inconnues sont les variables d'endommagement.

#### 10.2.2.4 Résolution

Dans le cas d'un endommagement isotrope, on peut écrire les équations (10.26) sous une autre forme, plus appropriée. En effet, si l'on note  $\{\mathbf{p}_1\}$  le vecteur colonne des quantités nodales du premier élément et  $\{\mathbf{p}_2\}$  celui du second élément, nous obtenons la k<sup>e</sup> condition

$$\bar{g}_k(\{\mathbf{p}_1\})(1 - D_1) = \check{g}_k(\{\mathbf{p}_2\})(1 - D_2), \quad (10.27)$$

où les fonctions  $\bar{g}_k$ ,  $\check{g}_k$  sont génériques [25]. Cette formulation s'écrit sous forme matricielle pour le système global

$$[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{g}\} \quad \text{avec} \quad \{\mathbf{D}\}^t = \{D_1 \ D_2 \ \dots \ D_N\}. \quad (10.28)$$

L'avantage de cette formulation est que l'on peut l'écrire en logarithme

$$\ln(1 - D_1) - \ln(1 - D_2) = \ln|\check{g}_k(\{\mathbf{p}_2\})| - \ln|\bar{g}_k(\{\mathbf{p}_1\})|. \quad (10.29)$$

Cette dernière écriture a pour intérêt d'introduire la contrainte de positivité de l'endommagement. Le principal inconvénient, par contre, est que l'on ne peut plus utiliser l'information donnée par les nœuds coins. En effet, pour ceux-ci, chaque équation d'équilibre s'écrit en considérant 4 éléments adjacents. L'écriture en logarithme n'est donc plus possible avec ces équations à 4 termes. Le système linéaire devient alors

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{q}\}, \quad (10.30)$$

où  $\{\mathbf{d}\}$  est défini par

$$\{\mathbf{d}\}^t = \{\ln(1 - D_1) \ \ln(1 - D_2) \ \dots \ \ln(1 - D_N)\}. \quad (10.31)$$

Le système (10.30) est surdéterminé (cf. paragraphe 10.2.2.5). Il est satisfait “au mieux” au sens de la norme suivante

$$\mathcal{T} = ||[\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{q}\}||_{2(\Omega)}^2 \quad (10.32)$$

par rapport au vecteur  $\{\mathbf{d}\}$ . La redondance des équations permet une certaine robustesse de la méthode [26]. En effet, le nombre d'équations  $M$  est de l'ordre de  $4N$ . La minimisation conduit au système *linéaire* suivant

$$([\mathbf{M}]^t[\mathbf{M}])\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{M}]^t\{\mathbf{q}\}. \quad (10.33)$$

Une variante à cette écriture est d'introduire une matrice de poids  $[\mathbf{W}]$  positive afin de donner plus d'importance aux équations les moins bruitées. Ceci revient à modifier la norme  $||[\cdot]||_{2(\Omega)}$  et à considérer la norme  $||[\cdot]||_{W(\Omega)}$ . Le poids est grand (respectivement petit) aux endroits de la structure où la norme du vecteur contrainte (ou flux) est grande (respectivement petite). Dans le système linéaire à résoudre,  $[\mathbf{W}]$  se présente comme une matrice carrée diagonale de dimension  $M \times M$  avec ses éléments diagonaux positifs

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_M \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

avec

$$w_k = |\bar{g}_k(\{\mathbf{p}_1\}) + \check{g}_k(\{\mathbf{p}_2\})|^{1,5}. \quad (10.35)$$

Ceci conduit alors à la résolution du système linéaire suivant

$$([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}])\{\mathbf{d}\} = ([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}])\{\mathbf{q}\}. \quad (10.36)$$

Pour le problème (10.36), la matrice  $[\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}]$  a une valeur propre nulle et pour vecteur propre associé  $\{\mathbf{d}\}^t = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$  (*i.e.*, le système d'équations linéaires sans passer en logarithme est homogène). Dans ce cas, il faut fixer la valeur d'une composante du vecteur  $\{\mathbf{d}\}$ . Si l'on note

$$\{\mathbf{d}\}_0^t = \{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \ln(1-D)_{i_0} \ 0 \ \dots \ 0\} \quad (10.37)$$

et

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{d}\}_0, \quad (10.38)$$

on doit résoudre

$$([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}])\{\boldsymbol{\delta}\} = ([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}])\{\mathbf{q}\} - ([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}])\{\mathbf{d}\}_0. \quad (10.39)$$

Ce système linéaire est résolu à l'aide d'une méthode de gradient conjugué [74], en prenant en compte le fait que la matrice  $([\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}])$  est creuse.

### 10.2.2.5 Applications avec des mesures “EF”

Une première série de calculs concerne une structure carrée et discrétisée à l'aide de  $a \times a$  éléments Q2. Trois côtés ont des déplacements nuls; au milieu du quatrième, une force est appliquée (figure 10.28-a). Deux types de cas sont considérés; un premier, dit “aléatoire” pour lequel chaque élément ou groupe d'éléments de taille  $b \times b$  ( $b \geq 1$ ) a une valeur d'endommagement différente de ses voisins, un second, dit “stratifié” pour lequel chaque élément ou groupe d'éléments de taille  $a \times b$  a une valeur d'endommagement différente de ses voisins. Une distribution uniforme d'endommagement est choisie et varie entre 0 et  $D_{\max}$  (figure 10.28-b). Dans les exemples qui suivent, un calcul standard par éléments finis est mené. Les inconnues nodales sont stockées et constituent les “mesures”, données d'entrée. À partir de cette seule information débute l'analyse d'identification proprement dite. La structure considérée

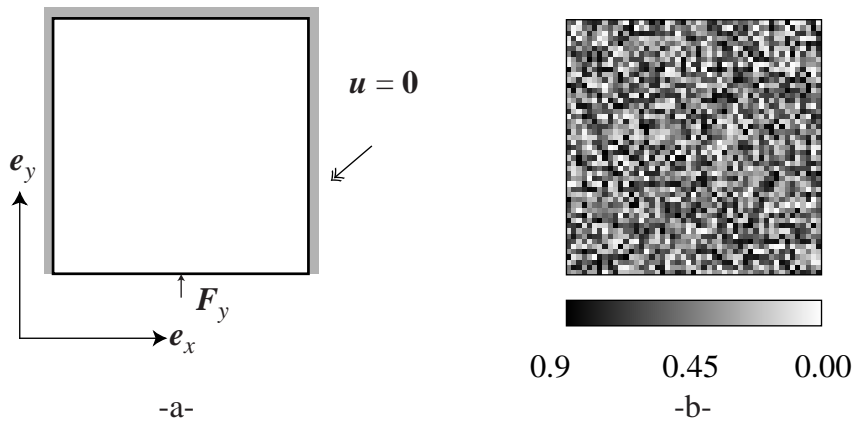


Figure 10.28 – (a) Structure considérée. Une force ponctuelle  $F_y$  est appliquée au milieu d'un côté. (b) Champ d'endommagement  $D$  aléatoire ( $a = 49$ ,  $b = 1$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ).

est constituée de  $2a(a-1)$  nœuds milieux intérieurs et de  $a^2$  inconnues d'endommagement à déterminer. En effet, seuls les bords d'éléments qui ne sont pas en contact avec la frontière de la région d'étude sont retenus (puisque les éventuels efforts appliqués ne sont pas considérés). Comme annoncé précédemment, le système à résoudre est très largement surdéterminé. La méthode du gradient conjugué est utilisée ici car elle converge rapidement pour des vecteurs inconnus de grande dimension [74] sous réserve que le nombre d'itérations soit suffisant (typiquement  $2a^2$ , cf. figure 10.29). En pratique, un critère de convergence de  $10^{-15}$  sur les résidus normés par le nombre d'inconnues a été utilisé. Sur la figure 10.30, les champs d'endommagement évalués par un calcul mécanique sont comparés directement au champ d'endommagement imposé. Dans la suite, la qualité globale des résultats sera évaluée à l'aide de l'erreur globale  $\eta$  lorsque le champ d'endommagement imposé est connu

$$\eta^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{e=1}^{a^2} \eta_e^2, \quad (10.40)$$

avec

$$\eta_e^2 = \left[ \frac{(1 - D_e)_{\text{cal}}}{(1 - D_e)_{\text{imp}}} - 1 \right]^2. \quad (10.41)$$

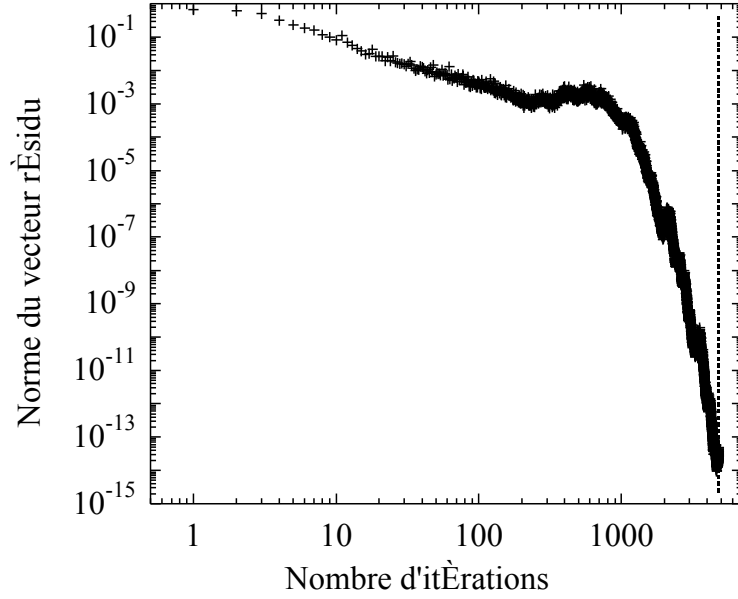


Figure 10.29 – Norme du vecteur résidu associé à la méthode du gradient conjugué en fonction de l'itération pour un cas stratifié ( $a = 49$ ,  $b = 1$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ).

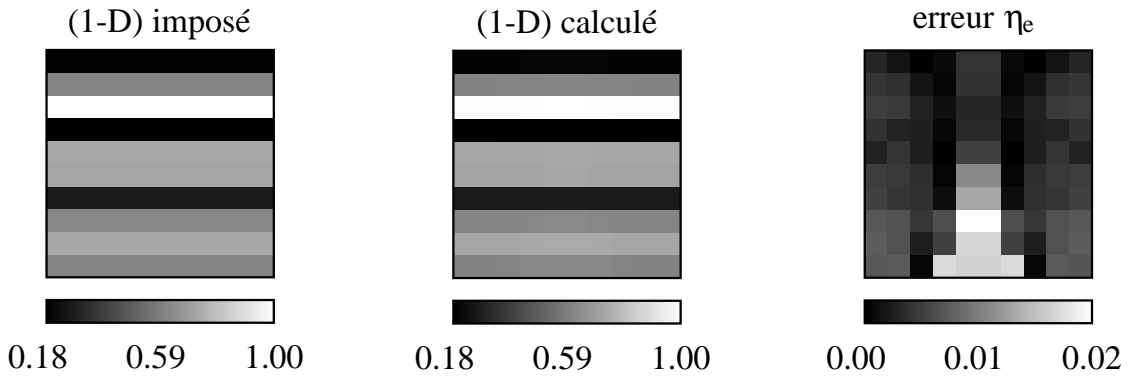


Figure 10.30 – Champs d'endommagement calculé et imposé pour un cas stratifié comprenant 100 éléments ( $a = 10$ ,  $b = 1$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ). Champ d'erreur  $\eta_e$ .

Pour cette erreur, la valeur  $(1 - D_e)_{cal}$  est renormée afin d'obtenir une valeur moyenne unitaire pour le rapport  $(1 - D_e)_{cal} / (1 - D_e)_{imp}$  ; ceci étant possible car les résultats sont obtenus à une constante multiplicative près. Le champ d'erreur locale  $\eta_e$  est également tracé sur la figure 10.30. Cette erreur reste inférieure à 2% dans le cas traité. L'erreur globale  $\eta$  est égale à 0.6%. À partir de l'équation (10.27), nous pouvons définir une quantité  $\kappa$  comme indicateur d'erreur, dans la mesure où l'on ne connaît pas la solution exacte dans le cas général

$$\kappa = \|[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{g}\}\|_{2(\Omega)} \quad (10.42)$$

La quantité  $\kappa$  reflète l'erreur sur l'équilibre en terme de résidus commise sur la structure. De ce point de vue, elle se rapproche des indicateurs basés sur les résidus [2, 3]. Cette valeur peut être comparée au cas où l'on supposerait un endommagement uniforme. Nous caractérisons alors la démarche par rapport à un cas homogène.

Cette valeur que l'on notera  $\kappa_0$  est définie en calculant  $\kappa$  pour le vecteur  $\{\mathbf{D}\}_0^t = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$

$$\kappa_0 = \|[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\}_0 - \{\mathbf{g}\}\|_{2(\Omega)}. \quad (10.43)$$

En introduisant une quantité locale par élément, nous pouvons construire un indicateur d'erreur local

$$\kappa_e = \frac{\|[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{g}\}\|_{2(\Omega_e)}}{\|[\mathbf{G}]\{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{g}\}\|_{2(\Omega)}} \quad (10.44)$$

de telle manière que  $\sum_{i=1}^{a^2} \kappa_e^2 = 1$ ,  $\kappa_e$  caractérise la contribution de chaque élément  $e$  à l'erreur globale mesurée par  $\kappa$ .

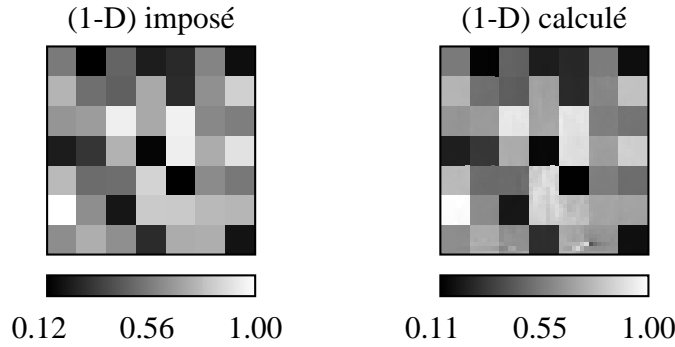


Figure 10.31 – Champs d'endommagement calculé et imposé pour un cas aléatoire comprenant 2401 éléments ( $a = 49$ ,  $b = 7$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ).

Au regard de la topographie des champs d'endommagement de la figure 10.31, on obtient une très bonne approximation de ceux-ci. Il faut regarder plus finement la carte d'erreur pour remarquer que celle-ci est plus grande près de la source ou de l'effort appliqué. Ce résultat n'est pas surprenant car il y a une singularité du modèle pour laquelle le calcul avec des éléments Q2 n'est pas suffisant. Sur les figures 10.30 et 10.31, on reconnaît bien la forme en strates ou en damier du champ d'endommagement alors que cette information n'est bien entendu pas utilisée pour la détermination des champs inconnus.

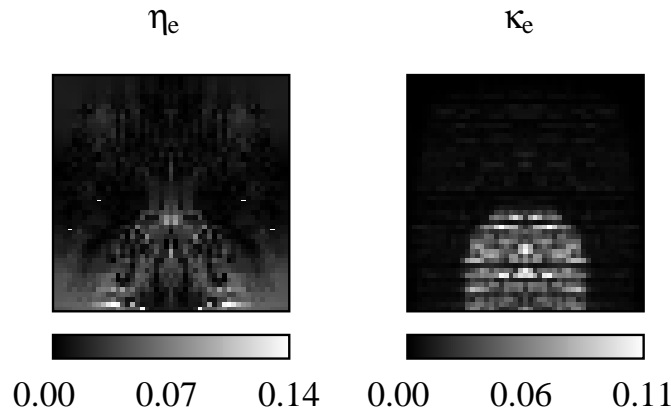


Figure 10.32 – Champs d'erreurs  $\eta_e$  et  $\kappa_e$  commises dans un cas stratifié ( $a = 49$ ,  $b = 1$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ).

Le choix du point d'application d'une valeur non nulle de l'endommagement peut paraître arbitraire. Plusieurs points ont été sélectionnés et une très faible influence a été remarquée sur les résultats en terme d'erreur  $\eta$ . Dans les cas d'endommagement stratifié ou uniforme, à cause de la symétrie, le déplacement ou le flux suivant  $\mathbf{e}_x$  des nœuds de l'axe est nul. Ceci rend le système mal conditionné sur cet axe, d'où une erreur plus importante (figures 10.30 et 10.32). Sur la figure 10.32 sont comparés les champs d'erreur  $\eta_e$  que l'on peut calculer ici avec l'indicateur d'erreur  $\kappa_e$ . Ces deux indicateurs donnent des cartes semblables. Le niveau maximal d'erreur est du même ordre de grandeur.

On peut remarquer sur la figure 10.33 que le champ d'endommagement calculé est proche du champ imposé dans un cas aléatoire. Dans le cas extrême où l'endommagement est différent dans chaque élément, l'erreur moyenne commise sur l'endommagement est de 3,2%. On notera que, près des bords, les valeurs de déformation ou de flux sont très faibles sans que cela n'affecte la qualité moyenne des résultats.

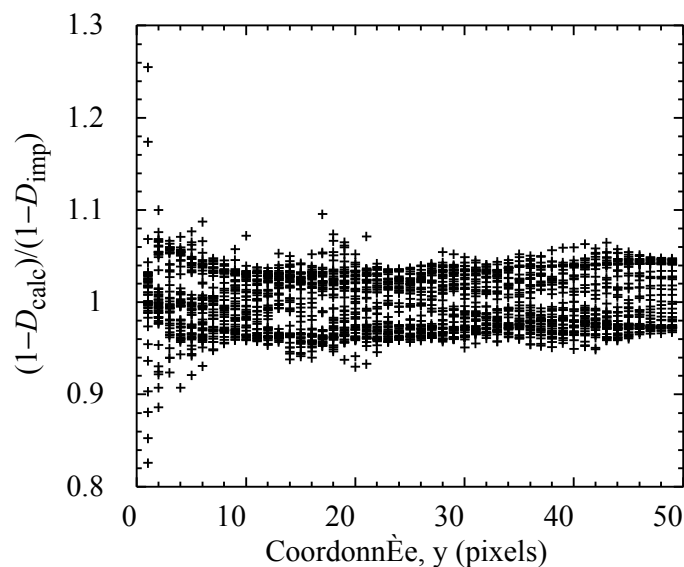


Figure 10.33 – *Rapport d'endommagement calculé par rapport à celui imposé en fonction de la valeur imposée (cas aléatoire,  $a = 49$ ,  $b = 1$ ,  $D_{\text{max}} = 0.9$ ).*

Les erreurs  $\eta$  commises pour quelques cas étudiés sont regroupées dans le tableau 10.1. Les résultats ont été obtenus pour  $4a^2$  itérations dans l'algorithme de gradient conjugué correspondant à un temps de calcul sur un PC Pentium III inférieur à une minute dans tous les cas analysés. Les résultats du tableau 10.1 sont très bons dans tous les cas étudiés. La précision reste inférieure à quelques pourcents bien que la complexité du problème à résoudre augmente avec le nombre d'éléments de la structure. Il est important de noter que la qualité des résultats n'est pas fortement affectée par la taille du système. Celle-ci va donc principalement conditionner le temps de calcul.

Le rapport  $\kappa/\kappa_0$  est reporté dans le tableau 10.2. Nous pouvons remarquer que celui-ci est d'autant plus faible que l'hétérogénéité est grande, *i.e.*, pour une même

Tableau 10.1 – *Erreur  $\eta$  pour différentes configurations (premier nombre :  $a$ , deuxième nombre :  $b$ , troisième nombre :  $10 \times D_{\max}$ ,  $a$  : chaque élément a une valeur d'endommagement différente de ses voisins,  $s$  : chaque ligne d'élément a la même valeur d'endommagement).*

Configuration	10-1-0	10-1-9-s	10-1-9-a	49-1-0	49-1-9-s <sup>(1)</sup>	49-1-9-a <sup>(1)</sup>
Erreur	0.002	0.006	0.013	0.017	0.024	0.032

<sup>(1)</sup>configurations de la figure 10.28-b.

structure

$$\left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right)_{\text{sans}} \geq \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right)_{\text{stra}} \geq \left( \frac{\kappa}{\kappa_0} \right)_{\text{aléa}}. \quad (10.45)$$

Tableau 10.2 – *Rapport  $\kappa/\kappa_0$  pour différentes configurations.*

Configuration	10-1-0	10-1-9-s	10-1-9-a	49-1-0	49-1-9-s <sup>(1)</sup>	49-1-9-a <sup>(1)</sup>
Erreur	0.1	$3.5 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$	$9.7 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$5.5 \times 10^{-4}$

<sup>(1)</sup>configurations de la figure 10.28-b.

### 10.2.2.6 Analyse d'un essai biaxial sur un matériau composite

Une application de cette méthode a été menée pour la détermination de propriétés mécaniques sur un matériau composite constitué d'une matrice vinylester renforcée par des fibres de verre E. Une distribution quasi-isotrope des torons de fibres confère au matériau un comportement élastique isotrope avant l'apparition de la fissuration de la matrice et la rupture des fibres, mécanismes principaux d'endommagement [30]. Une éprouvette en croix a été conçue et est sollicitée dans la machine multiaxiale ASTRÉE (figure 10.34-a). L'essai est conduit de manière que l'effort appliqué dans les deux directions de sollicitations soit identique. De par l'architecture de la machine, le centre de la chaîne cinématique reste fixe.

Les champs de déplacement de la figure 10.34-b ont été mesurés par corrélation d'images numériques. Chaque "point de mesure" correspond au centre d'une fenêtre d'interrogation de  $64 \times 64$  pixels, ce qui correspond à une surface de  $8 \text{ mm}^2$  environ. À cette échelle, le matériau n'est pas homogène (cf. figure 10.34-a). Le décalage entre deux points de mesure est de 32 pixels.

La figure 10.35 montre trois champs d'endommagement calculés à partir des champs de déplacement mesurés. Au regard du champ de déplacement mesuré sur



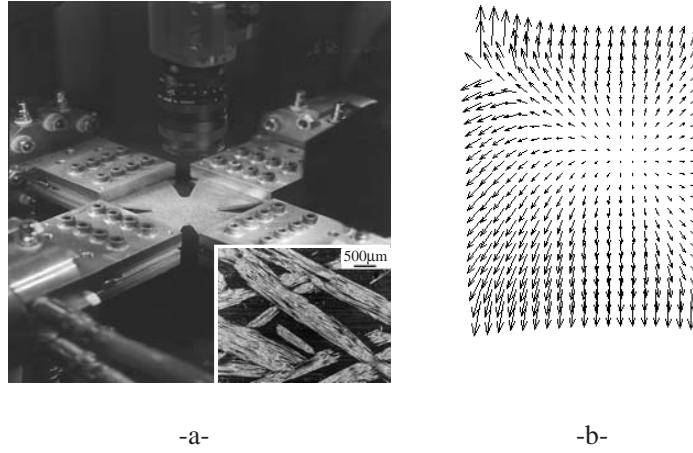


Figure 10.34 – *a-Éprouvette dans la machine ASTRÉE et microstructure du composite étudié. b-Champ de déplacement mesuré par corrélation d'images numériques pour un effort de 11 kN (effort à rupture : 11.1 kN).*

la figure 10.34-b, on remarque de manière flagrante qu'une fissure est amorcée dans le coin supérieur gauche. Cette fissure se retrouve matérialisée sur la carte d'endommagement par trois éléments noirs dans ce même coin pour le dernier niveau d'effort analysé. Sur la carte du premier niveau d'effort, on peut aussi remarquer un endommagement plus fort dans les deux coins supérieurs. Il semblerait donc qu'il ait eu plusieurs points distincts d'amorçage à ce moment de l'essai. Sur la figure 10.35 sont reportées les cartes d'erreur  $\kappa_e$  pour différents niveaux de sollicitations. Sur la carte correspondant au dernier niveau d'effort, l'erreur se concentre à l'endroit de la fissure. Nous pouvons aussi noter que l'hétérogénéité de l'endommagement augmente avec la sollicitation, information obtenue en comparant les différentes valeurs du rapport  $\kappa/\kappa_0$ . Ce dernier résultat est cohérent par rapport à l'amorçage de fissures observé dans cet essai.

### 10.2.2.7 Conclusions

Une procédure d'identification a été développée pour la détermination de propriétés élastiques à partir de mesures de champs de déplacement à la surface d'un échantillon. Elle est basée sur une formulation par éléments finis pour laquelle les déplacements sont connus et les propriétés élastiques sont inconnues. Ces dernières ont été supposées constantes sur chaque élément. On pourra noter que le même type d'approche peut être utilisé pour identifier des champs de propriétés thermiques à partir de mesures de champs de température [25, 27].

Des calculs ont été réalisés à partir de résultats de simulations par éléments finis afin de retrouver les propriétés mécaniques locales en deux dimensions. Cette méthode donne des résultats très satisfaisants sur des données bruitées [26] ou non (*i.e.*, comme ici), où un calcul d'erreur complet peut être réalisé. L'analyse d'un essai biaxial sur matériau composite conduit à des résultats cohérents avec l'observation directe sur les champs de déplacement mesurés à différents stades de chargement.

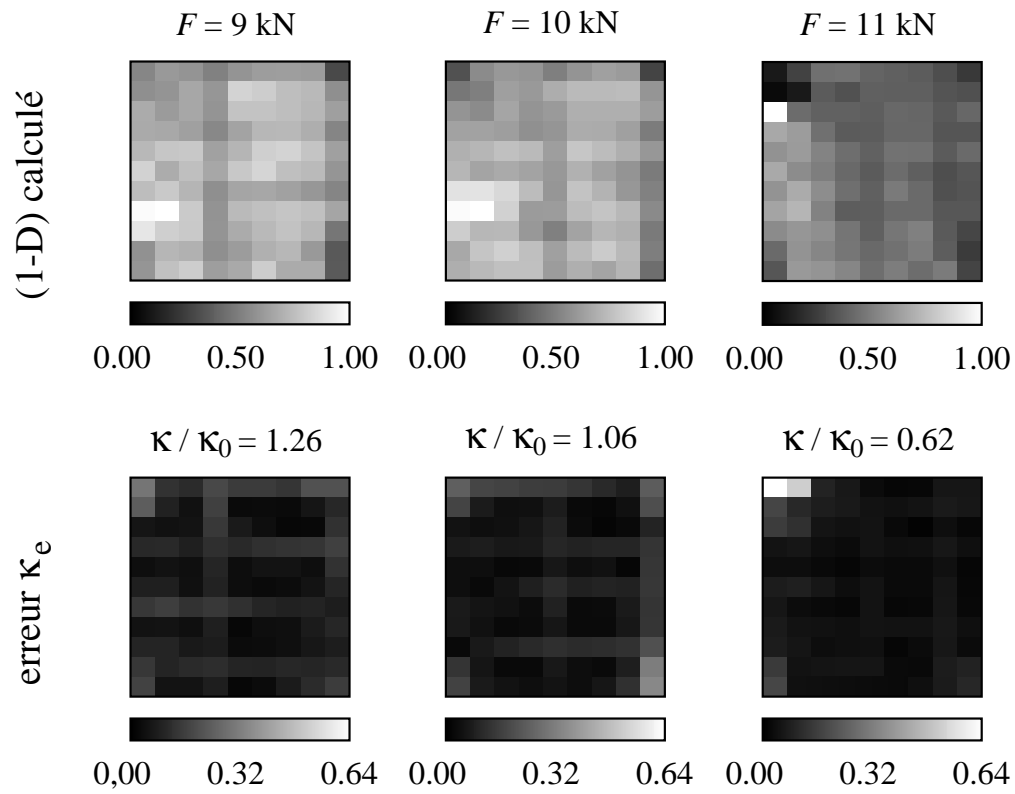


Figure 10.35 – *Champ d'endommagement (1-D) calculé pour 3 niveaux d'efforts et champ d'erreur  $\kappa_e$  correspondant.*

Dans ce dernier cas, l'indicateur d'erreur, validé pour les exemples précédents, s'avère être un outil utile à l'analyse de mesures pour lesquelles la solution n'est pas connue.

# Conclusions et perspectives

La technique de corrélation d'images numériques présentée ici permet la détermination de champs plans de déplacement et de déformation. Dans sa version multi-échelle, de petites déformations (inférieures à  $10^{-4}$ ) ainsi que de très grandes déformations (de l'ordre de 0.25) peuvent être mesurées entre deux images consécutives. Cette technique peut être étendue aux mesures de déplacements tridimensionnels par utilisation de deux caméras CCD [35, 28].

Un certain nombre d'exemples illustrent l'utilisation de cette technique en mécanique des matériaux solides et des structures. Les conclusions suivantes ont été obtenues :

- la résolution de la technique de corrélation d'images est suffisante pour permettre une identification des propriétés élastiques, plastiques et même d'observer les premiers signes avant-coureurs de la rupture. Pour les premières, on peut néanmoins noter qu'une dynamique de caméra supérieure (*i.e.*, 12 bits voire 16 bits) est recommandée afin d'améliorer la qualité de l'identification. Une comparaison a pu être faite avec les mesures par jauges. Une résolution en déformation inférieure à  $7.5 \times 10^{-5}$  a été obtenue pour une caméra 10.5 bits pour une région d'étude de  $500 \times 500$  pixels. L'algorithme multi-échelle s'est avéré être un outil indispensable pour traiter la reprise d'épaisseur de la laine de verre ou le comportement multiaxial d'élastomères [24] ;
- La rapidité de calcul associée à la transformée de Fourier (rapide) permet d'utiliser la corrélation d'images lors de la mise au point d'essais ;
- la corrélation d'images peut également être utilisée pour visualiser l'amorçage et la propagation de fissures (*e.g.*, dans une éprouvette en microbéton armé de fibres et sollicitée en bitraction) ;
- on a montré dans l'analyse de l'essai brésilien que le triplet essais-mesures-calculs devient une entité indissociable dans la stratégie d'identification inverse. De plus, une approche de type “filtrage mécanique” est ainsi obtenue : la loi de comportement sert de filtre des mesures brutes ;
- l'utilisation de l'approche variationnelle basée sur l'erreur en relation de comportement, ou d'autres [56, 57, 58, 37, 20, 22, 38, 39, 19, 1], permet d'identifier

des champs d'endommagement en utilisant le couplage entre élasticité et endommagement [61]. Une démarche alternative d'identification a été développée pour la détermination de propriétés élastiques à partir de mesures de champs de déplacement à la surface d'un échantillon. Elle est basée sur une formulation par éléments finis de l'écart à l'équilibre pour laquelle les déplacements sont connus et les propriétés élastiques sont inconnues. Ces dernières ont été supposées constantes sur chaque élément. L'exemple de l'analyse d'un essai biaxial sur matériau composite conduit à des résultats cohérents avec l'observation directe sur les champs de déplacement mesurés à différents stades de chargement.

Enfin, le développement actuel et l'utilisation de techniques fiables, précises et robustes de mesures de champs de déplacement et de température autorisent la caractérisation de champs de propriétés (thermo)mécaniques. Tous ces développements ouvrent la porte du dialogue essai/calcul en modélisation des matériaux et des structures dans lequel les mesures de champs et l'identification constituent le trait d'union.

# Bibliographie

- [1] S. Andrieux, A.B. Abda, H.D. Bui, Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité, C. R. Acad. Sci. Paris Série I (1997) 1431-1438.
- [2] I. Babushka, W.C. Rheinboldt, A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Engng. 12 (1978) 1597-1615.
- [3] I. Babushka, W.C. Rheinboldt, Error Estimates for Adaptive Finite Element Computation, SIAM J. Num. Anal. 15 (1978) 736-754.
- [4] E. Badel, J.-M. Létang, G. Peix, *Etude densitométrique des laines de verre par tomographie 3D*, rapport interne, CNDRI, INSA de Lyon, (2001).
- [5] M. Baudequin, *Identification des mécanismes physiques mis en jeu lors de la reprise d'épaisseur de la laine de verre*, thèse de doctorat, Université Paris 6, (2002).
- [6] M. Behloul, *Analyse et modélisation du comportement d'un matériau à matrice cimentaire fibrée à ultra hautes performances (Bétons de Poudres Réactives). Du matériau à la structure*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1996.
- [7] C. Bernard, *Ondelettes et problèmes mal posés: la mesure du flot optique et l'interpolation irrégulière*, thèse de doctorat, École Polytechnique, 2001.
- [8] P.J. Burt, C. Yen, X. Xu, Local correlation measures for motion analysis: a Comparative study, *Proceedings Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, (1982) 269.
- [9] Y. Berthaud, S. Calloch, C. Cluzel, F. Hild, J.-N. Périé, Experiment/Computation Interactions by Using Digital Image Correlation, in: P. Jacquot, J.-M. Fournier, eds., *Proceedings Interferometry in Speckle Light, Theory and Applications*, Springer, Berlin (Germany), (2000) 59-66.
- [10] Y. Berthaud, M. Cotttron, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, V. Valle, eds., *Photomécanique 2001*, GAMAC, (2001).
- [11] Y. Berthaud, M. Cotttron, F. Morestin, P. Moucheron, M. Taroni, eds., *Photomécanique 98*, GAMAC, (1998).
- [12] Y. Berthaud, D. Paraskevas, M. Taroni, eds., *Photomécanique 95*, GAMAC, (1995).
- [13] M. Black, *Robust Incremental Optical Flow*, Ph.D. dissertation, Yale University, 1992.
- [14] D. Bogen, D. Rahdert, A Strain Energy Approach to Regularization in Displacement Field Fits of Elastically Deforming Bodies, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 18 (1996) 629-635.

- [15] J. Bolinder, *On the Accuracy of Digital Particle Image Velocimetry System*, technical report, Lund Institute of Technology, ISSN 0282-1990 (1999).
- [16] M. Bonnet, H.D. Bui, A. Constantinescu, Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité, *Méc. Ind.* (2003) sous presse.
- [17] C. Bouvet, S. Calloch, C. Lexcellent, D. Marquis, Mechanical Behavior of Cu-Al-Be Shape Memory Alloy under Multiaxial Compression Loadings, *Proceedings Progress in Mechanical Behavior of Materials, ICM8*, (1999) 939-943.
- [18] C. Bouvet, S. Calloch, C. Lexcellent, Mechanical Behavior of a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy under Multiaxial Proportional and Nonproportional Loadings, *ASME J. Eng. Mat. Tech.* 124 (2002) 112-124.
- [19] H.D. Bui, Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement, *actes 2<sup>e</sup> Colloque national de calcul des structures*, Hermes, Paris (France), (1995) 25-35.
- [20] H.D. Bui, A. Constantinescu, Spatial Localization of the Error of Constitutive Law for the Identification of Defects in Elastic Solids, *Arch. Mech.* 52 (2000) 511-522.
- [21] H.D. Bui, M. Tanaka, M. Bonnet, E. Luzzato, M. Reynier, eds., *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Balkema, (1994).
- [22] S. Calloch, D. Dureisseix, F. Hild, Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs, *Technologies et Formations* 100 (2002) 36-41.
- [23] S. Calloch, F. Hild, C. Doudard, C. Bouvet, C. Lexcellent, Analyse d'essais de compression biaxiale sur un A.M.F. à l'aide d'une technique d'intercorrélation d'images numériques, in: Y. Berthaud, M. Cottro, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, V. Valle, eds., *actes Photomécanique 2001*, GAMAC, (2001) 207-214.
- [24] L. Chevalier, S. Calloch, F. Hild, Y. Marco, Digital Image Correlation used to Analyze the Multiaxial Behavior of Rubber-Like Materials, *Eur. J. Mech. A/Solids* 20 (2001) 169-187.
- [25] D. Claire, *Identification de propriétés thermomécaniques résolues spatialement*, mémoire de DEA, ENS de Cachan, 2002.
- [26] D. Claire, F. Hild, S. Roux, Identification of Damage Fields using Kinematic Measurements, *C. R. Mecanique* 330 (2002) 729-734.
- [27] D. Claire, S. Roux, F. Hild, Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs, *Méc. Ind.* (2003), sous presse.
- [28] P. Clerc, F. Morestin, M. Brunet, Mesure de champs de déformation 2D et 3D par corrélation d'image numérique, *actes Nouveaux moyens optiques pour l'industrie*, SFO, club Contrôles et Mesures Optiques pour l'Industrie, (1999) 245-251.
- [29] J.-Y. Cognard, V. Feuarden, J.-M. Virely, Optimisation of a structure for biaxial mechanical tests. Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, in: P. Chedmail, ed., Elsevier, Amsterdam (the Netherlands), (1997) 495-504.
- [30] F. Collin, Y. Berthaud, F. Hild, Visualisation par analyse d'images de la répartition des déformations et de l'amorçage dans un matériau composite, in:

- 
- Y. Berthaud, M. Cottton, F. Morestin, P. Moucheron, M. Taroni, eds., *actes Photomécanique 98*, GAMAC, (1998) 241-248.
- [31] J.W. Cooley, J.W. Tuckey, An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Math. Comp.* 19 (1965) 297-301.
- [32] G. Demoment, J. Idier, J.-F. Giovannelli, A. Mohammad-Djafari, Problèmes inverses en traitement du signal et de l'image, in: *Techniques de l'ingénieur*, (2001), volume TE, article TE5235.
- [33] T.D. Dudderar, P.G. Simpkins, Laser Speckle Photography in a Fluid Medium, *Nature* 270 (1977) 45-47.
- [34] K. Gall, H. Sehitoglu, H.J. Maier, K. Jacobus, Stress Induced Martensitic Phase Transformation in Polycrystalline Cu-Zn-Al Shape Memory Alloy under different Stress States, *Metall. Mat. Trans.* 29A (1998) 765-773.
- [35] D. Garcia, J.-J. Orteu, Mesure de formes et de déformations 3D par stéréocorrélation: application sur des tôles minces embouties, *actes Nouveaux moyens optiques pour l'industrie*, SFO, club Contrôles et Mesures Optiques pour l'Industrie, (1999) 177-184.
- [36] A.N. Gent, A.G. Thomas, Forms for the Stored Energy Function for Vulcanized Rubber, *J. Polymer Sci.* 28 (1958) 625-628.
- [37] G. Geymonat, F. Hild, S. Pagano, Identification of Elastic Parameters by Displacement Field Measurement, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 403-408.
- [38] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification, *C. R. Acad Sci. Paris* 309 (1989) 1-5.
- [39] M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, L'identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 107-112.
- [40] L.C. Gui, W. Merzkirch, A Comparative Study of the MQD Method and Several Correlation-Based PIV Evaluation Algorithms, *Exps. in Fluids* 28 (2000) 36-44.
- [41] D.P. Hart, Super-Resolution PIV by Recursive Local Correlation, *J. Visual.* 10 (1990) 1-10.
- [42] F. Hild, *Dispositif de traction-compression d'une éprouvette*, E.N.S. de Cachan/Renault, Brevet français n°90 06848 (Bulletin Officiel de la propriété industrielle, 92/33 14 août 1992, n° de publication 2 662 801), 1er juin 1990 (1990).
- [43] F. Hild, CORRELI<sup>LMT</sup>: *A Software for Displacement Field Measurements by Digital Image Correlation*, LMT-Cachan, report 254 (2002).
- [44] F. Hild, E. Amar, D. Marquis, Stress Heterogeneity Effect on the Strength of Silicon Nitride, *J. Am. Ceram. Soc.* 75 (1992) 700-702.
- [45] F. Hild, J.-N. Périé, M. Coret, *Mesure de champs de déplacements 2D par intercorrélation d'images: CORRELI<sup>2D</sup>*, LMT-Cachan, report 230 (1999).
- [46] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, F. Cantelaube, Multi-Scale Displacement Field Measurements of Compressed Mineral Wool Samples by Digital Image Correlation, *Appl. Optics* IP 41 (2002) 6815-6828.
- [47] R. Hill, Aspects of Invariance in Solid Mechanics, *Adv. Appl. Mech.* 18 (1978) 1-75.
-

- [48] G. Holst, *CCD Arrays, Cameras and Displays*, SPIE Engineering Press, Washington DC (USA), 1998.
- [49] B.K.P. Horn, B.G. Schunck, Determining Optical Flow, *Artificial Intelligence* 17 (1981) 185-203.
- [50] P.J. Hubert, *Robust Statistics*, Wiley, New York (USA), 1981.
- [51] Y. Huo, I. Müller, S. Seelecke, Quasiplasticity and Pseudoelasticity in Shape Memory Alloys, Modelling and Analysis of Phase Transition and Hysteresis phenomena, in: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, (1994). 87-146.
- [52] P. Jacquot, J.-M. Fournier, eds., *Interferometry in Speckle Light, Theory and Applications*, Springer, Berlin (Germany), (2000).
- [53] L.T. Jesse, D.L. McDowell, Mechanical Behavior of an Ni-Ti Shape Memory Alloy Under Axial-Torsional Proportional and Nonproportional Loading, *J. Eng. Mat. Tech.* 121 (1999) 9-18.
- [54] R.D. Keane, R.J. Adrian, Optimization of Particle Image Velocimeters. Part I: Double Pulsed Systems, *Meas. Sci. Technol.* 1 (1990) 1202-1215.
- [55] H. Kupfer, H. Hilsdorf, H. Rusch, Behavior of Concrete under Biaxial Stresses, *ACI Journal*, 66 (1969) 656-666.
- [56] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, thèse d'Etat, Université Paris 6, 1975.
- [57] R.V. Kohn, B.D. Lowe, A Variational Method for Parameter Identification, *Math. Mod. Num. Ana.* 22 (1988) 119-158.
- [58] P. Ladevèze, D. Nedjar, M. Reynier, Updating of Finite Element Models Using Vibration Tests, *AIAA* 32 (1994) 1485-1491.
- [59] P. Ladevèze, M. Reynier, A Localization Method of Stiffness Errors for the Adjustment of F.E. Models, *Proceedings F.E. Modeling and Analysis in Vibrations Analysis Techniques and Applications*, ASME, (1989) 355-361.
- [60] A. Lagarde, eds., *Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics*, Kluwer, Dordrecht (the Netherlands), (2000).
- [61] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris (France), 1985.
- [62] F.C. Lobo Carneiro, Um novo método para determinação da resistência à tração dos concretos, *Proceedings Anais 5a reunião da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em São Paulo*, (1943) 127-129.
- [63] F.C. Lobo Carneiro, Une nouvelle méthode pour la détermination de la résistance à la traction des bétons, *Bull. RILEM* 13 (1953) 103-108.
- [64] Matlab, *Matlab 5.3, the Language of Technical Computing, version 5.3*, the MathWorks, inc. (<http://www.mathworks.com>), 1999.
- [65] A.L. McKelvey, R.O. Ritchie, Fatigue-Crack Propagation in Nitinol, a Shape-Memory and Superelastic Endovascular Stent Material, *J. Biomed. Mat. Res.* (1999).
- [66] A. Mitiche, P. Bouthemy, Computation and Analysis of Image Motion: A Synopsis of Current Problems and Methods, *Int. J. Comp. Vision.* 19 (1996) 29-55.
- [67] J. Morlet, G. Arens, I. Fourgeau, G. Giard, Wave Propagation and Sampling Theory, *Geophysics* 47 (1982) 203-236.



- [68] C.J. Morrison, Biaxial testing using cruciform specimens, in: *Techniques for Multiaxial Creep Testing*, Elsevier, (1985). 111-127.
- [69] F. Nishimura, N. Watanabe, T. Watanabe, K. Tanaka, Transformation Conditions in a Fe-Based Shape Memory Alloy under Tensile-Torsional Loads: Martensite Start Surface and Austenite Start/Finish Planes, *Mat. Sci. Eng. A264* (1999) 232-244.
- [70] J.-M. Odobez, P. Bouthemy, Robust Multiresolution Estimation of Parametric Motion Models, *J. Visual Comm. Image Repres.* 6 (1995) 348-365.
- [71] OFTA, *Problèmes inverses, de l'expérimentation à la modélisation*, OFTA, Paris, 1999.
- [72] C.J.D. Pickering, N.A. Halliwell, Speckle Laser in Fluid Flows: Signal Recovery with Two-Step Processing, *Appl. Opt.* 23 (1984) 1128-1129.
- [73] B. Pommier, F. Hild, E. Charkaluk, Analyse d'une éprouvette de fatigue thermomécanique par corrélation d'images, in: Y. Berthaud, M. Cottton, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, V. Valle, eds., *actes Photomécanique 2001*, GAMAC, (2001) 359-366.
- [74] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge (USA), 1992.
- [75] B. Ranieki, S. Miyazaki, K. Tanaka, L. Dietrich, C. LExcellent, Deformation Behavior of Ti-Ni SMA Undergoing R-phase Transformation in Torsion-Tension (compression) Tests, *Arch. Mech.* 51 (1999) 745-784.
- [76] B. Raka, *Sur les performances de la technique de mesure de champs de déplacement et de déformation par corrélation d'images en lumière blanche*, mémoire CNAM, Paris (2001).
- [77] P.K. Rastogi, ed., *Photomechanics*, Springer, Berlin (Germany), (2000).
- [78] P. Renaud, *Comportement d'un matériau composite carbone/carbone 3D sous chargement uniaxial*, mémoire de DEA, ENS de Cachan, 2000.
- [79] P. Richard, M. Cheyrezy, Les bétons de poudres réactives, *Annales de l'ITBTP* 532 (1995) 85-102.
- [80] C. Rogueda, C. LExcellent, L. Bocher, Experimental Study of Pseudoelastic Behavior of a Cu-Zn-Al Polycrystalline Shape Memory Alloy under Tension-Torsion Proportional and Nonproportional Loading tests, *Arch. Mech.* 48 (1996) 1025-1045.
- [81] S. Roux, F. Hild, Y. Berthaud, Correlation Image Velocimetry: A Spectral Approach, *Appl. Optics* 41 (2002) 108-115.
- [82] M.A. Sutton, W.J. Wolters, W.H. Peters, W.F. Ranson, S.R. McNeill, Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method, *Im. Vis. Comp.* 1 (1983) 133-139.
- [83] M.A. Sutton, S.R. McNeill, J.D. Helm, Y.J. Chao, Advances in Two-Dimensional and Three-Dimensional Computer Vision, in: P.K. Rastogi, eds., *Photomechanics*, Springer, Berlin (Germany), (2000) 323-372.
- [84] A. Tarantola, Inverse Problem Theory, *Elsevier*, (1987) 235-281.
- [85] B. Wagne, S. Roux, F. Hild, Spectral Approach to Displacement Evaluation From Image Analysis, *Eur. Phys. J. AP* 17 (2002) 247-252.



## Annexe : quelques notions sur un capteur CCD

Les progrès de la micro-électronique ont permis de commercialiser des capteurs optiques fondus dans du silicium dopé. Les principes sont connus depuis le début des années 1970, mais il a fallu attendre le début des années 1980 pour trouver sur le marché des composants fiables et de haute définition. Ainsi sont nés les registres à transfert de charge ou CCD (*Charge Coupled Device*), partie primordiale d'une caméra CCD. En effet, ce système utilise les propriétés photo-électriques des semi-conducteurs à base de silicium dopé, qui, sous certaines conditions d'énergie, libèrent des électrons ou des trous proportionnellement au flux de photons reçus. Les charges positives sont collectées par un champ électrique d'une jonction p-n (figure 10.36).

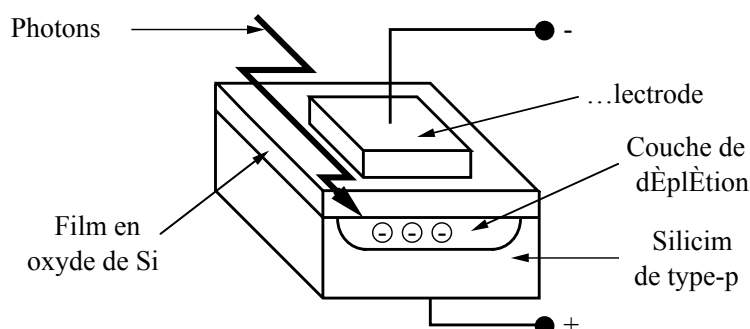


Figure 10.36 – *Cellule unitaire ou photosite (capacité Metal Oxide Semiconductor).*

Un détecteur CCD est constitué d'une surface photosensible plane que l'on positionne au foyer d'un imageur optique, en lieu et place, par exemple, d'une pellicule photographique. Le capteur CCD est conditionné dans un boîtier de circuit intégré banal, à ceci près que la partie supérieure de ce dernier est transparente à la lumière (un petit hublot en verre protège souvent la surface sensible de la poussière et de l'arrachement des connexions électriques très fines situées sur son pourtour). La surface sensible d'un détecteur CCD est constituée d'un réseau de minuscules cellules électriquement indépendantes. Ces cellules, que l'on appelle photosites, d'une taille de quelques micromètres à quelques dizaines de micromètres, sont capables, lorsqu'elles sont correctement alimentées électriquement (on dit polarisées), d'accumuler un grand nombre d'électrons sous l'effet du flux optique incident. Ce nombre de photons est lié à la brillance de l'objet observé, mais aussi au temps d'exposition de la surface sensible à l'éclairement. Par exemple, si le temps d'exposition à la lu-

mière double, la quantité de charges photoélectriques accumulées sous le photosite double aussi. On retrouve ici la notion de temps de pose chère aux photographes.

Le taux de conversion entre les photons et les électrons (les charges électriques) est appelé le rendement quantique. Celui-ci varie fortement avec la longueur d'onde et définit le domaine spectral de sensibilité du détecteur CCD (de 0.4 à 1  $\mu\text{m}$  de longueur d'onde la plupart du temps). Dans la région du spectre où le capteur CCD est le plus sensible, dans le rouge profond, le rendement quantique est de l'ordre de 40 à 50% pour les détecteurs CCD courants, mais peut atteindre jusqu'à 90% avec des détecteurs particulièrement optimisés et... chers !

Après la phase d'exposition à la lumière, l'image optique est transformée en une image électronique. Plus les photosites sont de petite taille, plus l'échantillonnage (ou discrétisation) de l'image optique sera précis et plus l'image électronique sera potentiellement le reflet fidèle de l'original optique sur le plan de la résolution. On appelle un élément de l'image ainsi échantillonné par les photosites, un pixel (de l'anglais *picture element*). Dans la littérature, les termes de photosites et de pixels sont souvent mélangés et nous n'avons pas dérogé à cet amalgame !

Il y a des limites physiques à la taille des photosites (5 ou 6  $\mu\text{m}$  de côté pour les plus petits et des limites liées aux performances (si les pixels sont trop petits, la quantité de charge stockable sous les photosites devient insuffisante pour assurer une dynamique de l'image correcte dans une exploitation scientifique du détecteur). De gros pixels (30  $\mu\text{m}$  de côté) pourront collecter plus de charges électriques mais dégraderont plus ou moins la résolution de l'image face à la plupart des configurations optiques usuelles.

Une matrice CCD peut comporter plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de pixels suivant l'axe horizontal et l'axe vertical. Une fois le signal intégré dans les photosites, l'information qu'ils contiennent doit être transférée ligne après ligne puis colonne après colonne jusqu'à un étage d'amplification, pour finalement délivrer une information électrique sur une broche du circuit CCD. Le transfert des charges, dit vertical, est réalisé en polarisant de manière adéquate et séquentiellement des lignes de pixels adjacentes de la structure CCD. Ces signaux de polarisation séquentiels sont appelés des horloges. Pour un cycle d'horloge donné, les charges de l'ensemble des photosites d'une ligne sont transférées dans la ligne adjacente située en-dessous (par tradition on considère que les charges se déplacent de haut en bas dans la zone image du capteur CCD, d'où le terme de ligne en-dessous). En même temps, le contenu de la dernière ligne de la zone image est transféré dans une ligne spéciale, appelée registre horizontal. La figure 10.37 illustre ce mécanisme de transfert.

Une fois que les charges d'une ligne sont déversées dans le registre horizontal, ce dernier doit être lu à son tour. Pour cela, une seconde série d'horloges est mise en action pour assurer un transfert de pixel à pixel suivant l'axe horizontal. Les charges arrivant à l'extrémité du registre horizontal sont expédiées dans un circuit électronique qui convertit le nombre d'électrons contenus dans le photosite en une tension électrique. Ce circuit fonctionne en trois temps (figure 10.38) :

- un condensateur est chargé à un niveau dit de précharge par la fermeture d'un interrupteur qui applique à ses bornes une certaine tension fixe (ce qui nécessite une horloge supplémentaire) ;
- l'interrupteur est ouvert, ce qui produit une petite variation de la tension

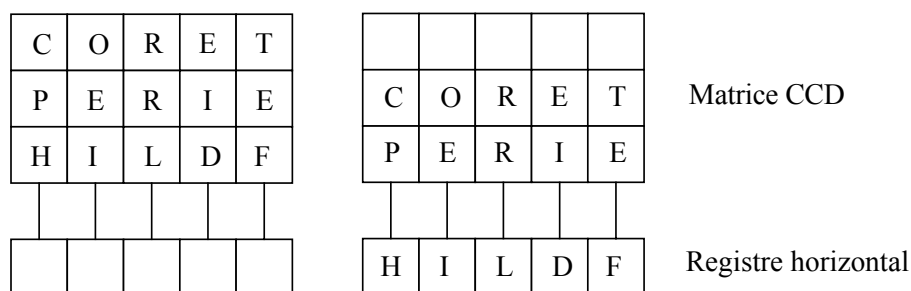


Figure 10.37 – Schéma d'un détecteur CCD qui ne comporterait que 3 lignes de 5 photosites chacune. À gauche, l'image vient d'être intégrée et chaque lettre traduit la quantité de charge accumulée au niveau des photosites. À droite, la phase de lecture du CCD débute. Toutes les lignes ont été transférées d'un cran vers le bas. La première ligne de photosites se retrouve dans le registre horizontal.

- électrique aux bornes du condensateur, qui s'apparente à un bruit ;
- les charges en provenance d'un photosite sont injectées dans la capacité, ce qui a pour effet de décharger cette dernière de manière proportionnelle au nombre d'électrons contenus dans le photosite. La différence en tension sur les bornes de la capacité entre le signal alors observé et celui constaté juste après l'ouverture de l'interrupteur traduit la valeur du contenu du paquet de charge analysé sous une forme usuelle.

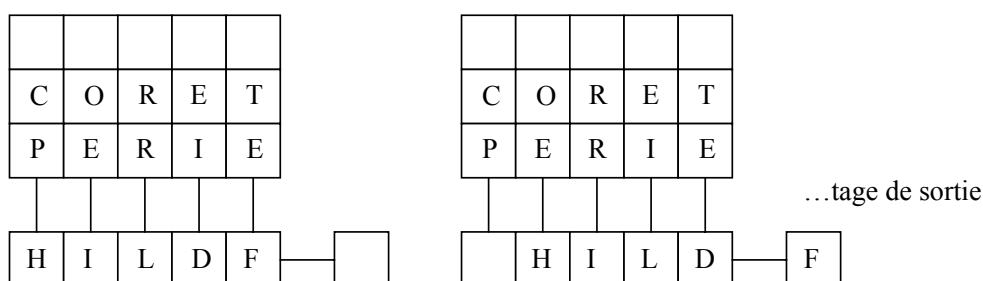


Figure 10.38 – La phase de lecture de la ligne stockée dans le registre horizontal. Le premier paquet de charge (la lettre F) de la ligne est transféré dans l'étage de sortie. Tous les photosites sont déplacés par la même occasion d'un rang vers la droite. Une fois le registre horizontal entièrement lu, une nouvelle ligne est transférée dans ce registre et le cycle recommence.

Après amplification, cette tension est présentée sur une broche du circuit. Au fur et à mesure que les cycles d'horloges se déroulent, l'information sur la quantité de lumière ayant exposé chaque photosite apparaît *séquentiellement* sur la broche de sortie du capteur CCD. On appelle ce train d'informations, le signal vidéo. L'étage de sortie par lequel transite toute l'information contenue dans l'image constitue un véritable goulet d'étranglement. Le temps de lecture complet de l'image électronique dépend de la fréquence des horloges. Dans une caméra optimisée pour la détection de faible flux et disposant d'un détecteur CCD d'une taille d'environ 400 000 pixels, il peut être de plusieurs secondes.

À ce stade, une électronique externe au circuit CCD a pour fonction d'amplifier, de mettre en forme, de numériser et d'expédier vers l'ordinateur le signal vidéo. L'étape de conversion du signal continûment variable sortant du capteur CCD en un signal numérique est indispensable car l'ordinateur ne comprend que les nombres binaires (le codage du signal vidéo se fait le plus souvent entre 8 et 16 bits). L'ordinateur reconstitue ensuite l'image point par point sur l'écran (en niveaux de gris, en couleurs, ou sous une autre forme) et stocke les précieux octets sur une mémoire de masse pour traitement ultérieur (figure 1).

Une caractéristique très appréciée des circuits intrinsèques du capteur CCD, et des circuits associés à la puce CCD, est qu'ils ajoutent un bruit minimal au signal vidéo. Le bruit est une variation aléatoire du signal utile, qui peut aller jusqu'à brouiller complètement ce dernier. D'une manière générale, le bruit limite la "détection" du système, c'est-à-dire, en termes simples, sa capacité à détecter des objets de faible intensité lumineuse. Le bruit s'exprime le plus souvent en nombre d'électrons au niveau de l'étage de sortie du détecteur CCD. Un bruit inférieur à 20 électrons caractérisera en général une caméra pouvant être exploitée pour la détection de faibles flux. Cependant, il ne faut pas s'arrêter à ce paramètre pour juger de la performance finale d'une caméra CCD. Le rendement quantique est également déterminant pour évaluer la sensibilité finale du système. Citons encore la linéarité de la réponse (proportionnalité entre le nombre de photons incidents et le signal observé à la sortie du détecteur CCD ou de la caméra), qui est le gage de mesures photométriques de qualité. La linéarité est d'une manière générale excellente avec les capteurs CCD.

L'image numérique en provenance de la caméra et qui est stockée dans la mémoire de l'ordinateur est appelée image brute. Elle est constituée de la somme de l'image optique proprement dite et de signaux parasites, notamment un signal de décalage (appelé aussi offset) provoqué par l'électronique intégrée du capteur CCD et éventuellement par les circuits électroniques externes de traitement du signal vidéo, ainsi que d'un signal, dit thermique, qui naît spontanément dans les photosites, en même temps que l'image optique est intégrée. Le signal thermique est la manifestation de charges parasites qui sont produites du fait de l'agitation thermique du réseau cristallin de silicium. Même si le détecteur CCD est plongé dans l'obscurité, le signal thermique se manifeste toujours et produit un signal électrique parasite perceptible. On l'appelle aussi parfois signal d'obscurité, à cause de cela. Tout comme les photocharges, les charges thermiques sont produites avec un taux qui est proportionnel au temps d'intégration. Sans précaution particulière, le signal thermique peut dominer le signal optique, ce dernier étant alors susceptible de devenir inexploitable. La seule parade pour éradiquer le signal thermique consiste à refroidir le détecteur CCD lors de son utilisation.