Chapitre 2

Logique mathématique

2.1 Logique des propositions

Commençons par une définition.

Définition 2.1. Une proposition est un énoncé qui peut prendre une seule des deux valeurs suivantes:

- vrai (V) ou 1 (parfois aussi T d'après l'anglais "true")
- faux (F) ou 0

***Exemples* 2.2.**
Voici quelques exemples de propositions.

1. *Une semaine est composée de sept jours.*
2. *Oulan Bator est la capitale de l'Allemagne.*
3. $9 < 6$
4. $x = 2$ *est solution de* $x^2 = 4$.

A l'inverse, voici des exemples de phrases **qui ne sont pas des propositions** au sens de la logique. En effet, ces énoncés ne sont pas évaluables, *i.e.* il n'est pas possible de leur attribuer une valeur V ou F sans ambiguité.

***Exemples* 2.3.**
Voici des exemples qui ne sont pas des propositions.

1. *Quel temps fait-il ?*
2. *Fermez vos livres.*
3. *Combien de loups dénombre–t–on dans le parc Yellowstone ?*

Toute proposition doit satisfaire les trois principes suivants.

1. Principe du tiers–exclu
   Une proposition ne peut pas prendre d'autre valeur que vrai ou faux.
2. Principe de non contradiction
   Une proposition ne peut pas prendre simultanément les deux valeurs vrai et faux.
3. Principe d'identité
   Une proposition conserve sa valeur.

Définition 2.4. Une proposition composée ou une expression logique est une proposition obtenue en combinant différentes propositions.

***Remarque* 2.5.** Une proposition composée est aussi une proposition (*i.e.* prend la valeur V ou F).

***Remarque* 2.6.** Pour bien faire la distinction, on appelle parfois **propositions simples** les propositions qui ont été combinées pour obtenir des propositions composées.

***Exemples* 2.7.**
1. Le chien aboie ***et*** *la caravanne passe.*
Proposition composée formée de deux propositions simples, "le chien aboie", "la caravanne passe".
2. Jean a oublié de venir au rendez–vous ***ou*** *alors il est en retard.*
Composée à partir de "il a oublié de venir au rendez–vous", "il est en retard".
3. Les vaches regardent passer le train.
N'est pas une proposition composée.

2.1.1 Connecteurs logiques

Définition 2.8. Un connecteur est un opérateur permettant de construire des propositions composées en combinant des propositions.

***Exemple* 2.9.**
et, ou, ne. . . pas *sont des connecteurs; cf. les exemples 2.7.*

La valeur d'une proposition composée dépend uniquement des propositions dont elle est formée et des règles d'évaluation des connecteurs que nous allons maintenant étudier, en commençant par les connecteurs de base qui sont au nombre de trois: la négation, la conjonction, la disjonction. Ensuite, nous considérerons encore quelques autres connecteurs. Dans ce qui suit, A et B désignent deux propositions.

La négation

La négation est représentée par le symbole $\neg$ ou $\overline{}$ (par exemple, $\neg A$ ou $\overline{A}$) qui se lit "non" ou "ne. . . pas" et est définie comme suit.

Définition 2.10.
Si A est vrai, alors $\neg A$ est faux.
Si A est faux, alors $\neg A$ est vrai.

Un connecteur peut être représenté au moyen d'une table de vérité:

A	$\neg A$
V	F
F	V

***Exemple* 2.11.**
A: 'Romain Gary a obtenu deux fois le prix Goncourt."
$\neg A$: "Romain Gary n'a pas obtenu deux fois le prix Goncourt."

La conjonction

Elle est représentée par le symbole $\wedge$ (par exemple, $A \wedge B$) qui se lit "et".

Définition 2.12. Si A et B sont vraies toutes les deux alors la conjonction $A \wedge B$ est vraie, sinon elle est fausse.

La table de vérité de la conjonction est donnée ci–dessous.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disjonction

Représentée par le symbole $\vee$ (par exemple, $A \vee B$) qui se lit “ou”, la disjonction est définie comme suit.

Définition 2.13. Si A et B sont fausses toutes les deux alors la disjonction $A \vee B$ est fausse, sinon elle est vraie.

La table de vérité de la disjonction est donnée ci–dessous.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

***Remarque* 2.14.** Contrairement à ce qui est souvent sous–entendu dans le langage courant, le connecteur $\vee$ est utilisé dans un sens non exclusif. (Lorsque sur la carte du menu d'un restaurant figure “Fromage ou dessert”, c'est dans un sens exclusif, c'est–à–dire “Fromage ou dessert, mais pas les deux”).

La disjonction exclusive

Elle se représente au moyen du symbole $\oplus$ (par exemple, $A \oplus B$) qui se lit “ou exclusif”. La disjonction exclusive est définie comme suit.

Définition 2.15. Si A et B ont la même valeur alors la disjonction exclusive $A \oplus B$ est fausse, sinon elle est vraie.

La table de vérité de la disjonction exclusive est donnée ci–dessous.

A	B	$A \oplus B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La conditionnelle

Elle se représente au moyen du symbole $\rightarrow$ (par exemple, $A \rightarrow B$) qui se lit “si... alors... ” et est définie comme suit.

Définition 2.16. Si A est vrai et B est faux alors la conditionnelle $A \rightarrow B$ est fausse, sinon elle est vraie. A s'appelle l'hypothèse, et B la conclusion, de la conditionnelle.

Parfois on utilise l'expression “condition suffisante” pour désigner A (car il *suffit* que A soit vrai pour que la conclusion B le soit), et l'expression “condition nécessaire” pour désigner B (car B est *nécessairement* vrai dès que A l'est).

La table de vérité de la conditionnelle est donnée ci–dessous.

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

***Remarque* 2.17.** La conditionnelle exprime que si l'hypothèse est vraie, alors la conclusion est vraie. Par contre, si l'hypothèse est fausse, alors on ne peut rien conclure; la conclusion peut aussi bien être vraie que fausse dans ce cas.

L'équivalence (ou biconditionnelle)

Elle se représente au moyen du symbole $\leftrightarrow$ (par exemple, $A \leftrightarrow B$) qui se lit "si et seulement si" et elle est définie comme suit.

Définition 2.18. L'équivalence $A \leftrightarrow B$ est vraie si A et B ont même valeur, sinon elle est fausse.

La table de vérité de l'équivalence est donnée ci–dessous.

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

***Remarque* 2.19.** Cette table de vérité montre immédiatement que l'équivalence est la négation de la disjonction exclusive.

2.1.2 Evaluation d'une proposition composée

Une proposition composée s'évalue au moyen de sa table de vérité.

***Exemples* 2.20.**

▶ *Evaluons* $\neg A \vee B$.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On remarque que $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B)$ *(même dernière colonne dans leurs tables de vérité respectives).*

▶ *Evaluons* $\neg(A \wedge \neg B)$.

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

On remarque que $\neg(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

▶ *Evaluons* $(A \vee B) \to (\neg C)$.

A	B	C	$A \vee B$	$\neg C$	$(A \vee B) \rightarrow (\neg C)$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Si une proposition composée est formée de n propositions différentes, alors sa table de vérité comportera 2^n lignes.

Définition 2.21. Une tautologie est une proposition dont l'évaluation est toujours vraie (*i.e.* le résultat donné par sa table de vérité est vrai sur toutes les lignes).

Exemple 2.22.
La proposition composée $A \vee (\neg A)$ est une tautologie comme on peut le voir sur sa table de vérité.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
V	F	V
F	V	V

Définition 2.23. Une antilogie (ou contradiction) est une proposition dont l'évaluation est toujours fausse (*i.e.* le résultat donné par sa table de vérité est faux sur toutes les lignes).

Exemple 2.24.
La proposition composée $A \wedge (\neg A)$ est une antilogie comme on peut le voir sur sa table de vérité.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
V	F	F
F	V	F

Définition 2.25. Soit A une proposition. Un connecteur unaire fait correspondre à A une proposition composée dont la valeur ne dépend que de celle A.

Définition 2.26. Soient A et B deux propositions. Un connecteur binaire fait correspondre à A et B une proposition composée dont la valeur ne dépend que de celles de A et B.

2.1.3 Les connecteurs binaires

Il est possible de définir 16 connecteurs binaires. En effet, un proposition composée formée de deux propositions A et B a une table de vérité de 4 lignes. Elle peut donc être remplie de $2^4 = 16$ façons différentes, et chacune d'elles définit un connecteur binaire. La table 2.1 liste ces différentes possibilités. On reconnaît dans cette table les connecteurs $\wedge$ (8), $\vee$ (2), $\oplus$ (10), $\rightarrow$

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

TAB. 2.1 – Les connecteurs binaires.

(5), $\leftrightarrow$ (7). On peut aussi chercher les expressions correspondant aux autres colonnes, comme $A \vee \overline{B}$ (3), $\neg(A \wedge B)$ (9), $\neg(A \vee B)$ (15), etc.

Idempotence	1a $A \vee A \equiv A$	1b $A \wedge A \equiv A$
Associativité	2a $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	2b $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
Commutativité	3a $A \vee B \equiv B \vee A$	3b $A \wedge B \equiv B \wedge A$
	3c $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$	
Distributivité	4a $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
	4b $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
	4c $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	
	4d $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$	
Lois d'identité	5a $A \vee F \equiv A$	5b $A \wedge V \equiv A$
	6a $A \vee V \equiv V$	6b $A \wedge F \equiv F$
Complémentaires	7a $A \vee (\neg A) \equiv V$	7b $A \wedge (\neg A) \equiv F$
	8a $\neg V \equiv F$	8b $\neg F \equiv V$
Involution	9 $\neg(\neg A) \equiv A$ (double négation)	
Lois de De Morgan	10a $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$	10b $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
Absorption	11a $A \wedge (A \vee B) \equiv A$	11b $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
	11c $(A \wedge B) \vee (\neg B) \equiv A \vee (\neg B)$	11d $(A \vee B) \wedge (\neg B) \equiv A \wedge (\neg B)$
Contraposition	12a $(\neg B) \rightarrow (\neg A) \equiv A \rightarrow B$	12b $(\neg A) \leftrightarrow (\neg B) \equiv A \leftrightarrow B$
Transformation d'une conditionnelle à hypothèse composée		
13a $(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$		
13a $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$		
Lois de réduction	14 $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	
	15a $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$	15b $A \rightarrow B \equiv \neg[A \wedge (\neg B)]$
Disjonction exclusive	16a $A \oplus B \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$	16b $A \leftrightarrow B \equiv \neg(A \oplus B)$

TAB. 2.2 – Lois de l'algèbre des propositions

2.1.4 L'équivalence logique

Définition 2.27. Deux propositions A et B sont dites logiquement équivalentes si elles possèdent des tables de vérité identiques. On note alors $A \equiv B$.

***Remarque* 2.28.** Il revient au même de dire $A \equiv B$ que de dire $A \leftrightarrow B$.

***Exemple* 2.29.**
$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

2.1.5 Lois de l'algèbre des propositions

Le calcul des propositions aux moyens des connecteurs (voir section 2.1.1) forme ce qui s'appelle une algèbre de Boole[1] (appelée ici algèbre des propositions) et qui vérifie les propriétés de la Table 2.2, où A, B, C, sont des propositions, et V désigne une tautologie, F une antilogie.

A l'aide des lois de réduction il est possible d'éliminer d'une expression les connecteurs $\leftrightarrow$ et $\rightarrow$ et d'obtenir une expression équivalente dans laquelle n'apparaissent que les connecteurs

[1]D'après le logicien anglais G. Boole (1787–1843).

$\wedge, \vee, \neg$. Puis, en utilisant la loi de De Morgan $A \vee B \equiv \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$ on peut faire disparaître le connecteur $\vee$.

***Exemple* 2.30.**
Considérons l'expression $A \to (\neg(B \leftrightarrow C))$, et transformons–la en une expression qui ne contienne plus que $\wedge, \neg$. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\neg(B \leftrightarrow C) &\equiv \neg((B \to C) \wedge (C \to B)) \\
&\equiv \neg(B \to C) \vee \neg(C \to B) \\
&\equiv \neg(\neg B \vee C) \vee \neg(\neg C \vee B) \\
&\equiv (B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg B) \\
&\equiv ((B \wedge \neg C) \vee C) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee \neg B) \\
&\equiv (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \\
&\equiv \neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(B \wedge C)
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned}
A \to (\neg(B \leftrightarrow C)) &\equiv \neg A \vee (\neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(B \wedge C)) \\
&\equiv \neg(A \wedge \neg(\neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(B \wedge C))
\end{aligned}$$

2.1.6 Les formes normales et réduites

Dans ce qui suit, afin de simplifier les notations, nous utiliserons désormais le surligné pour la négation, donc $\overline{A}$ au lieu de $\neg A$, et nous omettrons le symbole de conjonction, donc nous écrirons AB au lieu de $A \wedge B$.

Soit E une proposition composée. En utilisant les lois de l'algèbre des propositions, nous avons vu qu'il est possible d'écrire E sous différentes formes. La question qui se pose est de savoir s'il est possible de trouver des écritures “standard” (ce seront les formes normales), ou “simplifiées” (ce seront les formes réduites). Pour fixer les idées, nous supposerons que E est formée de trois propositions A, B, C, ce qui se dénote par $E \equiv E(A, B, C)$, mais tous les résultats que nous énoncerons sont encore valables pour une expression formée d'un nombre quelconque de propositions. Tout d'abord, quelques définitions.

Définition 2.31. Un littéral est une proposition ou sa négation: A ou $\overline{A}$, B ou $\overline{B}$, C ou $\overline{C}$.

Définition 2.32. Un produit fondamental est soit un littéral, soit une conjonction de deux ou plusieurs littéraux; dans ce second cas, les littéraux ne doivent pas être relatifs à la même proposition.

***Exemple* 2.33.**
A, $\overline{A}$, AB, $A\overline{B}$, $A\overline{C}B$ sont des produits fondamentaux, mais ABA n'en est pas un.

***Remarque* 2.34.** Toute conjonction de littéraux se réduit soit à une antilogie, soit à un produit fondamental.

***Exemples* 2.35.**
1. $AB\overline{A} \equiv A \wedge B \wedge \overline{A} \equiv A \wedge \overline{A} \wedge B \equiv F \wedge B \equiv F$
2. $ABA \equiv A \wedge B \wedge A \equiv A \wedge A \wedge B \equiv A \wedge B$

Définition 2.36. Une disjonction de produits fondamentaux est appelée forme disjonctive.

***Exemple* 2.37.**
$E \equiv ABC \vee \overline{A}BC \vee AB$.

Définition 2.38. Un atome est un produit fondamental relatif à toutes les propositions d'une proposition composée.

Pour une proposition composée formée de n propositions, les atomes sont donc les produits fondamentaux de n littéraux.

***Exemple* 2.39.**
Si une proposition composée E est formée des propositions A, B, C, alors les atomes de E sont: $ABC, \overline{A}BC, A\overline{B}C, AB\overline{C}, A\overline{B}\,\overline{C}, \overline{A}B\overline{C}, \overline{A}\,\overline{B}C, \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

Nous avons le résultat remarquable suivant: tout produit fondamental peut être écrit sous la forme d'une disjonction d'atomes deux à deux distincts.

***Exemples* 2.40.**
1. $\overline{A}C \equiv \overline{A}C(B \vee \overline{B}) \equiv \overline{A}CB \vee \overline{A}C\overline{B} \equiv \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}C$
2. $\overline{A} \equiv \overline{A}(B \vee \overline{B})(C \vee \overline{C}) \equiv \overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

Définition 2.41. Une disjonction d'atomes deux à deux distincts est appelée forme disjonctive normale.

***Exemple* 2.42.**
$E \equiv AB\overline{C} \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

Proposition 2.43. *Toute proposition composée peut être mise sous forme disjonctive normale, et cette forme est unique.*

***Exemples* 2.44.**

$$\begin{aligned}
(AB \vee \overline{C}) \wedge (A\overline{C} \vee BC) &\equiv ABA\overline{C} \vee ABBC \vee \overline{C}A\overline{C} \vee \overline{C}BC \\
&\equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{C} \vee BC\overline{C} \\
&\equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{C} \\
&\equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{C}(B \vee \overline{B}) \\
&\equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \\
&\equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{B}\,\overline{C}
\end{aligned}$$

Définition 2.45. Soient E_1, E_2 deux formes disjonctives équivalentes (donc $E_1 \equiv E_2$). On dit que E_1 est plus simple que E_2 si E_1 contient moins de littéraux que E_2.

Définition 2.46. Une forme disjonctive réduite d'une expression E est une forme pour laquelle il n'existe pas une autre forme disjonctive plus simple.

***Remarque* 2.47.** Il peut y avoir plusieurs formes disjonctives réduites pour la même expression E. Une forme disjonctive réduite n'est pas forcément unique.

***Exemple* 2.48.**
Soit la forme disjonctive $E \equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{C}$. Comme $E \equiv AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{C} \equiv AB(C \vee \overline{C}) \vee A\overline{C}$, on obtient une forme disjonctive encore plus simple $AB \vee A\overline{C}$, c'est une forme disjonctive réduite.

Les résultats exposés jusqu'à présent l'ont été sous forme disjonctive. Nous allons maintenant brièvement donner leurs analogues pour la forme conjonctive.

Définition 2.49. Une forme conjonctive est une conjonction de disjonctions de littéraux.

Définition 2.50. La forme conjonctive normale est une forme conjonctive où chaque groupe de conjonctions contient toutes les variables une et une seule fois (avec ou sans négation). Cette forme est unique.

Définition 2.51. Une forme conjonctive réduite est une forme conjonctive pour laquelle il n'existe pas de formes conjonctives plus simples. Cette forme n'est en général pas unique.

La connaissance d'une forme disjonctive (normale ou réduite) permet la détermination des formes conjonctives correspondantes grâce aux propositions suivantes.

Proposition 2.52. *Soit la forme disjonctive normale (FDN) d'une expression $\neg E$. Alors la négation de cette FDN donne la forme conjonctive normale de E.*

Proposition 2.53. *Soit une forme disjonctive réduite (FDR) d'une expression $\neg E$. Alors la négation de cette FDR donne une forme conjonctive réduite de E.*

Exemple 2.54.
Soit $E \equiv AB\overline{C} \vee \overline{A}B$, et cherchons la forme conjonctive réduite de E. On détermine d'abord la forme disjonctive réduite de $\neg E$ comme suit: $\neg E \equiv (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \wedge (A \vee \overline{B}) \equiv \overline{B} \vee ((\overline{A} \vee C) \wedge A) \equiv \overline{B} \vee (A \wedge C)$. Puis on établit la forme conjonctive réduite en prenant la négation, $\neg(\neg E) \equiv E \equiv B \wedge (\overline{A} \vee \overline{C})$.

2.1.7 Paradoxes

Mise en garde
Considérons les deux propositions suivantes.
A: "Achille a dix doigts."
B: "Cette phrase a cinq mots."
Ces deux propositions sont vraies, donc $A \wedge B$ est vraie aussi, ce qui se traduit par: "Achille a dix doigts et cette phrase a cinq mots", ce qui n'est évidemment pas correct. Le problème provient de ce que la proposition B est auto–référente (*i.e.* elle se réfère à elle–même). Combinée à d'autres propositions, cela mène à un paradoxe. Ce type de phrase ne doit donc pas être accepté comme étant une proposition.

Un des premiers paradoxes de ce type est connu sous le nom de paradoxe du barbier, ou paradoxe de Richard, et sa teneur est la suivante.

> Dans un village, le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux–mêmes.
> Question: le barbier se rase–t–il lui–même ?

Si on répond par "non", dans ce cas on peut en déduire qu'il se rase lui–même (puisqu'il rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux–mêmes), ce qui donne lieu à une contradiction. Et si on répond par "oui", dans ce cas on peut en déduire qu'il ne se rase pas lui–même (puisqu'il rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux–mêmes), ce qui donne aussi lieu à une contradiction.

Un autre paradoxe similaire existe en théorie des ensembles. Si l'on considère l'ensemble de tous les ensembles, alors on est contraint d'admettre que cet ensemble se contient lui–même puisqu'il doit être l'un de ses propres éléments. Il existe donc des ensembles qui se contiennent eux–mêmes. Considérons maintenant l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux–mêmes; cet ensemble se contient–il lui–même ? On aboutit exactement au même paradoxe que précédemment, à savoir que les réponses "oui" ou "non" aboutissent toutes deux à des contradictions.

2.2 Diagrammes de Karnaugh

Les diagrammes de Karnaugh[2] permettent de représenter les formes disjonctives normales de propositions et d'en déduire des expressions disjonctives réduites. Les expressions traitées peuvent avoir de deux à six variables, et nous n'étudierons dans ce cours que les cas à deux, trois et quatre variables. Ces diagrammes comportent des cases représentant les atomes. Une fois transcrite dans le diagramme la forme disjonctive normale d'une expression par des symboles $\vee$ dans les cases, on peut "lire" une forme réduite en regroupant les cases selon certains motifs (lignes, carrés, etc.) de telle sorte qu'il y ait le plus de motifs avec le nombre de cases le plus élevé possible, et que toutes les cases occupées soient recouvertes par au moins un motif. On indique un motif en encerclant les cases qui le forment. Les motifs possibles dépendent du nombre de variables, voir les exemples ci–après.

[2] Introduits par Maurice Karnaugh en 1953.

2.2.1 Deux variables

Si A, B désignent les deux variables, les atomes sont AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{A}\,\overline{B}$. Soit une expression $E \equiv E(A, B)$.

- Un atome (donc un produit fondamental de deux littéraux) est représenté par une case du diagramme de Karnaugh de E, et on indique la présence de cet atome dans la forme disjonctive normale de E par le symbole $\vee$.

- Un produit fondamental formé par un seul littéral est représenté dans le diagramme par le motif de deux cases adjacentes sur la même ligne ou la même colonne.

Le diagramme se représente de la façon suivante (dans chaque case est indiqué l'atome correspondant).

	B	$\overline{B}$
A	AB	$A\overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\,\overline{B}$

Exemples 2.55.
▶ *Soit $E \equiv AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$. Alors le diagramme de Karnaugh correspondant est le suivant.*

	B	$\overline{B}$
A	$\vee$	
$\overline{A}$		$\vee$

▶ *Soit $E \equiv A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B}$. Alors le diagramme de Karnaugh correspondant est le suivant.*

	B	$\overline{B}$
A		$\vee$
$\overline{A}$		$\vee$

Comme deux cases sont adjacentes, E se réduit à un produit fondamental d'un seul littéral, à savoir $E \equiv \overline{B}$. En effet, $E \equiv A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} \equiv (A \vee \overline{A}) \wedge \overline{B} \equiv \overline{B}$.

▶ *Soit le diagramme de Karnaugh suivant.*

	B	$\overline{B}$
A	$\vee$	$\vee$
$\overline{A}$		$\vee$

Donc $E \equiv AB \vee A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} \equiv A \vee \overline{A}\,\overline{B} \equiv A \vee \overline{B}$.

2.2.2 Trois variables

Les atomes dans le cas de trois variables A, B, C, sont les suivants: ABC, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}B\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

- Un atome est représenté par une case du diagramme de Karnaugh, et on indique la présence de cet atome par le symbole $\vee$.

- Un produit fondamental de deux littéraux est représenté par le motif de deux cases adjacentes sur la même ligne ou la même colonne. Il est possible qu'une case se trouve sur le bord gauche du diagramme et l'autre sur le bord droit dans la même ligne. Autrement dit, les bords verticaux gauche et droit du diagramme sont identifiés pour la détermination des adjacences.
- Un produit fondamental d'un seul littéral est représenté par le motif d'une ligne complète (quatre cases horizontales adjacentes), ou par quatre cases formant un carré (deux sur deux) dans le diagramme. Dans ce dernier cas, il est possible que ce carré soit "à cheval" sur les bords verticaux gauche et droit qui sont identifiés comme précédemment.

Le diagramme se représente de la façon suivante (dans chaque case est indiqué l'atome correspondant).

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	ABC	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$
$\overline{A}$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$

Exemple 2.56.
▶ *Soient* $E_1 \equiv ABC \vee \overline{A}BC \equiv BC$, $E_2 \equiv AB\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \equiv A\overline{C}$, $E_3 \equiv \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}C \equiv \overline{A}C$. *Les diagrammes de Karnaugh correspondants sont donnés ci–après.*

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$			
$\overline{A}$	$\vee$			

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A		$\vee$	$\vee$	
$\overline{A}$				

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A				
$\overline{A}$	$\vee$			$\vee$

Exemple 2.57.
▶ *Soient* $E_1 \equiv ABC \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee A\overline{B}C \equiv A$, $E_2 \equiv ABC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \equiv B$, $E_3 \equiv ABC \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}C \equiv C$. *Les diagrammes de Karnaugh correspondants sont donnés ci–après.*

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
$\overline{A}$				

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$	$\vee$		
$\overline{A}$	$\vee$	$\vee$		

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$			$\vee$
$\overline{A}$	$\vee$			$\vee$

Exemples 2.58.
▶ $E \equiv AB\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, *forme normale.*

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A		$\vee$	$\vee$	
$\overline{A}$			$\vee$	

$E \equiv A\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C}$, *forme réduite.*

▶ $E \equiv ABC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$, *forme normale.*

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$	$\vee$		
$\overline{A}$		$\vee$	$\vee$	$\vee$

	BC	$B\overline{C}$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$
A	$\vee$	$\vee$		
$\overline{A}$		$\vee$	$\vee$	$\vee$

$E \equiv AB \vee B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}$, *forme réduite.*
$E \equiv AB \vee \overline{A}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}$, *autre forme réduite.*

2.2.3 Quatre variables

Les atomes dans le cas de quatre variables A, B, C, D, sont les suivants:
$ABCD$, $\overline{A}BCD$, $A\overline{B}CD$, $AB\overline{C}D$, $ABC\overline{D}$, $\overline{A}\,\overline{B}CD$, $\overline{A}B\overline{C}D$, $\overline{A}BC\overline{D}$, $A\overline{B}\,\overline{C}D$, $A\overline{B}C\overline{D}$, $AB\overline{C}\overline{D}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$, $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$, $\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$, $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

- Un atome est représenté par une case.
- Un produit fondamental de trois littéraux est représenté par le motif de deux cases adjacentes sur la même ligne ou la même colonne. Il est possible qu'une case se trouve sur un bord du diagramme et l'autre sur le bord opposé dans la même ligne ou la même colonne. Autrement dit, les bords verticaux gauche et droit, ainsi que les bords horizontaux supérieur et inférieur dans le diagramme sont identifiés pour la détermination des adjacences.
- Un produit fondamental de deux littéraux est représenté par un motif de quatre cases, 1x4, 4x1, ou 2x2. Un motif peut être à cheval sur un bord identifié à un autre.
- Un produit fondamental d'un seul littéral est représenté par un motif de huit cases (2x4 ou 4x2). Un motif peut être à cheval sur un bord identifié à un autre.

Le diagramme se représente de la façon suivante (dans chaque case est indiqué l'atome correspondant).

	CD	$C\overline{D}$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$
AB	$ABCD$	$ABC\overline{D}$	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$
$A\overline{B}$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$
$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$
$\overline{A}B$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$

Exemples 2.59.

► $E \equiv A\overline{B}C\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \equiv A\overline{B}\,\overline{D}$

	CD	$C\overline{D}$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$
AB				
$A\overline{B}$		$\vee$	$\vee$	
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$				

► $E \equiv ABCD \vee A\overline{B}CD \vee AB\overline{C}D \vee A\overline{B}\,\overline{C}D \equiv AD$

	CD	$C\overline{D}$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$
AB	$\vee$			$\vee$
$A\overline{B}$	$\vee$			$\vee$
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$				

► $E \equiv A\overline{B}CD \vee A\overline{B}CD \vee A\overline{B}C\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$
$\equiv \overline{B}$

	CD	$C\overline{D}$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$
AB				
$A\overline{B}$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
$\overline{A}\,\overline{B}$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
$\overline{A}B$				

***Exemple* 2.60.**
Soit $E \equiv ABCD \vee ABC\overline{D} \vee AB\overline{C}\,\overline{D} \vee A\overline{B}C\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}BCD \vee \overline{A}BC\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$.
Le diagramme de Karnaugh de E a l'allure suivante.

	CD	$C\overline{D}$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$
AB	V	V	V	
$A\overline{B}$		V	V	V
$\overline{A}\,\overline{B}$		V		V
$\overline{A}B$	V	V	V	

Après simplification, on obtient $E \equiv A\overline{D} \vee C\overline{D} \vee B\overline{D} \vee BC \vee \overline{B}\,\overline{C}\,D$.

2.3 Implication logique

Les raisonnements mathématiques ou du langage courant reposent sur des déductions (si. . . alors. . .) qui possèdent la particularité qu'on ne s'intéresse qu'aux cas où les hypothèses sont vraies, alors que pour des propositions conditionnelles de la logique on établit la table de vérité qui comporte des lignes où les hypothèses peuvent êtres fausses (puisque l'on veut déterminer tous les cas possibles dans la table). Pour étudier ces déductions, on introduit le concept d'implication logique qui revient à ne regarder dans la table de vérité que les lignes où les hypothèses sont vérifiées.

Définition 2.61. Soient P_1, P_2,. . . ,P_n et Q des propositions. On dit que les propositions P_1, P_2,. . . ,P_n impliquent logiquement la proposition Q si Q est vraie lorsque P_1, P_2,. . . ,P_n sont simultanément vraies.
Notation:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q \quad \text{ou} \quad P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vdash Q.$$

Les propositions P_1, P_2,. . . ,P_n sont appelées les prémisses et Q la conclusion de l'implication.

***Exemple* 2.62.**
Un exemple d'implication logique, la loi du détachement:
$P, P \rightarrow Q \vdash Q$
Pour montrer que c'est bien une implication, il faut établir la table de vérité, et vérifier que les lignes pour lesquelles les prémisses sont vraies ont également la valeur vrai pour la conclusion (ces valeurs sont soulignées dans la table ci–après).

P	Q	P	$P \rightarrow Q$	Q
V	V	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

La validité d'un raisonnement $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ se montre soit directement par une table de vérité, soit en appliquant successivement des règles aux prémisses pour arriver à la conclusion. Ces règles ne sont que des implications particulières dont on a montré préalablement la validité; quelques–unes sont énumérées ci–dessous. Il est bien sûr aussi possible (et souvent indispensable) d'utiliser les lois de l'algèbre des propositions de la section 2.1.

Quelques implications importantes

1.	$P, P \to Q \vdash Q$	Loi du détachement
2.	$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$	Loi du syllogisme
3.	$P \vdash P \vee Q$	Loi d'introduction de $\vee$
4.	$P \wedge Q \vdash P$	Loi d'élimination de $\wedge$
5.	$P \to Q, P \to \neg Q \vdash \neg P$	Loi de réduction à l'absurde

***Exemple* 2.63.**
Considérons $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$.
Validité au moyen de la table de vérité:

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg P$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$

Validité au moyen de règles:

$$\begin{array}{rl} P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P & \textit{contraposition} \\ \neg Q \to \neg P, \neg Q \vdash \neg P & \textit{détachement} \end{array}$$

***Exemple* 2.64.**
Considérons $P \to Q, \neg R \to \neg Q, P \vdash R$.
Validité au moyen de la table de vérité:

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg R$	$P \to Q$	$\neg R \to \neg Q$	P	R
V	V	V	F	F	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$	$\underline{\text{V}}$
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Validité au moyen de règles:

$$\begin{array}{cl} \neg R \to \neg Q \equiv Q \to R & \textit{contraposition} \\ P \to Q, Q \to R \vdash P \to R & \textit{syllogisme} \\ P \to R, P \vdash R & \textit{détachement} \end{array}$$

2.4 Prédicats et quantificateurs

Dans le calcul des propositions, celles–ci interviennent comme des blocs non analysés, et la manière dont certaines expressions sont composées à partir d'autres propositions est étudiée. En outre, la valeur de vérité des propositions est fixée une fois pour toutes. Le calcul des prédicats permet une plus grande souplesse en se libérant de cette contrainte.

2.4.1 Prédicats

Définition 2.65. Soit R un ensemble. Un <u>prédicat</u> sur R est une expression $P(x)$ qui a la propriété qu'une valeur, vraie ou fausse, peut–être évaluée pour $P(a)$ quel que soit $a \in R$.

***Exemple* 2.66.**
L'énoncé "4 est divisible par 2" est une proposition. L'énoncé "x est divisible par 2" est un prédicat ou fonction propositionnelle; dès que x est remplacé par un nombre on obtient une proposition.

L'ensemble R de la définition 2.65 s'appelle le référentiel lié au prédicat $P(x)$. Il s'agit donc de l'ensemble dans lequel la variable x prend ses valeurs. En outre, le sous–ensemble de R sur lequel $P(x)$ prend la valeur vraie s'appelle le domaine de validité de $P(x)$ et se note Dom_P; ainsi,

$$\mathrm{Dom}_P = \Big\{ x \in R \;\Big|\; P(x) \;\text{ est vrai} \Big\}.$$

***Exemple* 2.67.**
En reprenant l'exemple 2.66, on a $R = \mathbb{Z}$, et $\mathrm{Dom}_P = \Big\{ 2k \;\Big|\; k \in \mathbb{Z} \Big\}$.

***Exemple* 2.68.**
Soit le prédicat $P(x)$ = "$x + 2 > 7$" dont le référentiel est $\mathbb{N}$. Son domaine de validité est $\mathrm{Dom}_P = \Big\{ x \in \mathbb{N} \;\Big|\; x + 2 > 7 \Big\} = \{6, 7, 8, \ldots\}$.

2.4.2 Quantificateurs

Les quantificateurs permettent de préciser la portée d'un prédicat. Ils peuvent traduire le fait que tout élément d'un référentiel satisfait à une condition, ou que seuls certains de ces éléments satisfont à une condition.

Définition 2.69. Le symbole $\forall$ (qui se lit "pour tout") est appelé le quantificateur universel.

Soit $P(x)$ un prédicat défini sur le référentiel R. L'expression $\forall x\, P(x)$, ou $(\forall x \in R)\ P(x)$, signifie que le prédicat $P(x)$ est vrai quel que soit $x \in R$, donc $\mathrm{Dom}_P = R$.

***Exemples* 2.70.**
▶ *L'expression $(\forall x \in \mathbb{N})(x + 4 > 3)$ est vraie.*
▶ *L'expression $(\forall x \in \mathbb{N})(x + 2 > 8)$ est fausse (puisque lorsque $x = 0$ on a $2 > 8$).*

Définition 2.71. Le symbole $\exists$ (qui se lit "il existe") est appelé le quantificateur existentiel.

Soit $P(x)$ un prédicat défini sur le référentiel R. L'expression $\exists x\, P(x)$, ou $(\exists x \in R)\ P(x)$, signifie qu'il existe au moins un élément x de R tel que le prédicat $P(x)$ soit vrai. Autrement dit, $\mathrm{Dom}_P \neq \varnothing$.

***Exemples* 2.72.**
▶ *L'expression $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 4 < 7)$ est vraie.*
En effet, le domaine est $\{x \in \mathbb{N} \;\big|\; x + 4 < 7\} = \{1, 2\} \neq \varnothing$.

▶ *L'expression $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 6 < 4)$ est fausse.*
En effet, le domaine est $\{x \in \mathbb{N} \;\big|\; x + 6 < 4\} = \varnothing$.

Négation d'une expression quantifiée

Soit $P(x)$ un prédicat sur un référentiel R. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.73 (De Morgan)**.**

$$\neg[(\forall x \in R)P(x)] \equiv (\exists x \in R)\neg P(x)$$

$$\neg[(\exists x \in R)P(x)] \equiv (\forall x \in R)\neg P(x)$$

***Exemples* 2.74.**
▶ *La négation de l'énoncé "pour tout x entier positif, $x + 2 > 8$" est "il existe (au moins) un entier positif x tel que $x + 2 \not> 8$".*

▶ *La négation de l'énoncé "il existe une personne qui a les cheveux verts" est "toute personne n'a pas les cheveux verts".*

2.4.3 Prédicats à plusieurs variables

La notion de prédicat ne se limite pas au cas à une seule variable. Soient $n \in \mathbb{N}$ et les ensembles R_1, R_2,...,R_n.

Définition 2.75. Soit $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$. Un prédicat à n variables défini sur R est une expression $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui a la propriété qu'une valeur vrai ou faux peut–être attribuée à $P(a)$ quel que soit $a \in R$.

***Exemple* 2.76.**
Considérons le prédicat $P(x, y, z)$ sur $\mathbb{N}^3$ donné par $x + 2y + z < 18$. Alors $P(1, 2, 3)$ est vrai, et $P(4, 5, 4)$ est faux.

Comme pour les prédicats à une seule variable, il est possible de soumettre un prédicat à plusieurs variables à un ou plusieurs quantificateurs. Les variables soumises à quantification sont dites liées, et celle qui ne le sont pas sont dites libres.

***Exemples* 2.77.**

- $\forall x \exists y\, P(x, y)$ *(x et y sont liées)*
- $\exists x \forall y\, P(x, y, z)$ *(x et y sont liées, z est libre)*
- $\forall x\, P(x, y)$ *(x est liée et y est libre)*
- $\forall x \{A(X) \wedge B(x, y)\}$ *(x est liée et y est libre)*

***Exemple* 2.78.**
Soit l'ensemble $B = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Soit le prédicat $P(x, y) =$ "$x + y = 10$" défini sur $R = B \times B$. Regardons les deux expressions suivantes et évaluons-les.

1. $\forall x \exists y\, P(x, y)$ signifie que quel que soit x, il existe y tel que $x + y = 10$. Cette expression est vraie. En effet, à chaque x choisi dans B, on peut trouver un y dans B tel que la somme des deux soit 10 (en fait, $y = 10 - x$ tout simplement). Par exemple, pour $x = 1$, on a $y = 9$, pour $x = 2$, on a $y = 8$, etc.

2. $\exists y \forall x\, P(x, y)$ signifie qu'il existe un y tel que pour tout x, on a $x + y = 10$. Cette expression est fausse. En effet, si $y = 1$, alors $x = 9$ nécessairement, et $x = 8$ n'est pas possible.

Cet exemple montre que les quantificateurs ne commutent pas, il faut faire attention à l'ordre dans lequel ils apparaissent.

Négation d'une expression quantifiée à plusieurs variables

La négation d'une expression quantifiée à plusieurs variables est obtenue en appliquant le théorème 2.73. Ainsi, chaque symbole $\forall$ est changé en $\exists$ et chaque symbole $\exists$ est changé en $\forall$, alors que que le symbole de négation $\neg$ agit sur le prédicat.

***Exemple* 2.79.**

$$\neg \{\forall x \exists y \exists z\, P(x, y, z)\} \equiv \exists x \forall y \forall z\, \neg P(x, y, z)$$

2.5 Modèle des ensembles

Il existe une correspondance entre les expressions logiques composées de prédicats et la théorie des ensembles. Plus précisément, une expression logique peut se traduire en une expression entre ensembles au moyen des domaines de validité des prédicats. Ainsi, la logique des prédicats se ramène à la théorie des ensembles, une expression logique peut être évaluée au moyen d'ensembles.

Soient $A(x)$ et $B(x)$ des prédicats définis sur le référentiel R. Le tableau 2.3 donne la correspondance entre la logique des prédicats et les relations impliquant les domaines de validité.

Expr. logique	Dom. de validité
$A(x)$	Dom_A
$B(x)$	Dom_B
$\neg A(x)$	$\mathrm{Dom}_{\overline{A}}$
$A(x) \wedge B(x)$	$\mathrm{Dom}_A \cap \mathrm{Dom}_B$
$A(x) \vee B(x)$	$\mathrm{Dom}_A \cup \mathrm{Dom}_B$
$A(x) \oplus B(x)$	$\mathrm{Dom}_A \ \triangle \ \mathrm{Dom}_B$
$A(x) \rightarrow B(x)$	$\mathrm{Dom}_{\overline{A}} \cup \mathrm{Dom}_B$
$A(x) \leftrightarrow B(x)$	$(\mathrm{Dom}_A \cap \mathrm{Dom}_B) \cup (\mathrm{Dom}_{\overline{A}} \cap \mathrm{Dom}_{\overline{B}})$
$\forall x\{A(x) \rightarrow B(x)\}$	$\mathrm{Dom}\, A \subset \mathrm{Dom}\, B$
$\forall x\{A(x) \leftrightarrow B(x)\}$	$\mathrm{Dom}\, A = \mathrm{Dom}\, B$

TAB. 2.3 – Modèle des ensembles en logique

2.6 Arithmétisation de la logique

En logique binaire, une proposition est soit vraie, soit fausse. on peut définir une fonction "val" qui à chaque proposition fait correspondre une valeur numérique dans $\{0, 1\}$,

$$\mathrm{val} : A \mapsto \mathrm{val}(A)$$

avec les conventions

- si A a la valeur de vérité V, alors $\mathrm{val}(A) = 1$,
- si A a la valeur de vérité F, alors $\mathrm{val}(A) = 0$.

Notation: $\mathrm{val}(A) = a$, $\mathrm{val}(B) = b$, $\mathrm{val}(\neg A) = 1 - a$.

Ces conventions étant établies, on peut faire correspondre à toute expression logique E une expression arithmétique dont l'évaluation donne 0 si E est fausse et 1 si E est vraie, ce qui permet d'évaluer par un calcul arithmétique toute expression logique.

En considérant les tables de vérité des différents connecteurs logiques il est possible de trouver les expressions arithmériques correspondantes. Regardons la négation et la conjonction dans les tables ci-dessous.

A	a	$\neg A$	$\mathrm{val}(\neg A)$
V	1	F	0
F	0	V	1

A	B	a	b	$A \wedge B$	$\mathrm{val}(A \wedge B)$
V	V	1	1	V	1
V	F	1	0	F	0
F	V	0	1	F	0
F	F	0	0	F	0

On voit que $\mathrm{val}(\neg A) = 1 - a$, et $\mathrm{val}(A \wedge B) = a \cdot b$.

Le tableau 2.4 récapitule les expressions arithmétiques correspondant aux différents connecteurs logiques.

Exemple 2.80.
Il est possible de déduire l'expression arithmétique pour la disjonction connaissant celle de la négation et celle de la conjonction. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(X \vee Y) &= \mathrm{val}(\neg(\neg X \wedge \neg Y)) \\
&= 1 - \{(1 - x)(1 - y)\} \\
&= 1 - \{1 - x - y + xy\} \\
&= x + y - xy
\end{aligned}$$

Expression	val(Expression)
X	x
Y	y
$\neg X$	$1-x$
$X \wedge Y$	$x \cdot y$
$X \vee Y$	$x+y-xy$
$X \rightarrow Y$	$1-x+xy$
$X \leftrightarrow Y$	$1-x-y+2xy$
$X \oplus Y$	$x+y-2xy$

TAB. 2.4 – Expressions logiques et arithmétiques.

2.7 Arithmétique booléenne

Considérons maintenant une arithmétique particulière, l'arithmétique booléenne. On travaille dans l'ensemble $B = \{0, 1\}$.

Définition 2.81. On dit que x est une variable booléenne si $x \in B$.

Soient x et y deux variables booléennes. Alors on considère les trois opérations booléennes suivantes:

suivantes:	la multiplication booléenne	$x \wedge y = x \cdot y\,,$
	l'addition booléenne	$x \vee y = x + y - xy\,,$
	le complément booléen	$x' = \overline{x} = 1 - x\,.$

***Remarque* 2.82.** Ces trois opérations sont internes dans B.

***Remarque* 2.83.** La multiplication booléenne correspond à la multiplication arithmétique standard. C'est pourquoi on écrit souvent xy en lieu et place de $x \wedge y$.

2.7.1 Propriétés

Les propriétés énumérées dans le tableau 2.5 permettent la simplification des expressions booléennes.

$x \cdot x = x$	$x \vee x = x$
$x \cdot x' = 0$	$x \vee x' = 1$
$(x')' = x$	
$0 \cdot x = 0$	$0 \vee x = x$
$1 \cdot x = x$	$1 \vee x = 1$

TAB. 2.5 – Propriétés pour la simplification des expressions booléennes.

2.8 Fonctions binaires

Soit l'ensemble booléen $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. On définit

$$\mathcal{B}^n = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n > | \, x_i \in \{0,1\} \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}\ .$$

Définition 2.84. Une application à n variables de $\mathcal{B}^n$ dans $\mathcal{B}$ est appelée une fonction binaire, ou fonction booléenne.

***Remarque* 2.85.** Combien y a-t-il de fonctions binaires de $\mathcal{B}^n$ dans $\mathcal{B}$?
Observons que
a) le cardinal de $\mathcal{B}^n$ est 2^n, et
b) une fonction binaire fait correspondre à chaque élément de $\mathcal{B}^n$ la valeur 0 ou 1.
Donc il y a 2^{2^n} fonctions binaires de $\mathcal{B}^n$ dans $\mathcal{B}$.

On note $\mathbb{F}_n$ l'ensemble des fonctions binaires à n variables et $\mathrm{Card}\,(\mathbb{F}_n) = 2^{2^n}$. Toute fonction binaire peut être représentée par une table de vérité. Par conséquent, on peut appliquer tout ce qui a été vu pour les expressions logiques aux fonctions binaires. En particulier, les notions de formes conjonctives et disjonctives s'appliquent et permettent d'obtenir des expressions simplifiées pour les fonctions binaires. On définit sur $\mathbb{F}_n$ les trois opérations booléennes suivantes:

- produit booléen: $f \wedge g = f \cdot g$
- somme booléenne: $f \vee g = f + g - f \cdot g$
- complément booléen: $f' = \overline{f} = 1 - f$

2.8.1 Cas à deux variables

On a $\mathcal{B}^2 = \{< x, y > | x, y \in \{0, 1\}\}$ et $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}) = 2^{2^2} = 2^4 = 16$. Il y a donc 16 fonctions binaires qui forment l'ensemble $\mathbb{F}_2$ (voir le Tableau 2.6).

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 2.6 – Les éléments de $\mathbb{F}_2$.

f_0 est l'élément "0" de $\mathbb{F}_2$, c'est-à-dire $\forall f \in \mathbb{F}_2,\ f \vee f_0 = f$
f_{15} est l'élément "1" de $\mathbb{F}_2$, c'est-à-dire $\forall f \in \mathbb{F}_2,\ f \cdot f_{15} = f$

Les atomes de $\mathbb{F}_2$ sont f_1, f_2, f_4 et f_8; on a

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x \cdot y \\ f_2(x,y) &= x \cdot \overline{y} \\ f_4(x,y) &= \overline{x} \cdot y \\ f_8(x,y) &= \overline{x} \cdot \overline{y} \end{aligned}$$

$f_1(x,y)$

	y	$\overline{y}$
x	$\vee$	
$\overline{x}$		

$f_2(x,y)$

	y	$\overline{y}$
x		$\vee$
$\overline{x}$		

$f_4(x,y)$

	y	$\overline{y}$
x		
$\overline{x}$	$\vee$	

$f_8(x,y)$

	y	$\overline{y}$
x		
$\overline{x}$		$\vee$

Exemple 2.86.
$f_5 = f_1 \vee f_4$ *(forme disjonctive normale)*

	y	$\overline{y}$
x	$\vee$	
$\overline{x}$	$\vee$	

$f_5(x,y) = f_1 \vee f_4$ *et* $f_5(x,y) = y$.

Toute fonction binaire de $\mathbb{F}_2$ autre que f_0 est somme booléenne de certains des atomes de $\mathbb{F}_2$.

2.8.2 Forme disjonctive normale

Soit $\mathbb{F}_n$ l'ensemble des fonctions binaires à n variables. Les atomes de $\mathbb{F}_n$ sont les 2^n fonctions qui ne prennent la valeur “1” qu'une seule fois. Une telle fonction est appelée un minterme.

Tout minterme s'écrit comme le produit de n variables, complémentées ou non. Toute fonction binaire non nulle est somme booléenne d'un certain nombre de mintermes. Cette somme est appelée forme disjonctive normale (FDN). A l'aide d'un diagramme de Karnaugh, il est possible d'obtenir sa forme disjonctive réduite.

2.8.3 Forme conjonctive normale

On appelle maxterme toute fonction binaire qui ne prend qu'une seule fois la valeur 0.

Tout maxterme est la somme booléenne de n variables, complémentées ou non. Toute fonction binaire différente de 1 est produit booléen d'un certains nombre de maxtermes. Ce produit est appelé forme conjonctive normale (FCN).

***Remarque* 2.87.** Un maxterme est un complément d'un minterme.

***Exemple* 2.88.**
Avec 3 variables, au minterme $x\overline{y}z$ *correspond le maxterme* $\overline{(x\overline{y}z)} = \overline{x} \vee y \vee \overline{z}$.

***Remarque* 2.89.** Pour déterminer la FCN de f, on détermine la FDN de $\overline{f}$ puis on en déduit la FCN de f.

2.9 Circuits logiques

Définition 2.90. Un circuit logique est une abstraction utilisée pour la conception des circuits physiques des ordinateurs.

Un tel circuit est constitué d'une ou plusieurs entrées et d'une sortie.

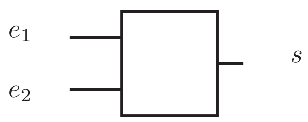

Fig. 2.1 – exemple de circuit logique.

Un circuit logique est formé par les circuits de base qui sont les circuits correspondant aux opérateurs de base de l'algèbre de Boole: la négation, la disjonction et la conjonction.

1. Le circuit non.
   L'effet de ce circuit est donné par la table de vérité de la négation. La représentation graphique de la négation correspond à la pointe d'une flèche triangulaire. Remarquons encore que ce circuit de base est le seul possédant une seule entrée.

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

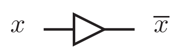

Fig. 2.2 – Symbole pour non.

2. Le circuit ou.
   L'effet de ce circuit est donné par la table de vérité de la disjonction. La représentation graphique de la négation correspond à la pointe d'une flèche aux bords arrondis.

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

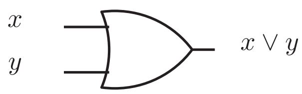

Fig. 2.3 – Symbole pour ou.

3. Le circuit et.
   L'effet de ce circuit est donné par la table de vérité de la conjonction. La représentation graphique de la négation correspond à la pointe d'une flèche en demi–disque.

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

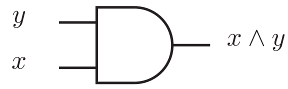

Fig. 2.4 – Symbole pour et.

En combinant ces trois circuits de base, il est possible de construire un circuit logique réalisant n'importe quelle fonction. Pour ce faire, il est judicieux de suivre les étapes données ci–dessous:

1. Ecrire la table de vérité correspondant à la fonction.
2. Déduire une expression simplifiée, en utilisant si nécessaire un diagrame de Karnaugh, de la fonction.
3. Réaliser le circuit logique correspondant.

On appelle circuit minimisé et/ou un circuit logique correspondant à une forme disjonstive réduite d'une fonction. Dans un tel circuit les circuits de base doivent suivre l'ordre suivant: non, et, ou.

Exemple 2.91.
Considérons la fonction $x \oplus y$ et donnons son circuit logique minimisé et/ou. On commence par représenter sa table de vérité:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A l'aide de la table de vérité, on dessine son diagramme de Karnaugh:

	y	$\overline{y}$
x		$\vee$
$\overline{x}$	$\vee$	

Donc on obtient la fonction $x\overline{y} \vee \overline{x}y$.

On dessine alors le circuit minimisé correspondant:

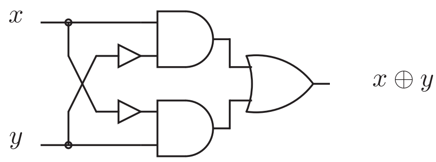

Fig. 2.5 – Circuit logique de <u>xor</u>.

Remarque 2.92. Le circuit logique de la fonction <u>xor</u> peut être représenté par le symbole ci–dessous:

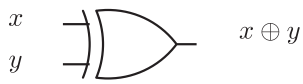

Fig. 2.6 – Symbole de <u>xor</u>.