1. INTRODUCTION : SYSTÈMES DE NUMÉRATIONS

- Le système décimal est un système de numération fondé sur la position des chiffres.
    - Tout nombre est représenté à l'aide d'un nombre limité de symboles.
    - Simplicité des algorithmes de calcul.
    - Valeur dépendant de la position occupée.

Les systèmes courants :

Système	Base	Symboles
Décimal	Dix	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Binaire	Deux	0,1
Octal	Huit	0,1,2,3,4,5,6,7
Hexadécimal	Seize	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Si nous pouvons compter sur nos dix doigts, l'ordinateur lui ne peut compter que sur deux états.
Dans un ordinateur, le support physique de l'information est un élément ne présentant que deux états magnétiques stables (symbolisés par **0** et **1**).
Conséquence : Toute information (numérique ou non), doit être codée en séquence de bits, c'est-à-dire en nombre binaires.
Les deux symboles (**0** et **1**), du système binaire sont appelés bits (binary digit).
Exemple : En base 10

- Nombre de symboles : 10
- Symboles : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- $3745902 = 3 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
- Algorithme de calcul : $\begin{array}{r} 14 \\ \underline{+\ 6} \\ 20 \end{array}$

Contre-exemple : Les chiffres romains

- La position ?? IV et VI
- Algorithme de calcul :

$$\begin{array}{r} \text{XIV} \\ +\ \text{VI} \\ \hline \text{XX} \end{array}$$

???

Exemple d'une autre base : la base 3

Base 10	Base 3
0	0
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100
10	101
11	102
12	110

Remarques :

- $\exists$ b entiers composés d'un seul chiffre en base b
- $\exists$ b^2 entiers composés d'au plus 2 chiffres en base b
- $\exists$ b^n entiers composés d'au plus n chiffres en base b

Ce sont en base 10 les entiers

0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;… ; b^n-1

Alors $(b^n)_{10}$ est le plus petit nombre dont l'écriture nécessite $n+1$ chiffres en base b

Exemple :

- $(3^1)_{10} = (10)_3$
- $(3^2)_{10} = (100)_3$

On en conclut que :

$$\left(b^n\right)_{10} = \left(1\underbrace{000...00}_{\text{n chiffres}}\right)_b$$

Soit $x = \left(\beta_i\right)_b$ l'écriture du nombre en base b,

Alors
$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot \left(1\underbrace{0'0000...00}_{\text{i zéros}}\right)_b$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot \left(b^i\right)_{10} \text{ (écriture du nombre en base 10)}$$

Exemple :

$$x = (112)_3 = 1 \cdot (100)_3 + 1 \cdot (10)_3 + 2 \cdot (1)_3$$
$$= 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$
$$= 9 + 3 + 2$$
$$= (14)_{10}$$

Transformation : base b $\longrightarrow$ base10

Exemple : base 3 $\longrightarrow$ base 10

$(120112)_3 \rightarrow (?)_{10}$

$$\begin{aligned}(120112)_3 &= 1\cdot 3^5 + 2\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 \text{ (notation étendue)}\\ &= 243 + 2\cdot 81 + 0 + 1\cdot 9 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1\\ &= 243 + 162 + 9 + 3 + 2\\ &= (419)_{10}\end{aligned}$$

Donc $(120112)_3 = (419)_{10}$

Transformation : base 10 $\longrightarrow$ base b

Exemple : base 10 $\longrightarrow$ base 3

Méthode 1

Il faut trouver sa notation étendue (somme de puissances de 3)

$$x = (59)_{10} = (?)_3$$

$3^3 < x < 3^4$	$59 - 3^3 = 59 - 27 = 32$
$3^3 < 32 < 3^4$	$32 - 3^3 = 32 - 27 = 5$
	$59 = 3^3 + 3^3 + 5$
$3 < 5 < 3^2$	$5 - 3^1 = 2$
	$59 = 3^3 + 3^3 + 3^1 + 2$
	$59 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$

$$x = (59)_{10} = (2012)_3$$

Méthode 2

$$x = (59)_{10} = (?)_3$$

Division	Quotient	Reste
59 :3	19	2
19 :3	6	1
6:3	2	0
2:3	0	2

On lit les restes de bas en haut

$$x = (59)_{10} = (2012)_3$$

Remarques :

Tout nombre entier positif en base b peut s'écrire sous la forme :

$$x = (\alpha_n ; \alpha_{n-1} ; \ldots ; \alpha_2 ; \alpha_1 ; \alpha_0)_b$$
avec $\alpha_i \in \{0;1;2;3;\ldots\ldots;b-1\}$

ou en notation étendue avec $b > 1$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_n \cdot b^n + \alpha_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + \alpha_2 \cdot b^2 + \alpha_1 \cdot b^1 + \alpha_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot b^i \quad , \text{avec } 0 \leq \alpha_i < b \end{aligned}$$

Exemple :

$$(419)_{10} = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9$$

$$(120112)_3 = 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2$$

Transformation : base b $\longrightarrow$ base b^n

Partager le nombre en tranche de n chiffres, en partant de la droite, et remplacer chaque tranche par son équivalent en base b^n.

Exemple : base 5 $\longrightarrow$ base 125 (5^3)

$$(10120334210)_5 = (?)_{125}$$

$$(10120334210)_5 = (10|120|334|210|)_5$$
$$= (5;35;94;55)_{125}$$

Car

$$(210)_5 = 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 55$$
$$(334)_5 = 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 4\cdot 5^0 = 94$$
$$(120)_5 = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 35$$
$$(10)_5 = 1\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 5$$

Transformation : base b^n → base b

Remplacer chaque chiffre du nombre par son équivalent en base b (écriture avec n chiffres)

Exemple : base $81(3^4)$ → base 3

$$(12;6;46)_{81} = ((0110)_3;(0020)_3;(1201)_3)_{81}$$
$$= (11000201201)$$

Car

Division	Quotient	Reste
12 :3	4	0
4 :3	1	1
1 :3	0	1

Division	Quotient	Reste
6 :3	2	0
2 :3	0	2

Division	Quotient	Reste
46 :3	15	1
15 :3	5	0
5 :3	1	2
1 :3	0	1

Tout nombre réel positif en base b peut s'écrire sous la forme :

$$x = (\alpha_n;\alpha_{n-1};\ldots;\alpha_2;\alpha_1;\alpha_0\ ,\alpha_{-1};\alpha_{-2};\alpha_{-3};\ldots)_b$$

avec $\alpha_i \in \{0;1;2;3;\ldots\ldots;b-1\}$

ou en notation étendue avec $b > 1$

$$x = \alpha_n \cdot b^n + \alpha_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + \alpha_2 \cdot b^2 + \alpha_1 \cdot b^1 + \alpha_0$$
$$+ \alpha_{-1} \cdot b^{-1} + \alpha_{-2} \cdot b^{-2} + \alpha_{-3} \cdot b^{-3} + \ldots$$
$$= \sum_{i \in Z} \alpha_i \cdot b^i$$

<u>Exemple :</u>

$$(419,52)_{10} = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$(120,112)_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3}$$

Transformation : base b $\longrightarrow$ base10

Ecrire le nombre en notation étendue.
(somme de puissance de b)

Exemple :

$$\begin{aligned}(1001{,}1011)_2 &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4}\\ &= 9{,}6875\end{aligned}$$

Transformation : base10 $\longrightarrow$ base b

On traite séparément la partie entière et la partie décimale du nombre.
La partie entière : idem qu'un entier positif.
La partie décimale :
Multiplier cette partie décimale et les parties décimales des produits successifs par b.
La séquence des parties entières des produits obtenus constitue la représentation en base b de la partie décimale du nombre.

Exemple :

$(11{,}4368)_{10} = (?)_5$

1. $(11)_{10} = (21)_5$
2. $(0{,}4368)_{10} = (0{,}2043)_5$

	PE	PD
$0{,}4368\cdot 5 =$	2	0,184
$0{,}184\cdot 5 =$	0	0,92
$0{,}92\cdot 5 =$	4	0,6
$0{,}6\cdot 5 =$	3	0

Nombres à développement infini périodique

1. $\left(0,\bar{1}\right)_b = \dfrac{1}{b-1}$
2. $\left(0,\bar{\beta}\right)_b = \dfrac{\beta}{b-1}$

<u>Preuve de 1 :</u>

Posons $x = \left(0,\bar{1}\right)_b = (0{,}1111111111...)$

Alors $b \cdot x = (10)_b \cdot \left(0,\bar{1}\right)_b = \left(1,\bar{1}\right)_b$

$= 1_b + \left(0,\bar{1}\right)_b = 1 + x$

D'où $bx - x = 1$

$x(b-1) = 1 \qquad x = \dfrac{1}{b-1}$

On conclut que $\left(0,\bar{1}\right)_b = \dfrac{1}{b-1}$

<u>Preuve de 2 :</u>

$$\left(0,\bar{\beta}\right)_b = \beta \cdot \left(0,\bar{1}\right)_b = \beta \cdot \frac{1}{b-1} = \frac{\beta}{b-1}$$