Good Question

marcaas 202228000206085

2023 年 4 月 18 日

1 660

问题 1.1.

$$\lim_{x\to\infty} x^2(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) =$$

问题 1.2. 设 a, b 为常数，且 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b\right) = 0$. 则 $a = (\quad), b = (\quad)$.

问题 1.3. $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2$, 则 $f''(0) =$

问题 1.4. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\quad), \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (\quad), y = y(x)$ 在任意点处的曲率 $k = (\quad)$

问题 1.5. 设 $f(x) = \ln(\frac{1-2x}{1+3x}), n \geqslant 2$, 则 $f^{(n)}(0) = (\quad)$

问题 1.6. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$, 则 $b = (\quad)$

问题 1.7.

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

问题 1.8. 设 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-(\sin x)f(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x\to0}\frac{6-f(x)}{x^2} = (\quad)$

问题 1.9. 设 $f(x)$ 在 $[a, = +\infty)$, 连续, 则" $\exists x_n \in [a, +\infty)$, 有 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ ", 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界的 ( ) 条件.

2 880

问题 2.1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续的奇函数，a 为常数，则必为偶函数的是 ( )

a) $\int_0^x \mathrm{d}u \int_a^u t f(t)\,\mathrm{d}t$

b) $\int_a^x \mathrm{d}u \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$

c) $\int_0^x \mathrm{d}u \int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t$

d) $\int_a^x \mathrm{d}u \int_0^u t f(t)\,\mathrm{d}t$

问题 2.2. 设数列 a_n 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$，且 $|q| < 1$，证明：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

问题 2.3. 设数列 $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|a|, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases}$$

问题 2.4. 证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k\} \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \ldots, k)$

3 ZY

问题 3.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{3+t^2}\,\mathrm{d}t}{x(e^{x^2}-1)}=$$

问题 3.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=$$

问题 3.3. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点，并判别间断点的类型。

问题 3.4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1-n\sin^2\pi x}$，分析 $f(x)$ 的间断情况。

问题 3.5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{1}{n^x}\quad(0<x<+\infty)$，则 $f(x)$ 在其间断点处的值为?

问题 3.6. 记 $f(x)=27x^3+5x^2-2$ 的反函数为 f^{-1}，求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(27x)-f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$$

问题 3.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$$

问题 3.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{\frac{x^2}{2}})\sin\frac{x^2}{2}}$$

问题 3.9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

问题 3.10. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$$

并求常数 A,B .

问题 3.11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x-x}, & x<0\\ \dfrac{e^{-1}+\frac{1}{2}x^2+x-1}{x\sin\frac{x}{6}}, & x>0\end{cases}$ $g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]$

问题 3.12. 设 $\alpha\geqslant 5$ 且为常数, 则 k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^\alpha+8x^4+2)^k-x]$$

存在, 并求此极限值.

问题 3.13. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

问题 3.14. 设当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时, $a\leqslant f(x)\leqslant b$, 并设存在常数 $k, 0\leqslant k<1$, 对于 $[a,b]$ 上的任意两点 x_1 与 x_2, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$$

证明:

1. 存在唯一的 $\epsilon\in[a,b]$ 使 $f(\epsilon)=\epsilon$;
2. 对于任意给定的 $x_1\in[a,b]$ 定义 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\epsilon$.