

# Good Question

marcaas 202228000206085

2023 年 4 月 12 日

## 1 880

问题 1.1. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内为连续的奇函数,  $a$  为常数, 则必为偶函数的是 ( )

- a)  $\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$                       b)  $\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$   
c)  $\int_0^x du \int_a^u f(t) dt$                       d)  $\int_a^x du \int_0^u t f(t) dt$

问题 1.2. 设数列  $a_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , 且  $|q| < 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

问题 1.3. 设数列  $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|a|, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases}$$

问题 1.4. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ( $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$ )

## 2 660

问题 2.1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}} \right) =$$

问题 2.2. 设  $a, b$  为常数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$ . 则  $a = ( )$ ,  $b = ( )$ .

问题 2.3.  $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$ , 则  $f''(0) =$

问题 2.4. 设  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} = ( )$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = ( )$ ,  $y = y(x)$  在任意点处的曲率  $k = ( )$

问题 2.5. 设  $f(x) = \ln\left(\frac{1-2x}{1+3x}\right)$ ,  $n \geq 2$ , 则  $f^{(n)}(0) = ( )$

问题 2.6. 设有界函数  $f(x)$  在  $(c, +\infty)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$ , 则  $b = ( )$

问题 2.7.

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$$

问题 2.8. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6-f(x)}{x^2} = ( )$

问题 2.9. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$ , 连续, 则“ $\exists x_n \in [a, +\infty)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ”, 是  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  无界的 ( ) 条件.

## 3 ZY

问题 3.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{3+t^2} dt}{x(e^{x^2}-1)} =$$

问题 3.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \cot x - \frac{1}{x} \right) =$$

问题 3.3. 求函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$  的间断点, 并判别间断点的类型.

问题 3.4. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 - n \sin^2 \pi x}$ , 分析  $f(x)$  的间断情况.

问题 3.5. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{1}{n^x}$  ( $0 < x < +\infty$ ), 则  $f(x)$  在其间断点处的值为?

问题 3.6. 记  $f(x) = 27x^3 + 5x^2 - 2$  的反函数为  $f^{-1}$ , 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(27x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$$

问题 3.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(1+x)]}{x}$$

问题 3.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}) \sin \frac{x^2}{2}}$$

问题 3.9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

问题 3.10. 设函数  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  ( $x > 0$ ), 证明: 存在常数  $A, B$ , 使得当  $x \rightarrow 0^+$  时, 恒有

$$f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$$

并求常数  $A, B$ .

问题 3.11. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x - x}, & x < 0 \\ e^{-1} + \frac{1}{2}x^2 + x - 1, & x > 0 \end{cases}$   $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)]$

问题 3.12. 设  $\alpha \geq 5$  且为常数, 则  $k$  为何值时极限

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^\alpha + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在, 并求此极限值.

问题 3.13. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2}]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$

问题 3.14. 设当  $a \leq x \leq b$  时,  $a \leq f(x) \leq b$ , 并设存在常数  $k, 0 \leq k < 1$ , 对于  $[a, b]$  上的任意两点  $x_1$  与  $x_2$ , 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

证明:

1. 存在唯一的  $\epsilon \in [a, b]$  使  $f(\epsilon) = \epsilon$ ;

2. 对于任意给定的  $x_1 \in [a, b]$  定义  $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \epsilon$ .