Good Question

marcaas

2023年4月19日

1 660

问题 1.1.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 (2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) =$$

解. $\diamondsuit x = \frac{1}{t}, x \to \infty, t \to 0$, 记原式 = I

$$I = \lim_{t \to 0} \frac{2^t - 2^{\frac{t}{t+1}}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} 2^t \frac{1 - 2^{\frac{t}{t+1} - t}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - 2^{\frac{-t^2}{t+1}}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^2}{t+1} \ln 2}{t^2}$$

$$= \ln 2$$

问题 1.2. 设 a,b 为常数,且 $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b\right)=0$.则 $a=(),b=()$.

问题 1.3.
$$f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$$
,则 $f''(0) =$

解. 设
$$g(x) = (x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$$
, 则 $f(x) = x^2 g(x)$, 此时

$$f'(x) = (x^2)'g(x) + 2(x^2)'g'(x) + x^2g'(x)$$

当 x = 0 时, $2(x^2)'g'(x) + x^2g'(x) = 0$, 所以

$$f'(0) = (x^2)'g(x)|_{x=0} = 2g(0)$$

$$g(0) = 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2$$
$$= (n!)^2$$

故原式 = $2(n!)^2$

问题 1.4. 设 y = y(x) 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\quad), \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (\quad), y = y(x)$ 在任意点处的 曲率 $k = (\quad)$

解.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(1/t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

关于曲率,在直角坐标方程下有

$$K = \frac{|y'|}{(1 + {v'}^2)^{3/2}}$$

在参数方程下有

$$K = \frac{|\varphi'(t)\omega'(t) - \omega'(t)\varphi'(t)|}{|\varphi'^{2}(t) - \omega'^{2}(t)|^{3/2}}$$

曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K}$$

问题 1.5. 设 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x}, n \ge 2$,则 $f^{(n)}(0) = ($)

 \mathbf{M} . 对 f(x) 进行变形

$$f(x) = \ln(1 + 2x) - \ln(1 + 3x)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时,有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}$$

问题 1.6. 设有界函数 f(x) 在 $(c, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b$, 则 b = ()

解. [分析] 方法 1

若知道以下事实: 由 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = b > 0 (< 0)$

问题 1.7.

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x.$$

问题 1.8. 设 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = 0$,则 $\lim_{x\to 0} \frac{6 - f(x)}{x^2} = ($)

问题 1.9. 设 f(x) 在 $[a, = +\infty)$,连续,则" $\exists x_n \in [a, +\infty)$,有 $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$ ",是 f(x) 在 $[a, +\infty)$ 无界的 ()条件.

2 880

问题 2.1. 设 f(x) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续的奇函数, a 为常数,则必为偶函数的是()

a)
$$\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$$

b)
$$\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$$

c)
$$\int_0^x du \int_a^u f(t) dt$$

d)
$$\int_a^x du \int_0^u t f(t) dt$$

问题 2.2. 设数列 a_n 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$,且 |q| < 1,证明: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

问题 2.3. 设数列 $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$, 证明:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1 + |a|, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases}$$

问题 2.4. 证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k\}$ $(a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k)$

3 **ZY**

问题 3.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{\sin x}^{x} \sqrt{3 + t^2} \, \mathrm{d}t}{x(e^{x^2} - 1)} =$$

问题 3.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) =$$

问题 3.3. 求函数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点,并判别间断点的类型。

问题 3.4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 - n\sin^2 \pi x}$,分析 f(x) 的间断情况。

问题 3.5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \cos^n \frac{1}{n^x}$ $(0 < x < +\infty)$,则 f(x) 在其间断点处的值为?

问题 3.6. 记 $f(x) = 27x^3 + 5x^2 - 2$ 的反函数为 f^{-1} ,求极限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f^{-1}(27x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$$

问题 3.7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(1+x)]}{x}$$

问题 3.8.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1 + x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}})\sin\frac{x^2}{2}}$$

问题 3.9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

问题 3.10. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (x>0), 证明: 存在常数 A,B, 使得当 $x\to 0^+$ 时, 恒有

$$f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$$

并求常数 A, B.

问题 3.11. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x - x}, & x < 0\\ \frac{e^{-1} + \frac{1}{2}x^2 + x - 1}{x\sin\frac{x}{6}}, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$$

 $\Re \lim_{x\to 0} f[g(x)]$

问题 3.12. 设 $\alpha \ge 5$ 且为常数,则 k 为何值时极限

$$I = \lim_{x \to +\infty} [(x^{\alpha} + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在,并求此极限值.

问题 3.13. 求
$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$$

问题 3.14. 设当 $a \le x \le b$ 时, $a \le f(x) \le b$, 并设存在常数 $k, 0 \le k < 1$, 对于 [a, b] 上的任意两点 x_1 与 x_2 , 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2|$$

证明:

1. 存在唯一的 $\varepsilon \in [a,b]$ 使 $f(\varepsilon) = \varepsilon$;

2. 对于任意给定的 $x_1 \in [a,b]$ 定义 $x_{n+1} = f(x_n), n=1,2,\cdots,$ 则 $\lim_{n \to \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \to \infty} x_n = \varepsilon$.

4 月

问题 4.1.

$$\int \frac{\arctan x}{x^4} \, \mathrm{d}x$$

解.

$$I = -\frac{1}{3} \int \arctan x \, dx^{-3}$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{\arctan x}{x^3} - \int \frac{1}{x^3 \cdot (1 + x^2)} \, dx \right)$$

$$\int \frac{1}{x^3 \cdot (1 + x^2)} \, dx = \int \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x \cdot (1 + x^2)} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-2} - \int \frac{1}{x \cdot (1 + x^2)} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x \cdot (1 + x^2)} \, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2} \, dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1 + x^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}}$$

问题 4.2.

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

解.

123

问题 4.3.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x (1 + x \ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.4.

$$\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} \, dx$$

问题 4.5.

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,\mathrm{d}x$$

问题 4.6.

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$$

问题 4.7.

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.8.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x}$$

问题 4.9.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + 5\cos x}$$

问题 4.10.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5}$$

问题 4.11.

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.12.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos x}$$

问题 4.13.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \tan x}$$

问题 4.14.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x + 4\cos x}$$

问题 4.15.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.16.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin 2x}$$

问题 4.17.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.18.

$$\int \sin 5x \sin 7x \, \mathrm{d}x$$

问题 4.19.

$$\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$$

问题 4.20.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^4 x}$$

问题 4.21.

$$\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.22.

$$\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

问题 4.23.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x$$