

Good Question

marcaas

2023 年 4 月 18 日

1 660

问题 1.1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}} \right) =$$

解. 令 $x = \frac{1}{t}, x \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$, 记原式 $= I$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 2^{\frac{t}{t+1}}}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 2^t \frac{1 - 2^{\frac{t}{t+1}-t}}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{\frac{-t^2}{t+1}}}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{t+1} \ln 2}{t^2} \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

问题 1.2. 设 a, b 为常数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^6} - ax^2 - b) = 0$. 则 $a = (\quad), b = (\quad)$.

问题 1.3. $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$, 则 $f''(0) =$

解. 设 $g(x) = (x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$, 则 $f(x) = x^2 g(x)$, 此时

$$f'(x) = (x^2)' g(x) + 2(x^2)' g'(x) + x^2 g'(x)$$

当 $x = 0$ 时, $2(x^2)' g'(x) + x^2 g'(x) = 0$, 所以

$$f'(0) = (x^2)' g(x)|_{x=0} = 2g(0)$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2 \\ &= (n!)^2 \end{aligned}$$

故原式 $= 2(n!)^2$

问题 1.4. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = (\quad), \frac{d^2y}{dx^2} = (\quad), y = y(x)$ 在任意点处的曲率 $k = (\quad)$

解.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(1/t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1+t^2}{t} = -\frac{1+t^2}{t^3}\end{aligned}$$

关于曲率, 在直角坐标方程下有

$$K = \frac{|y'|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

在参数方程下有

$$K = \frac{|\varphi'(t)\omega'(t) - \omega'(t)\varphi'(t)|}{|\varphi'^2(t) - \omega'^2(t)|^{3/2}}$$

曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K}$$

问题 1.5. 设 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x}, n \geq 2$, 则 $f^{(n)}(0) = ()$

解. 对 $f(x)$ 进行变形

$$f(x) = \ln(1+2x) - \ln(1+3x)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}$$

问题 1.6. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$, 则 $b = ()$

解. [分析] 方法 1

若知道以下事实: 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b > 0 (< 0)$

问题 1.7.

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$$

问题 1.8. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6-f(x)}{x^2} = ()$

问题 1.9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$, 连续, 则“ $\exists x_n \in [a, +\infty)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ”, 是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界的 $()$ 条件.

2 880

问题 2.1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续的奇函数, a 为常数, 则必为偶函数的是 $()$

a) $\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$

b) $\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$

c) $\int_0^x du \int_a^u f(t) dt$

d) $\int_a^x du \int_0^u t f(t) dt$

问题 2.2. 设数列 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 且 $|q| < 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

问题 2.3. 设数列 $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|a|, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases}$$

问题 2.4. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$)

3 ZY

问题 3.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{3+t^2} dt}{x(e^{x^2}-1)} =$$

问题 3.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) =$$

问题 3.3. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点, 并判别间断点的类型。

问题 3.4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 - n \sin^2 \pi x}$, 分析 $f(x)$ 的间断情况。

问题 3.5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{1}{n^x}$ ($0 < x < +\infty$), 则 $f(x)$ 在其间断点处的值为?

问题 3.6. 记 $f(x) = 27x^3 + 5x^2 - 2$ 的反函数为 f^{-1} , 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(27x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$$

问题 3.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(1+x)]}{x}$$

问题 3.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}) \sin \frac{x^2}{2}}$$

问题 3.9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

问题 3.10. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$), 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有

$$f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$$

并求常数 A, B .

问题 3.11. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x - x}, & x < 0 \\ \frac{e^{-1} + \frac{1}{2}x^2 + x - 1}{x \sin \frac{x}{6}}, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)]$

问题 3.12. 设 $\alpha \geq 5$ 且为常数, 则 k 为何值时极限

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^\alpha + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在, 并求此极限值.

问题 3.13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$

问题 3.14. 设当 $a \leq x \leq b$ 时, $a \leq f(x) \leq b$, 并设存在常数 $k, 0 \leq k < 1$, 对于 $[a, b]$ 上的任意两点 x_1 与 x_2 , 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

证明:

1. 存在唯一的 $\epsilon \in [a, b]$ 使 $f(\epsilon) = \epsilon$;
2. 对于任意给定的 $x_1 \in [a, b]$ 定义 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \epsilon$.

4 月

问题 4.1.

$$\int \frac{\arctan x}{x^4} dx$$

解.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \int \arctan x dx^{-3} \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\arctan x}{x^3} - \int \frac{1}{x^3 \cdot (1+x^2)} dx \right) \\ \int \frac{1}{x^3 \cdot (1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^{-2} - \int \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} dx \\ \int \frac{1}{x \cdot (1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

问题 4.2.

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

解.

☒

问题 4.3.

$$\int \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx$$

问题 4.4.

$$\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$$

问题 4.5.

$$\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) dx$$

问题 4.6.

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$$

问题 4.7.

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

问题 4.8.

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x}$$

问题 4.9.

$$\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$$

问题 4.10.

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

问题 4.11.

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

问题 4.12.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

问题 4.13.

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x}$$

问题 4.14.

$$\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

问题 4.15.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

问题 4.16.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin 2x}$$

问题 4.17.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

问题 4.18.

$$\int \sin 5x \sin 7x dx$$

问题 4.19.

$$\int \sin 2x \cos 3x dx$$

问题 4.20.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$$

问题 4.21.

$$\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

问题 4.22.

$$\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

问题 4.23.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$