Courants de Foucault transient en coordonnées cylindriques avec symétrie de rotation autour de l'axe $\vec{e}_z$

On a l'équation en potentiel $\mathbf{A}$

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

puis

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), l'opérateur rotationnel est tel que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Par symétrie, $\dfrac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ donc

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $\mathbf{J} = J_\theta \, \vec{e}_\theta$ donc $\mathbf{A} = A_\theta \, \vec{e}_\theta$ ce qui implique que

$$\nu \nabla \times \mathbf{A} = \nu \begin{pmatrix} -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} \end{pmatrix}.$$

On va supposer que ν est constant par morceaux. Par conséquent,

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} \right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre

$$\nu\left(-\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho}\right)\right)+\sigma\partial_t A_\theta = J_\theta$$

Testons cette équation par une fonction A'_θ et intégrons sur le domaine Ω en supposant une condition de Dirichlet homogène sur le bord du domaine de calcul, il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(-A'_\theta\partial_{zz}A_\theta - A'_\theta\partial_\rho\left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho A_\theta\right)\right)\right)\rho d\rho d\theta dz &= \int_\Omega\left(\partial_z A'_\theta\partial_z A_\theta - A'_\theta\partial_\rho\left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho A_\theta\right)\right)\right)\rho d\rho d\theta dz,\\ &= \int_\Omega\left(\partial_z A'_\theta\partial_z A_\theta + \frac{1}{\rho^2}\partial_\rho\left(\rho A'_\theta\right)\partial_\rho\left(\rho A_\theta\right)\right)\rho d\rho d\theta dz\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\partial_\rho(\rho A_\theta) = A_\theta + \rho\partial_\rho A_\theta$$

Après résolution, le champ $\mathbf{B}$ sur l'axe $\rho = 0$ peut être calculé par extrapolation en calculant le champ en $\rho = \varepsilon \ll 1$.

Résolution d'un problème temporel par z-transform

L'équation transiente en haut de ce document devient, après application de la z-transform,

$$\nabla\times(\mu\nabla\times\mathbf{A}_z)+\frac{\sigma(1-z)}{\Delta t}\mathbf{A}_z = \mathbf{J}_z$$

qui est l'analogue discret d'un problème harmonique de fréquence

$$\omega = \frac{\sigma(1-z)}{i\Delta t}$$