Courants de Foucault transient en coordonnées cylindriques avec symétrie de rotation autour de l'axe \vec{e}_z

On a l'équation en potentiel A

$$abla imes (
u
abla imes \mathbf{A}) + \sigma rac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

puis

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$
.

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) , l'opérateur rotationnel est tel que

$$abla imes \mathbf{A} = egin{pmatrix} rac{1}{
ho} rac{\partial A_z}{\partial heta} - rac{\partial A_ heta}{\partial z} \ rac{\partial A_
ho}{\partial z} - rac{\partial A_z}{\partial
ho} \ rac{1}{
ho} rac{\partial (
ho A_ heta)}{\partial
ho} - rac{1}{
ho} rac{\partial A_
ho}{\partial heta} \end{pmatrix}$$

Par symétrie, $\dfrac{\partial}{\partial heta} \equiv 0$ donc

$$abla imes \mathbf{A} = egin{pmatrix} -rac{\partial A_{ heta}}{\partial z} \ rac{\partial A_{
ho}}{\partial z} -rac{\partial A_{z}}{\partial
ho} \ rac{1}{
ho}rac{\partial (
ho A_{ heta})}{\partial
ho} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, ${f J}=J_{ heta}\,ec e_{ heta}$ donc ${f A}=A_{ heta}\,ec e_{ heta}$ ce qui implique que

$$u
abla imes \mathbf{A} =
u egin{pmatrix} -rac{\partial A_{ heta}}{\partial z} \ 0 \ rac{1}{
ho}rac{\partial (
ho A_{ heta})}{\partial
ho} \end{pmatrix}.$$

On va supposer que u est constant par morceaux. Par conséquent,

$$abla imes (
u
abla imes {f A}) = egin{pmatrix} 0 \ -rac{\partial^2 A_ heta}{\partial z^2} - rac{\partial}{\partial
ho}igg(rac{1}{
ho}rac{\partial(
ho A_ heta)}{\partial
ho}igg) \ 0 \end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre

$$u\left(-rac{\partial^2 A_ heta}{\partial z^2} - rac{\partial}{\partial
ho}\left(rac{1}{
ho}rac{\partial(
ho A_ heta)}{\partial
ho}
ight)
ight) + \sigma\partial_t A_ heta = J_ heta$$

Testons cette équation par une fonction A'_{θ} et intégrons sur le domaine Ω en supposant une condition de Dirichlet homogène sur le bord du domaine de calcul, il vient

$$\begin{split} \int_{\Omega} \left(-A_{\theta}' \partial_{zz} A_{\theta} - A_{\theta}' \partial_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \partial_{\rho} \left(\rho A_{\theta} \right) \right) \right) \, \rho d\rho d\theta dz &= \int_{\Omega} \left(\partial_{z} A_{\theta}' \partial_{z} A_{\theta} - A_{\theta}' \partial_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \partial_{\rho} \left(\rho A_{\theta} \right) \right) \right) \, \rho d\rho d\theta dz, \\ &= \int_{\Omega} \left(\partial_{z} A_{\theta}' \partial_{z} A_{\theta} + \frac{1}{\rho^{2}} \partial_{\rho} \left(\rho A_{\theta}' \right) \partial_{\rho} \left(\rho A_{\theta} \right) \right) \, \rho d\rho d\theta dz, \end{split}$$

Ensuite,

$$\partial_{\rho}(\rho A_{\theta}) = A_{\theta} + \rho \partial_{\rho} A_{\theta}$$

Après résolution, le champ ${\bf B}$ sur l'axe ho=0 peut être calculé par extrapolation en calculant le champ en $ho=\varepsilon\ll 1$.

Résolution d'un problème temporel par z-transform

L'équation transiente en haut de ce document devient, après application de la z-transform,

$$abla imes (\mu
abla imes {f A}_z) + rac{\sigma(1-z)}{\Delta t} {f A}_z = {f J}_z$$

qui est l'analogue discret d'un problème harmonique de fréquence

$$\omega = rac{\sigma(1-z)}{i\Delta t}$$