Algèbre 2 - Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

— Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.

— Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités

— Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.

— Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.

— Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.

— Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

---

1) Forme développée

Définition. On appelle polynôme du second degré toute fonction P définie sur $\mathbf{R}$ par

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

- l'expression ci-dessus est la appelée la forme développée de P ;
- a, b et c sont appelés les coefficients de P ;
- a est appelé le coefficient dominant de P ;
- le polynôme P est dit unitaire si $a = 1$.

Définition. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, le nombre u est dit racine de f si $f(u) = 0$.

---

2) Forme canonique

Exercices. LM1 : 2B.

Propriété. Le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ se récrit sous la forme :

$$\boxed{a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

où

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \quad , \quad \boxed{\beta = -\frac{\Delta}{4a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

À noter que :

$$\boxed{\beta = P(\alpha)}$$

- l'expression ci-dessus est la appelée la forme canonique de P ;
- la quantité Δ est appelée le discriminant de P.

Preuve. Par complétion du carré :

$$x^2 + 2Ax = (x + A)^2 - A^2$$

Exercice. Trouver la forme canonique de $2x^2 - 4x + 5$: (a) par complétion du carré ; (b) en appliquant les formules ci-dessus.

Illustration Geogebra.

---

3) Forme factorisée

Théorème [de factorisation]. Le réel u est racine du trinôme du second degré P si, et seulement si, il existe un polynôme du premier degré Q tel que,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = (x - u)Q(x)$$

Preuve. La condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, factoriser $P(x) - P(u)$.

Exercice. $P(x) = 2x^2 + x - 1$. Trouver une racine puis factoriser $P(x)$ par identification des coefficients.

Propriété. Si le trinôme du second degré P, de coefficient dominant a, admet deux racines (éventuellement confondues) u et v, alors il se récrit sous la forme :

$$\boxed{P(x) = a(x - u)(x - v)}$$

Cette expression est la appelée la forme factorisée de P.

Preuve. Calcul.

Propriété. Si le trinôme du second degré P, de coefficient dominant a, admet deux racines (éventuellement confondues) u et v, avec $u \leqslant v$, alors P est du signe de a sur les intervalles $]-\infty; u[$ et $]v; +\infty[$ et du signe opposé à celui de a sur l'intervalle $]u; v[$.

Illustration Geogebra.

Preuve. Règle des signes.

Exercice. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe du trinôme : $-2(x - 1)(x + 3)$.

Exercice. LM1 : 4A.

---

4) Théorème de résolution

Exercices. LM1 : 2C (utiliser la forme canonique pour factoriser).

Théorème [de résolution des équations polynomiales du second degré].
Soit P un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

— Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de racines.

— Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine (dite double) :

$$u = -\frac{b}{2a}$$

et

$$P(x) = a(x-u)^2$$

— Si $\Delta > 0$, P admet deux racines :

$$u_{\pm} = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

et

$$P(x) = a(x-u_+)(x-u_-)$$

Preuve. Utiliser la troisième identité remarquable pour résoudre l'équation : $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$.

Exercices. LM1 : 3B.

Exercice. Appliquer le théorème à :

$$5x^2 - 4x + 1 \qquad 3x^2 + 12x + 12 \qquad 2x^2 - 10x + 12 \qquad x^2 - x - 1$$

---

5) Somme et produit des racines

Lemme. Pour tous nombres réels x, α et β,

$$\boxed{(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv}$$

Propriété. Soient S et P deux nombres réels. Alors :

$$u + v = S \text{ et } uv = P \iff u \text{ et } v \text{ sont racines du polynôme } x^2 - Sx + P$$

Preuve. Utiler le théorème de factorisation et le lemme.

Exercices.

1. Deux nombres ont pour somme 2 et produit -1. Quels sont-ils ?
2. *Idem* avec 5 et 7.

Théorème [Formules de Viète ou Relations coefficients-racines]. Si le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet pour racines (éventuellement confondues) les nombres u et v, alors :

$$\boxed{u + v = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{uv = \frac{c}{a}}$$

Exercices. LM1 : 3D.

---

6) Variations d'un trinôme

Théorème. Soit P un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

— Si $a > 0$, alors P est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, et admet en α un minimum qui vaut β.

— Si $a < 0$, alors P est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, et admet en α un maximum qui vaut β.

où les α et β sont ceux de la forme canonique.

Preuve. Utiliser la forme canonique et les variations de la fonction carré.

Ainsi, si le coefficient dominant a est positif, la courbe de P est « en U », et s'il est négatif, elle est « en U inversé ».

Exercices. LM1 : 5A. LDA1 : 22.

---

7) Inégalité arithmético-géométrique

Propriété [Inégalité arithmético-géométrique d'ordre 2].
Pour tous nombres réels $a, b \geqslant 0$,

$$\boxed{\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}}$$

avec égalité si, et seulement si, $a = b$.

Preuve. Découle du fait que : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Exercices.

1. Appliquer cette inégalité aux couples $(10\,;10)$, $(5\,;20)$, $(2\,;50)$ et $(1\,;100)$.
   Commentaire ?
2. Trouver le minimum sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$.
