Géométrie 1 – Calcul vectoriel et produit scalaire.

Contenus.

- Produit scalaire (avec le cosinus). Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expressions et critère d'orthogonalité.
- Première identité remarquable. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Capacités.

- Avec le produit scalaire, prouver une orthogonalité, calculer un angle ou une longueur.
- Dans un problème, calculer un produit scalaire en choisissant une méthode adaptée.

* * *

0. Introduction.

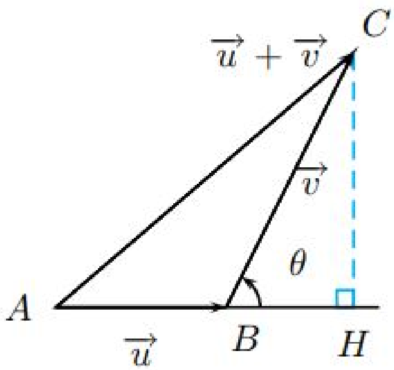

FIG. 1 – Cas 1

On pose : $d = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)$.

1. **Prouver que :** $d = \frac{1}{2}\left(AH^2 - AB^2 - BH^2\right)$.
2. En déduire que $d = AB \cdot AH$.
3. En déduire que $d = AB \cdot BC \cdot \cos\theta$.
4. Remarquer que le triangle ABC est rectangle en B si, et seulement si, $d = 0$.

La quantité d s'appelle le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (dans cet ordre).

1. Le produit scalaire : « formule physique ».

Définition. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Si ces deux vecteurs sont tous deux non nuls, on appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, le *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est, par définition, nul.

Illustration. Geogebra : Produit scalaire dans le plan - Christine Sacré.

Illustration. Geogebra : Produit scalaire : 3 façon(s) de le calculer - Duchene.

Exercice. Soit ABC un triangle équilatéral de côté $c > 0$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice. Soit ABCD un carré de côté $c > 0$ et de centre O. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$.

Exercices. LM1 : 2A.

Propriété. Pour tout vecteur $\vec{u}$,

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

Cette quantité se somme le *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Preuve. $\cos(\vec{u}, \vec{u}) = 1$.

Propriété [Symétrie]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

On dit que le produit scalaire est *symétrique*.

Preuve. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$.

Propriété. Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Preuve. Immédiat.

Propriété. Soient ABC un vrai triangle. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \cdot AH}$$

avec + si A, H et B sont alignés dans cet ordre, et − sinon.

Attention : ce n'est pas la même figure qu'à l'introduction.

Preuve. *En classe. Refaire la figure.*

Illustration. Geogebra : Produit scalaire : 3 façon(s) de le calculer - Duchene.

Exercices. LM1 : 2C.1.

2. Expression analytique en base orthonormée.

On rappelle qu'une *base* du plan vectoriel est un couple de vecteurs non colinéaires, et qu'une base est dite *orthonormée* si ces deux vecteurs sont orthogonaux et unitaires.

Propriété. Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ **en base orthonormée**, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

On retrouve le critère d'orthogonalité.

Preuve. *En classe.*

Illustration. Geogebra : Produit scalaire : 3 façon(s) de le calculer - Duchene.

Exercices. LM1 : 2C.2, 2C.3 : Expression analytique.

Exercices. LM1 : 2D (sauf 2D.1) : Critère d'orthogonalité.

Exercice. Dans un repère orthonormé, démontrer que les droites d'équation réduite $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm' = -1$.

Propriété. Soit $\vec{u}\,(x, y)$ **en base orthonormée**, alors :

$$\boxed{\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2}$$

C'est une récriture du théorème de Pythagore. .

Propriété [Bilinéarité du produit scalaire]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels λ et μ,

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\mu \vec{v}) = \mu \vec{u} \cdot \vec{v}$

Preuve. Calcul en b.o.n.

Exercice. Énoncer la règle de double distributivité.

3. Formulaire.

Propriété [Identités remarquables]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}$$

Preuve. Bilinéarité et symétrie.

Exercice. En b.o.n., vérifier ces identités avec $\vec{u}\,(3\,;2)$ et $\vec{v}\,(-1\,;5)$.

Une simple récriture de ces identités remarquables donne :

Propriété [Formule de polarisation]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)}$$

Exercice. En b.o.n., vérifier cette identité pour $\vec{u}\,(-2\,;5)$ et $\vec{v}\,(3\,;4)$.

Exercices. LM1 : 4A.

4. Projection orthogonale sur une droite.

Propriété (admise). Soient $\mathscr{D}$ une droite et M un point extérieur à cette droite. Alors, il existe un unique point H de $\mathscr{D}$ tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$. On appelle ce point le *projeté orthogonal de* de M sur $\mathscr{D}$. Un point de $\mathscr{D}$ est appelé son propre *projeté orthogonal* sur $\mathscr{D}$.

Propriété. Soit $\mathscr{D}$ une droite et M un point. Alors, le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$ est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M. La distance MH est appelée la *distance* du point M à la droite $\mathscr{D}$.

Preuve. Th. de Pythagore.

Par exemple, dans le vrai triangle ABC, le pied de la hauteur issue du sommet A est le projeté orthogonal de A sur la droite (AB).

5. L'expression $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}$.

Théorème [de la médiane]. Soient A et B deux points, I leur milieu. Alors, pour tout point M,

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2$$

Preuve. Relation de Chasles et bilinéarité.

Corollaire. Soient A et B deux points. Alors, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Preuve. $\mathrm{MI} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Exercice. Soient A et B deux points avec AB = 2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \alpha$$

où α est un paramètre réel.

6. Loi des cosinus (ou Formule d'Al-Kashi).

Rappeler les notations usuelles pour un triangle.

Théorème [Loi des sinus] (rappel). Pour tout vrai triangle ABC,

$$\boxed{\frac{\sin\widehat{\mathrm{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\mathrm{C}}}{c} = \frac{2S}{abc}}$$

Preuve. Abaisser les hauteurs.

Théorème [Loi des cosinus]. Pour tout vrai triangle ABC (avec les notations usuelles),

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}}$$

Preuve. $a^2 = \mathrm{BC}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2 = \cdots$.

La loi des cosinus et la loi des sinus permettent de résoudre tout triangle.

Exercice. On donne $a = 4$, $b = 5$ et $c = 7$. Calculer α, β et γ.

Exercice. On donne AB = 8, AC = 3 et $\alpha = 70°$. Calculer BC, β et γ.

6. Inégalités.

Théorème [Inégalité de Cauchy-Schwarz]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

avec égalité si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Preuves. (a) Cosinus. (b) Calcul en b.o.n.

Théorème [Inégalité triangulaire]. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|}$$

avec égalité si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Preuve. Élever au carré et utiliser Cauchy-Schwarz.

Une simple récriture donne :

Propriété [Inégalité triangulaire]. Pour tout triangle ABC,

$$\mathrm{AC} \leq \mathrm{AB}+\mathrm{BC}$$