Probabilités 0 – Rappels

(mise à jour : mars 2025)

Programme de Seconde

Histoire des mathématiques

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point, puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.

Contenus.

— Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.

— Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.

— Relation $\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

— Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

---

1. Univers, issues, événements.

Une expérience (de la réalité) est dite aléatoire si elle est renouvelable et si son résultat dépend du hasard (ex. jet d'un dé, tirage d'une carte). La science des Probabilités a pour objectif premier de modéliser les expériences aléatoires. Une expérience aléatoire est modélisée par un univers probabilisé.

Définitions.

— On appelle univers tout ensemble fini non vide.

— Les éléments d'un univers sont appelés les issues.

— Les parties d'un univers sont appelées les événements.

— L'univers est appelé l'événement certain.

— L'ensemble vide est appelé l'événement impossible.

— Un événement est dit élémentaire s'il ne contient qu'une issue.

Un univers se note Ω, ses issues se notent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Les issues (objets mathématiques) modélisent les résultats (objets de la réalité) de l'expérience aléatoire.

Soit désormais Ω un univers.

Définitions. Soient A et B des événements :

— l'événement $A \cup B$ se lit « A ou B » ;

— l'événement $A \cap B$ se lit « A et B »,

— l'événement $\Omega \setminus A = \overline{A}$ se lit « l'événement contraire de A » ;

— les événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B$ est l'événement impossible.

Propriétés.

$$\overline{\emptyset} = \Omega \qquad \overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A} \quad \text{pour tout A}$$

Évident.

Propriété [Lois de Morgan]. Pour tous événements A et B,

$$\boxed{\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}}$$

Preuve. Pour démontrer la première, utiliser une table d'appartenance. La seconde en découle.

---

2. Univers probabilisé.

Ici Ω est un univers de cardinal n.

Définitions. On appelle germe de probabilité tout n-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de nombres réels positifs ou nuls qui vérifie :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

On appelle probabilité sur Ω associée à ce germe de probabilité l'application $\mathbf{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout événement A, associe le nombre :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \sum_{i \,\mid\, \omega_i \in \mathrm{A}} p_i$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$$

Autrement dit, p_i est la probabilité de l'événement élémentaire associé à la i-ème issue.

On dit alors que Ω est muni de la probabilité $\mathbf{P}$ ou encore que $(\Omega, \mathbf{P})$ est un univers probabilisé. C'est cet objet mathématique qui modélise une expérience aléatoire.

Exemple. La probabilité $\mathbf{P}$ associée au germe :

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$$

est appelée la probabilité uniforme sur Ω. Elle sert à modéliser une situation d'équiprobabilité. Pour tout événement A,

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$$

---

3. Additivité

Soit désormais $(\Omega, \mathbf{P})$ un univers probabilisé.

Propriété [Additivité]. Si les événements A et B sont incompatibles, alors :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\mathrm{B})$$

Preuve. Séparer une somme en deux sous-sommes.

Corollaire. Si les événements $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k$ sont deux-à-deux incompatibles, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{A}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_j)$$

Preuve par récurrence.

Propriétés. (les quantificateurs sont sous-entendus)

- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0\,;1]$
- $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{A})$
- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbf{P}(\mathrm{B})$ ($\mathbf{P}$ est *croissante*)
- $\mathbf{P}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) - \mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Preuves. *Détailler en classe, avec des dessins.*

Propriété [Formule des 4 probabilités].
Pour tous événements A et B,

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + \mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}(\mathrm{B})}$$

Preuve. Écrire les sommes.