

Dérivation 5 - Mouvement

Généralités.

Un mobile se déplace le long d'un axe. Il peut s'agir par exemple d'un axe horizontal dans le cas d'un véhicule qui se déplace sur une route rectiligne, ou encore d'un axe vertical dans le cas de la chute d'un corps. Cet axe est muni d'une origine, d'une unité de distance et d'un sens. Le temps est représenté par la variable réelle t . L'instant initial sera souvent $t = 0$.

On appelle *loi horaire* de ce mobile la fonction x qui, à l'instant t , associe la position du mobile à cet instant, autrement dit son abscisse à cet instant sur l'axe considéré, noté $x(t)$. On supposera toujours que cette fonction est dérivable et que sa dérivée est elle-même dérivable.

On appelle *vitesse moyenne* du mobile entre deux instants t_1 et t_2 , avec $t_1 < t_2$, le nombre :

$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

On appelle *vitesse (instantanée)* du mobile à l'instant t le nombre :

$$v(t) = x'(t)$$

Cette vitesse instantanée n'est autre que la limite, quand h tend vers 0, de la vitesse moyenne entre les instants t et $t + h$.

Enfin, on appelle *accélération (instantanée)* du mobile à l'instant t le nombre :

$$\gamma(t) = v'(t)$$

Un mouvement est dit *uniforme* si la vitesse du mobile est constante.

Dans ce cas :

$$\gamma(t) = 0 \quad v(t) = v_0 \quad x(t) = v_0 t + x_0$$

où x_0 est la position du mobile à l'instant initial $t = 0$

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si l'accélération du mobile est constante.

Dans ce cas :

$$\gamma(t) = \gamma \quad v(t) = \gamma t + v_0 \quad x(t) = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

où v_0 et x_0 sont respectivement la vitesse du mobile et sa position à l'instant initial $t = 0$.

Exercices

1. Chute libre d'un corps (mouvement uniformément accéléré)

D'après les lois de la Physique, et sous certaines hypothèses simplificatrices, un corps en chute libre, soumis à l'accélération de la pesanteur, tombe selon un mouvement vertical et sa vitesse est proportionnelle au temps : $v(t) = g t$ où $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$. On suppose que le corps est lâché sans vitesse initiale du haut de la tour de Pise, à 58 m de hauteur.

- (a) Donner la loi horaire de la hauteur du corps.
- (b) Au bout de temps ce corps touchera-t-il le sol ?
- (c) Quelle sera alors sa vitesse, en m/s ? en km/h ?

2. Profondeur d'un puits.

Une pierre est lâchée dans un puits et on entend le « plouf » une seconde et demi plus tard. La vitesse du son est de 340 m/s. Au centimètre près, quelle est la profondeur du puits ?