Analyse 4 – Fonctions trigonométriques

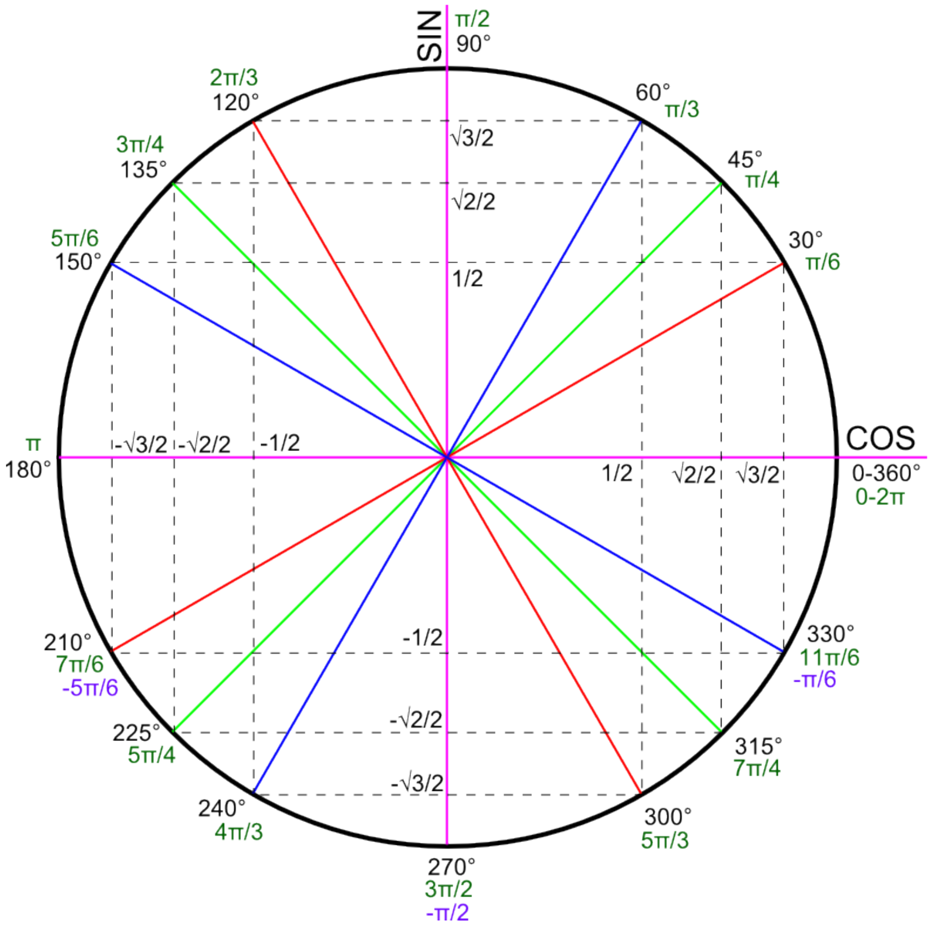
Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités

- **(C1)** Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- **(C2)** Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- **(C3)** Traduire graphiquement parité et périodicité.
- **(C4)** Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

Le cercle trigonométrique



1) Angle géométrique (rappels)

Rappel sur le notion d'angle géométrique (ou, plus proprement, de secteur angulaire) : définition, angle saillant, angle rentrant.

Définition. On considère un angle géométrique et un cercle de centre le sommet de cet angle et de rayon $R > 0$. Par définition, la *mesure* α de cet angle géométrique est le rapport de la longueur L de l'arc intercepté par cet angle et le rayon du cercle :

$$\boxed{\alpha \triangleq \frac{L}{R}}$$

qui ne dépend par de R.

Elle est comprise au sens large entre 0 et 2π.

Exercice. (a) Dans un cercle de rayon 2, un angle géométrique intercepte un arc de longueur 4. Quelle est sa mesure ? (b) Dans un cercle de rayon 3, un angle géométrique de mesure 1,5 intercepte un arc. Quelle est sa longueur ?

Rappel sur les notions d'angle nul, aigu, droit, obtu, plat et plein.

---

2) Unités de mesure angulaire

En Mathématiques, la mesure d'un angle géométrique est **sans unité**. En Physique, on lui attribue classiquement une unité : soit le radian (de $0\,\text{rad}$ à $2\pi\,\text{rad}$), soit le degré centigrade (de 0° à 360°). La formule de conversion est :

$$\boxed{180° = \pi\,\text{rad}}$$

qui correspond à un angle plat.

Ainsi :

$$30° = \frac{\pi}{6}\,\text{rad} \qquad 45° = \frac{\pi}{4}\,\text{rad} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} \qquad 90° = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Exercices.

- Convertir en radians : 15°, 50° et 160°.
- Convertir en degrés : $\frac{\pi}{12}$ rad, $\frac{3\pi}{5}$ rad et $\frac{13\pi}{15}$ rad.
- Convertir 37° en radians.
- Convertir $\frac{11\pi}{17}$ rad en degrés décimaux, puis en degrés sexagésimaux.

Exercices. LM1 : 1C : 1.

Pour mesurer les angles, d'autres unités existent, notamment le quadrant (géométrie), le grade (géographie) et le millième (artillerie).

---

3) Angle orienté de demi-droites

Orienter le plan affine, c'est le munir d'un sens de parcours : soit le sens *direct*, ou *trigonométrique*, qui est le sens **anti-horaire** ; soit le sens *indirect*, ou *rétrograde*, qui est le sens **horaire**. Désormais, le plan affine est muni du sens de parcours trigonométrique.

Définition. On appelle *angle orienté de demi-droites* tout couple de demi-droites de même origine.

Définition. Soit (d, d') un angle orienté de demi-droites, O étant l'origine commune de d et d'.

— Si l'angle géométrique saillant est engendré par une rotation de d vers d' dans le sens **direct**, la *mesure principale* de l'angle orienté (d, d') est par définition égale à celle de l'angle géométrique $\{d, d'\}$, affecté d'un signe **plus**.

— Si l'angle géométrique saillant est engendré par une rotation de d vers d' dans le sens **indirect**, la *mesure principale* de l'angle orienté (d, d') est par définition égale à celle de l'angle géométrique $\{d, d'\}$, affecté d'un signe **moins**.

— Si l'angle géométrique est plat, la *mesure principale* de l'angle orienté (d, d') est par définition égale à π.

La mesure principale d'un angle orienté est donc un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

En classe, montrer avec Géogebra.

---

4) Enroulement de la droite sur le cercle.

Le plan est muni d'un repère orthonormé **direct** $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{i}$.

Définition. On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition. On nomme $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = 1$. À tout réel x on associe le point M obtenu à partir du point de coordonnées $(1, x)$ par « enroulement » de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{C}$, dans le sens trigonométrique si $x \geqslant 0$, dans le sens rétrograde si $x \leqslant 0$. Ce point est appelé l'*image* de x.
On dit alors que x est *une mesure* de l'angle orienté de demi-droites $([\mathrm{OA}), [\mathrm{OM}))$. Si en outre x est dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, alors x est n'est autre que la mesure principale de cet angle orienté de demi-droites.
On dit alors que x est *une abscisse curviligne* du point M. Si en outre x est dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, on dit que x est l'*abscisse curviligne principale* du point M.

Illustration. YouTube.

Définition. Deux réels x et y sont dits *congrus* modulo 2π s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = x + k2\pi$.
On note alors :

$$\boxed{y \equiv x\ [2\pi]} \quad \text{ou} \quad \boxed{y \equiv x \bmod (2\pi)}$$

L'ensemble des nombres congrus à x modulo 2π se note $x + 2\pi\mathbf{Z}$.

Propriété. Deux réels x et y ont même image si, et seulement si, ils sont *congrus* modulo 2π.

Illustration Geogebra.

Ainsi, les mesures d'un angle orienté de demi-droites sont les nombres congrus à l'une d'entre elles modulo 2π. De même, les abscisses curvilignes d'un point du cercle trigonométrique sont les nombres congrus à l'une d'entre elles modulo 2π.

Exercices. LM1 : 1B, 2A, 2B (*y passer du temps*).

---

5) Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition. On appelle *cosinus* (resp. *sinus*) d'un nombre réel x l'abscisse (resp. l'ordonnée) de son image M par le procédé d'enroulement :

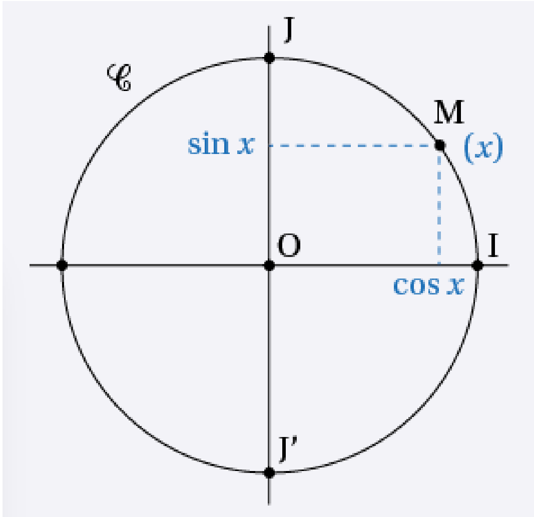


Illustration Geogebra.

Ces définitions sont cohérentes avec celles données au cycle 4 du cosinus et du sinus d'un angle géométrique aigu dans un triangle rectangle. *Expliquer en classe.*

Propriété [Théorème de Pythagore trigonométrique].
Pour tout nombre réel x,

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Exercices. LM1 : 1E.

Exercice. (a) Le point $\mathrm{M}(x)$ est dans le quadrant IV et $\cos x = 0,6$. Que vaut $\sin x$? (b) Le point $\mathrm{N}(x)$ est dans le quadrant II et $\sin x = 0,2$. Que vaut $\cos x$?

---

5) Angles remarquables

x (rad)	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
x (°)	**0**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

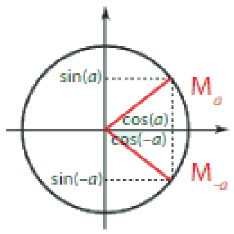
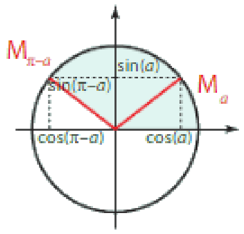
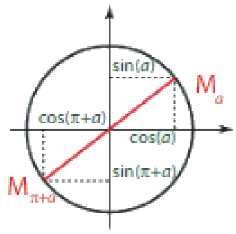
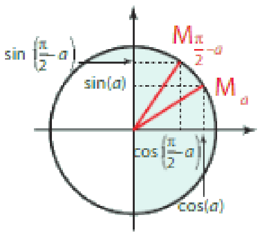
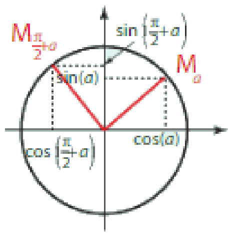
Preuves en classe.

Exercice. LM1 : 1D.

---

6) Angles associés

Formules de symétrie et de déphasage

	$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$	
	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

Explications en classe.

Illustration Geogebra.

Exercice. LM1 : 3A.

---

7) Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Cf. Cours **Miscellanées** pour les notions de parité et de périodicité.

Propriétés.

- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur **R**.
- Elles sont à valeurs dans $[-1\,;1]$.
- Elles sont périodiques de période 2π.
- La fonction cosinus est paire ; la fonction sinus est impaire.

Illustration Geogebra.

Exercice. LM1 : 4A (parité, périodicité).

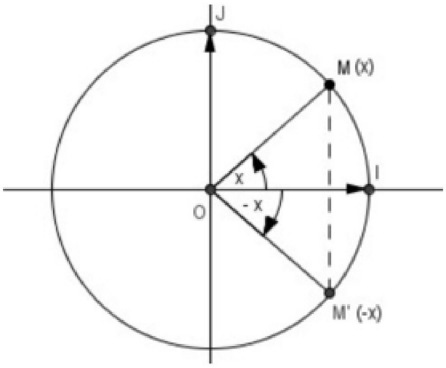
Exercice. Étudier (définition, parité, périodicité, variations, graphe) les fonctions :

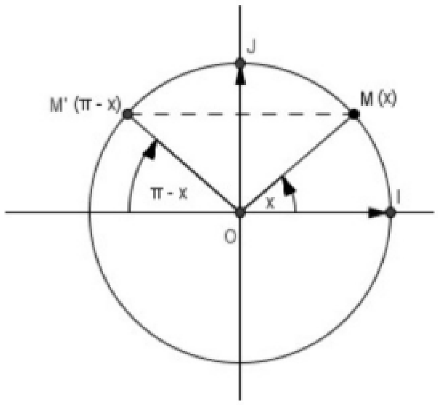
$$\phi(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad\qquad \psi(x) = \frac{1}{2+\sin(2x)}$$

Vérifier les résultats obtenus avec Geogebra.

8) Équations trigonométriques

Soit $a \in [-1\,;1]$.





Propriété.

- L'équation $\cos x = a$ admet pour ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \pm x_0 + 2\pi\mathbf{Z}$;
- L'équation $\sin x = a$ admet pour ensemble de solutions : $\mathscr{S} = (x_0 + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x_0 + 2\pi\mathbf{Z})$;

où x_0 est une solution particulière.

Exercices. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les équations :

$$\text{(E)} \quad \cos x = -\frac{1}{2} \qquad \text{(F)} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(G)} \quad \tan x = -\sqrt{3}$$

Exercices. LM1 : 5A (équations) et 5B (inéquations).

---

9) La fonction tangente.

Définition. La fonction *tangente* est définie par :

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Propriétés. La fonction tangente est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right)$, impaire, π-périodique, non bornée.

Preuves. Calcul.

Illustration Geogebra.

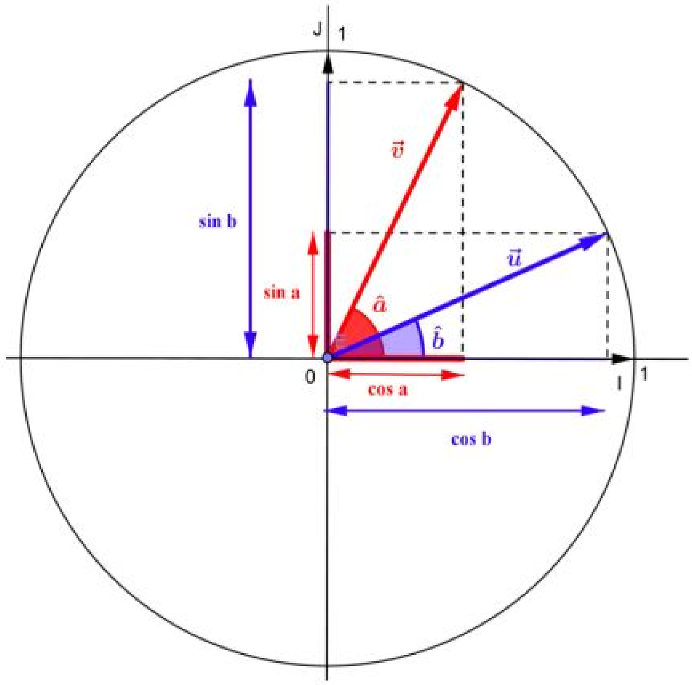
---

10) Formules de trigonométrie.

Lemme. Pour tous réels a et b,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Preuve. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ de deux manières.



Propriétés [Formules d'addition et de soustraction]. Pour tous réels a et b,

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

Et aussi :

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Preuve. Parité et symétrie.

Exercice. Calculer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$.

Exercice. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction uniquement de $\cos x$.

Propriétés [Formules de duplication]. Pour tout réel x,

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$$

Et aussi :

$$\boxed{\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

Preuve. Appliquer les formules d'addition à $a = b$ $(= x)$.

Le théorème de Pythagore trigonométrique donne aussi :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Exercice. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction uniquement de $\cos x$.

Exercices. LM1 : 3A (2, 3, 4 et 5).