5.2 Exercices.

Exercice 130

1. On suppose connue une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$
Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose connue une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\text{si } x < y \text{ alors } 0 < g(x) - g(y) < \frac{y - x}{2}.$$
   (a) Justifier que g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

medskip

Exercice 131
Avec Python, recherche de solution d'une équation par dichotomie.

Exercice 132
On considère la fonction définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pour x non nul et $f(0) = 0$. On montre dans l'exercice que l'image d'un intervalle I par cette fonction est un intervalle.

1. On suppose que I ne contient pas 0. Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
2. On suppose que I contient 0 et un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $a, b > 0$ et éléments de I tels que $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$. En déduire que $f(I) = [-1; 1]$.
3. Conclure quant à l'exercice.
4. Quelle est la morale de l'exercice ?

Exercice 133
On considère l'intervalle $]a; b[$, avec a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$. On considère sur cet intervalle la fonction continue f. On suppose que f admet k pour limite en a et l pour limite en b. Ces deux limites sont finies ou infinies. Montrer que f prend toutes les valeurs strictement comprises entre k et l.

Exercice 134
Soit $n > 1$.

1. Montrer que l'équation $2x^3 + 3x^2 - n = 0$ admet une unique solution notée x_n et que $x_n \geq 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (x_n).
3. Montrer que la suite (x_n) ne peut pas converger.
4. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice 135
Soit deux réels a et b. La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [a, b[$, croissante sur cet intervalle. On suppose aussi que la fonction f est majorée sur I. On désigne enfin par (u_n) une suite à valeurs dans I, croissante, et convergeant vers b.

1. Montrer que la suite $(f(u_n))$ est majorée. En déduire qu'elle converge. On note l sa limite.
2. Montrer que, pour tout entier n, $f(u_n) \leq l$. En déduire que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq l$.
3. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un terme u_N de la suite (u_n) tel que
$$f(u_N) > l - \epsilon.$$
   (b) On pose $\alpha = b - u_N$. Soit $x \in I$ tel que $|x - b| < \alpha$. Montrer que
$$|f(x) - l| < \epsilon.$$
   Conclure.

4. On suppose de plus que la fonction f est continue et strictement croissante.
   (a) Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
   (b) Montrer que $f(I) = [f(a), l[$.

Exercice 136

1. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 = 4x - 1$ possède trois solutions distinctes.
2. Montrer que l'équation
$$x^2 \sin x + x \cos x + 1 = 0$$
admet une infinité de solutions réelles.

Exercice 137

Soit f une bijection de I sur J, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Montrer que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 138

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f^n par $f^0 = id$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. On suppose que f est continue, et que la suite $(f^n(x))$ converge vers l. Montrer que l est un point fixe pour f.

Exercice 139

1. On suppose que f est continue sur $[0;1]$, et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0;1]$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que f est continue et croissante sur $[0;1]$. Montrer que la suite $(f^n(x))$ converge vers un point fixe.
3. On considère deux fonction f et g continues sur $[0;1]$, avec $0 \leq f(x), g(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0;1]$, et telles que $f \circ g = g \circ f$. On suppose enfin que f est croissante. Montrer que f et g ont un point fixe commun. *(Commencer par choisir un point fixe pour g.)*

Exercice 140

Soit f de $[a, b]$ dans $[a, b]$, vérifiant, pour tous x et y distincts dans $[a, b]$: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.
3. Montrer que cette solution est unique.

Exercice 141

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un seul réel positif u_n vérifiant $f_n(u_n) = 0$ et que $u_n < 1$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f_{n+1}(u_n) = -(1 - u_n)^2.$$
On remarquera que $u_n^n = 1 - u_n$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante, puis qu'elle converge. On note l sa limite.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq 1 - u_n \leq u_n^n \leq l^n.$$
5. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $l = 1$.

Exercice 142

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x + 3) = f(x)$.