Suites 5 - Suites arithmético-géométriques

1. La (a_n) est définie par $a_0 = 5$ et la relation :

$$a_{n+1} = 3a_n - 4 \qquad (*)$$

(a) Prouver qu'il existe une unique suite constante qui vérifie $(*)$. On notera α son terme.

(b) On pose $b_n = a_n - \alpha$. Prouver que la suite (b_n) est géométrique.

(c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

(d) En déduire celle de a_n.

2. Même exercice mais version étoffée.
On note (E) l'équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à second membre constant :

$$a_{n+1} - 3a_n = -4 \qquad \text{(E)}$$

On note (H) l'équation dite *homogène associée* :

$$a_{n+1} - 3a_n = 0 \qquad \text{(H)}$$

(a) Soit (α_n) une solution particulière de (E). Prouver alors que la suite (a_n) est solution de (E) si, et seulement si, la suite $(a_n - \alpha_n)$ est solution de (H). En déduire alors que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions de (H) une solution particulière de (E).

(b) Démontrer que (E) admet une unique solution constante, qui sera notée (α), qui est donc une solution particulière.

(c) Trouver les solutions de (H). L'ensemble de ces solutions sera paramétré par un réel λ.

(d) En déduire les solutions de (E).

(e) Parmi les solutions de (E), exhiber celle dont le terme d'indice nul vaut 5.

3. Les archives du FBI relatent la façon dont commença l'apocalypse zombie qui ravagea la côte est des États-unis au début de l'été 2024. Un virus foudroyant s'était échappé d'un laboratoire de Los Angeles, infectant la population. Dès le premier jour, il y eut 1 000 zombies. Ensuite, chaque jour, chaque zombie infectait en moyenne 0,3 personne. Désemparée, la police n'arrivait à tuer que 100 zombies par jour.

(a) On note z_n le nombre de zombies au jour n.
Démontrer que la suite (z_n) est arithmético géométrique.

(b) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

(c) Combien de zombies la Californie comptait-elle 28 jours plus tard ?