Spécialité mathématiques, IE, solution du troisième exercice.

Soit un réel a. La fonction f est définie sur l'intervalle $I =]-\infty, a[$, croissante sur cet intervalle. On suppose aussi que la fonction f est majorée sur I, c'est-à-dire qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I, f(x) \leq M$.

1. Donner un exemple d'une suite à valeurs dans I, croissante, et convergeant vers a. *Dans la suite de l'exercice, on désigne par (u_n) une telle suite.*
2. Montrer que la suite $(f(u_n))$ est majorée. En déduire qu'elle converge. On note l sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier n, $f(u_n) \leq l$.
4. En déduire que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq l$.
5. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un terme u_N de la suite (u_n) tel que
   $$f(u_N) > l - \epsilon.$$
   (b) On pose $\alpha = a - u_N$. Montrer que $\alpha > 0$.
   (c) Soit $x \in I$ tel que $|x - a| < \alpha$. Montrer que
   $$|f(x) - l| < \epsilon.$$
   (d) Conclure.

Solution

1. La suite $\left(a - \dfrac{1}{n}\right)$ est croissante, majorée par a, à valeurs dans $I =]-\infty, a[$.
2. (a) Pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leq M$. La suite $(f(u_n))$ est donc majorée.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n$. Et comme la fonction f est croissante, on en déduit que $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$. La suite $(f(u_n))$ est donc croissante.
   (c) Croissante et majorée, la suite $(f(u_n))$ converge alors vers un réel noté l.
3. Supposons par l'absurde l'existence d'un terme u_N de la suite tel que $u_N > l$. Alors, la suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N > l$. Par passage à la limite dans cette inégalité entre suites convergentes, on en déduit que
   $$l \geq u_n > l.$$
   Cette contradiction montre le résultat demandé : pour tout entier n, $f(u_n) \leq l$.
4. Soit $x \in I =]-\infty, a[$. Comme la suite (u_n) converge vers a, pour $a - x > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $|u_N - a| < a - x$. Donc $u_N > x$. Et comme la fonction f est croissante, on a $f(x) \leq f(u_N)$. En utilisant le résultat précédent, on conclut que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq l$.
5. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Comme la suite $(f(u_n))$ converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $|f(u_N) - l| < \epsilon$. Donc $f(u_N) > l - \epsilon$.
   (b) Comme $u_N \in I =]-\infty, a[$, $u_N < a$ donc $a - u_N = \alpha > 0$.
   (c) Prenons $x \in I$ tel que $|x - a| < \alpha = a - u_N$. On a donc $x > u_N$. Et comme f est croissante, $f(x) \geq f(u_N)$. Compte tenu du choix de $f(u_N)$, on en déduit que $f(x) > l - \epsilon$. Avec la quatrième question et comme $l < l + \epsilon$, on obtient bien
   $$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$
   Autrement dit,
   $$|f(x) - l| < \epsilon.$$
   (d) On rassemble les morceaux : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $x \in I$, si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - l| < \epsilon$. On a montré qu'une fonction f, croissante et bornée sur un intervalle $]-\infty, a[$, a pour limite un réel l, quand x tend vers a. ♦