

Probabilités I – Probabilités conditionnelles et indépendance.

Contenus

- Probabilité conditionnelle. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés. Règle du produit, de la somme.
- Systèmes complets d'événements. Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Arbre, tableau.

Capacités

- Construire un arbre pondéré ou un tableau. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique, et inversement.
- Utiliser un arbre ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé d'effectifs.
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$ (ex. « faux positifs »).
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Dans toute la suite, (Ω, \mathbf{P}) est un univers probabilisé.

1. Probabilités conditionnelles

Exercice. Déclic : Activité 1 (p. 308).

Définition. Soit S un événement de probabilité non nulle. Alors, l'application \mathbf{P}_S de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans \mathbf{R}^+ qui, à tout événement A , associe le nombre

$$\mathbf{P}_S(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap S)}{\mathbf{P}(S)}$$

est une probabilité sur Ω , qu'on appelle la probabilité **conditionnelle sachant S** .

Le nombre $\mathbf{P}_S(A)$ se note aussi $\mathbf{P}(A|S)$.

Preuve. Exhiber le germe de \mathbf{P}_S .

Exercice. Déclic : Méthode 1 (p. 311).

Exercice. Déclic : 30, 32-33.

Il en découle la :

Propriété [Formule de Bayes]. Pour tous événements non impossibles A et B ,

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(A)$$

Exercice. Déclic : Méthode 5 (p. 317).

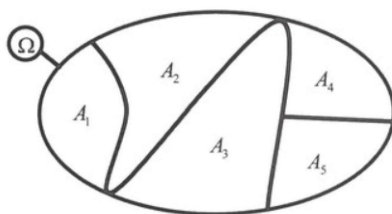
2. Probabilités totales

Définition. On appelle **système complet d'événements** toute famille (*i.e.* ensemble ordonné) non vide d'événements non impossibles deux-à-deux incompatibles et de réunion l'univers. La notion équivalente en théorie des ensembles est celle de **partition**.

Autrement dit, la famille non vide d'événements non impossibles (A_i) est un système complet d'événements si :

$$\forall (i, j) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_i A_i = \Omega$$

Système complet d'événements



Exemples de Système complet d'événements :

- (A, \bar{A}) dès lors que A n'est ni impossible ni certain.
- si $\Omega = \{0, 1, \dots, 9\}$, la famille $(\{0, 3, 6, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\})$.

Propriété. Si (A_1, A_2, \dots, A_k) est un système complet d'événements, alors :

$$\sum_{j=1}^k \mathbf{P}(A_j) = 1$$

Preuve. Découle de l'additivité de \mathbf{P} .

Propriété [Formule des probabilités totales]. Si (A_1, A_2, \dots, A_k) est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B ,

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_{A_j}(B) \mathbf{P}(A_j)$$

La preuve découle du fait que :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{j=1}^k \mathbf{P}(B \cap A_j)$$

Exercice. Déclic : Méthode 2 (p. 313).

Exercice. Déclic : 41, 43.

Le cas particulier $k = 2$ se récrit :

Propriété. Si l'événement A n'est ni impossible ni certain, alors, pour tout événement B ,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B) \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_{\bar{A}}(B) \mathbf{P}(\bar{A})$$

3. Indépendance

Exercices. Tableau Femmes / Hommes, Droitiers / Gauchers.

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

On note alors $A \perp B$.

Exemple. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Les événements « La carte est un as » et « La carte est un trèfle » sont indépendants (faire le calcul).

Exercice. On lance un dé. Étudier l'indépendance deux-à-deux des événements $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 2, 3\}$.

Exercice. On donne $\mathbf{P}(A) = 0,4$ et $\mathbf{P}(B) = 0,3$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cup B)$ si A et B sont : (a) incompatibles ; (b) indépendants.

Propriété. Si A n'est pas impossible, alors A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$$

Propriété. Pour tous événements A et B,

$$A \perp B \iff \bar{A} \perp B \iff A \perp \bar{B} \iff \bar{A} \perp \bar{B}$$

Preuve. Calcul.