2 Généralités.

Exercice 1

1. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On considère les égalités

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad ; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

   (a) Justifier l'appellation de relations de distributivité donnée à ces égalités.

   (b) Montrer une des quatre inclusions.

2. Soit A, B deux parties d'un ensemble E. On rappelle les lois de Morgan :

   (a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ♦

   Montrer une des quatre inclusions.

3. Soit A, B des parties de E. Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Exercice 2

Ecrire avec la notation $\sum$:

1. $2^3 + 2^4 + ... + 2^{17}$.
2. $3 + 3 + 3 + 3 + 3$. ♦

Exercice 3

Ecrire l'énoncé du principe de récurrence. ♦

Exercice 4

Montrer, par récurrence, que :

1. pour $n \geq 4$: $2^n \leq n!$.
2. pour $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 5

Soit n un entier positif. Montrer qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $(3 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. ♦

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs des paramètres a, b réels l'équation $ax = b$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, résoudre $x = 0$. Représenter graphiquement les solutions.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, résoudre $2x - 3y + 5 = 0$. Représenter graphiquement les solutions.
4. Soient a, b, c des réels donnés. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $ax + by = c$. ♦

Exercice 7

Soit x, x', y, y' des réels. On note $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$ le réel $xy' - x'y$.

Soient a, b, c, a', b', c' des réels tels que (a, b) et (a', b') sont différents du couple $(0, 0)$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1. Montrer que le système admet une unique solution si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est non nul. Montrer que l'unique couple solution a alors pour coordonnées $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$.

2. Montrer que dans le cas où $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est nul, le système admet 0 ou une infinité de solution.
3. Interpréter géométriquement ce qui précède. ♦

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

2. Montrer que, pour x, y réels, on a :

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1.$$

Exercice 9

Soit f et g deux fonctions croissantes sur $D \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f + g$ est croissante sur D.
2. Si de plus f et g sont positives, montrer que fg est croissante sur D.
3. Si f est strictement positive et croissante sur D, montrer que $\frac{1}{f}$ est décroissante sur D.

Exercice 10

1. Soit $n > 1$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

2. Soit $m > 0$, montrer que

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{m+(2m+1)} > 1.$$

Exercice 11

Soit $A(-2, 0), B(2, 4), C(4, 0)$. Donner, en justifiant, les équations réduites des droites des trois côtés du triangle ABC, de la médiane (AE), de la hauteur (AD). Préciser la longueur AE. ♦

Exercice 12

Ecrire une équation du cercle passant par les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ et de la droite d'équation $y = -x$, et par le point $A(4, 4)$. ♦

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x+2}$. Procéder par implication et implication réciproque.
2. Expliquer en quoi résoudre l'équation précédente revient à montrer l'égalité de deux ensembles, et plus précisément, à écrire en extension un ensemble qui est initialement défini en compréhension.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2-x}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x} + 2$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 + 1} < 2x + 1$. ♦

Exercice 14

1. Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre réel x. Montrer que $x \leq |x|$ et que $-x \leq |x|$.
2. Soit un réel positif a, et x un réel. Après avoir fait un dessin rendant l'énoncé évident, montrer que

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a.$$

3. Soit des réels a, b. En utilisant le résultat ci-dessus, montrer que
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
4. L'inégalité précédente s'appelle l'inégalité triangulaire. En distinguant selon le signe de $a+b$, en proposer une autre preuve, très simple.
5. En utilisant l'inégalité triangulaire et en écrivant $a = (a-b)+b$, montrer que
$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

Exercice 15

1. Soit f définie par $f(x) = x^2$ et $B = [1, +\infty[$. Préciser $f^{-1}(B)$.
2. Soit A, B des parties. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple de A, B, f où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
5. Soit A un ensemble et $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.
   (a) On suppose que f est une bijection de A dans $\mathcal{P}(A)$. Considérer $B = \{x \in A; x \notin f(x)\}$ et montrer que f ne peut pas exister.
   (b) Qu'a-t-on montré exactement ? ♦

Exercice 16

Soit une application f de E dans F. Soit A une partie de E, et B une partie de F. Préciser $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2; E = \{-1, 0, 1\}, F = \mathbb{R}, A = \{-1, 1\}, B = \{0, 1\}$.
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pour } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ pour } x < 0 \end{cases}; E = F = \mathbb{R}; A = \mathbb{R}_+^*, B = \{0\}$.
3. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \\ -1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}; E = F = \mathbb{R}; A = B =]-2, 1[$. ♦

Exercice 17

Dans les trois cas de l'exercice précédent, dire si les fonctions considérées sont injectives ou surjectives. ♦

Exercice 18

Soit la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x - 3y, 7x - y + 1) \end{cases}$$
Cette fonction est-elle injective, surjective, bijective ? ♦

Exercice 19

1. Montrer qu'un entier et son carré ont la même parité.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. La somme de deux fonctions périodiques est-elle une fonction périodique ? ♦

Exercice 20

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel de la façon suivante. On suppose qu'il existe a, b entiers, $b \neq 0$, tels que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. On suppose de plus que la fraction $\frac{a}{b}$ est sous sa forme irréductible.

1. Montrer que a, b peuvent être supposés strictement positifs.
2. Montrer que $2b - a$ et $a - b$ sont alors strictement positifs.

3. Montrer que
$$\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2 = 2.$$
4. Montrer qu'on a $a-b<b$. Conclure. ♦

Exercice 21

1. Soit un réel x et n un entier ≥ 2. Etablir l'identité
$$x^n - 1 = (x-1)(1+x+...+x^{n-1}).$$
2. En utilisant le résultat précédent :
   (a) Ecrire une formule explicite pour $1+x+...+x^n$.
   (b) Montrer que
   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + +x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{1+x^2}.$$
   (c) Factoriser x^5+1.
   (d) Montrer que, pour $x \geq 0$, pour $n \geq 0$:
   $$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$
   (e) Etablir, pour a, b réels et pour $n \geq 1$, l'identité :
   $$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n).$$

Exercice 22

1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. ♦

Exercice 23

1. Ecrire la définition d'une fonction f strictement croissante sur une partie A de $\mathbb{R}$. Puis écrire la négation de cette proposition.
2. Soit une suite (u_n). Ecrire en langage formalisé les propositions :
   (a) u_n est toujours nul.
   (b) u_n est nul à partir d'un certain rang.
   (c) u_n est nul une infinité de fois.
   (d) u_n est nul au moins une fois.
3. Ecrire la négation des quatre propositions précédentes. ♦

Exercice 24

1. Etudier les variations de la fonction carré.
2. Etudier les variations de la fonction cube.
3. Montrer que la fonction cube est une injection. ♦

Exercice 25

1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Utiliser la géométrie du collège.
2. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Utiliser la géométrie analytique du lycée. ♦

Exercice 26

Montrer que
$$\sqrt[3]{18+\sqrt{325}} + \sqrt[3]{18-\sqrt{325}} = 3.$$

Exercice 27

Exercice 28