Trigonométrie - Calcul (08-24)

1. Démontrer l'identité :

$$\frac{1-\cos^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{\sin^2 2x}{4}$$

2. Démontrer l'identité :

$$(1+2\cos(2x))\sin x = \sin(3x)$$

3. Exprimer $\operatorname{cotan}(2x)$ en fonction de $\operatorname{cotan} x$.

4. Simplifier l'expression :

$$\left(\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right)^2 + \left(\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)^2$$

5. Utiliser la formule de duplication de la tangente pour calculer la valeur de $\tan(\pi/12)$.

6. On pose $t = \tan(\theta/2)$. Démontrer les identités :

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formules dites de la tangente de l'*arc moitié*.

7. Angle triple.

(a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

(b) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

(c) En déduire l'expression de $\tan(3x)$ en fonction de $\tan x$.

(d) Établir cette même formule en n'utilisant que la formule d'addition de la tangente.

8. De deux manières différentes, établir l'expression de $\operatorname{cotan}(3x)$ en fonction de $\operatorname{cotan} x$.

9. Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$ et $\tan c$.

10. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.

11. Démontrer que, dans tout vrai triangle non rectangle,

$$\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

12. Calculer la valeur exacte de : $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$.

13. Démontrer les identités :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

14. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

15. Démontrer que, dans tout vrai triangle,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Formules dites de Mollweide.

16. Démontrer que, dans tout vrai triangle,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Formule appelée loi des tangentes.