19 Complexes.

Exercice 357
Mettre sous forme algébrique :

1. $\dfrac{2+3i}{4+i}$
2. $\dfrac{1}{i}+\dfrac{3}{1+i}$
3. $(8+6i)^2$
4. $\left(1+\dfrac{3}{1+i}\right)^2$ ♦

Exercice 358
Soient z, w des complexes.

1. A-t-on $Re(zw) = Re(z)Re(w)$?
2. Montrer que $Re(iz) = -Im(z)$; $Im(iz) = Re(z)$. ♦

Exercice 359
Calculer les puissances de i. ♦

Exercice 360
Soit un complexe z de forme algébrique $x + iy$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de :

1. $\dfrac{1}{z^2}$.
2. $\dfrac{z+1}{2z-5}$.
3. z^3. ♦

Exercice 361
Soit, pour z complexe, $Z = \dfrac{z-i}{z-3}$.

1. Déterminer les z pour lesquels Z est réel.
2. Déterminer les z pour lesquels Z est imaginaire pur.
3. Représenter graphiquement les solutions des deux questions précédentes.
4. Déterminer les z tels que :
   (a) $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$.
   (b) $Re(Z) = 0$ et $Im(Z) \geq 0$. ♦

Exercice 362

1. Résoudre $z^2 = 1 + 6i$.
2. Résoudre $(z+1)^2 = 3 + 4i$.
3. Résoudre $iz^2 + 2z = i - 1$.
4. Résoudre $z^4 = i$. ♦

Exercice 363
Soit z, w, s des complexes. Montrer que $(zw)s = z(ws)$. ♦

Exercice 364
Montrer que tout complexe z non nul admet un unique inverse. ♦

Exercice 365
Montrer, en faisant une récurrence sur n, la formule du binôme de Newton pour les nombres complexes, à savoir que, pour z, w complexes et n entier plus grand que 1 :

$$(z+w)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}w + \binom{n}{2} z^{n-2}w^2 + \ldots + \binom{n}{n} w^n,$$

où $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

On commencera par prouver la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ♦

Exercice 366
Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique. On définit $\epsilon = 1$ si $b \geq 0$ ou $\epsilon = -1$ si $b < 0$.

1. Montrer que les deux racines carrées de z sont les complexes $\pm(\alpha + i\epsilon\beta)$ où

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}$$

   Déduire alors que :
   (a) Les racines carrées d'un complexe sont réelles si, et seulement si, le complexe est réel et positif.
   (b) Les racines carrées d'un complexe sont imaginaires pures si, et seulement si, le complexe est réel et négatif.
   (c) Les deux racines carrées d'un complexe sont identiques si, et seulement si, le complexe est 0.
2. On considère l'équation d'inconnue le complexe z, définie par $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c sont des nombres complexes, a étant non nul.
   (a) Montrer que les solutions de l'équation sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ où δ est une des deux racines carrées de $b^2 - 4ac$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z - 4 = 0$. ♦

Exercice 367
1. Résoudre $z^8 = 1$. Exprimer les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2. Montrer que les racines n-èmes de l'unité définissent un polygone régulier. Préciser la longueur du côté et l'angle au centre.
3. Calculer la somme des racines n-èmes de l'unité. ♦

Exercice 368
Soit z, z' deux complexes.
1. Montrer que
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$
   Interpréter géométriquement.
2. Montrer que
$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$
3. Traiter les cas d'égalité. ♦

Exercice 369
Exprimer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. ♦

Exercice 370
On considère les complexes z_k, w_k, k prenant les valeurs entières $1, 2, \ldots, n$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$

Exercice 371

1. On considère la droite passant par A d'affixe a et dirigée par $\vec{u}$ d'affixe u. En donner une représentation paramétrique, puis une équation implicite fonction de z, affixe des points de la droite.
2. Donner une équation implicite du cercle de rayon $r > 0$ centré en $A(a)$.
3. Dans les deux cas précédents et pour les équations implicites, vérifier qu'en écrivant les complexes sous forme algébrique, on retrouve les équations cartésiennes d'une droite et d'un cercle. ♦

Exercice 372

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^5 - 2 = 0$.
2. $z^4 + i = 0$.
3. $z^6 + 8 = 0$.
4. $z^3 - 4 = 0$. ♦

Exercice 373

Calculer le module de :

1. $\dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{(-2-i)}$.
2. $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$. ♦

Exercice 374

On considère un polynôme de la variable complexe z,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

dont les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont réels. Montrer que si a est une racine de P, alors il en est de même pour $\overline{a}$. En déduire que les racines non réelles de P vont par paires. ♦

Exercice 375

Soit a, b des nombres complexes.

1. Montrer que
$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$
2. Interpréter géométriquement l'égalité précédente. ♦

Exercice 376

Soit z, w des complexes, $w \neq 0$. Montrer que

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
2. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \quad [2\pi]$. ♦

Exercice 377

Soit z un complexe non nul. En considérant $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, donner une construction géométrique de z^{-1}. ♦

Exercice 378

1. Décrire l'ensemble des complexes z tels que $Im(z+5) = 0$.
2. Soit $z = x + iy$ sous forme algébrique, montrer que
$$|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|.$$

3. On suppose que z ou w est un complexe de module 1 et que $\overline{z}w \neq 1$. Montrer que

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = 1.$$

Exercice 379
Soit x un réel tel que $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Montrer que

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Exercice 380
Soit w une racine n-ème de l'unité, différente de 1. Calculer

$$1 + 2w + 3w^2 + \ldots + nw^{n-1}.$$

Exercice 381
Pour les questions suivantes, essayer de faire deux résolutions : par le calcul et géométrique.

1. Déterminer les complexes z tels que $z, \dfrac{1}{z}$ et $1-z$ ont même module.
2. Déterminer z tels que z, z^2 et z^4 sont alignés.
3. Déterminer z tels que $|z| = |z-4|$ et $\arg(z) = \arg(z+1+i) \quad [2\pi]$. ♦

Exercice 382
1. Linéariser :
   (a) $\cos^6 x$.
   (b) $\sin^2 x \cos^3 x$.
   (c) $\cos x \sin^5 x$. ♦
2. Exprimer $\cos(5x)\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$.
3. Calculer
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 383
Soit $A(a), B(b), C(c), D(d)$. On a de plus $a \neq b$ et $c \neq d$. Montrer qu'un argument de $\dfrac{a-b}{c-d}$ est une mesure de $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$. ♦

Exercice 384
Donner la forme complexe factorisée ($|z-a| = r$), la forme complexe développée ($|z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + b$), la forme cartésienne ($(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$) des cercles :

1. de centre $2-i$ et de rayon 2.
2. de diamètre AB, avec $A(1+i)$ et $B(4+2i)$.
3. passant par $A(1-i), B(-1-i), C(5i)$.
4. d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 9 = 0$. ♦

Exercice 385
1. Soit $a = 1+i$, $b = -1-i$. Déterminer c de sorte que a, b, c est un triangle équilatéral.
2. Déterminer l'image géométrique des complexes z tels que le triangle de sommets z, z^2 et z^3 soit rectangle.

3. Déterminer l'image géométrique des complexes z tels que
$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2.$$

Exercice 386 (Lille juin 1985)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2-4z+5)-i(z+1)=0.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0.$$
3. En déduire qu'il existe des réel A, B, C, D qu'on déterminera tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (x^2-4x+5)^2+(x+1)^2=(x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D).$$

Exercice 387

Dans le plan complexe, on considère les point A d'affixe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et B d'affixe $2i$. M est le point d'affixe z, $z\neq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Soit
$$z'=\frac{z-2i}{2z-1-i}.$$

1. Par une méthode géométrique, déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
2. Par une méthode géométrique, déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 388 (Lille septembre 1986)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
$$z^3-(1-i)z^2-(2-2i)z+8=0$$
sachant qu'elle admet une solution réelle a. On notera b et c les deux autres solutions.
2. Soient A, B, C les images respectives dans le plan complexe des nombres a, b, c.
Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle. ♦

Exercice 389 (Aix-Marseille septembre 1985)

Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble $\mathbb{C}-\{-i,i\}$. Soit f l'application telle que
$$\forall z\in\mathbb{C}_1\quad f(z)=\frac{z}{z^2+1}.$$

1. Résoudre l'équation $f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. (a) Montrer que
$$\forall z,z'\in\mathbb{C}_1,\quad f(z)=f(z')\Longleftrightarrow z=z' \text{ ou } zz'=1.$$
   (b) Soient $z, z'\in\mathbb{C}_1$ tels que
$$|z|<1 \text{ et } |z'|<1.$$
   Montrer que
$$f(z)=f(z')\Longrightarrow z=z'.$$
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z\in\mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.
4. Dans cette question, $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, $\theta\in[-\pi,\pi[-\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$.
   (a) Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos\theta$.
   (b) Soit u la suite réelle telle que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=1+f(z)+(f(z))^2+\ldots++(f(z))^n.$$
   Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle? ♦

Exercice 390 (Paris septembre 1986)

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes les équations d'inconnue z :
   (a) $z^4 = 1$.
   (b) $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul, et A un nombre complexe. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z :
$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = A.$$
   On appelle P et Q les points du plan complexe d'affixes respectives i et $-i$, et M le point d'affixe z.
   (a) Montrer que si z vérifie l'équation (E), alors $\dfrac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.
   (b) Prouver que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors $|A| = 1$.
   (c) En conclure que si l'équation (E) a au moins une racine réelle, alors toutes ses racines sont réelles. $\blacklozenge$

Exercice 391 (Antilles-Guyane juin 1988)

1. Expliciter, sous forme trigonométrique, les trois racines de chacune des deux équations :
   (a) $u^3 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   (b) $u^3 = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$. $\blacklozenge$
2. Etablir, pour tout réel α, l'égalité
$$1 + \mathrm{e}^{\alpha} = 2\mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2}.$$
3. Résoudre l'équation
$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0.$$

Exercice 392 (Nice juin 1980)

On considère l'application de $\mathbb{C} - \{1\}$ vers lui-même définie par
$$f(z) = \frac{z-2i}{z-1}.$$

1. Montrer que f est une involution de $\mathbb{C} - \{1\}$.
2. Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, invariants par f. $\blacklozenge$

Exercice 393

Déterminer l'image géométrique des complexes z tels que :

1. $|z-2| = 3$.
2. $|z+i| < 1$.
3. $|z-2| - |z+2| < 2$.
4. $-2 < I(z) < 3$.
5. $R\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = 0$.
6. $\dfrac{1+\overline{z}}{z} \in \mathbb{R}$. $\blacklozenge$

Exercice 394

Calculer :

1. $1 + a\cos x + a^2\cos 2x + \ldots + a^n \cos nx$.
2. $\sin t + a\sin(t+h) + a^2\sin(t+2h) + \ldots + a^n \sin(t+nh)$.
3. Limite quand n tend vers l'infini de
$$1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{2^n}\cos nx.$$

Exercice 395

1. Simplifier $(1+j)^n$.
2. Simplifier $j^n + j^{2n}$.
3. Calculer $(1+\cos t + i\sin t)^n$.
4. On suppose que $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos t$. Montrer que $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos nt$.
5. Soit z un complexe de module 1, différent de -1. Montrer qu'il existe un réel t tel que $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$. ♦

Exercice 396

1. Montrer que $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$.
2. Calculer $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$
3. Calculer $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots$

Exercice 397

Exercice 398

Exercice 399

Exercice 400

Exercice 401

Exercice 402

Exercice 403

Thèmes :

1. polynômes.
2. transformations isométries et similitudes.
3. fonctions complexes, exponentielle.
4. suites complexes.
5. continuité. ♦