Second degré – Exercices de base

1. Factoriser ces trinômes via une identité remarquable.

(a) $2x^2-12x+18$

(b) $3x^2+30x+75$

(c) $98-2x^2$

(d) $2x^2-12mx+18m^2$

2. Établir la forme canonique de ces trinômes.

(a) $2x^2-4x+4$

(b) $5x^2+30x+34$

(c) $-3x^2-30x-68$

(d) $3x^2+12mx+17m^2$

3. Rechercher une racine évidente parmi -1, 0 et 1.

(a) x^2-x-2

(b) $3x^2-7x$

(c) $5x^2-2x-3$

(d) $2x^2+7x+5$

4. Rechercher une racine évidente, mais pas parmi -1, 0 et 1.

(a) x^2-3x+2

(b) $x^2-13x+30$

(c) x^2+5x+6

(d) $x^2+0,1x-0,02$

5. Calculer le discriminant.

(a) $2x^2-5x+3$

(b) $4x^2+4x+1$

(c) $3x^2-4x+2$

(d) $\alpha x^2+(2\alpha+1)x+\alpha$

6. Factoriser ces trinômes en détectant une racine évidente puis en utilisant la méthode d'identification des coefficients.

(a) $5x^2-10x$

(b) $2x^2-x-1$

(c) $3x^2-12x-15$

(d) $2x^2+2(m-3)x-6m$

7. Trouver α et β.

(a) $\alpha+\beta=3$ et $\alpha\beta=2$.

(b) $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\beta=-6$.

(c) $\alpha+\beta=2$ et $\alpha\beta=-1$.

(d) $\alpha+\beta=2m$ et $\alpha\beta=m^2-4$.

8. Résoudre ces équations en utilisant les formules de Viète.

(a) $x^2+2x-15=0$

(b) $x^2-5x-14=0$

(c) $2x^2-8x+6=0$

(d) $3x^2-3x-6=0$

9. Résoudre ces équations en utilisant le théorème de résolution (avec le discriminant).

(a) $x^2-4x+5=0$

(b) $2x^2+5x-1=0$

(c) $3x^2-2x-2=0$

(d) $x^2+(m+2)x-2m^2+7m-3=0$

10. Dresser le tableau de signe de ces trinômes.

(a) $7(x-1)(x-3)$

(b) $-3(x+1)(x-2)$

(c) $5(x+2)(x+5)$

(d) $-2(x-m)(x+2m)$

11. Résoudre ces inéquations.

(a) $x^2-4x+7<0$

(b) $x^2+x-6\leqslant 0$

(c) $x^2+4x-5>0$

(d) $-x^2-6x-8>0$

12. Dresser le tableau de variation de ces fonctions.

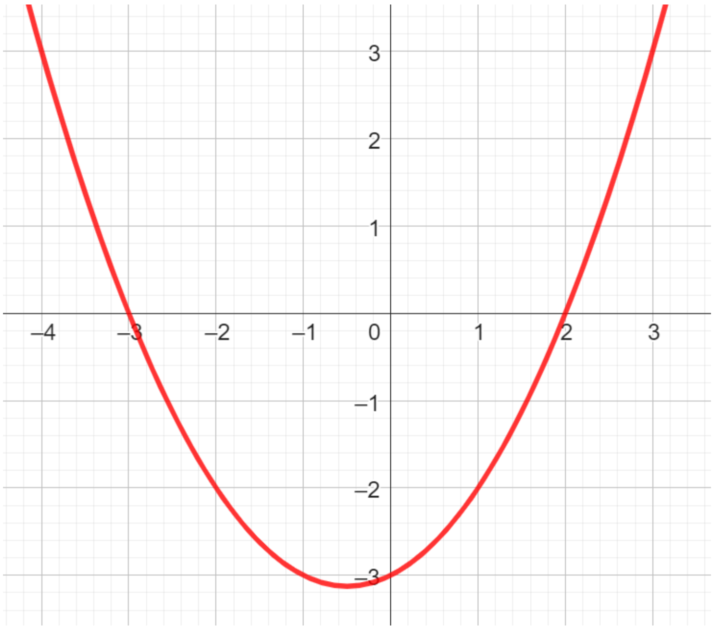
(a) $f(x)=x^2-2x+3$

(b) $g(x)=-2(x+1)^2-3$

(c) $h(x)=(4-2x)(x-3)$

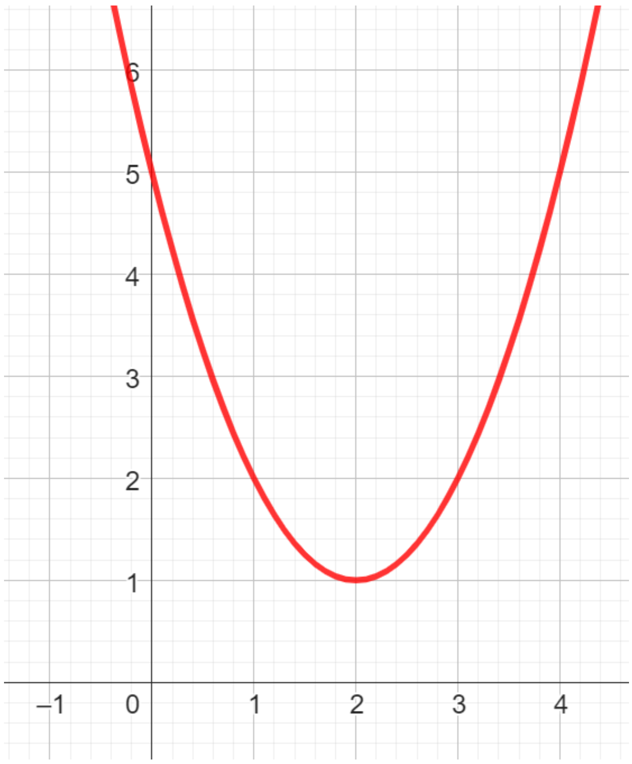
Second degré – Lecture graphique

1. Voici le graphe d'une fonction polynomiale f.



Déterminer l'expression développée de $f(x)$.

2. Même consigne.



Second degré – Équations avancées

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations ci-dessous.

1. Équations bicarrées.
   (a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$
   (b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
   (c) $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$
   (d) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
   (e) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2. Équations irrationnelles.
   (a) $\sqrt{x-5} = x - 7$
   (b) $\sqrt{2x-6} = \sqrt{9-x}$
   (c) $\sqrt{10-2x} = \sqrt{x-11}$
   (d) $\sqrt{x^2-16} = 2x - 6$
   (e) $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$
   (f) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7$

3. Équations du troisième degré.
   (a) $x^3 + 4x^2 + 8x + 5 = 0$
   (b) $x^3 - 7x + 6 = 0$
   (c) $x^3 - x^2 - 17x - 5$

4. Équations paramétriques.
   (a) $x^2 - x - m^2 - m$
   (b) $x^2 - 3mx + 2m^2 - m - 1 = 0$
   (c) $mx^2 - (m^3+1)x + m^2 = 0$
   (d) $x^3 + (m-5)x + x^2 - (5m-6)x + 6m = 0$

5. Équations avec fractions rationnelles.

   (a) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x} = 1$ (b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-2x} = 0$ (c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = 3$

6. Équation réciproque.

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$$

   Utiliser le changement d'inconnue

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Second degré – Divers

1. Trouver la valeur minimale de $(x-a)^2+(x-b)^2$, où a et b sont deux constantes.

2. Démontrer que, pour tous nombres réels a, b et c, l'équation

$$(x-a)(x-b)=c^2$$

admet au moins une solution.
À quelle condition sur a, b et c cette solution est-elle unique ?

3. On se donne un trinôme ax^2+bx+c qui admet deux racines (éventuellement confondues) α et β. Calculer, en fonctions de a, b et c, les quantités $\alpha^2+\beta^2$ et $(\alpha-\beta)^2$.

4. Les polynômes $X^2+X+\lambda$ et $X^2+\lambda X+1$ ont-ils une racine commune ? Discuter.

5. Factoriser le polynôme x^4+64 en un produit de deux polynômes du second degré.

6. **Blundon.** Si $x+y=3$ et $x^3+y^3=9$, que vaut xy ?

7. Discuter l'équation : $mx^2-4x+3m+1=0$.

8. Soit l'équation paramétrique : $mx^2-(m-1)x+2m=0$.
   (a) Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines distinctes ?
   (b) On suppose que c'est le cas. Trouver une relation indépendante de m entre ces deux racines.

9. Trouver tous les polynômes réels du second degré P qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x^2+1)=P(x)^2+1$$

10. Trouver l'unique polynôme du second degré P qui vérifie $P(1)=2$, $P(2)=3$ et $P(3)=1$.

11. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. Prouver que si $a+b=c+d$ et si $ab=cd$, alors $(a,b)=(c,d)$ ou $(a,b)=(d,c)$.

12. A, B, a et b sont quatre constantes réelles. On sait que le polynôme x^2-Ax+B admet pour racines les nombres a et b. On sait aussi que le polynôme x^2-A^2x+AB admet pour racines les nombres $a+1$ et $b+1$. Déterminer A et B.

Second degré – Problèmes

1. La différence de deux entiers naturels vaut 9. La différence de leur produit et de leur somme vaut 111. Quels sont-ils ?

2. Trouver deux entiers consécutifs dont le produit vaut 3 782.

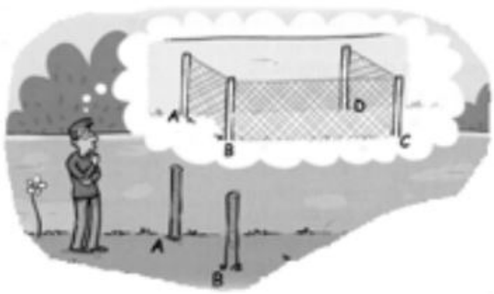
3. Un champ rectangulaire a pour périmètre 70 m et pour aire 250 m^2.
   Quelles sont ses dimensions ?

4. Un champ rectangulaire a pour périmètre 34 m et sa diagonale mesure 13 m.
   Quelle est son aire ?

5. Si on augmente de 2 cm l'arête d'un cube, son volume augmente de 2 402 cm^3.
   Quelle est son arête ?

6. Deux trains A et B partent en même temps d'une même gare, l'un vers le nord et l'autre vers l'est, et se déplacent chacun à vitesse constante. Le train A se déplace à 25‘,km/h de plus que le train B. Après 2 heures, ils se trouvent à 250 km de distance à vol d'oiseau. Déterminer la vitesse de chaque train.

7. Avec un grillage de 21 m de longueur, Le père Gaston souhaite construire un enclos rectangulaire, adossé à un mur du jardin, pour y cultiver son légume favori : le rutabaga. Il a déjà placé un premier piquet (en A).

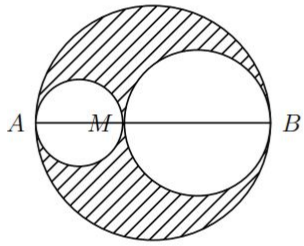
   

   Aidez le père Gaston à placer le second piquet (en B) pour obtenir une aire maximale, ce qui lui permettra de récolter un maximum de rutabaga !

8. Le père Gustave est propriétaire d'un terrain qu'il souhaite transformer en verger. Il estime que, s'il plante 60 pommiers, chaque arbre produira 480 pommes. Il estime aussi que, pour chaque pommier additionnel planté, ce rendement attendu diminuera de 5 pommes par arbre. Le père Gaston vend chaque pomme 5 centimes. Il souhaite maximiser sa recette. Aidez-le à déterminer le nombre de pommiers à planter et à estimer sa recette future.

9. Le directeur d'un parc d'attractions souhaite fixer le prix du billet d'entrée. Des études statistiques lui ont appris que, si le prix du billet est de p euros, alors il se vendra dans la journée $2\,000 - 40p$ billets. Le directeur souhaite maximiser son bénéfice. Aidez-le à fixer son prix et à estimer son bénéfice.

10. On considère le cercle de diamètre [AB], avec AB = 4, et un point M sur [AB]. D_1 est le disque de diamètre AM. D_2 est le disque de diamètre MB. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la partie grisée, avec $x = \mathrm{AM}$.



(a) Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

(b) Pour quelle position de M sur [AB] l'aire $\mathscr{A}(x)$ est-elle maximale ?

11. Selon la loi universelle de la gravitation, découverte par Isaac Newton, deux corps massifs ponctuels s'attirent mutuellement avec une force égale à :

$$F = \frac{GM_1M_2}{D^2}$$

où M_1 et M_2 sont les masses des deux corps, D est la distance qui les sépare, et G est la constante gravitationnelle.

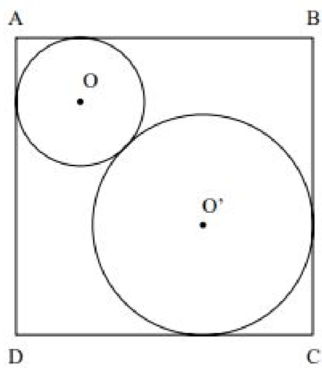
La Terre et la Lune sont assimilées à des objets ponctuels. On donne :

- masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- masse de la Lune : $M_L = 7,4 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- distance Terre-Lune : $D = 400\,000\,\mathrm{km}$
- constante gravitationnelle : $G = 6,6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$

Pour les calculs, il sera loisible de noter : $\varepsilon = M_L / M_T$.

Démontrer que, entre la Terre et la Lune, sur l'axe Terre-Lune, se trouve un lieu unique où les forces d'attraction de chacun des deux astres se compensent. Préciser la position de ce lieu. Il est demandé de donner une formule littérale, de faire l'application numérique, et de commenter le résultat obtenu.

12. Soit ABCD un carré de coté 1. Un disque Γ intérieur au carré est tangent aux côtés [AB] et [AD]. Un second disque Γ', intérieur au carré, est tangent aux côtés [BC] et [CD] et est tangent extérieurement à Γ. On note S la somme des aires des deux disques.



Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

Second degré - Inégalités

1. Soient x_1, x_2, ... x_n des nombres réels qui vérifient $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.
Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n+1}{2}$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz : le cas n=2.**
Soient a, α, b et β quatre nombres réels. On pose :

$$P(x) = (ax+\alpha)^2 + (bx+\beta)^2$$

(a) Justifier que le trinôme P est à valeurs positives.

(b) Qu'en déduire pour son discriminant Δ ?

(c) Calculer Δ en fonction de a, α, b et β.

(d) En déduire l'inégalité :

$$a\alpha + b\beta \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (*)$$

(e) Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta)$. Récrire l'inégalité $(*)$ ci-dessus en termes de produit scalaire et de normes.

3. **Identité de Lagrange.** Prouver l'identité :

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) = (a\alpha+b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2$$

et retouver l'inégalité $(*)$ de l'exercice précédent.

4. **Inégalité de Cauchy-Schwarz : le cas général.**

(a) À quelles conditions sur α, β et γ le trinôme du second degré $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ est-il à valeurs positives ou nulles ?

(b) Soient a_1, a_2 ... a_n et b_1, b_2 ... b_n des nombres réels, les a_k n'étant pas tous nuls.
On pose :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$$

Appliquer la propriété énoncée au **a.** pour démontrer l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

(c) Étudier les cas d'égalité.

5. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n < 0$. Trouver le meilleur minorant de la quantité :

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

6. Soient $a_1, a_2 \ldots a_n$ des nombres réels. Démontrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2}$$

Second degré - Paraboles

1. On donne l'équation réduite d'une parabole. On demande les coordonnées du sommet.

(a) $x^2 - 6x - 16$

(b) $-2x^2 + 20x + 25$

(c) $-x^2 + 10x + 21$

2. Une parabole a pour sommet le point $S(-7/8, -49/8)$ et coupe l'axe $(\mathrm{O}y)$ au point d'ordonnée -15. Déterminer son équation cartésienne réduite.

3. Une sauterelle se trouve au sommet d'un mur situé sur le demi-axe $[\mathrm{O}y)$ et dont le pied est en O. Elle saute vers la droite selon une trajectoire modélisée par un arc de la parabole d'équation réduite :

$$y = -x^2 + x + 2$$

où x et y sont exprimés en mètres.

(a) Quelle est la hauteur du mur ?

(b) À quelle hauteur maximale la sauterelle a-t-elle sauté ?

(c) À quelle distance du mur est-elle tombée ?

4. Foyer et directrice.
On considère la droite $\Delta : y = -a$ et le point $\mathrm{F}(0\,;b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M équidistants de F et de Δ.

(a) Écrire une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

(b) En déduire que $\mathscr{P}$ est une parabole.
Préciser les coordonnées de son sommet.

5. Courbe orthoptique.
Déterminer l'ensemble des points du plan par où passent deux tangentes perpendiculaires à la parabole d'équation $y = ax^2$ où $a > 0$.