

Troisième – Devoir-test n°3

2 heures – Sans calculatrice

Exercice 1 [2 points]

Mettre sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{81 \times (-4^2)^2 \times 5000}{(-25^2) \times 2^{12} \times (-3)^3}$$

Exercice 2 [2 points]

Factoriser l'expression :

$$(2x - 3)^2 - 12x^2 + 27 + (6 - 4x)(x - 3)$$

Exercice 3 [6 points]

On considère un triangle ABC qui vérifie $AB = 6$, $AC = 2\sqrt{3}$ et $BC = 4\sqrt{3}$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer l'aire \mathcal{A} du triangle ABC.
3. On note H le pied de la hauteur issue de A, située sur le segment [BC].
 - (a) Exprimer l'aire \mathcal{A} d'une seconde façon, puis démontrer que $AH = 3$.
 - (b) Calculer la distance BH.
4. La perpendiculaire en C à la droite (BC) coupe la droite (AB) en E.
 - (a) Calculer la distance BE.
 - (b) En déduire la distance AE.
5. On place sur la demi-droite [CA), en dehors du segment [CA], un point F tel que $AF = 2\sqrt{3}/3$.
Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 4 [5 points]

1. Calculer chacune des quantités suivantes sous forme d'une fraction irréductible :

$$A_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \quad A_3 = 2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \quad A_4 = 2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$$

2. Quel résultat peut-on envisager pour A_5 ? pour A_{10} ?
3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$A_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

- (a) Proposer pour A_n une formule générale en fonction de n .
- (b) Démontrer cette formule en effectuant des simplifications dans ce produit de fractions.

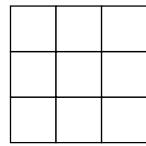
Exercice 5 [2 points]

Déterminer le nombre d'entiers naturels à deux chiffres qui vérifient la propriété suivante : quand le nombre est additionné au nombre obtenu en inversant ses chiffres, le résultat est 132.

Exercice 6 [3 points]

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

On dispose d'un tableau carré ci-contre partagé en neuf cases blanches de mêmes dimensions qui constituent un motif.



Quatre instructions A, B, C et E permettent de changer l'aspect de certaines cases.

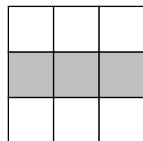
Ainsi :

Instruction	Descriptif	Effet de l'instruction
A	La case centrale du motif est noircie.	
B	Dans le motif, la case en bas à gauche et la case en haut à droite sont noircies.	
C	Dans le motif, la case médiane à gauche et la case médiane à droite sont noircies.	
E	Les couleurs du motif sont inversées : les cases blanches deviennent noires et les cases noires deviennent blanches.	Inverser les couleurs

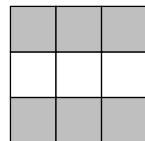
Remarque : si une case du motif est déjà noire et si une instruction demande de la noircir, alors cette case ne change pas de couleur et reste noire à la suite de cette instruction.

Exemples : À partir d'un motif dont toutes les cases sont blanches :

la suite d'instructions A C permet d'obtenir ce motif



la suite d'instructions A C E permet d'obtenir ce motif

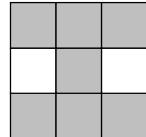


Pour chaque question ci-dessous, on dispose au départ d'un motif dont toutes les cases sont blanches.

1. Représenter le motif obtenu avec la suite d'instructions A B.
2. Parmi les quatre propositions suivantes, deux propositions permettent d'obtenir le motif ci-contre. Lesquelles ?

Proposition n° 1 : A B C

Proposition n° 3 : B C E C



Proposition n° 2 : C E

Proposition n° 4 : C A E A

3. Donner une suite d'instructions qui permet d'obtenir le motif ci-contre.

