Exercices de mathématiques

Été 2020

Cette planche comporte 50 exercices, qui couvrent le programme de Troisième (y compris les suppléments), et qui pour certains débordent sur le programme de lycée. Les thèmes sont : Arithmétique, Calcul, Inégalités, Logique et raisonnements, Conversion et proportionnalité, Probabilités, Algorithmie, Géométrie, Trigonométrie, Fonctions, Ensembles.

Les élèves qui se sont vues donner en Conseil de classe du travail d'été en mathématiques pourront se contenter de faire les 30 exercices non marqués d'un étoile ; les 20 exercices marqués d'une étoile sont moins aisés. Les élèves motivées les feront tous.

Bonnes vacances !

M. Trussant

ARITHMETIQUE

1) Mars est au zénith tous les 30 ans. Jupiter, tous les 42 ans. En 2007, elles étaient toutes les deux au zénith. Quand cette conjonction se reproduira–t–elle pour la première fois ?

2) On souhaite carreler une salle de bain de dimensions $165\text{ cm} \times 308\text{ cm}$. Au magasin, on trouve des carreaux carrés identiques de côté entier (en cm). Quelle est la dimension maximale des carreaux qu'on peut utiliser ? Dans ce cas, combien de carreaux utilise-t-on ?

3) ✯ Le reste dans la division euclidienne d'un certain nombre par 15 est 4. Quel est le reste dans la division euclidienne de ce nombre par 3 ? par 5 ?

4) ✯ Trouver tous les triplets d'entiers relatifs consécutifs dont la somme est égale au produit.

CALCUL

5) Simplifier :

$$\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2$$

6) ✯ Soient x et y deux nombres quelconques. On pose $s = x + y$ (la somme) et $p = xy$ (le produit). En fonction seulement de s et p, exprimer les quantités :

$$x^2+y^2 \qquad\qquad x^3+y^3 \qquad\qquad x^4+y^4$$

7) Simplifier :

$$\frac{\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{19}{8}-\frac{4^2}{8}\times\frac{3}{16}\right)}{1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)/\left(2-\frac{1}{3}\right)}$$

8) ✯ Simplifier :

$$\sqrt{16+\sqrt{30}}-\sqrt{16-\sqrt{30}}$$

9) ✯ Factoriser $a^3 - b^3$ par $a - b$. Factoriser $a^3 + b^3$ par $a + b$.

10) Simplifier :

$$\left(z+1+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-1+\frac{1}{z}\right)^2$$

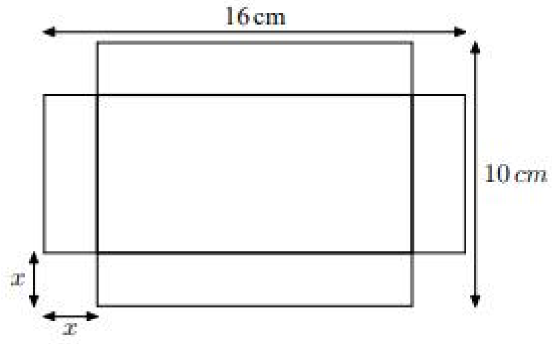
11) Avec les deux premières identités remarquables, factoriser :

a) $10^6 - 2.10^5 x + 10^4 x^2$

b) $0{,}01z^2 + 16 + 0{,}8z$

c) $24 + \frac{3v^2}{2} - 12v$

12) ✯ Dans le patron ci–dessous, on souhaite réaliser une boîte sans couvercle. (a) Quelle dimension de cette boîte le nombre x représente–t–il ? (b) Quelles valeurs x peut–il prendre ? (c) Exprimer le volume V de la boîte en fonction de x. (d) Trouver deux réels a et b tels que $V(x) = (ax + b)(2x - 4)^2$. (e) Existe-t-il une valeur de x telle que $V = 144$ cm^3 ?



13) Par la méthode de substitution, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x - 5y = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - y = -3 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

14) Par la méthode des combinaisons linéaires, résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = -13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = -11 \end{cases}$$

15) ✯ Un agriculteur dispose d'une clôture de 200 m de longueur. Dans un champ, il souhaite entourer avec cette clôture un terrain rectangulaire d'une superficie maximale. Quelles sont les dimensions du terrain ? *On pourra démontrer l'identité :* $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

16) ✯ J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que tu avais. Quand tu auras l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 63 ans. Quel âge avons-nous aujourd'hui ?

17) ✯ Factoriser :

$$(au + bv)^2 + (av - bu)^2$$

18) Avec la troisième identité remarquable, factoriser :

a) $10^{-2}p - 10^4$

b) $2{,}25u^2 - 1{,}44$

c) $\frac{1}{4} - \frac{Y^2}{196}$

19) ✯ Résoudre dans **R** l'équation : $3x + 4 = |x| + 2$.

20) Résoudre dans **R** :

a) $x^2 = 10^{12}$

b) $-2y^2 + 50 = 0$

c) $y^2 + \sqrt{10} = 3$

21) Factoriser :

a) $-81 + 16x^2$

b) $8x^2 - 8x + 2 - (x+3)(4x-2) - 4x^2 + 1$

c) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{49}{4} - \frac{21}{2}x$

INEGALITES

22) Résoudre dans **R** les inéquations :

a) $3x - 7 \geq 9 - 2x$

b) $4y + 9 < -y - 2$

c) $3z - 7 > -3z - 1$

d) $3 - 2t \leq t + 2$

23) Pour $-2 \leq x < 5$, encadrer les quantités :

$$A = 2x + 1 \qquad B = -3x + 4 \qquad C = x^2 \qquad D = |2x|$$

24) ✯ Quand x décrit [3 ; 7], quel ensemble chacune des quantités ci–dessous décrit–elle ?

$$X = -x + 3 \qquad Y = 2x - 5 \qquad X + Y \qquad 3X + Y$$

LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

25) ✯ Prouver que, si n^2 est pair, alors n l'est aussi. *On pourra raisonner par l'absurde.*

26) En exhibant un contre-exemple, prouver que, en général :

1) $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{c+d}$

3) $\sqrt{x^2} \neq x$

4) $a^p + a^q \neq a^{p+q}$

27) Nature des nombres.

a) La somme de deux nombres rationnels est-elle rationnelle ?
b) La somme de deux nombres irrationnels est-elle irrationnelle ?
c) L'inverse d'un nombre rationnel est-il rationnel ?
d) L'inverse d'un nombre irrationnel est-il irrationnel ?

28) ✮ Prouver que, pour tous nombres réels a et b :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

On pourra penser à une identité remarquable.

29) ✮ Dans quel cas le PGCD de deux nombres est-il égal à leur PPCM ?

CONVERSION ET PROPORTIONNALITE

30) (a) Convertir 67,379° en degrés, minutes et secondes. (b) Convertir $32°\ 27'48''$ en degrés.

31) ✮ L'âne Bourriquet met 20 jours pour brouter le pré du père Gaston. L'âne Buridan, lui, met 30 jours. À eux deux, combien de temps mettent-ils ?

PROBABILITES

32) Une urne contient 22 boules : 7 bleues, 4 rouges et 11 vertes. On tire au hasard deux boules sans remise. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?

33) ✮ On tire au hasard deux entiers distincts entre 1 et 20. Quelle est la probabilité que leur différence n'excède pas 5 ?

34) On considère la série de notes en Histoire-Géographie d'une classe de 15 élèves :

11	17	13	13	15	19	08	17	16	11	14	09	12	18	10

Calculer moyenne, médiane, étendue, premier quartile, troisième quartile.

ALGORITHMIE

35) On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir n
S prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
   S prend la valeur S + i
Fin Pour
Imprimer S
```

a. Pour le nombre 5 en entrée, quel nombre le programme donne-t-il en sortie ?
b. Pour quel nombre en entrée le programme donne-t-il 55 en sortie ?

36) On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir a et b
Si a < b alors
   M prend la valeur b
Sinon
   M prend la valeur a
Fin Si
Imprimer M
```

a. Pour une entrée (3 ; 7), quel est le nombre en sortie ?
b. Même question pour (11 ; 2).
c. Que fait ce programme ?
d. Comment modifier ce programme pour qu'il renvoie en sortie le plus petit des deux nombres donnés en entrée ?

37) On considère l'algorithme suivant :

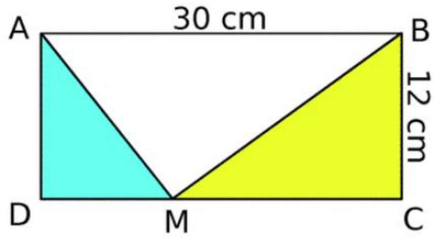
```
Imprimer « Entrez un nombre réel positif »
Saisir x
Tant que n <= x
   N prend la valeur n + 1
Fin Tant que
Imprimer n
```

a. Pour 3,7 en entrée, quel est le nombre en sortie ?
b. Même question pour 5 en entrée ?
c. Quel nombre donner en entrée pour obtenir 10 en sortie ?
d. Quelle fonction ce programme calcule-t-il ?
e. Comment modifier ce programme pour qu'il renvoie la partie entière du nombre donné en entrée ?

GEOMETRIE

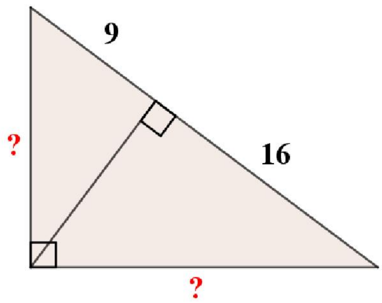
38) Soient A, B, C et D quatre points distincts cocycliques (*id est* situés sur un même cercle). Soit P le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. Prouver que : $PA.PC = PB.PD$.

39) $ABCD$ est un rectangle. Où placer le point M pour que l'aire du triangle ADM vaille le tiers de celle du triangle BCM ?



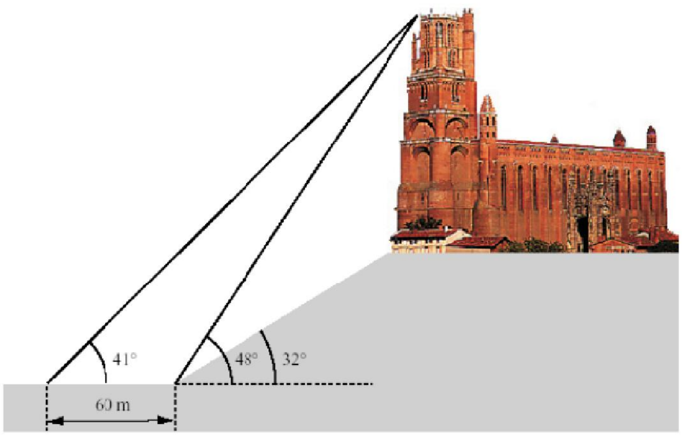
40) ✯ Dans un triangle ABC, D est le pied de la hauteur issue de B, et E est le pied de celle issue de C. Dans le triangle ADE, F est le pied de la hauteur issue de D, et G est le pied de celle issue de E. (a) Démontrer que $AD.AE = AB.AG = AC.AF$. (b) En déduire que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

41) (Histoire sans parole)



TRIGONOMETRIE

42) ✯ Quelle est la hauteur de la basilique de Chartres ?



43) Un navire relie le point de coordonnées 26°N 41°E au point de coordonnées 26°N 17°O, en suivant le parallèle de latitude 26°N, à l'allure moyenne de 6 nd. Quelle est la longueur du trajet et quelle fut sa durée ?

44) Un triangle a pour longueur de côté 5, 12 et 13. Déterminer les mesures de ses trois angles.

FONCTIONS

45) Représenter graphiquement les fonctions affines $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = -x + 7$. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, d'abord par lecture graphique, puis par le calcul.

46) Déterminer les ensembles de définition.

$$\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2-x} \qquad \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x-1}} \qquad \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x-2}} \qquad \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4}$$

47) ✯ Représenter graphiquement la fonction $x \longmapsto 3|x-2| + |x+2|$.

ENSEMBLES

48) (a) Lister les sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{E} = \{A, D, C, B\}$. (b) Soit maintenant l'ensemble $\mathcal{F} = \{G, D, E, H, A, F\}$. Décrire $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$, puis $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, puis $\mathcal{F} \backslash \mathcal{E}$, et enfin $\mathcal{E} \backslash \mathcal{F}$.

49) Exprimer sous forme d'intervalle les ensembles de nombres :

a) $]2\,;7] \cup [5\,;+\infty[$
b) $[5\,;9[\cap [7\,;13]$
c) $]-\infty\,;3] \cap [5\,;9[$
d) $]-\infty\,;2] \cup]-2\,;5[$

50) ✯ Compléter les formules suivantes. *On fera des diagrammes de Venn (patatoïdes).*

a) $\bar{\bar{A}} = \cdots$
b) $\overline{A \cup B} = \cdots$
c) Si $A \subset B$, alors $\bar{A} \ldots \bar{B}$

FIN

Par cœur

Les éléments ci-dessous ont été appris par cœur en Troisième. Il sera bon de s'assurer, avant l'entrée en Seconde, qu'ils n'ont pas été oubliés.

Identités remarquables d'ordre 3.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 - 3a^2 + 3ab^2 - b^3$$

Angles remarquables.

$\cos 30° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$ $\quad$ $\cos 60° = \sin 30° = 1/2$ $\quad$ $\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$

Nombres premiers jusqu'à 100.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Puissances de 2.

2 4 16 32 64 128 256 512 1024

Carrés parfaits.

100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400

Valeurs approchées de certaines constantes d'usage fréquent.

$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ $\quad$ $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ $\quad$ $\pi \simeq 3{,}141\,6$