Suites

1. Généralités

Définition. On appelle suite toute application de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbf{R}$ où $n_0 \in \mathbf{N}$. Souvent $n_0 = 0$ ou 1. L'image de n par la suite u se note u_n et s'appelle le terme général de la suite u.

Génération. Une suite peut être définie par :

- une formule explicite (ex. $u_n = n^2 - 3$)
- une relation de récurrence (ex. $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = 4v_n + 5$)
- un algorithme (ex. suite de Syracuse)
- un motif géométrique (ex. flocons de Von Koch)
- un autre moyen (ex. décimales de π)

Exercice. Déclic : 41, 42, 43.

---

2. Bornitude

Définitions. Un réel α est dit majorant de la suite (u_n) si, pour tout n,

$$u_n \leq \alpha$$

Une suite qui admet un majorant est dite majorée. *Idem* pour minorant et minorée.
Une suite est dite bornée si elle est minorée et majorée.

Exercice. Étudier la bornitude des suites dont est donné ci-dessous le terme général :

$$2n \qquad (-2)^n \qquad \frac{n}{n+1} \qquad -n^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. Démontrer que cette suite est majorée par 3.

---

3. Monotonie

Définitions. Une suite (u_n) est dite croissante, si, pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$, et strictement croissante si, pour tout n, $u_n < u_{n+1}$.
Idem pour décroissante et strictement décroissante.

Définitions. Une suite (u_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante ; constante si tous ses termes sont égaux ; stationnaire si tous ses termes sont égaux à partir d'un certain rang.

Noter que ces définitions sont cohérentes avec celles de la monotonie des fonctions.

Exercice. Déclic : 49.

Propriété. La suite (u_n) est croissante si, et seulement si, pour tout n,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geq 0}$$

Exercice. Déclic : 47 et 48.

Propriété. La suite (u_n) à valeurs strictement positives est croissante si, et seulement si, pour tout n,

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1}$$

Exercice. Déclic : 50.

Exercice. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. Démontrer que cette suite est croissante.

---

4. Notion de limite

Activité. Déclic : méthode p. 145.

Exercices. Déclic : 53, 54 et 55.

---

5. Modélisation

Les suites servent à modéliser l'évolution de phénomènes en temps discret. Voici un exemple.

Exercice (d'après D2clic : 72).
Une équipe de chercheurs étudie l'évolution d'une population d'abeilles. On estime que, chaque mois, la population s'accroît naturellement de 5 % et que, en moyenne, 100 abeilles ne reviennent pas à la ruche. Au début de l'étude (au mois $n = 0$), la population a été estimée à $p_0 = 4\,000$ individus. On souhaite déterminer si cette population peut tripler. On note p_n la population de la ruche au bout de n mois.

1. À l'aide d'un tableur, calculer les termes p_1 à p_4.
2. Conjecturer la monotonie de la suite (p_n).
3. Conjecturer la limite de la suite (p_n).
4. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
5. Écrire en Python un algorithme pour calculer les termes de cette suite.
6. Répondre à la question posée.

Réponses :

1. $4\,100$, $4\,205$, $4\,315$ et $4\,441$.
2. La suite (p_n) semble croissante.
3. Pas de conjecture.
4. $p_{n+1} = 1,05 p_n - 100$ (suite arithmético-géométrique).
5. *Cf.* le fichier **abeilles72.py**.
6. La population aura triplée au bout de 2 ans et 9 mois.
