# Probabilités II – Variables aléatoires réelles.

**Contenus.**

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

---

## 1. Variable aléatoire

Introduction : dé, taille d'un poisson, température, etc.

Le résultat numérique d'une expérience aléatoire est modélisé par une variable aléatoire.

On fixe un univers $\Omega$.

**Définition.** On appelle variable aléatoire toute application de $\Omega$ dans $\mathbf{R}$.

**Exemples.** Cartes, deux dés, etc.

**Notation.** Si X est une variable aléatoire et si $a$ est un réel, alors l'événement

$$\{\omega \in \Omega \,;\, \mathrm{X}(\omega) = a\}$$

se note simplement $\mathrm{X} = a$.
*Idem* pour les quatre signes de comparaison.

**Exercice.** On lance deux dés, on fait la somme. Décrire les événements : $\mathrm{X} = 7$ et $\mathrm{X} \leq 4$.

---

## 2. Loi d'une variable aléatoire

On fixe un univers probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$.

**Définition.** On appelle loi d'une variable aléatoire X l'application de $\mathrm{X}(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$x \longmapsto \mathbf{P}(X = x)$$

On dit que $X$ suit sa loi.

Usuellement, la loi d'une variable aléatoire se présente sous forme d'un tableau.

**Exercice.** Déclic : Méthode 1 page 345 ; J'applique 2 page 345.

**Propriété.** Si la variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_k$ et si on note $p_i = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i)$, alors

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

Preuve. Les $X = x_i$ forment un système complet d'événements.

**Définition.** Avec les même notations, si tous les $p_i$ sont égaux, la loi de X est dite uniforme.

---

**3. Espérance d'une variable aléatoire**

**Définition.** Soit X une variable aléatoire. On note $x_1, x_2, \cdots, x_k$ les valeurs prises par X. Et on note $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ pour tout $i$. On appelle espérance de X le nombre :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_kx_k}$$

L'espérance est homogène à la variable.

**Exercice.** (a) On jette un dé. Calculer l'espérance. (b) Idem avec un dé tétraédrique.

**Propriété (admise).** Si X et Y sony deux variables aléatoires et si $\lambda$ est un nombre réel, alors :

$$\boxed{\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbf{E}(\lambda X) = \lambda \mathbf{E}(X)}$$

Autrement dit, l'espérance est linéaire.

Preuves. la seconde formule est claire. La première nécessite le lemme de transfert (HP).

**Exercice.** On lance deux dés et on fait la somme. Calculer l'espérance. Vérifier la linéarité.

---

**4. Variance d'une variable aléatoire**

**Définition.** La variance d'une variable aléatoire X est définie par :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}(X))^2\right]}$$

Son écart type est :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}}$$

L'écart type est homogène à la variable.

**Exercice.** On lance un dé tértraédrique. Calculer variance et écart type.

**Exercice.** Déclic : Méthode 2 page 347 ; J'applique 3 page 347.

**Propriété.** Soient X une variable aléatoire et $\lambda$ un réel. Alors :

$$\boxed{\mathbf{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbf{V}(X)}$$

Preuve. Simple calcul.

**Remarque.** Deux variables éléatoires de même loi ont même espérance et même variance.

**Propriété [Formule de König].** Pour toute variable aléatoire X,

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2}$$

Preuve. Développer et calculer.

**Propriété.** Une variable aléatoire est de variance nulle si, et seulement si, elle est constante.

Clair.

---