Suites 1 - Génération

Ici n désigne un entier naturel.

1. On pose : $x_n = n^2 + n - 1$. Exprimer x_{n-1}, x_{n+1}, x_{2n}, x_{2n+1} et x_{n^2}.

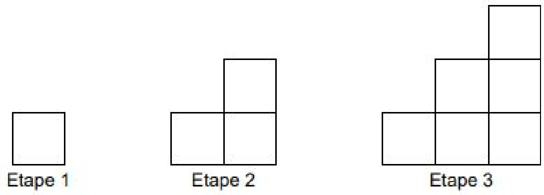
2. On pose : $a_n = 2^n$. Exprimer a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n} et a_{4n} en fonction de a_n.

3. On note : $a_n = n^n / 2^{2n}$. Exprimer a_{2n}, a_{4n} et a_{n^2}.

4. Le n-ème nombre de Fibonnacci est défini par : $F_n = 2^{2^n} + 1$. Simplifier :

$$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 \qquad F_n(F_n - 2) \qquad F_n^2 \qquad F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$$

5. On réalise un motif en escalier en utilisant des carrés :



Combien de carrés devra-t-on utiliser à l'étape 10 ?

6. On définit une suite par son premier terme et une relation de récurrence :

(a) $a_0 = -5$ et $a_{n+1} = a_n + 3$

(b) $b_1 = 3$ et $b_{n+1} = 2a_n$

(c) $c_1 = 2$ et $c_{n+1} = 2c_n^2$

Dans chaque cas, conjecturer une formule explicite pour le terme général, puis démontrer cette conjecture, soit par un argument d'unicité, soit par récurrence.

7. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

Calculer a_{2022}.

8. Dans chaque cas, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

(a) $u_n = 3n - 5$.

(b) $u_n = 5 \cdot 3^n$.

(c) $u_n = -3 \cdot 2^n + 1$.

Solutions

1. $x_{n-1} = n^2 - n - 1$
$x_{n+1} = n^2 + 3n + 1$
$x_{2n} = 4n^2 + 4n + 1$
$x_{2n+1} = 4n^2 + 6n + 1$
$x_{n^2} = n^4 + n^2 - 1.$

2. Clair.

3.

$$a_{2n} = \frac{n^{2n}}{2^{2n}} \qquad a_{4n} = n^{4n} \qquad a_{n^2} = \frac{n^{2n^2}}{2^{2n^2}}$$

4. (*à faire*)

5. $1 + 2 + \cdots + 9 + 10 = 55.$

6. (*à faire*)

7. Conjecture puis récurrence : $a_n = 1/n$.

8. (a) $u_{n+1} = u_n + 3$
(b) $u_{n+1} = 3u_n$
(c) $u_{n+1} = 2u_n - 1$

Suites 2 - Monotonie et borniture

1. Étudier monotonie et bornitude.

$$a_n = -2n+5 \qquad b_n = n^2-3n \qquad c_n = 2^n \qquad d_n = \frac{n}{n+1}$$

$$e_n = (-1)^n \qquad f_n = \frac{n^2+1}{2n^2} \qquad g_n = 1+\frac{1}{n} \qquad h_n = \frac{3^n}{n}$$

2. *Idem.*

(a) $a_1 = 4$ et $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$.

(b) $b_1 = 4$ et $b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 1}$.

(c) $c_0 = 1,5$ et $c_{n+1} = (c_n - 1)^2 + 1$.

3. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La suite (a_n) est définie par $a_0 = a$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = f(a_n)$. Est-il vrai que, si f est croissante, alors (a_n) est croissante ?

4. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

(a) Démontrer que (a_n) est minorée par $1/2$.

(b) Démontrer qu'elle est majorée par 1.

(c) Étudier sa monotonie.

5. Étant donnée une suite (a_n), on pose :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(a) Démontrer que, si la suite (a_n) est croissante, alors la suite (A_n) l'est aussi.

(b) Quid de la réciproque ?

6. On considère la suite de terme général $a^n / n!$ où $a > 0$.

(a) Étudier sa monotonie.

(b) Quel est son terme maximal ?

Solutions

1. Monotonie et bornitude.

- $(a_n) \searrow$, non minorée et majorée par 5 (atteint)
- $(b_n) \nearrow$, minorée par -2 (atteint) et non majorée
- $(c_n) \nearrow$, minorée par 1 (atteint) et non majorée
- $(d_n) \nearrow$, minorée par 0 (atteint) et majorée par 1 (non atteint)
- (e_n) non monotone, minorée par -1 (atteint) et majorée par 1 (atteint)
- $(f_n) \searrow$, minorée par $0,5$ (non atteint) et majorée par 1 (atteint)
- $(g_n) \searrow$, minorée par 1 (non atteint) et majorée par 2 (atteint)
- $(h_n) \nearrow$, minorée par 3 (atteint) et non majorée

2. (*à faire*)

3. (*à faire*)

4. (*à faire*)

5. (*à faire*)

6. (*à faire*)

Suites 3 - Suites arithmétiques

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique si, et seulement si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le terme u_n est la moyenne arithmétique des termes u_{n-1} et u_{n-1}.

2. La suite a est arithmétique. Si $a_{21} + a_{54} = 397$ et $a_{39} + a_{53} = 482$, que vaut $a_{31} + a_{48}$?

3. La suite arithmétique u est définie par $u_0 = 5$ et sa raison $r = 2$. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Calculer u_8, u_{40}, S_9 et S_{23}.

4. La suite arithmétique v est définie par $v_1 = 12$ et sa raison $r = -3$. On note $T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
Calculer v_9, v_{27}, T_6 et T_{19}.

5. Calculer les sommes :

(a) $50+53+56+59+\cdots+137+140$

(b) $-42-37-32-\cdots+148+153$

(c) $53+60+67+\cdots+207+214$

6. Comparer les nombres :

$$2024\times(1+2+3+\cdots+2023) \quad \text{et} \quad 2023\times(1+2+3+\cdots+2024)$$

7. Calculer la somme de tous les entiers naturels multiples de 3 inférieurs à 1 000.

8. Trois nombres en progression arithmétique ont pour somme 39 et pour produit 2 080.
Quels sont-ils ?

9. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique et on note $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(a) $a_5 = 13$ et $a_{12} = 27$. Calculer a_{16}.

(b) $a_4 = -12$ et $a_{13} = -57$. Calculer a_{18}.

(c) $a_7 = 25$ et $S_{14} = 371$. Calculer a_{31}.

(d) $S_9 = 144$ et $S_{17} = 476$. Calculer a_{28}.

10. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique et on note $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
On donne $S_{13} - S_8 = 125$ et $S_{16} - S_5 = 275$. Calculer S_{23}.

11. La somme de 25 entiers consécutifs vaut 500. Combien vaut le plus petit d'entre eux ?

12. Pour une certaine suite arithmétique, la somme des 50 premiers termes vaut 200, et la somme des 50 termes suivants vaut 2 700. Quel est le premier terme de cette suite ?

13. (a) Calculer les sommes $1+3$; $1+3+5$; $1+3+5+7$; $1+3+5+7+9$.

(b) Énoncer une conjecture puis la démontrer.

14. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de premier terme a et de raison r. Soit $p \in \mathbf{N}^*$.
Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp}$$

Solutions

1. Utiliser $u_n = u_0 + nr$.

2. $a_0 = 11$ et $r = 5$. D'où : $a_{31} + a_{48} = 417$.

3. $u_8 = 21$, $u_{40} = 85$, $S_9 = 140$, $S_{23} = 72$.

4. $v_9 = -12$, $v_{27} = -66$, $T_6 = 27$, $T_{19} = -285$.

5. Appliquer la formule.

(a) 2 945

(b) 2 220

(c) 3 204

6. $4\,143\,686\,624 > 4\,141\,641\,371$.

7. 166 833.

8. Trois nombres : 10, 13 et 16.

9. (a) $a_{16} = 35$

(b) $a_{18} = -82$

(c) $a_{31} = 97$

(d) $a_{28} = 85$

Solutions

Suites 4 bis - Sommes : exercices divers (*à classer ensuite*)

1. Calculer les sommes :

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) \qquad \sum_{j=0}^{n}(3k-1) \qquad \sum_{l=0}^{2n}(3k-2) \qquad \sum_{k=-n}^{n}(4k-3)$$

2. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}2^k \qquad \sum_{k=0}^{2n}2^k \qquad \sum_{k=n}^{2n}2^k \qquad \sum_{k=-n}^{n}2^k$$

3. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=1}^{2p}(-2)^k \qquad \sum_{k=0}^{2p+1}(-2)^k \qquad \sum_{k=0}^{2p}(-2)^k \qquad \sum_{k=-p}^{2p-1}(-2)^k$$

4. Calculer les sommes :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots+\frac{1}{5^{n-1}}$$

5. Calculer les sommes :

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Suites 4 ter - Sommes télescopiques (*à classer ensuite*)

1. On note

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k$$

(a) Pour deux réels α et β quelconques, on note :

$$a_k = \alpha k + \beta$$

Trouver les valeurs de α et de β de sorte que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $k = a_{k+1} - a_k$.
Procéder par identification des coefficients d'un polynôme.

(b) En déduire une expression simple de $S_1(n)$.

2. Appliquer la même technique pour calculer :

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

3. On note

$$P_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

(a) Pour deux réels α et β quelconques, on note :

$$a_k = (\alpha k + \beta)2^k$$

Trouver les valeurs de α et de β de sorte que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $k2^k = a_{k+1} - a_k$.
Procéder par identification des coefficients d'un polynôme.

(b) En déduire une expression simple de $P_2(n)$.

4. Appliquer la même technique pour calculer :

$$P_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k3^k$$

Suites 5 - Suites arithmético-géométriques

1. La (a_n) est définie par $a_0 = 5$ et la relation :

$$a_{n+1} = 3a_n - 4 \qquad (*)$$

(a) Prouver qu'il existe une unique suite constante qui vérifie $(*)$. On notera α son terme.

(b) On pose $b_n = a_n - \alpha$. Prouver que la suite (b_n) est géométrique.

(c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

(d) En déduire celle de a_n.

2. Même exercice mais version étoffée.
On note (E) l'équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à second membre constant :

$$a_{n+1} - 3a_n = -4 \qquad \text{(E)}$$

On note (H) l'équation dite *homogène associée* :

$$a_{n+1} - 3a_n = 0 \qquad \text{(H)}$$

(a) Soit (α_n) une solution particulière de (E). Prouver alors que la suite (a_n) est solution de (E) si, et seulement si, la suite $(a_n - \alpha_n)$ est solution de (H). En déduire alors que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions de (H) une solution particulière de (E).

(b) Démontrer que (E) admet une unique solution constante, qui sera notée (α), qui est donc une solution particulière.

(c) Trouver les solutions de (H). L'ensemble de ces solutions sera paramétré par un réel λ.

(d) En déduire les solutions de (E).

(e) Parmi les solutions de (E), exhiber celle dont le terme d'indice nul vaut 5.

3. Les archives du FBI relatent la façon dont commença l'apocalypse zombie qui ravagea la côte est des États-unis au début de l'été 2024. Un virus foudroyant s'était échappé d'un laboratoire de Los Angeles, infectant la population. Dès le premier jour, il y eut 1 000 zombies. Ensuite, chaque jour, chaque zombie infectait en moyenne 0,3 personne. Désemparée, la police n'arrivait à tuer que 100 zombies par jour.

(a) On note z_n le nombre de zombies au jour n.
Démontrer que la suite (z_n) est arithmético géométrique.

(b) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

(c) Combien de zombies la Californie comptait-elle 28 jours plus tard ?

Solutions

Solution de l'exo 2 :

1. Simple calcul.
2. $\alpha - 3\alpha = -4$ donne $\alpha = 2$.
3. Ce sont les suites $(\lambda 3^n)$ où λ décrit $\mathbf{R}$.
4. Ce sont les suites $(2 + \lambda 3^n)$ où λ décrit $\mathbf{R}$.
5. C'est la suite $(2 + 3^{n+1})$.

Suites 6 - Suites homographiques

1. **Suite homographique.**
On note $\mathrm{I} = [0\,;1]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

(a) Étudier les variations de f.

(b) En déduire que I est stable par f.

(c) On considère la suite (u_n) definie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$$

Prouver que, pour tout n, $u_n \in \mathrm{I}$.

Partie A.

(d) Representer graphiquement f dans un repère orthonormé (unité : 10 cm).

(e) placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

(f) Que suggère le graphique au sujet du sens de variation de (u_n) ?

(g) Calculer $f(x) - x$.

(h) En déduire l'expression de $u_{n+1} - u_n$ comme une fraction rationnelle en u_n.

(i) En déduire le sens de variation de (u_n).

Partie B.

(j) On pose

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$$

Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

(k) Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.

(l) Exprimer u_n etn fonctionn de v_n.

(m) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solutions

Suites 7 - Approfondissements

Exercice 1 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

1. La suite (S_n) est-elle monotone ?
2. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$,
$$\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
3. En déduire que la suite (S_n) est majorée.
4. Avec un algorithme Python (à livrer sur École directe avec comme nom 4GRA.py), calculer le millième terme de cette suite, noté α.
5. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{6\alpha}$ au dix-millième près.
6. Quelle semble être la limite de la suite (S_n) ?

Exercice 2

On considère la suite de terme général :

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Justifier que la suite (H_n) est strictement croissante.
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$$
4. Justifier que la suite (H_n) n'est pas majorée.
5. Conjecturer le comportement de H_n en l'infini.

Second membre non constant.
On note (E) l'équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à second membre constant :

$$2a_{n+1} - 4a_n = -6n + 16 \qquad \text{(E)}$$

On note (H) l'équation dite *homogène associée* :

$$2a_{n+1} - 4a_n = 0 \qquad \text{(H)}$$

1. Soit (α_n) une solution particulière de (E). Prouver alors que la suite (a_n) est solution de (E) si, et seulement si, la suite $(a_n - \alpha_n)$ est solution de (H). En déduire alors que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant aux solutions de (H) une solution particulière de (E).
2. Rechercher une solution particuliète de (E) sous la forme $(\alpha n + \beta)$, où α et β sont deux nombres réels à déterminer.
3. Trouver les solutions de (H). L'ensemble de ces solutions sera paramétré par un réel λ.
4. En déduire les solutions de (E).
5. Parmi les solutions de (E), exhiber celle dont le terme d'indice nul vaut 2.

Solutions

Récurrence ...

1. Simple calcul.

2. Par identification, on obtient $(3n-5)$.

3. Ce sont les suites $(\lambda 2^n)$ où λ décrit $\mathbf{R}$.

4. Ce sont les suites $(3n-5+\lambda 2^n)$ où λ décrit $\mathbf{R}$.

5. C'est la suite $(3n-5+7\cdot 2^n)$.

Un exercice sur les suites

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Vous **admettrez** que ces deux suites sont à valeurs strictement positives.

1. (a) Calculez u_1 et v_1.

(b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

(c) Justifier qu'elle est minorée par 1.

(d) Démontrer que, pour tout n,

$$u_n \geqslant n+1$$

(e) Quel est le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

2. On pose :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}$$

(a) Démontrer que, pour tout n,

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

(b) Démontrer que, pour tout n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}$$

3. On pose :

$$t_n = \frac{r_n - \sqrt{2}}{r_n + \sqrt{2}}$$

(a) Démontrer que la suite (t_n) est géométrique.
Préciser son premier terme et raison, qui sera notée ρ.
Donner une valeur approchée de ρ.

(b) Exprimer t_n en fonction de n.

(c) Étudier la monotonie de (t_n).

(d) Exprimer r_n en fonction de t_n.

(e) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

(f) Quel est le comportement de (t_n) quand n tend vers $+\infty$?

[a4paper,12pt]article amsmath amssymb

Exercice sur la fonction logarithme

Exercice : Étude d'une fonction logarithmique

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x.$$

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Déterminer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer les éventuels points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes du plan.

Partie 2 : Résolution d'équations

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $x\ln(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. Noter cette solution α.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie 3 : Problème d'optimisation

1. Soit un rectangle de périmètre $P = 10$. On souhaite maximiser l'aire de ce rectangle lorsque la longueur x du rectangle est choisie dans l'intervalle $]0;5[$.
2. Montrer que l'aire $A(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A(x) = x(5-x).$$

3. Utiliser la fonction $f(x) = x\ln(x) - x$ pour exprimer la condition optimale et déterminer la valeur de x qui maximise l'aire.