Géométrie II – Repères

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé.

1. On donne les points A(6 ; 6), X(4 ; 0) et Y(0 ; −2).
   Calculer la distance du point A à la droite (XY).

2. On donne les points A(−5 ; 2), B(−3 ; −1) et C(1 ; 6).
   (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Établir une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On donne les points A(−2 ; −3), B(6 ; 1) et C(1 ; 6).
   Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

4. On donne les points A(1 ; 2), B(3 ; 6) et C(10 ; 5).
   Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

5. On donne les points A(4 ; 7) et B(−5 ; 2).
   Établir l'équation cartésienne réduite du cercle de diamètre [AB].

6. Pour chaque équation de cercle, préciser centre et rayon.
   (a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 2 = 0$

7. Soit $a > 0$. On considère l'équation :
   $$x^2 + y^2 - 4ax + 6ay - 12a^2 = 0$$
   (a) Démontrer que cette équation est celle d'un cercle.
   (b) Préciser centre et rayon.

8. À quelle condition sur les coefficients α, β et γ l'équation
   $$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$
   est-elle celle d'un cercle ?

9. On considère l'équation paramétrique :
   $$x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 + 4m - 3 = 0$$
   (a) À quelle condition sur m cette équation est-elle celle d'un cercle ?
   (b) Lorsque c'est le cas, on note Ω_m le centre du cercle.
   Déterminer le lieu des points Ω_m.

10. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(4\,;-1)$ qui passe par A(1 ; 5).
    Démontrer que la droite Δ d'équation $x - 2y + 9 = 0$ est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point A.

11. Un canon situé au point C(1 ; 0) tire un obus vers la droite dont la trajectire est modélisée par la parabole d'équation :

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 6$$

On appelle *flêche* de la trajectoire la hauteur de son sommet. On appelle *distance d'impact* la distance entre le canon et le point d'impact du boulet. L'unité du repère vaut 100 m.

Calculer la flêche et la distance d'impact.

12. On donne les points A(2 ; 1) et B(−3 ; 3). Déterminer une équation cartésienne de :

(a) la droite (AB) ;

(b) la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par A ;

(c) la médiatrice du segment [AB] ;

(d) le cercle de centre A et de rayon AB ;

(e) le cercle de diamètre [AB].

13. On donne les points A(1 ; −2), B(−3 ; 0) et C(1 ; 4).

(a) Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

(b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites qui portent les côtés.

(c) Déterminer une équation cartésienne de chaque hauteur.
En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

(d) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médianes. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

(e) Déterminer une équation cartésienne de chacune des trois médiatrices.
En déduire les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

(f) Donner l'équation cartésienne réduite du cercle circoncrit au triangle ABC.
Préciser son rayon.

(g) Démontrer que les points H, Ω et G sont alignés.
Démontrer que GH = 2GΩ.
La droite qui contient les points H, Ω et G est la *droite d'Euler* du triangle ABC.