Géométrie I – Vecteurs

1. Utiliser la Loi des sinus et la Loi des cosinus pour résoudre chaque triangle :

(a) AB = 48, BC = 35, CA = 43.

(b) AB = 8, AC = 3, $\widehat{\text{BAC}} = 60°$.

(c) AB = 20, $\widehat{\text{BAC}} = 27°$, $\widehat{\text{ABC}} = 48°$.

2. Calculer l'aire du triangle 3-7-8 (sans utiliser la formule de Héron !).

3. Les points A et B sont tels que AB = 6. Pour tout nombre réel k, on note $\mathscr{L}_k$ le lieu des points M qui vérifient :

$$\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = k$$

Dans chaque cas, indiquer la nature de $\mathscr{L}_k$ et en donner les caractéristiques géométriques :

(a) $k = -13$ (b) $k = -9$ (d) $k = 7$

4. ABC est un vrai triangle.

(a) Démontrer qu'il existe un unique point G qui vérifie :

$$\overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{GB}} + \overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0}$$

Ce point est appelé *centre de gravité* du triangle ABC.

(b) Si I désigne le milieu de [BC], démontrer que :

$$\overrightarrow{\text{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AI}}$$

(c) Justifier que G est sur la médiane issue du sommet A.

(d) En déduire que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes.

(e) Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} = 3\overrightarrow{\text{MG}}$$

(f) En déduire les coordonnées de G dans un repère donné si celles des sommets A, B et C dans ce même repère sont respectivement (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C).

5. On considère un vrai triangle ABC.

(a) Démontrer que, pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{MB}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{MC}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0$$

(b) En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
Le point de concours se nomme l'*orthocentre* du triangle ABC.

6. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Les points A et B, situés sur le cercle trigonométrique, ont pour abscisse curviligne respective $\pi/6$ et $\pi/4$.

(a) indiquer les coordonnées cartésiennes des points A et B.

(b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}}$ en utilisant la formule des coordonnées cartésiennes.

(c) Calculer ce même produit scalaire en utilisant cette fois la formule physique.

(d) En déduire la valeur exacte de $\cos(\pi/12)$.

(e) En déduire celle de $\sin(\pi/12)$.