Suites géométriques

1. Définition

Définition. Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Ce réel q (unique, sauf si la suite est nulle) s'appelle la raison de la suite.
Une telle suite est dite à croissance exponentielle.

Géogebra.

Exemples. $u_n = 3 \cdot 2^n$; $v_n = 5 \cdot 10^{-n}$.

Exercice. Déclic : 64.

Propriété. Soit $q > 0$ un nombre réel. Alors, la suite (q^n) est strictement croissante si $q > 1$, constante si $q = 1$, et strictement décroissante si $q < 1$.

Preuve. Calculer le ratio.

Exercice. Déclic : 68.

2. Terme général

Propriété. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

et réciproquement.

Preuve. Télescopage ou récurrence.

Exercice. Un capital de 3 000 € est placé à 2 % par an. Que vaudra-t-il 15 ans plus tard ?

Exercice. Déclic : 66.

3. Somme de termes consécutifs

Lemme. Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et tout $n \geq 1$,

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Preuve. Télescopage ou récurrence.

Exemple. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 512 + 1\,024 = 2\,047$.

Propriété. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q \neq 1$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Preuve. Découle du lemme.

Retenir que *la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique est égale au premier terme que multiplie « 1 moins la raison puissance le nombre de termes » et que divise « 1 moins la raison »*.