17 Géométrie dans le plan.

17.1 Avec les distances et sans vecteurs.

On fait les exercices de cette section sans utiliser les vecteurs.

Exercice 277
Soit $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$. Montrer que la distance AB est égale à :

1. $\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.
2. $|x_b - x_a|$ si $y_a = y_b$.
3. $|y_b - y_a|$ si $x_a = x_b$.

Exercice 278
Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle de sommets $(2, -2), (-2, 2), (1, 5)$.

Exercice 279

1. Quelles sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire à l'axe Ox passant par $A(2, 3)$?
2. Soit $A(-3, 2)$ et $B(4, 1)$. Montrer que le segment $[AB]$ coupe l'axe Oy et non l'axe Ox. Quelle partie (au-dessus ou au-dessous de l'axe Ox) est-elle coupée par le segment ?
3. Déterminer la distance de $(-3, 4)$ à l'axe des abscisses. A l'axe des ordonnées.
4. Soit le point d'ordonnée $y = 2$ situé sur la bissectrice du premier quadrant. Quelle est son abscisse ?
5. Soit le point d'ordonnée $y = 2$ situé sur la bissectrice du deuxième quadrant. Quelle est son abscisse ?

Exercice 280
Préciser le lieu des points (x, y) du plan tels que :

1. $x = 3$.
2. $x = y$.
3. $x = -y$.
4. $|x| = a$.
5. $|x| = |y|$.
6. $|x| < a$.
7. $|x| < a$ et $|y| < b$.

Exercice 281
Soit $A(x, y)$.

1. Donner les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'axe Ox.
2. Donner les coordonnées du symétrique de A par rapport à la première bissectrice.
3. Donner les coordonnées du symétrique de A par rapport à la deuxième bissectrice.

Exercice 282
Soit $A(4, -2), B(1, 2), C(-2, 6)$.

1. Quelles sont les distances entre ces points, pris deux à deux ?
2. Montrer que ces points sont alignés. Lequel est entre les deux autres ?

Exercice 283

1. Déterminer sur l'axe Ox un point équidistant de $(1, 2)$ et $(2, 3)$.
2. Déterminer un point à égale distance des axes de coordonnées et de $(3, 6)$.

Exercice 284
Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer les coordonnés de C en fonction de celles de $A(x_A, y_A)$ et de $B(x_B, y_B)$. Appliquer le résultat à $A(0,1)$ et $B(2,0)$.

Exercice 285
Les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux sommets adjacents du carré $ABCD$. Déterminer les coordonnées des autres sommets. Appliquer le résultat trouvé à $A(1,0)$ et $B(0,1)$.

Exercice 286
Quelle condition les coordonnées des sommets du triangle ABC doivent-elles vérifier, pour que le triangle ait un angle droit en C ?

Exercice 287

1. On considère le parallélogramme $ABCD$ dont on donne les sommets $A(1,0), B(2,3), C(3,2)$. Déterminer les coordonnées du dernier sommet et celles de l'intersection des diagonales.
2. On donne une extrémité $(1,1)$ d'un segment, et son milieu $(2,2)$. Déterminer l'autre extrémité.
3. Montrer que les points $(3,0), (1,0), (1,-2), (3,-2)$ sont les sommets d'un carré.

Exercice 288

1. Soit λ_1 et λ_2 des réels strictement positifs. Soit les points $A_1(x_1, y_1), A(x, y), A_2(x_2, y_2)$. On dit que le point A divise le segment $[A_1A_2]$ dans le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ si
$$A \in [A_1A_2] \text{ et } \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$
Montrer que les coordonnées de A sont
$$\left(x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$
2. Une cévienne est, dans un triangle, un segment reliant un sommet à un point du côté opposé, qui est alors nommé le pied de la cévienne considérée. Les médianes sont des exemples de céviennes. Si A est un sommet du triangle, on note $\overline{A}$ le pied d'une cévienne issue de A.

   On considère trois réels non nuls a, b, c et un triangle ABC. Par hypothèse, $\overline{A}$ divise le coté $[CB]$ dans le rapport $\frac{b}{c}$, $\overline{B}$ divise le coté $[AC]$ dans le rapport $\frac{c}{a}$ et $\overline{C}$ divise le coté $[AB]$ dans le rapport $\frac{b}{a}$.
   (a) Exprimer les coordonnées de $\overline{A}$ en fonction de celles de B et C.
   (b) Déterminer les coordonnées du point du segment $[A\overline{A}]$ qui le divise dans le rapport $(b+c) : a$.
   (c) Déterminer les coordonnés du point qui divise $[B\overline{B}]$ dans le rapport $(a+c) : b$.
   (d) Déterminer les coordonnés du point qui divise $[C\overline{C}]$ dans le rapport $(a+b) : c$.
   (e) Conclure.
3. On donne les coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ des sommets d'un triangle. Déterminer les coordonnés du point d'intersection de ses médianes.
4. Dans un triangle, on donne les coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ des milieux des côtés. Déterminer les coordonnées des sommets.
5. Le centre de gravité de deux masses non nulles m_1 et m_2, situées aux points $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$ est défini comme le point A divisant le segment $[A_1A_2]$ dans le rapport $m_2 : m_1$.
   (a) Montrer que ses coordonnées sont
   $$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\right).$$
   Montrer que ses coordonnées sont
   $$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\right).$$

(b) Le centre de gravité de n masses m_i, toutes non nulles, situées aux points A_i, est défini par récurrence. Ainsi, si A'_n est le centre de gravité des $n-1$ premières masses, alors le centre de gravité des n masses est défini comme le centre de gravité de la masse m_n située au point A_n et de la masse $m_1+m_2+...+m_{n-1}$ située au point A'_n. Montrer que le centre de gravité des n masses a pour coordonnées

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+...m_ny_n}{m_1+m_2+...+m_n}\right).$$

Exercice 289

1. Soit $A(x_a, y_a)$ et $R>0$. Montrer que

$$(x-x_a)^2+(y-y_a)^2-R^2=0$$

   est une équation implicite du cercle de centre A et de rayon R.
2. Déterminer une condition sur les réels a, b, c de sorte que

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

   soit l'équation implicite d'un cercle. Préciser son centre et son rayon.
3. On considère deux points distincts A et B. On se place dans un repère orthonormé dont l'origine est le milieu du segment $[AB]$ et la droite (AB) l'axe des abscisse. Enfin, la distance entre A et B est égale à $2a$.
   (a) Préciser les coordonnées de A et B dans ce repère.
   (b) Montrer que l'ensemble des point M du plan tels que $AM = kBM$, où k est un réel strictement positif et différent de 1, est un cercle (cercle d'Apollonius) dont on déterminera le centre et le rayon.
4. On considère les équations $x^2+y^2=2ax$ et $x^2+y^2=2by$.
   (a) Ces équations sont celles de deux cercles. Que cela implique-t-il pour a et b ?
   (b) Déterminer l'intersection de ces deux cercles.

Exercice 290 (Position relative de deux cercles)

On considère deux cercles de rayon a et b, et dont les centres respectifs sont à une distance c. On se place dans un repère dont l'origine est le centre du cercle de rayon a, et tel que le centre du cercle de rayon b ait pour coordonnée $(c, 0)$.

1. Ecrire les équations implicites des deux cercles.
2. Montrer que l'intersection, si elle est non vide, des deux cercles est l'ensemble des points (x, y) où

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$$

   et

$$y=\pm\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2}.$$

3. Montrer que l'on peut alors écrire

$$y=\pm\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

4. On considère l'expression précédente de y pour préciser l'intersection des deux cercles.
   (a) Soit $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$. Montrer que la somme de deux des facteurs de ce produit ne peut être <0. En déduire que ce produit admet au plus un facteur <0.
   (b) En déduire alors que :
      i. Si l'un des réels a, b, c est strictement supérieur à la somme des deux autres, l'intersection des deux cercles est vide.
      ii. Si l'un des réels a, b, c est égal à la somme des deux autres, les cercles se touchent en un point.
      iii. Si l'un des réels a, b, c est strictement inférieur à la somme des deux autres, les cercles se coupent en deux points.

5. Soit un triangle de côtés a, b, c. On note p son demi-périmètre. Montrer que l'aire S du triangle est (formule de Héron)
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 291 (Existence d'un triangle dont les trois côtés sont donnés)
Cet exercice utilise la conclusion de l'exercice précédent.

On considère le triangle ABC. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Montrer que pour que ABC existe, il suffit que le plus grand des réels a, b, c soit strictement inférieur à la somme des deux autres.
2. Montrer que dans un triangle, chaque côté est strictement inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 292

1. Déterminer une équation implicite du cercle de centre $(-3, 4)$ passant par l'origine du repère.
2. Déterminer une équation implicite du cercle de centre $(1, 2)$ tangent à l'axe des abscisses.
3. Montrer que le cercle d'équation implicite $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$ ne rencontre pas l'axe des ordonnées.
4. Montrer que le cercle d'équation implicite $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ est tangent à l'axe des ordonnées.

Exercice 293
Etablir une condition sur les coefficients de l'équation implicite $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ d'un cercle de sorte que celui-ci :

1. ne rencontre pas l'axe des abscisses,
2. soit tangent à l'axe des abscisses,
3. coupe deux fois l'axe des abscisses.

Exercice 294
Etablir une condition sur les coefficients des équations implicites $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$ de deux cercles de sorte que ceux-ci :

1. se coupent en deux points distincts,
2. soient tangents.

Exercice 295
On considère un cercle de rayon R et d'équation
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

1. Soit (X, Y) les coordonnées d'un point extérieur au cercle. Montrer que
$$X^2 + Y^2 + 2aX + 2bY + c$$
est le carré de la longueur d'une tangente du point au cercle.
2. Soit M un point extérieur ou intérieur au cercle. On considère une droite passant par M et coupant le cercle en deux points distincts A et B. La quantité
$$\begin{cases} MA \times MB \text{ pour } M \text{ extérieur au cercle,} \\ -MA \times MB \text{ pour } M \text{ intérieur au cercle,} \end{cases}$$
est appelée puissance du point M par rapport au cercle.
   (a) Montrer que la puissance du point M par rapport au cercle est indépendante de la droite choisie et égale à
   $$OM^2 - R^2.$$
   On pourra introduire le point I, milieu de la corde $[AB]$ et utiliser le théorème de Pythagore.
   (b) Montrer qu'elle est aussi égale à
   $$X^2 + Y^2 + 2aX + 2bY + c.$$

Exercice 296 (Ellipse)
On considère le lieu des points $M(x,y)$ du plan dont la somme des distances à deux points donnés $F_1(c,0)$ et $F_2(-c,0)$ est constante et égale à $2a$. On suppose que $a > c$.

1. Montrer que la relation $MF_1 + MF_2 = 2a$ conduit à
$$4MF_1^2 MF_2^2 = \left[4a^2 - (MF_1^2 + MF_2^2)\right]^2.$$
2. Montrer que
$$\begin{cases} MF_1^2 + MF_2^2 = 2(x^2+y^2+c^2), \\ MF_1^2 MF_2^2 = (x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2. \end{cases}$$
3. En déduire qu'une équation implicite du lieu des points M peut se mettre sous la forme
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
où $b^2 = a^2 - c^2$.
4. Si $a \leq c$, quel serait le lieu recherché ?

Exercice 297 (Hyperbole)
On considère le lieu des points $M(x,y)$ du plan dont la différence des distances à deux points donnés $F_1(c,0)$ et $F_2(-c,0)$ est constante et égale à $2a$. On suppose que $0 < a < c$.

1. Montrer que la question posée se traduit en équation par
$$(MF_1 - MF_2)^2 = 4a^2.$$
2. Montrer que
$$\begin{cases} MF_1^2 + MF_2^2 = 2(x^2+y^2+c^2), \\ MF_1^2 MF_2^2 = (x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2. \end{cases}$$
3. En déduire qu'une équation implicite du lieu des points M peut se mettre sous la forme
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
où $b^2 = c^2 - a^2$.
4. Si $a \geq c$, quel serait le lieu recherché ?

Exercice 298 (Parabole)
Déterminer une équation implicite du lieu des points du plan équidistants de $F(0,p)$ et de l'axe des abscisses.

Exercice 299 (Représentation paramétrique d'une courbe)
On suppose que le point $M(x,y)$ se déplace le long d'une courbe γ. Au temps t, ses coordonnées sont
$$(x = f(t), y = g(t)).$$

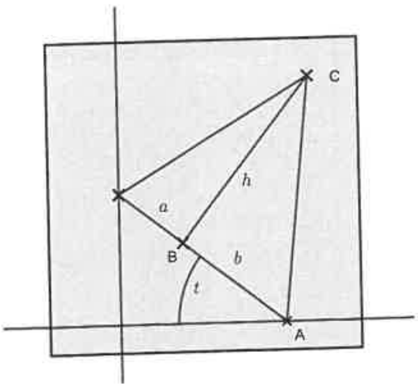
Les équations $(x = f(t), y = g(t))$ définissant les coordonnées d'un point arbitraire d'une courbe γ comme des fonctions d'un paramètre t sont des équations paramétriques ou encore une représentation paramétrique de la courbe γ.

1. Soit R un réels > 0, a, b deux réels.
   (a) Quelles valeurs le réel t peut-il prendre pour que
   $$(x = R\cos t + a, y = R\sin t + b)$$
   soit une représentation paramétrique du cercle de centre (a,b) et de rayon R.
   (b) On suppose que $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et
   $$(x = R\cos 2t + a, y = R\sin 2t + b).$$
   De quelle courbe a-t-on ici une représentation paramétrique ?

2. On suppose que la courbe γ est définie par la représentation paramétrique
$$(x = a\cos t, y = b\sin t) \quad t \in [0, 2\pi[.$$
   (a) Montrer que tout point (x, y) de γ vérifie la relation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   (b) Réciproquement, montrer que tout point (x, y) tel que
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
   est un point de γ.
3. On considère la courbe γ de représentation paramétrique
$$\left(x = a\frac{e^t + e^{-t}}{2}, y = b\frac{e^t - e^{-t}}{2},\right) \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que tout point (x, y) de γ vérifie la relation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   (b) Le point $(-a, 0)$ vérifie l'équation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   Est-ce un point de γ ? Qu'en conclure ?

Exercice 300

1. Donner une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point $M(x, y)$ d'un segment de longueur a, dont les extrémités se déplace sur les axes des abscisses et des ordonnées. On suppose que le point M divise le segment dans un rapport $\frac{\alpha}{\beta}$. Prendre pour paramètre l'angle entre le segment et l'axe des abscisses. Que devient la courbe lorsque $\frac{\alpha}{\beta} = 1$?
2. Un triangle glisse le long des axes de coordonnées avec deux de ses sommets. Donner une représentation paramétrique de la courbe décrite par le troisième sommet.



3. Déterminer des équations paramétriques de la courbe décrite par le point A d'un cercle de rayon R qui roule sur l'axe des abscisses. Prendre comme paramètre s le chemin parcouru par le centre du cercle. En $s = 0$, A coïncide avec l'origine du repère.

Exercice 301

1. Déterminer l'intersection du cercle d'équation implicite $x^2+y^2 = 1$ et du cercle d'équations paramétriques $(1 + \cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'intersection de la courbe de représentation paramétrique $(s^2 + 1, s)$, $s \in \mathbb{R}$, et de celle de représentation paramétrique $(t^2, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.