3.5 Compléments.

3.5.1 $\mathbb{R}$ est archimédien.

Exercice 79
On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. Montrer que cet énoncé est équivalent aux deux suivants :

1. Soit des réels x, y tels que $0 < x < y$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
2. Soit un réel $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \dfrac{1}{n} < x$.

Exercice 80

1. Montrer, en utilisant la définition d'une suite convergente, que la suite de terme général n ne converge pas.
2. En utilisant la convergence des suites réelles croissantes et majorées, montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien.

3.5.2 Existence d'une racine carrée.

Exercice 81
Soit y un réel > 0. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_n = \dfrac{N_n}{2^n}$, où N_n est le plus grand entier tel que $x_n^2 \leq y$.

1. Pour $y = 5$, calculer
$$N_0, x_0, N_1, x_1, N_2, x_2, N_3, x_3.$$
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge. On note l sa limite.
3. Justifier que :
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^2 \leq y$.
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(x_n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2 > y$.
4. En déduire que $l^2 = y$.

3.5.3 Suites adjacentes.

Exercice 82
On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
— La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
— La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$.
   (b) Ces deux suites convergent vers une limite commune l.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$. En déduire que l'erreur commise sur l en l'approchant par u_n ou v_n est inférieure $|v_n - u_n|$.

Exercice 83
Soient les deux suites (u_n) et (v_n) définie par $u_0, v_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$,
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$
Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune.

Exercice 84
On considère la suite (u_n) de terme général
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 85
On considère la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et la suite (v_n) de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 86 (Approximations décimales d'un nombre réel)
Soit n un entier naturel. Les rationnels $d_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$ et $e_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor + \frac{1}{10^n}$ sont appelés valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès. Soit x un réel donné. Montrer que les suites (d_n) et (e_n) de ses approximations décimales par défaut et par excès sont adjacentes et convergent vers x. En déduire que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Exercice 87
Si $\mathbb{R}$ est archimédien et si les suites adjacentes convergent, on retrouve la convergence des suites croissantes majorées.

Soit M un majorant de la suite (u_n), croissante. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble (non vide) des majorants de la suite (u_n).

1. Soit $a \notin \mathcal{M}, b \in \mathcal{M}$. Montrer que $a < b$.
2. On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la façon suivante : $a_0 = u_0 - 1, b_0 = M$, et, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} \text{Si } \dfrac{a_n + b_n}{2} \notin \mathcal{M}, \text{ alors } a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = b_n, \\[2ex] \text{Si } \dfrac{a_n + b_n}{2} \in \mathcal{M}, \text{ alors } a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n \notin \mathcal{M}, b_n \in \mathcal{M}.$$
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$
   (d) Déduire de ce qui précède que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note l leur limite commune.
3. Soit $\epsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier N tel que
   $$[a_N, b_N] \subset]l - \epsilon, l + \epsilon[.$$
   (b) Montrer l'existence d'un entier k tel que, pour tout $n \geq k$,
   $$a_N < u_n \leq b_N.$$
   (On rappelle que $a_N \notin \mathcal{M}$.)
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers l.
4. Si $l \in \mathcal{M}$, préciser $\mathcal{M}$. Même question si $l \notin \mathcal{M}$.