$\boxed{\text{Troisième – Devoir-test n°2}}$

Classe ?

2 heures – Sans calculatrice

1. **Algorithmie.** Brevet Amérique du Nord 3 juin 2021 - Exercice 4.

2. On donne l'écriture scientifique de deux nombres :

$$a = 4,2 \times 10^{-4} \qquad\qquad b = 2,5 \times 10^{-5}$$

   Donner l'écriture scientifique de $a+b$ puis celle de ab.

3. Mettre sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{81 \times (-4^2)^2 \times 5\,000}{(-25^2) \times 2^5 \times (-3)^3}$$

4. Simplifier l'expression :

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2}$$

5. Développer :

$$(x-a)(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)$$

6. Triplets Pythagoriciens.
   (a) Soient $0 < p < q$ deux entiers naturels. On considère un triangle dont les côtés mesurent

$$p^2 - q^2 \qquad p^2 + q^2 \qquad 2pq$$

   Démontrer que ce triangle est rectangle.
   (b) Donner un exemple de triangle rectangle à côtés entiers et d'hypothénuse 29.

7. Télescopage.
   (a) Simplifier les expressions :
      i. $(1-a)(1+a+a^2)$
      ii. $(1-a)(1+a+a^2+a^3)$
      iii. $(1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)$ où n est un entier naturel ≥ 4
   (b) En déduire la valeur de la somme :

$$1+2+4+8+16+32+64+\cdots+2^{99}$$

8. Fractions égyptiennes.

Ici, p et q sont deux entiers naturels non nuls.

(a) Démontrer cette première identité :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)}$$

(b) En déduire une démonstration de cette seconde identité :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{p-1}{q+1} + \frac{p-1}{q(q+1)}$$

(c) On appelle *fraction égyptienne* toute fraction de la forme $1/n$ où n est un entier naturel non nul. La seconde identité démontrée ci-dessus, éventuellement utilisées plusieurs fois de suite, permet de décomposer toute fraction p/q en somme de fractions égyptiennes.

Par exemple, avec $p = 2$ et $q = 3$,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

i. Utiliser cette méthode our décomposer en somme de fractions égyptiennes la fraction

ii. Faire de même pour

9. Cet exercice ne traite que d'entiers naturels. Un entier non nul n est dit *pratique* si tout entier compris entre 1 et n est somme de diviseurs disctincts de n. Par exemple, 6 est pratique car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6, et

$$1 = 1 \qquad 2 = 2 \qquad 3 = 1+2 \qquad 4 = 1+3 \qquad 5 = 2+3 \qquad 6 = 6$$

Mais 10 n'est pas pratique, car ses diviseurs sont 1, 2, 5 et 10, donc 4 ne s'écrit pas comme somme de diviseurs disctincts de 10.

(a) Le nombre 18 est-il pratique ?

(b) Le nombre 22 est-il pratique ?