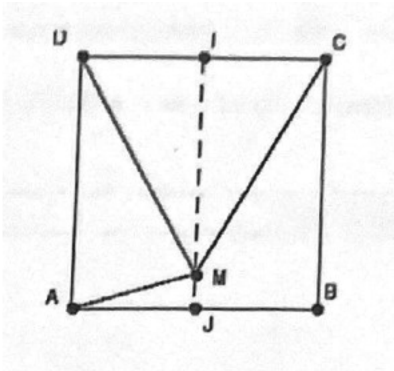
DT n°1 Premières		7.11.2024
Durée : 2H	Spécialité Mathématiques	

Le barème est donné à titre indicatif - calculatrices interdites

Exercice 1 (4 points) : Résoudre dans IR :

1. $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 6 = 0$
2. $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6 = 0$
3. $x^4 - 7x^2 + 18 \leq 0$

Exercice 2 (6 points) :



Dans un carré ABCD de coté a, on trace le triangle equilatéral DMC. I et J sont les milieux respectifs de $[DC] et\ [AB]$.

1. Question préliminaire : montrer que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}\ et\ \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$
2. a) Montrer que$\widehat{MAJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{12}$
3. a) Montrer que $IM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

   b) Montrer que$MJ = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   c) Montrer que $AM = a \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
4. En déduire que $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ et\ sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 (5 points)

On considère l'équation (E) : $x^2 + (2 - m)x + m + 1 = 0$

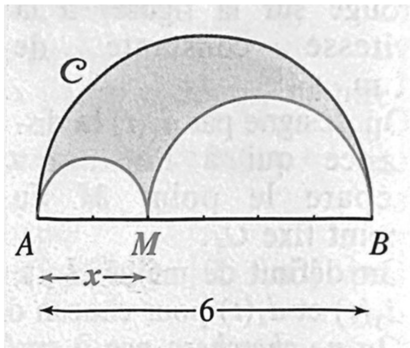
1. Démontrer que le discriminant du trinôme est égal à $m^2 - 8m$
2. Determiner les valeurs de m pour lesquelles celle équation admet :
   a) Deux solutions strictement positives
   b) Deux solutions strictement négatives
   c) Deux solutions de signe contraires
   d) Deux solutions opposées
3. On suppose que l'équation admet deux solutions $x_1 et\ x_2$. Trouver une relation indépendante de m entre $x_1 et\ x_2$ puis déterminer les racines doubles.

Exercice 4 (2 points) :

1) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 5 (3 points) :



On note $A(x)$ l'aire du domaine délimité par les trois demi-cercles de diamètres $[AB], [AM]$ et $[MB]$ où M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$ $(0 < x < 6)$

1. Démontrer que $A(x) = \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$.
2. Etablir que la fonction A est croissante sur $]0\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;6[$.
3. Trouver le maximum de l'aire $A(x)$ et préciser la position du point M correspondant.
4. On désigne par O le milieu de $[AB]$. Montrer par le calcul que
$$\mathrm{A}(x) = \frac{\pi}{4}(18 - OM^{2)}.$$
Retrouver alors le résultat de la question 3.