Analyse 3 – Fonction exponentielle

Objectifs (extrait).
On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution.
La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés.

Contenus.

— Définition : unique fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. Notation exp(x).

— $\exp(x+y) = \exp x \exp y$; $\exp x \exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.

— La suite (e^{na}) est géométrique.

— Signe, sens de variation et graphe de la fonction exponentielle.

Capacités.

— Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

— Étude des fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{kt}$.

— Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

---

1. Généralités

Théorème. Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui vérifie :

$$\boxed{f' = f} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(0) = 1}$$

Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et est notée $x \longmapsto \exp x$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

Preuve. L'existence est admise. L'unicité découle du :

Lemme. Si une fonction dérivable $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x)f(-x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq 0$$

Preuve. Dériver la fonction $x \longmapsto f(x)f(-x)$.

Définition. Le nombre exp 1 est appelé la constante d'Euler, se note e et

$$\boxed{\mathrm{e} \approx 2,718} \quad \textit{(Il apprend l'allemand.)}$$

Exercices. Déclic : 63 à 67 (sélection).

---

2. Calculs

Propriété [Relation fonctionnelle]. Pour tous réels a et b,

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b}$$

Preuve. Étudier la fonction $x \longmapsto \exp(a+x)\exp(-a)$.

Corollaires. Pour tous réels a et b, et tout entier relatif p,

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}} \qquad \boxed{\left(\mathrm{e}^a\right)^p = \mathrm{e}^{pa}}$$

Exercices. Déclic : 36, 38, 40, 44,47 et 48.

Propriété. Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est géométrique de premier terme 1 et de raison e^a.

Preuve. $\mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{na}$

Exercices. Déclic : 53 et 54.

---

3. Variations.

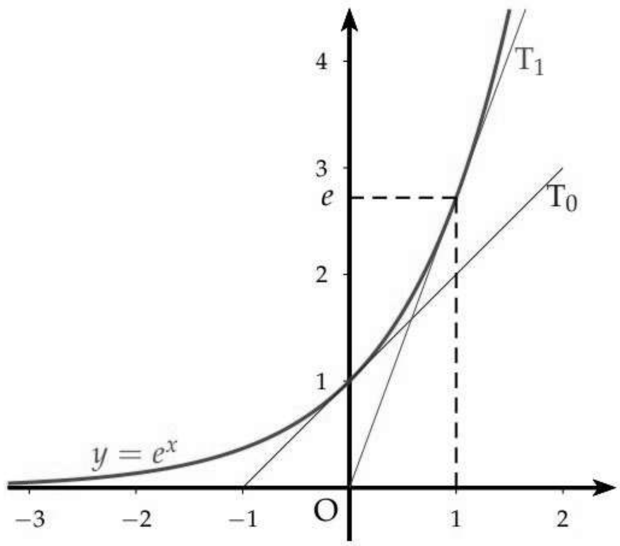
Propriétés. La fonction exponentielle est :

- à valeurs strictement positives ;
- strictement croissante ;
- une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$.

Preuves. (i) $\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^{x/2})^2 > 0$ d'apèrs le lemme. (ii) Sa dérivée est à valeurs strictement positives. (iii) L'injectivité claire ; la surjectivité est admise.

Exercice. Déterminer l'équation réduite des tangentes à $\mathscr{C}_{\exp}$ aux points d'abscisse 0 et 1.

Graphe de la fonction exponentielle



Propriétés.

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$$

---

4. Dérivation.

Propriété (admise). Si la fonction u est dérivable, alors la fonction composée e^u l'est aussi et

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}}$$

.

Exercice. Dériver les fonctions :

$$x \longmapsto e^{-2x} \qquad x \longmapsto -e^{x^2-1} \qquad x \longmapsto 2xe^{\frac{1}{x}} \qquad x \longmapsto (x^2-1)e^{2x}$$

Exercice. Déclic : 78 et 79 (étude de fonctions).

---

5. Fonctions à croissance ou décroissance exponentielle.

Définition. Les fonctions $x \longmapsto e^{\lambda x}$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$, sont dites à croissance ($\lambda > 0$) ou à décroissance ($\lambda < 0$) exponentielle.

Pour leur étude, *cf.* Géogebra.

---

6. Quelques exercices E3C

— Série générale mai 2020 – Sujet 1 Exercice 2.

— Série générale mai 2020 – Sujet 3 Exercice 3.
