Le raisonnement par récurrence

Propriété (admise). Si une partie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{N}$ vérifie :

— $0 \in \mathbf{A}$
— $n \in \mathbf{A} \Longrightarrow n+1 \in \mathbf{A}$

alors $\mathbf{A} = \mathbf{N}$.

Cette propriété est à la base du :

Principe de récurrence. Soit P_n une propriété qui dépend de l'entier n. Si :

— P_0 est vraie, et
— l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie,

alors la propriété P_n est vraie pour tout n.

Exercice. Pour tout entier naturel non nul n, on note : $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Démontrer que :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corrigé.

Je raisonne par récurrence.
Pour un entier naturel n, je note P_n la propriété de récurrence :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Initialisation

Pour $n = 1$, d'une part $S_1 = 1$, d'autre part $1(1+1)/2 = 1$. Donc P_1 est vraie.
La propriété est donc <u>initialisée au rang 1</u>.

2) Hérédité

Je suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Puisque

$$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1)$$

l'hypothèse de récurrence P_n assure que :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

La propriété est donc <u>héréditaire</u>.

3) Conclusion

Le principe de récurrence assure donc que la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

CQFD.