3.4 Limites et opérations.

Les suites (u_n) et (v_n) de cette section ont des limites, finies ou infinies. On a selon les cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
Certains résultats ci-dessous ont été montrés. Les autres sont admis. Certains donnent lieu à un exercice.

3.4.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	l_1+l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$	?

Remarque — Le point d'interrogation signifie que dans ce cas de figure, il n'y a pas de règle générale. Il faut alors regarder au cas par cas :
- Si $u_n = n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 0$.
- Si $u_n = 2n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = -\infty$.
- Si $u_n = n+(-1)^n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, et la suite (u_n+v_n) n'a pas de limite.

3.4.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$l_1 l_2$	∞ et règle des signes	∞ et règle des signes	?

Remarques

1. Prenons un exemple pour expliquer la mention "∞ et règle des signes". Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers ∞ (produit d'une suite convergente de limite non nulle par une suite tendant vers l'infini). Le signe de l'infini est alors déterminé par la règle des signes. Ici, on a $-$ (signe de la limite finie) par $-$ (signe de l'infini), donc $+$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
2. Une forme indéterminée demande une étude au cas par cas, comme l'illustrent les exemples suivants :
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 1$.
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.
   - Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
   - Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, et la suite $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

3.4.3 Limite de l'inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{l_1}$	0	?

Remarque — Pour la forme indéterminée, tous les cas sont encore possibles :
- Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = +\infty$.
- Si $u_n = \dfrac{-1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = -\infty$.
- Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'a pas de limite.

3.4.4 Limite d'un quotient

Cela se traite en combinant les résultats pour les produits et les inverses. Il apparait une nouvelle forme indéterminée quand $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3.4.5 Exemples

Voici quelques exemples de détermination de limites de suites.

1. **La suite** $\left(u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Comme la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, il en est de même, par comparaison, pour la suite $(\sqrt{n+1})$. On a donc pour a suite $\left(u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ une forme indéterminée. L'idée est de transformer le terme général en utilisant la "quantité conjuguée" de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, à savoir $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. On écrit
   $$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$
   On obtient
   $$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$
   Finalement,
   $$u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}) + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}) + \sqrt{n}}.$$
   La suite $(\sqrt{n+1}) + \sqrt{n})$ a pour limite $+\infty$ puisqu'il s'agit de la somme de deux suites tendant vers $+\infty$. La suite (u_n), qui est l'inverse de la suite $(\sqrt{n+1}) + \sqrt{n})$, a donc pour limite 0, en application des règles de calcul.
2. **La suite** $\left(u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}\right)$ Les suites (n^2+1) et $(n+1)$ tendent toutes deux vers $+\infty$. On a donc pour u_n une forme indéterminée. La transformation consiste ici à factoriser numérateur et dénominateur de u_n par leurs termes de plus haut degré. Ainsi, pour $n \neq 0$,
   $$u_n = \frac{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = n \times \frac{1 + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n}}.$$
   Regardons le comportement du facteur de droite $\dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$. Comme les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ tendent vers 0, les suites $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ tendent vers 1, par application de la règle relative à la somme de deux suites convergentes.

   On en déduit que la suite $\left(\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)$ tend vers 1, en utilisant les règles relatives à la limite de l'inverse d'une suite. Enfin (règle du produit de deux suites convergente), la suite $\left(\dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}\right)$ tend vers 1.

   Revenons à $u_n = n \times \dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$, pour $n \neq 0$. Il s'agit du produit de la suite (n) de limite $+\infty$ par la suite $\left(\dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}\right)$ de limite 1. On en conclut que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty.$$