4 Limites et continuité

4.1 Continuité en un point.

Exercice 82

1. Montrer que la fonction carré est continue en 2.
2. Soit f une fonction continue en a, montrer que $|f|$ est continue en a.
3. Ecrire en langage formalisé la négation de $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
4. Montrer qu'il y a équivalence entre $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. ♦

Exercice 83

1. Ecrire la caractérisation séquentielle de la continuité.
2. Réciproque de la caractérisation fréquentielle : l'écrire sous forme contraposée.
3. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, $|x_n - x| < \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite $(x_n) \longrightarrow x$.
4. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $|y_n - y| \geq \epsilon$. Montrer que la suite (y_n) ne tend pas vers y.
5. Montrer le sens direct de la caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Montrer la réciproque de la caractérisation séquentielle de la continuité, en montrant sa contraposée. ♦

4.2 Limites finies.

Exercice 84

1. Ecrire la caractérisation séquentielle de la limite (finie).
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite finie en 0. ♦

Exercice 85

1. Etudier la limite en 0 de la fonction
$$x \mapsto x \sin \frac{1}{x}.$$
2. Soit la fonction f définie pour x non nul par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et prenant en 0 la valeur 0. On dit que cette fonction est le prolongement par continuité en 0 de
$$x \mapsto x \sin \frac{1}{x}.$$
Justifier l'expression.

Exercice 86

1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ecrire, en langage formalisé, les trois cas recouverts par
$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$
2. Montrer que la fonction cosinus n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
3. Montrer (choisir un des trois cas) qu'une limite finie, quand elle existe, est unique.
4. Montrer (choisir un des trois cas) qu'une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a. ♦

4.3 Limites infinies.

Exercice 87

1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ecrire, en langage formalisé, les 6 cas recouverts par
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$
2. Montrer que $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ quand $x \to 0$.
3. Peut-on dire la même chose de $\dfrac{1}{x}$?
4. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Montrer que f n'est pas bornée au voisinage de a. Choisir un cas.
5. Ecrire la caractérisation séquentielle (choisir un cas) de la limite infinie.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Montrer que f n'est pas définie en a. ♦