6 Dérivation.

Exercice 145

1. Etablir la formule de transformation de la somme de deux sinus en un produit de sinus et de cosinus.
2. Montrer que la fonction sinus est dérivable en tout point.
3. Montrer que la fonction cosinus est dérivable en tout point.

Exercice 146

1. Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction racine carrée.
2. Dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue.
3. Dérivabilité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$.

Exercice 147

Montrer que si f est dérivable en un point a, alors f est continue en a.

Exercice 148

1. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto x\sqrt{x}$.
2. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \cos\sqrt{x}$.

Exercice 149

1. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \ln x$.
2. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \arcsin x$.
3. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \arccos x$.
4. Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto \arctan x$.

Exercice 150 (Dérivabilité en un point)

Etudier la dérivabilité de f au point a. Donner éventuellement l'équation réduite des tangentes ou demi-tangentes au graphe de f au point A d'abscisse a dan les cas suivants :

1. $f : x \mapsto |x(x+1)|$ en $a = 0$, puis en $a = -1$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ en $a = 1$.
3. $f : x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ si x non nul et $f(0) = 0$ en $a = 0$.
4. $f : x \mapsto x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si x non nul et $f(0) = 0$ en $a = 0$.

Exercice 151 (Limite de taux d'accroissement)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\exp(-2x^2)-\exp(-2)}{x-1}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16}$.

Exercice 152

Déterminer les extremums locaux de :

1. $f : x \mapsto |x|$ sur $[-1, 2[$.
2. $h : x \mapsto x^3 - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. $g : x \mapsto x^3 - 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 153 (Etude de dérivabilité)
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

1. $f(x) = \ln(\ln x)$.
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$.
3. $f(x) = x|x|$.
4. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.
5. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.
6. $f(x) = \ln(\tan(\dfrac{x}{2}))$.
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}})$.

Exercice 154 (Dérivée d'une bijection)

Soit f définie sur $I = [\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur J, intervalle à préciser.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction réciproque et f et calculer sa dérivée.

Exercice 155 (Arc tangente)

1. Soit f définie par $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. Etudier la dérivabilité de f. Que peut-on en déduire pour f ?
2. Montrer que pour tout réel x, $\arctan x + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit x, y réels, tels que $0 < x < y$. Montrer que
$$\frac{y-x}{1+y^2} \leq \arctan y - \arctan x \leq \frac{y-x}{1+x^2}.$$

Exercice 156 (Inégalités des accroissements finis)

1. Soit f continue et dérivable sur I. On suppose qu'il existe des réels m, M tels que, pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$. Montrer que, pour tous $x, y \in I$, $x \leq y$,
$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x).$$
2. Soit f continue et dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Montrer que, pour tous $x, y \in I$,
$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|.$$

Exercice 157

1. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$. On suppose de plus que $f'(x)$ admet une limite finie l en a. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = l$.
2. Soit f définie par $f(x) = x^2 \ln x$. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit g définie par $g(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$.
   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité, en une fonction h.
   (b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa fonction dérivée n'est pas continue en 0.