

Oraux Première décembre 2023

Thèmes : polynômes et trigonométrie (sélection)

1. Calculer la somme des cubes des racines du polynôme $X^3 - 6X + 4$.

2. Résoudre :

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x^2 - 2}$$

3. Résoudre $|x - 1| - 2|x| = 3|x + 1|$.

4. On a $x + y = 3$ et $x^3 + y^3 = 9$. Calculer

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

5. Prouver l'identité :

$$\sin x(1 + 2\cos(2x)) = \sin(3x)$$

6. Résoudre :

$$\tan^2 x + \cotan^2 x = \frac{10}{3}$$

7. Prouver l'identité de Lagrange :

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2$$

En déduire une décomposition de 1305 en somme de deux carrés.

8. Prouver que, dans tout triangle acutangle, la somme des tangentes des trois angles vaut leur produit.

9. Soit l'équation paramétrique :

$$mx^2 - (m - 1)x + 2m = 0$$

(a) Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines distinctes ?

(b) On suppose que c'est le cas.

Trouver une relation indépendante de m entre ces deux racines.

10. Calculer $\sin(15^\circ)$ et $\cos(15^\circ)$.

11. Exprimer $a^4 + b^4$ en fonction uniquement de $s = a + b$ et de $p = ab$.

12. Exprimer $\tan(3x)$ en fonction uniquement de $\tan x$.

13. Résoudre l'équation :

$$x^2(x^2 + 4^2) = 15^2$$

14. Trouver un polynôme non nul à coefficients entiers dont $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est racine.

15. Démontrer que si $a + b + c = 0$ alors :

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$