Analyse 1 – Dérivation

Point de vue local

Contenus

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Capacités

- Calculer un taux de variation, une pente.
- Interpréter un nombre dérivé.
- Lire un nombre dérivé. Construire une tangente connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer une équation de tangente.
- Calculer le nombre dérivé en un point.

L'idée essentielle de ce sous-chapitre est d'approcher localement une fonction par une fonction affine, ou, de façon équivalente, d'approcher localement une courbe par une droite.

Exercices. LM1 : 1A (1 et 2).

Notations :

— I est un intervalle (non vide, non réduit à un point) de $\mathbf{R}$.

— a, b etc. sont des points de I.

— $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction.

---

1. Limite d'une fonction en un point

Définition (intuitive). On dit que f *admet pour limite* le nombre réel l au point a si $f(x)$ « se rapproche » de l quand x « se rapproche » de a.

Illustration. *Avec Excel et Geogebra, montrer exemples et contre-exemples.*

Définition (formalisée). On dit que f *admet pour limite* le nombre réel l au point a si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x-a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon}$$

On note alors : $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
Lorsqu'une telle limite existe, elle est unique.

Illustration. Geogebra (eMaths).

Exercice. Prouver que la fonction $x \longmapsto 2x+1$ admet 1 comme limite en 0.

---

2. Nombre dérivé

Illustration. Geogebra (MT BZ) (rappel sur la pente d'une droite).

Exercices. LM1 : 2A, 2B, 2C, 2D (fonctions affines).

Définition. On appelle taux *de variation* de la fonction f entre a et b (avec $a \neq b$) le nombre :

$$\boxed{T_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

C'est la pente de la sécante à $\mathscr{C}_f$ qui passe par les points $\mathrm{A}(a, f(a))$ et $\mathrm{B}(b, f(b))$.
Si on note $b = a + h$ (avec $h \neq 0$), ce nombre se récrit :

$$\boxed{\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Illustration. Geogebra (ÉT).

Exercice. Pour la fonction carrée, calculer $T_3(5)$ c-à-d. $\tau_3(2)$. *Idem* pour la fonction inverse.

Exercice. Pour la fonction carrée, calculer $\tau_1(h)$ avec $h > 0$. Ce taux admet-il une limite en 0 ?

Définition. Si la fonction T_a admet une limite quand b tend vers a, ou, de façon équivalente, si la fonction τ_a admet une limite quand h tend vers 0, cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h)}$$

On dit alors que f est *dérivable* en a.

Exercice. Calculer le nombre dérivé des fonctions identité, carré et racine carrée, en 1 et 4.

Exercices. LM1 : 3B (nombre dérivé).

---

3. Tangente.

Définition. Si f est dérivable en a, on appelle *tangente* à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{A}(a, f(a))$ la droite qui passe par A de pente $f'(a)$. Son équation réduite est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Preuve en classe.

La tangente à la courbe de f en un point a est la droite qui « épouse le mieux » cette courbe au voisinage de ce point a.

Illustration. Geogebra (Andreas Lindner).

Illustration. Geogebra (ÉT).

Exercices. LM1 : 3A (lecture graphique).

Exercice. Établir l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 4 aux courbes des fonctions identité, carré et racine carrée.

Exercices. LM1 : 4A.

---

4. Approximation affine

Dans le cadre du § précédent, la fonction

$$x \longmapsto f'(a)x + (f(a) - af'(a))$$

est la « meilleure approximation affine » de f au voisinage du point a.

Approximations en Physique. Si $u \ll 1$:

$$\boxed{(1+u)^n \approx 1 + nu} \qquad \boxed{\frac{1}{1+u} \approx 1 - u} \qquad \boxed{\frac{1}{1-u} \approx 1 + u}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^u \approx 1 + u} \qquad \boxed{\sin u \approx u}$$

Ici $n \in \mathbf{N}^*$.
