Analyse 1 – Dérivation

Point de vue global

Contenus

— Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.

— Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.

— Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \longmapsto g(ax+b)$.

— Pour n dans $\mathbf{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.

— Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités

— Calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations.

---

5. Fonction dérivée

Définition. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est *dérivable sur* I. La fonction de I dans $\mathbf{R}$ qui, à tout x, associe $f'(x)$, s'appelle alors la *fonction dérivée* de f. Elle est notée f' (ce qui justifie *a posteriori* la notation $f'(a)$ pour le nombre dérivée de f en a).

Propriété [Dérivées des fnctions usuelles].

$$\boxed{(px+q)' = p} \qquad \boxed{\left(x^2\right)' = 2x} \qquad \boxed{\left(x^3\right)' = 3x^2} \qquad \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}} \qquad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

La fonction inverse est dérivable sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Les autres fonctions (les polynômes) sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

Preuves en classe. Fonctions carré et inverse.

Exercice. Démontrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

---

6. Fonctions puissances

Lemme. Pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels a et b,

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$$

Preuve par télescopage.

Exercice. Écrire cette identité à l'ordre 4, puis 5.

De ce lemme découle :

Propriété. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$. Pour tout entier $n \leq -1$, la restriction à chacun des intervalles $\mathbf{R}^{-*}$ et $\mathbf{R}^{+*}$ de la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$$

Exercices. LM1 : 5A (dérivées des fonctions usuelles).

7. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés (admises). Soient u et v deux fonctions dérivables, λ un nombre réel et n un entier relatif.
Alors (rédaction succincte) :

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \qquad \boxed{(\lambda u)' = \lambda u'} \qquad \boxed{(uv)' = u'v + uv'} \qquad \boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \qquad \boxed{\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}} \qquad \boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

Remarques. Pour $1/u$ et $\sqrt{u}$, u ne doit pas s'annuler. Pour u/v, v ne doit pas s'annuler.

Exercice. Dériver :

$$x^3 + \frac{1}{x} \qquad 5x^3 \qquad x\sqrt{x} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \frac{5x+1}{2x-3} \qquad \sqrt{3x+1} \qquad (2x-1)^5$$

Exercices. LM1 : 6A (produits) et 6B (inverses, quotients).

Propriété (admise). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On définit (sur un certain intervalle J) la fonction g par : $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ où α et β sont deux nombres réels. Alors g est dérivable sur J et, pour tout $x \in \mathrm{J}$,

$$\boxed{g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)}$$

Exercice. Dériver $x \longmapsto (3x-1)^{-3}$ et $x \longmapsto \sqrt{2x+1}$.

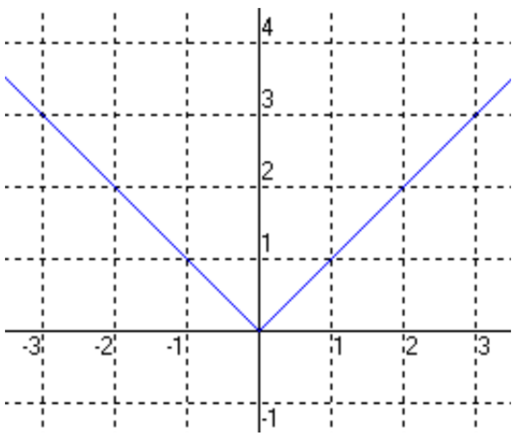
8. Fonction valeur absolue

Définition. La fonction *valeur absolue* est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} +x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Voici son graphe :

Fonction valeur absolue



Cette fonction n'est pas dérivable en 0. *Preuve en classe.*