Suites 1 - Génération

Ici n désigne un entier naturel.

1. On pose : $x_n = n^2 + n - 1$. Exprimer x_{n-1}, x_{n+1}, x_{2n}, x_{2n+1} et x_{n^2}.

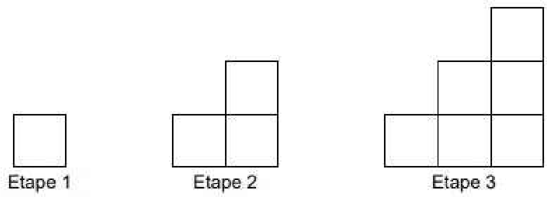
2. On pose : $a_n = 2^n$. Exprimer a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n} et a_{4n} en fonction de a_n.

3. On note : $a_n = n^n/2^{2n}$. Exprimer a_{2n}, a_{4n} et a_{n^2}.

4. Le n-ème nombre de Fibonnacci est défini par : $F_n = 2^{2^n} + 1$. Simplifier :

$$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 \qquad F_n(F_n - 2) \qquad F_n^2 \qquad F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$$

5. On réalise un motif en escalier en utilisant des carrés :



Combien de carrés devra-t-on utiliser à l'étape 10 ?

6. On définit une suite par son premier terme et une relation de récurrence :

(a) $a_0 = -5$ et $a_{n+1} = a_n + 3$

(b) $b_1 = 3$ et $b_{n+1} = 2a_n$

(c) $c_1 = 2$ et $c_{n+1} = 2c_n^2$

Dans chaque cas, conjecturer une formule explicite pour le terme général, puis démontrer cette conjecture, soit par un argument d'unicité, soit par récurrence.

7. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$$

Calculer a_{2022}.

8. Dans chaque cas, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

(a) $u_n = 3n - 5$.

(b) $u_n = 5 \cdot 3^n$.

(c) $u_n = -3 \cdot 2^n + 1$.

Suites 2 - Monotonie et borniture

1. Étudier monotonie et bornitude.

$$a_n = -2n+5 \qquad b_n = n^2-3n \qquad c_n = 2^n \qquad d_n = \frac{n}{n+1}$$

$$e_n = (-1)^n \qquad f_n = \frac{n^2+1}{2n^2} \qquad g_n = 1+\frac{1}{n} \qquad h_n = \frac{3^n}{n}$$

2. *Idem.*

(a) $a_1 = 4$ et $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$.

(b) $b_1 = 4$ et $b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 1}$.

(c) $c_0 = 1,5$ et $c_{n+1} = (c_n - 1)^2 + 1$.

3. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La suite (a_n) est définie par $a_0 = a$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = f(a_n)$. Est-il vrai que, si f est croissante, alors (a_n) est croissante ?

4. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

(a) Démontrer que (a_n) est minorée par $1/2$.

(b) Démontrer qu'elle est majorée par 1.

(c) Étudier sa monotonie.

5. Étant donnée une suite (a_n), on pose :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(a) Démontrer que, si la suite (a_n) est croissante, alors la suite (A_n) l'est aussi.

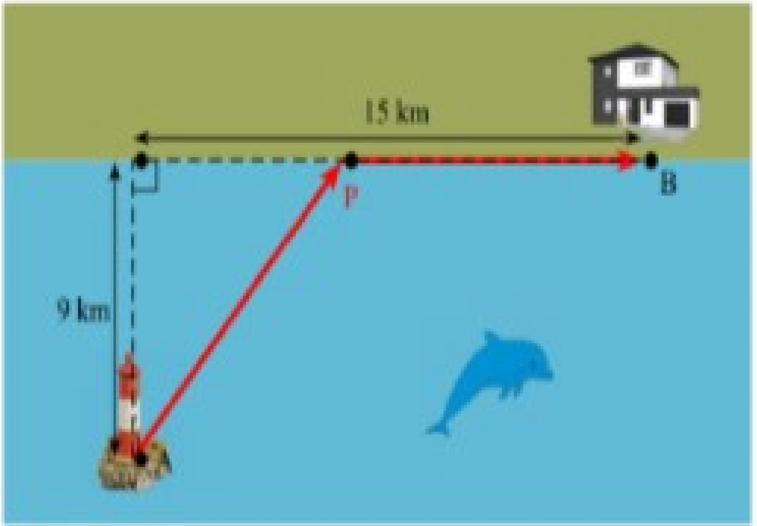
(b) Quid de la réciproque ?

6. On considère la suite de terme général $a^n/n!$ où $a > 0$.

(a) Étudier sa monotonie.

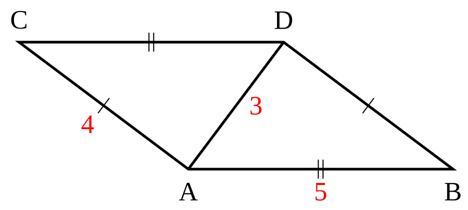
(b) Quel est son terme maximal ?

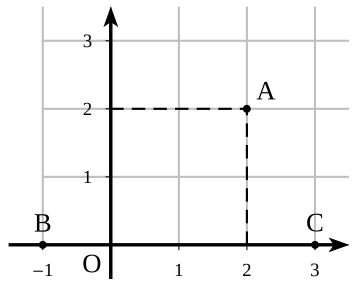
[D] Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h, et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ?



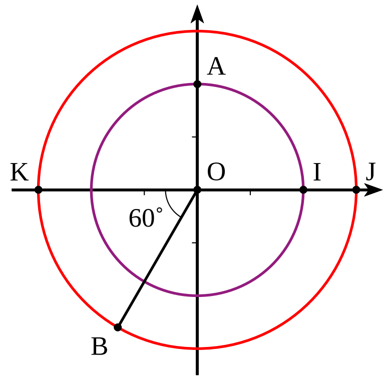
Exercice 10

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 2 figures :





Exercice 11



Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 12

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

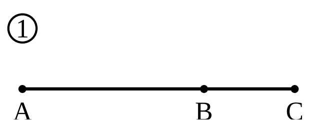
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

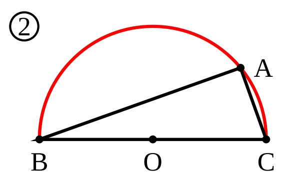
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$

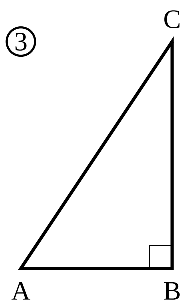
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$

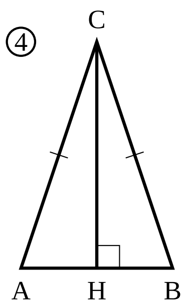
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AB^2$

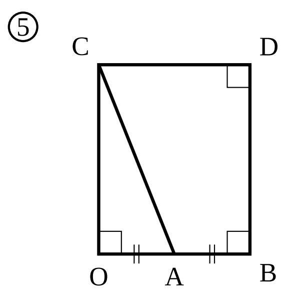
e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$







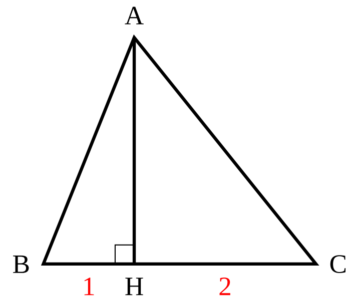




Exercice 13

Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$$



Exercice 14

On donne trois points $A(4\,;\,1)$, $B(0\,;\,5)$ et $C(-2\,;-1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$.

Propriétés

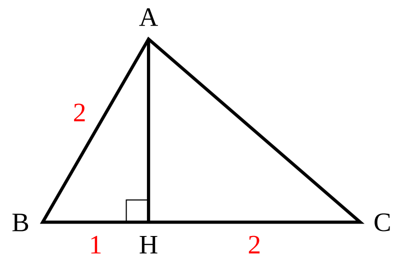
Exercice 15

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

c) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$



Orthogonalité

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\,(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(m\,;-2)$

b) $\vec{u}\,(m\,;\,3-m)$ et $\vec{v}\,(2\,;-m)$

c) $\vec{u}\,(m-4\,;\,2m+1)$ et $\vec{v}\,(2m\,;\,3-m)$

Exercice 17

On donne $A(-4\,;\,1)$, $B(-1\,;\,2)$ et $C(1\,;-4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

Distance et angle

Exercice 18

On donne les trois points A(1 ; 3), B(−1 ; 1) et C(3 ; −2).

1) Calculer BC, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

   a) Exprimer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de H.

   b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?

   c) En déduire BH et HC.

Exercice 19

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4 \quad , \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 60°$$

1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$

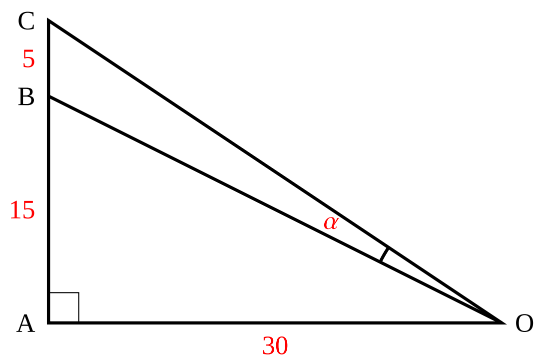
2) En déduire les longueur AC et BD, et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

Exercice 20

1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2) Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle α.



Relations métriques dans un triangle

Exercice 21

ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

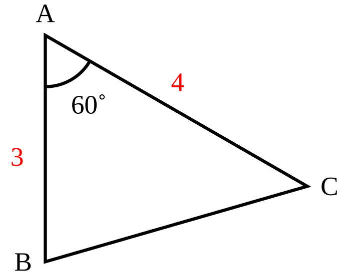
1) AB = 8, AC = 3 et $\widehat{BAC} = 60°$.

2) AB = 48, AC = 43 et BC = 35.

Exercice 22

Dans la figure ci-contre, calculer :

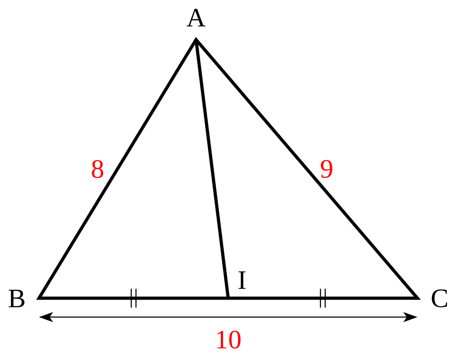
1) L'aire du triangle ABC.
2) Le périmètre du triangle ABC.



Exercice 23

On donne la figure ci-contre.

1) a) Exprimer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI et BC .
   b) En déduire la longueur de la médiane AI.
2) Calculer les longueurs des deux autres médianes.



Exercice 24

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$

1) Calculer AC
2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

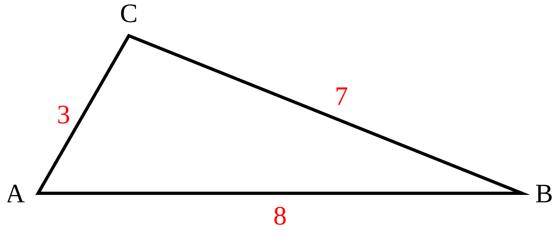
Exercice 25

ABC triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$. L'unité est le cm.

1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2) Trouver en cm^2, l'aire du triangle ABC.

Exercice 26

1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer $\cos \widehat{BAC}$
   b) En déduire $\sin \widehat{BAC}$
2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?



Exercice 27

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 7$ $AD = 3$ $AC = 8$

1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$
   b) En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos \widehat{BAD}$.
   En déduire que : $\sin \widehat{BAD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$
2) a) Calculer l'aire du triangle BAD.
   b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD.