

Spécialité mathématiques, IE

55 minutes.

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , continue en tout point, et telle que pour tous x, y réels :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est impaire.
3. En raisonnant par récurrence, montrer que, pour tout réel x , pour tout entier $n \geq 0$:

$$f(nx) = nf(x).$$

4. Montrer que le résultat précédent reste vrai pour $n < 0$.

5. Soit $r \in \mathbb{Q}$ avec $r = \frac{p}{q}$. Montrer que

$$f(r) = rf(1).$$

6. Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel. En déduire que tout réel x est limite d'une suite (r_n) de rationnels.
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant une suite de rationnels convergeant vers x , montrer que

$$f(x) = xf(1).$$

8. Montrer que les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant pour tous réels x, y

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires.

Exercice 2

S'il existe un couple (a, b) de réels, avec $a \neq 0$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

on dit que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

1. Soit M et m les points respectifs d'abscisse x de \mathcal{C}_f et de (d) .
 - (a) Calculer la distance mM .
 - (b) Donner une interprétation géométrique au fait que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
 - (c) Que peut-on faire pour préciser la position de (d) par rapport à \mathcal{C}_f en $+\infty$?
2. On suppose que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
 - (a) Montrer que

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

- (b) Montrer que

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

3. Soit f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}.$$

- (a) Déterminer l'équation d'une éventuelle asymptote oblique (d) à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
- (b) Préciser la position de (d) par rapport à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Fin du sujet.