2 Généralités.

Exercice 1

1. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On considère les égalités

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\quad ; \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

   (a) Justifier l'appellation de relations de distributivité donnée à ces égalités.

   (b) Montrer une des quatre inclusions.

2. Soit A, B deux parties d'un ensemble E. On rappelle les lois de Morgan :

   (a) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

   (b) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

   Montrer une des quatre inclusions.

3. Soit A, B des parties de E. Montrer que :

$$A\subset B \Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}.$$

♦

Exercice 2

Ecrire avec la notation $\sum$:

1. $2^3+2^4+\ldots+2^{17}$.
2. $3+3+3+3+3$.

♦

Exercice 3

Calculer les expressions suivantes :

1. $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
2. $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(3k^2+2k+1)$.
3. $C_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{5\times 2^k}{3^{2k+1}}$.

♦

Exercice 4

Ecrire l'énoncé du principe de récurrence.

♦

Exercice 5

Soit n un entier ≥ 1.

1. Montrer par récurrence que

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{(2n)!}{2^n\times n!}.$$

2. Retrouver le résultat par un calcul direct.

♦

Exercice 6

Soit n un entier ≥ 1.

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}k2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}2^k.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k,$$

puis calculer $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

3. Retrouver le résultat en utilisant que, pour $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 7
Montrer, par récurrence, que :

1. pour $n \geq 4$: $2^n \leq n!$.
2. pour $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 8
Soit n un entier positif. Montrer qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $\left(3+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. ♦

Exercice 9
Soit une suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour $n \geq 0$, par $u_{n+1} = u_n^2$. Montrer, par récurrence, que

$$u_n = (u_0)^{2^n}.$$

Exercice 10
Soit la fonction f telle que $f(x) = (1-2x)e^{2x}$. Montrer que, pour $n \geq 1$, la dérivée n-ème de f est

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}.$$

Exercice 11
Pour $n \geq 1$, on pose

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe p_n impair et q_n pair non nul, tel que $H_n = \frac{p_n}{q_n}$. En déduire que H_n n'est jamais un entier.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs des paramètres a, b réels l'équation $ax = b$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, résoudre $x = 0$. Représenter graphiquement les solutions.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, résoudre $2x - 3y + 5 = 0$. Représenter graphiquement les solutions.
4. Soient a, b, c des réels donnés. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $ax + by = c$. ♦

Exercice 13
Soit x, x', y, y' des réels. On note $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$ le réel $xy' - x'y$.

Soient a, b, c, a', b', c' des réels tels que (a, b) et (a', b') sont différents du couple $(0, 0)$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1. Montrer que le système admet une unique solution si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est non nul. Montrer que l'unique couple solution a alors pour coordonnées $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$.
2. Montrer que dans le cas où $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est nul, le système admet 0 ou une infinité de solution.
3. Interpréter géométriquement ce qui précède. ♦

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$
2. Montrer que, pour x, y réels, on a :
$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1.$$

Exercice 15

Soit f et g deux fonctions croissantes sur $D \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f + g$ est croissante sur D.
2. Si de plus f et g sont positives, montrer que fg est croissante sur D.
3. Si f est strictement positive et croissante sur D, montrer que $\dfrac{1}{f}$ est décroissante sur D.

Exercice 16

1. Soit $n > 1$, montrer que
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$
2. Soit $m > 0$, montrer que
$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m + (2m+1)} > 1.$$

Exercice 17

Soit $A(-2, 0), B(2, 4), C(4, 0)$. Donner, en justifiant, les équations réduites des droites des trois côtés du triangle ABC, de la médiane (AE), de la hauteur (AD). Préciser la longueur AE. ♦

Exercice 18

Ecrire une équation du cercle passant par les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ et de la droite d'équation $y = -x$, et par le point $A(4, 4)$. ♦

Exercice 19

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x+2}$. Procéder par implication et implication réciproque.
2. Expliquer en quoi résoudre l'équation précédente revient à montrer l'égalité de deux ensembles, et plus précisément, à écrire en extension un ensemble qui est initialement défini en compréhension.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2-x}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{x} + 2$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - 1} = x + 3$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 + 1} < 2x + 1$. ♦

Exercice 20

1. Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre réel x. Montrer que $x \leq |x|$ et que $-x \leq |x|$.
2. Soit un réel positif a, et x un réel. Après avoir fait un dessin rendant l'énoncé évident, montrer que
$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a.$$
3. Soit des réels a, b. En utilisant le résultat ci-dessus, montrer que
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
4. L'inégalité précédente s'appelle l'inégalité triangulaire. En distinguant selon le signe de $a+b$, en proposer une autre preuve, très simple.
5. En utilisant l'inégalité triangulaire et en écrivant $a = (a-b)+b$, montrer que
$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

Exercice 21

1. Soit f définie par $f(x) = x^2$ et $B = [1, +\infty[$. Préciser $f^{-1}(B)$.
2. Soit A, B des parties. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple de A, B, f où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
5. Soit A un ensemble et $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.
   (a) On suppose que f est une bijection de A dans $\mathcal{P}(A)$. Considérer $B = \{x \in A; x \notin f(x)\}$ et montrer que f ne peut pas exister.
   (b) Qu'a-t-on montré exactement ? ♦

Exercice 22

Soit une application f de E dans F. Soit A une partie de E, et B une partie de F. Préciser $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 ; E = \{-1, 0, 1\}, F = \mathbb{R}, A = \{-1, 1\}, B = \{0, 1\}$.
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pour } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ pour } x < 0 \end{cases} ; E = F = \mathbb{R}; A = \mathbb{R}_+^*, B = \{0\}$.
3. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \\ -1 \text{ pour } x < 0 \end{cases} ; E = F = \mathbb{R}; A = B =]-2, 1[$. ♦

Exercice 23

Dans les trois cas de l'exercice précédent, dire si les fonctions considérées sont injectives ou surjectives. ♦

Exercice 24

Soit la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x - 3y, 7x - y + 1) \end{cases}$$
Cette fonction est-elle injective, surjective, bijective ? ♦

Exercice 25

1. Montrer qu'un entier et son carré ont la même parité.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. La somme de deux fonctions périodiques est-elle une fonction périodique ? ♦

Exercice 26
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel de la façon suivante. On suppose qu'il existe a, b entiers, $b \neq 0$, tels que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. On suppose de plus que la fraction $\frac{a}{b}$ est sous sa forme irréductible.

1. Montrer que a, b peuvent être supposés strictement positifs.
2. Montrer que $2b - a$ et $a - b$ sont alors strictement positifs.
3. Montrer que
$$\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2 = 2.$$
4. Montrer qu'on a $a - b < b$. Conclure. ♦

Exercice 27
1. Soit un réel x et n un entier ≥ 2. Etablir l'identité
$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + ... + x^{n-1}).$$
2. En utilisant le résultat précédent :
   (a) Ecrire une formule explicite pour $1 + x + ... + x^n$.
   (b) Montrer que
   $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + +x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{1+x^2}.$$
   (c) Factoriser $x^5 + 1$.
   (d) Montrer que, pour $x \geq 0$, pour $n \geq 0$:
   $$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$
   (e) Etablir, pour a, b réels et pour $n \geq 1$, l'identité :
   $$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + ab^{n-1} + b^n).$$

Exercice 28
1. Soient $p_1, p_2, ..., p_r$ r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers $p_1, p_2, ..., p_r$.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers. ♦

Exercice 29
On considère le problème suivant, sachant que chacune des assertions suivantes est vraie :
1. Le malfaiteur est venu en voiture ou le témoin s'est trompé.
2. Si le malfaiteur a un complice, alors il est venu en voiture.
3. Le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé ou bien le malfaiteur avait un complice et avait la clé.
4. Le malfaiteur avait la clé.

Que peut-on en conclure ? ♦

Exercice 30
1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. ♦

Exercice 31
1. Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels ≥ 0. Montrer par contraposée que, si $x_1 + x_2 + ... x_n = 0$, alors $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.
2. Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels. Montrer que, si $x_1^2 + x_2^2 + ... x_n^2 = 0$, alors $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. ♦

Exercice 32

1. Ecrire la définition d'une fonction f strictement croissante sur une partie A de $\mathbb{R}$. Puis écrire la négation de cette proposition.
2. Soit une suite (u_n). Ecrire en langage formalisé les propositions :
   (a) u_n est toujours nul.
   (b) u_n est nul à partir d'un certain rang.
   (c) u_n est nul une infinité de fois.
   (d) u_n est nul au moins une fois.
3. Ecrire la négation des quatre propositions précédentes. ♦

Exercice 33

1. Etudier les variations de la fonction carré.
2. Etudier les variations de la fonction cube.
3. Montrer que la fonction cube est une injection. ♦

Exercice 34

1. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Utiliser la géométrie du collège.
2. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Utiliser la géométrie analytique du lycée. ♦

Exercice 35

Montrer que

$$\sqrt[3]{18+\sqrt{325}}+\sqrt[3]{18-\sqrt{325}}=3.$$

Exercice 36

1. Soient $x, y > 0$, montrer que
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
Interprétez géométriquement ce résultat.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ strictement positifs. Montrer que
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{2}.$$
3. En appliquant l'inégalité précédente aux $n+1$ réels
$$1+\frac{1}{n}, ..., 1+\frac{1}{n}, 1,$$
montrer que la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante. ♦

Exercice 37

Soit $f \in F^E, g \in G^F$. Montrer les propositions suivantes :

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
4. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 38

Construire deux fonctions f et g, non bijectives l'une et l'autre, telles que $g \circ f$ est bijective. ♦

Exercice 39

Soit $f \in F^E, g \in G^F$. On suppose que $g \circ f = id_E$ et que $f \circ g = id_F$. Montrer que f est bijective et admet g comme fonction réciproque. ♦