Miscellanées

09-2024

Niveau Première et Terminale

- Nombres
- Calcul algébrique
- Symbole Σ
- Symbole Π
- Identités trigonométriques
- Parité et périodicité des fonctions
- Le raisonnement par récurrence
- Inégalités
- Démontrer une identité (à venir)

Nombres

1. Puissances

- de 2 : 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1 024 $\cdots$ $\qquad 2^{10} \approx 10^3$
- de 3 : 1 3 9 27 81 $\cdots$
- de 5 : 5 25 125 625 $\cdots$

2. Carrés parfaits

100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400

3. Nombres premiers

2 3 5 7 · 11 13 17 19 · 23 29 · 31 37 · 41 43 47

53 59 · 61 67 · 71 73 79 · 83 89 · 97

4. Constantes

- $\ln 2 \approx 0,693$
- $\sqrt{2} \approx 1,414$
- $\phi \approx 1,618$ Nombre d'or
- $\sqrt{3} \approx 1,732$
- $\mathrm{e} \approx 2,718$ *Il apprend l'allemand.*
- $\pi \approx 3,1416$ *Que j'aime à faire apprendre ...*

5. Angles remarquables

degrés	30°	45°	60°	90°	180°
radians	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

6. Alphabet grec

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	π	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	Π	P	Σ	T	Υ	Φ	Ξ	Ψ	Ω

7. Symboles des unités (exemples)

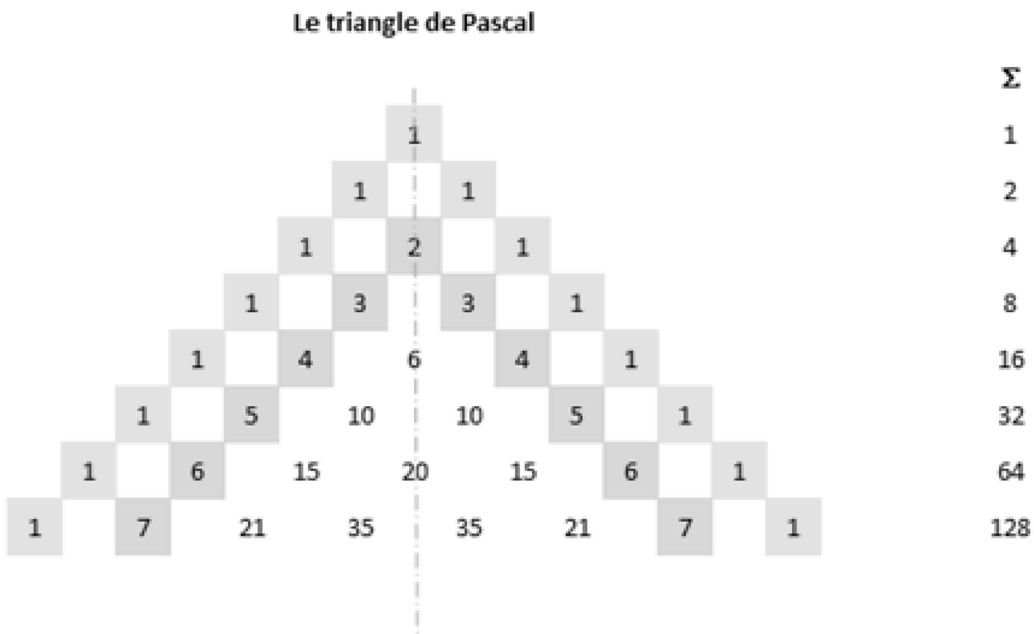
- heures minutes secondes : 5 h 28 mn 45 s
- degrés minutes secondes : $32°23'35''$
- Coordonnées terrestres : $47°36'$ N – $21°53'$ O
- vitesse : m/s ou m s^{-1}
- température : 10 °C et 50 °F

8. Écriture des nombres.

- Le séparateur des décimales est la virgule. Exemple : 3,14.
- Une espace insécable sépare les milliers. Exemple : 3 619,235 46.
- Une espace insécable sépare le nombre de son unité. Exemple : 35 kg.
- La notation scientifique utilise le signe × ou le signe ·. Exemple : 3×10^{-4} ou $3 \cdot 10^{-4}$.

Calcul algébrique

1. Triangle de Pascal



2. Développement du binôme aux petits ordres

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3. Factorisation

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}$$

Exemples :

- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^5-b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

En particulier pour $a = q \neq 1$ et $b = 1$,

$$\boxed{1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

4. Factorisation bis

$$a^{2p+1}+b^{2p+1} = (a+b)\left(a^{2p}-a^{2p-1}b+a^{2p-2}b^2-\cdots-a^2b^{2p-2}+ab^{2p-1}-b^{2p}\right)$$

Exemples :

- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
- $a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$
- $a^9+b^9=(a+b)(a^8-a^7b+a^6b^2-a^5b^3+a^4b^4-a^3b^5+a^2b^6-ab^7+b^8)$

5. Divers.

- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
- $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$
- $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ (Viète)
- $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ (Viète)
- $(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$ (Lagrange)
- $a^4+4b^4=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$ (Germain)

6. Décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(x-1)x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\qquad \boxed{\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}\qquad \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

7. Quantité conjugée

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

Symbole Σ

1. Définitions

Soit (a_k) une suite réelle (finie ou infinie) indexée sur un intervalle de $\mathbf{Z}$. Soient p et q deux entiers de cet intervalle avec $p \leqslant q$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} a_k \triangleq a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q}$$

En particulier, si la suite (a_k) est définie sur $[\![1\,;n]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \triangleq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Exemples.

$$1+2+4+8+\cdots+512 = \sum_{j=0}^{9} 2^j \qquad 4+9+16+\cdots+100 = \sum_{k=2}^{10} k^2$$

2. Linéarité

Pour toutes suites (a_k) et (b_k) et tout réel λ,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sum_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k}$$

3. Sommes usuelles

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel $q \neq 1$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad \boxed{\sum_{j=1}^{n} q^j = \frac{1-q^j}{1-q}}$$

4. Télescopage

Pour toute suite (x_k),

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1}$$

Exercice. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Symbole Π

1. Définitions

Soit (a_k) une suite réelle (finie ou infinie) indexée sur un intervalle de $\mathbf{Z}$. Soient p et q deux entiers de cet intervalle avec $p \leqslant q$. Alors :

$$\boxed{\prod_{k=p}^{q} a_k \triangleq a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_{q-1} \times a_q}$$

En particulier, si la suite (a_k) est définie sur $[\![1\,;n]\!]$,

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \triangleq a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

Exemples.

$$1\times2\times3\times\cdots\times8 = \prod_{i=1}^{8} i = 8\,! \qquad 1\times2\times4\times8\cdots\times512 = \prod_{j=0}^{9} 2^j \qquad 4\times9\times16\times\cdots\times100 = \prod_{k=2}^{10} k^2$$

2. Propriétés

Pour toutes suites (a_k) et (b_k), tout réel λ, tout entier naturel p,

$$\boxed{\prod_{k=p}^{q} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right)} \qquad \boxed{\prod_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^n \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)} \qquad \boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p}$$

3. Télescopage

Pour toute suite (x_k) à valeurs non nulles,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \frac{x_{n+1}}{x_1}}$$

Exercice. Calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

4. Lien somme-produit

Pour toute suite (a_k) et tout entier naturel non nul n,

$$\boxed{\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{a_k}}$$

Exercice. Calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$$

Identités trigonométriques

Théorème de Pythagore trigonométrique.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Formules d'addition et de soustraction.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Formules de l'arc moitié.

Si $t = \tan(x/2)$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Parité et périodicité des fonctions

1. Parité

Définition. Une fonction f définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$ est dite *paire* si, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$-x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

Exemples. Fonction constante, fonction carré.

Définition. Une fonction f définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$ est dite *impaire* si, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$-x \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemples. Fonction identité, fonction cube, fonction inverse.

Propriété. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$. Alors, f est paire (resp. impaire) si, et seulement si, son graphe est stable par la symétrie axiale d'axe $\mathrm{O}y$ (resp. la symétrie centrale de centre O).

Preuve. Immédiat.

2. Périodicité

Définition. On dit qu'une fonction f, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$, admet le nombre réel T pour *période* si, et seulement si, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$x + T \in \mathscr{D} \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemples. Fonction constante. fonctions cosinus, sinus.

Propriété. Le plan est muni d'un repère. Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$. Alors, f admet le nombre réel $T \neq 0$ pour période si, et seulement si, son graphe est stable par la translation de vecteur de coordonnées $(1;0)$. Si f admet une plus petite période positive, alors elle est appelée *sa* période.

Preuve. Immédiat.

Le raisonnement par récurrence

Propriété (admise). Si une partie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{N}$ vérifie :

— $0 \in \mathbf{A}$
— $n \in \mathbf{A} \Longrightarrow n+1 \in \mathbf{A}$

alors $\mathbf{A} = \mathbf{N}$.

Cette propriété est à la base du :

Principe de récurrence. Soit P_n une propriété qui dépend de l'entier n. Si :

— P_0 est vraie, et
— l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie,

alors la propriété P_n est vraie pour tout n.

Exercice. Pour tout entier naturel non nul n, on note : $S_n = 1+2+3+\cdots+n$.
Démontrer que :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corrigé.

Je raisonne par récurrence.
Pour un entier naturel n, je note P_n la propriété de récurrence :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Initialisation

Pour $n = 1$, d'une part $S_1 = 1$, d'autre part $1(1+1)/2 = 1$. Donc P_1 est vraie.
La propriété est donc <u>initialisée au rang 1</u>.

2) Hérédité

Je suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Puisque

$$S_{n+1} = 1+2+\cdots+n+(n+1) = S_n + (n+1)$$

l'hypothèse de récurrence P_n assure que :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

La propriété est donc <u>héréditaire</u>.

3) Conclusion

Le principe de récurrence assure donc que la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

CQFD.

Inégalités

1. Dans $\mathbf{R}$, la relation $\leq$ est une *relation d'ordre*, c'est-à-dire qu'elle vérifie trois propriétés :

— $a \leq a$ (réflexivité)

— Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (transitivité)

— Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (antisymétrie)

2. Régles opératoires (Collège).

— Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$ (compatibilité avec l'addition)

— Si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda a \leq \lambda b$. Si $a \leq b$ et $\lambda \leq 0$, alors $\lambda a \geq \lambda b$.

— Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.

— Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq a^2 \leq b^2$ et $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

3. Inégalité triangulaire (Seconde).

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

Avec égalité si, et seulement si, a et b sont de même signe.

Généralisation à tout p-uplet de réels :

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_p| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_p|$$

4. Inégalité arithmético-géométrique d'ordre 2 (Seconde).

$$\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Avec égalité si, et seulement si, $a = b$.

5. Inégalité de Bernoulli (Terminale).

$$\forall \alpha \geq -1, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

6. Autres inégalités de convexité (Terminale).
Par exemple :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x$$

$$\forall x \in [0\,; \pi/2], \quad \sin x \leq x$$