

## Spécialité mathématiques, IE

*55 minutes.*

**Exercice 1**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue en tout point, et telle que pour tous  $x, y$  réels :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que  $f(0) = 0$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire.
3. En raisonnant par récurrence, montrer que, pour tout réel  $x$ , pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$f(nx) = nf(x).$$

4. Montrer que le résultat précédent reste vrai pour  $n < 0$ .
5. Soit  $r \in \mathbb{Q}$  avec  $r = \frac{p}{q}$ . Montrer que  

$$f(r) = rf(1).$$
6. Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel. En déduire que tout réel  $x$  est limite d'une suite  $(r_n)$  de rationnels.
7. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En considérant une suite de rationnels convergeant vers  $x$ , montrer que

$$f(x) = xf(1).$$

8. Montrer que les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tous réels  $x, y$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires.

**Exercice 2**

S'il existe un couple  $(a, b)$  de réels, avec  $a \neq 0$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

on dit que la droite  $(d)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

1. Soit  $M$  et  $m$  les points respectifs d'abscisse  $x$  de  $\mathcal{C}_f$  et de  $(d)$ .
  - (a) Calculer la distance  $MM$ .
  - (b) Donner une interprétation géométrique au fait que la droite  $(d)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .
  - (c) Que peut-on faire pour préciser la position de  $(d)$  par rapport à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ ?

2. On suppose que la droite  $(d)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

- (a) Montrer que

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

- (b) Montrer que

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

3. Soit  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}.$$

- (a) Déterminer l'équation d'une éventuelle asymptote oblique  $(d)$  à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .
- (b) Préciser la position de  $(d)$  par rapport à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

*Fin du sujet.*