17 Complexes.

Exercice 307
Mettre sous forme algébrique :

1. $\dfrac{2+3i}{4+i}$
2. $\dfrac{1}{i}+\dfrac{3}{1+i}$
3. $(8+6i)^2$
4. $\left(1+\dfrac{3}{1+i}\right)^2$ ♦

Exercice 308
Soient z, w des complexes.

1. A-t-on $Re(zw) = Re(z)Re(w)$?
2. Montrer que $Re(iz) = -Im(z)$; $Im(iz) = Re(z)$. ♦

Exercice 309
Calculer les puissances de i. ♦

Exercice 310
Soit un complexe z de forme algébrique $x+iy$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de :

1. $\dfrac{1}{z^2}$.
2. $\dfrac{z+1}{2z-5}$.
3. z^3. ♦

Exercice 311
Soit, pour z complexe, $Z = \dfrac{z-i}{z-3}$.

1. Déterminer les z pour lesquels Z est réel.
2. Déterminer les z pour lesquels Z est imaginaire pur.
3. Représenter graphiquement les solutions des deux questions précédentes.
4. Déterminer les z tels que :
   (a) $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$.
   (b) $Re(Z) = 0$ et $Im(Z) \geq 0$. ♦

Exercice 312

1. Résoudre $z^2 = 1+6i$.
2. Résoudre $(z+1)^2 = 3+4i$.
3. Résoudre $iz^2 + 2z = i-1$.
4. Résoudre $z^4 = i$. ♦

Exercice 313
Soit z, w, s des complexes. Montrer que $(zw)s = z(ws)$. ♦

Exercice 314
Montrer que tout complexe z non nul admet un unique inverse. ♦

Exercice 315
Montrer, en faisant une récurrence sur n, la formule du binôme de Newton pour les nombres complexes, à savoir que, pour z, w complexes et n entier plus grand que 1 :

$$(z+w)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} w + \binom{n}{2} z^{n-2} w^2 + \ldots + \binom{n}{n} w^n,$$

où $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

On commencera par prouver la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ♦

Exercice 316
Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique. On définit $\epsilon = 1$ si $b \geq 0$ ou $\epsilon = -1$ si $b < 0$.

1. Montrer que les deux racines carrées de z sont les complexes $\pm(\alpha + i\epsilon\beta)$ où

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}$$

   Déduire alors que :
   (a) Les racines carrées d'un complexe sont réelles si, et seulement si, le complexe est réel et positif.
   (b) Les racines carrées d'un complexe sont imaginaires pures si, et seulement si, le complexe est réel et négatif.
   (c) Les deux racines carrées d'un complexe sont identiques si, et seulement si, le complexe est 0.
2. On considère l'équation d'inconnue le complexe z, définie par $az^2 + bz + c = 0$, où a, b, c sont des nombres complexes, a étant non nul.
   (a) Montrer que les solutions de l'équation sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ où δ est une des deux racines carrées de $b^2 - 4ac$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z - 4 = 0$. ♦

Exercice 317
1. Résoudre $z^8 = 1$. Exprimer les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2. Montrer que les racines n-èmes de l'unité définissent un polygone régulier. Préciser la longueur du côté et l'angle au centre.
3. Calculer la somme des racines n-èmes de l'unité. ♦

Exercice 318
Soit z, z' deux complexes.
1. Montrer que
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$
   Interpréter géométriquement.
2. Montrer que
$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$
3. Traiter les cas d'égalité. ♦

Exercice 319
Exprimer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$. ♦

Exercice 320
On considère les complexes z_k, w_k, k prenant les valeurs entières $1, 2, \ldots, n$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$

Exercice 321

1. On considère la droite passant par A d'affixe a et dirigée par $\vec{u}$ d'affixe u. En donner une représentation paramétrique, puis une équation implicite fonction de z, affixe des points de la droite.
2. Donner une équation implicite du cercle de rayon $r > 0$ centré en $A(a)$.
3. Dans les deux cas précédents et pour les équations implicites, vérifier qu'en écrivant les complexes sous forme algébrique, on retrouve les équations cartésiennes d'une droite et d'un cercle. ♦

Exercice 322

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^5 - 2 = 0$.
2. $z^4 + i = 0$.
3. $z^6 + 8 = 0$.
4. $z^3 - 4 = 0$. ♦

Exercice 323

Calculer le module de :

1. $\dfrac{i(2+3i)(5-2i)}{(-2-i)}$.
2. $\dfrac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$. ♦

Exercice 324

On considère un polynôme de la variable complexe z,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont réels. Montrer que si a est une racine de P, alors il en est de même pour $\overline{a}$. En déduire que les racines non réelles de P vont par paires. ♦

Exercice 325

Soit a, b des nombres complexes.

1. Montrer que
$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$
2. Interpréter géométriquement l'égalité précédente. ♦

Exercice 326

Soit z, w des complexes, $w \neq 0$. Montrer que

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
2. $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \quad [2\pi]$. ♦

Exercice 327

Soit z un complexe non nul. En considérant $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, donner une construction géométrique de z^{-1}. ♦

Exercice 328

1. Décrire l'ensemble des complexes z tels que $Im(z+5) = 0$.
2. Soit $z = x + iy$ sous forme algébrique, montrer que
$$|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|.$$