Devoir-test n°3 – Classes de Première

Calculatrices interdites – Barème indicatif

Exercice 1 [3 Points]

Démontrer que le triangle non plat ABC est rectangle en A si, et seulement si,

$$\sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C}$$

Exercice 2 [2 Points]

La suite (a_n) est définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$a_n = \frac{2^n}{3n+2}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{4a_n}$$

Exercice 3 [5 Points]

Dans chaque cas ci-dessous, déterminer, en la justifiant, la nature du quadrilatère ABCD.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}) = 0$
2. $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\| = 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2$
3. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ et $(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}) = 0$ et $2\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}) = \|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\|^2$

Exercice 4 [6 Points]

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe $\mathscr{P}$ a pour équation :

$$y = \sqrt{x}$$

On cherche à déterminer le point de $\mathscr{P}$ le plus proche du point $A(4\,;0)$.

Pour cela, on considère un point courant M, d'abscisse x, situé sur $\mathscr{P}$.

1. Justifier le fait que minimiser la distance MA équivaut à minimiser la distance MA^2.
2. Exprimer MA^2 comme une fonction de x, qu'on note $\phi(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de ϕ.
   Justifier que ϕ admet un minimum.
4. En déduire que la distance MA est minimale pour un unique point M, qu'on note P.
   Préciser les coordonnées de P et la distance PA.
5. Démontrer que la tangente à $\mathscr{P}$ en ce point P est perpendiculaire à la droite (PA).

Exercice 5 [4 Points]

La suite (u_n) est définie sur $\mathbf{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 1$$

valable pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Pour $n \geqslant 1$, établir une relation simple entre u_n et u_{n-1}.
3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbf{N}$ par : $v_n = 2^n + n$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Comparer ces termes avec ceux calculés au **1.**
   Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.

Solutions et barème

Exercice 1 [3 Points]

Th. de Pythagore et Loi des sinus.

Exercice 2 [2 Points]

Calcul séparé de chacun des deux membres.

Exercice 3 [5 Points]

1. Parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur : **losange**. **[1,5 Points]**
2. Parallélogramme avec un angle droit (via Pythagore) : **rectangle**. **[1,5 Points]**
3. Parallélogramme avec un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur : **carré**. **[2 Points]**

Exercice 4 [6 Points]

1. La fonction $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$. **[1 Point]**
2. $\phi(x) = x^2 - 7x + 16$. **[1 Point]**
3. Polynôme du second degré. Minimum atteint en $3,5$. **[1 Point]**
4. $$\mathrm{P}\left(\frac{7}{2}\,;\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$
   et
   $$\mathrm{AP} = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,94$$
   [1 Point]
5. La tangente et la droite (AP) ont pour pente respective :
   $$\frac{\sqrt{14}}{14} \quad \text{et} \quad -\sqrt{14}$$
   dont le produit vaut -1. **[2 Points]**

Exercice 5 [Points]

1. $u_1 = 3$, $u_2 = 6$ et $u_3 = 11$. **[0,5 Point]**
2. $u_n = 2u_{n-1} - n + 2$. **[1 Point]**
3. (a) $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$ et $v_3 = 1$. **[0,5 Point]**

   (b) Les suites u et v sont les mêmes car elles ont même premier terme et vérifient la même relation de récurrence.
   [2 Points]