# Suites arithmétiques

## 1. Définition

**Définition.** Une suite $(u_n)$ est dite arithmétique s'il existe un réel $r$ tel que, pour tout $n$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Ce réel $r$ (unique) s'appelle la raison de la suite.
Une telle suite est dite à croissance linéaire.

Exemples. $u_n = 3n - 2$ ; $v_n = -2n + 5$.

Géogebra.

**Exercice.** Déclic : 57.

**Propriété.** Une suite arithmétique de raison $r$ est strictement croissante si $r > 0$, constante si $r = 0$, et strictement décroissante si $r < 0$.

**Exercice.** Déclic : 60.

## 2. Terme général

**Propriété.** Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison $r$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

et réciproquement.

Preuve. Télescopage ou récurrence.

**Exercice.** Déclic : 58, 59, et 61.

## 3. Somme de termes consécutifs

**Lemme.** Pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Preuve. Par récurrence, ou preuve de Gauss, ou preuve géométrique.

Il en découle :

**Propriété.** Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison $r$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}}$$

Retenir que *la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes que multiplie la demi-somme des deux termes extrémaux.*

**Exercice.** Déclic : 63.