

## Suites 6 - Suites homographiques

### 1. Suite homographique.

On note  $I = [0 ; 1]$  et  $f$  la fonction définie sur  $I$  par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

- (a) Étudier les variations de  $f$ .
- (b) En déduire que  $I$  est stable par  $f$ .
- (c) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$$

Prouver que, pour tout  $n$ ,  $u_n \in I$ .

#### Partie A.

- (d) Représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthonormé (unité : 10 cm).
- (e) placer les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- (f) Que suggère le graphique au sujet du sens de variation de  $(u_n)$ ?
- (g) Calculer  $f(x) - x$ .
- (h) En déduire l'expression de  $u_{n+1} - u_n$  comme une fraction rationnelle en  $u_n$ .
- (i) En déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .

#### Partie B.

- (j) On pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Prouver que la suite  $(v_n)$  est géométrique.

- (k) Calculer  $v_0$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (l) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ .
- (m) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .