Devoir-test n°5

Classe 16

Calculatrices autorisées – Barème indicatif

EXERCICE 1 [4 Points]

En France, 2018 a été l'année la plus chaude. La température moyenne y a été de 14 °C.

1. Pour modéliser la situation, on considère l'année 2018 comme l'année zéro, et on suppose que, ensuite, la hausse de température est de 1,4 °C par an. Pour tout entier naturel n, on note alors T_n la température moyenne annuelle en France pour l'année $2018+n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (T_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) On considère que, au-delà d'une température moyenne de 35 °C dans une région, celle-ci devient inhabitable. Selon ce modèle, en quelle année la France deviendrait-elle inhabitable ?
2. À cause du réchauffement climatique, certaines régions risquent de connaître une baisse de 10 % par an des précipitations moyennes annuelles (en mm). Dans une région du nord de la France, les précipitations moyennes annuelles étaient de 673 mm en 2018. On considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette baisse de 10 % se poursuit ensuite chaque année. Pour tout entier naturel n, on note P_n les précipitations annuelles moyennes (en mm) dans cette région pour l'année $2018 + n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (P_n) ?
   Donner son premier terme et sa raison.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n.
   (c) Écrire un programme Python qui renvoie l'année où, pour la première fois, les précipitations sont inférieures ou égales à un seuil donné en entrée.

EXERCICE 2 [5 Points]

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ème sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif. L'événement « le n-ème sondage est positif » est noté V_n ; sa probabilité est notée p_n.

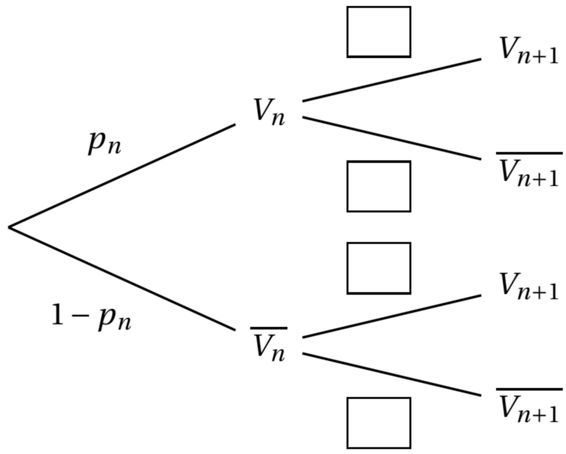
L'expérience acquise permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   — A : « les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ sondages sont positifs » ;
   — B : « les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le $3^{\text{ème}}$ sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



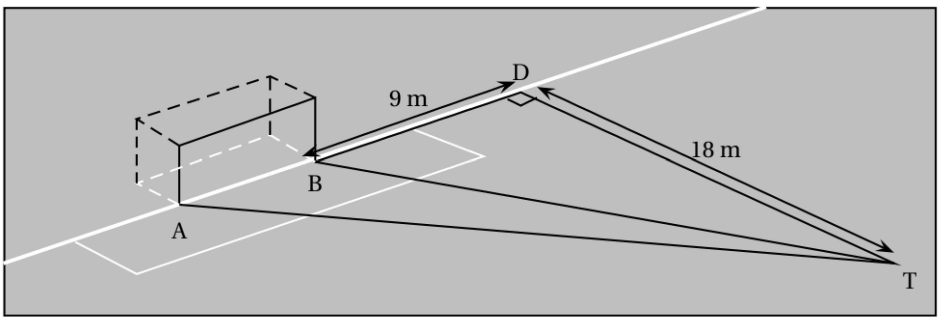
4. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
5. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
6. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.
Commenter.

EXERCICE 3 [5 Points]

Les points A, B et D sont alignés.

Un ballon se trouve au point de tir T. Le triangle TAD est rectangle en D.

La largeur du but est : AB = 7,32 mètres.



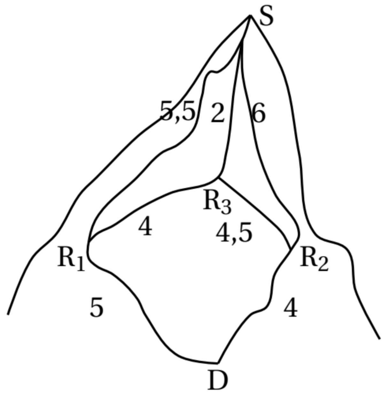
1. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{DB}$?
2. Calculer la valeur numérique du produit scalaire $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle de tir $\widehat{ATB}$.

EXERCICE 4 [6 Points]

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne à partir d'un point de départ D, les randonneurs peuvent emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges R_1 et R_2. Le lendemain, pour atteindre le sommet, ils peuvent, soit atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, soit atteindre le sommet directement. La probabilité que les randonneurs :

— … passent par R_1 vaut $1/3$;
— … montent directement au sommet en partant de R_1 vaut $3/4$;
— … montent directement au sommet en partant de R_2 vaut $2/3$.

Schéma de la montagne



1. Tracer un arbre pondéré qui représente tous les trajets possibles de D jusqu'à S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements :
   (a) E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 »
   (b) E_2 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3» ;
   (c) E_3 : « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;
   (d) E_4 : « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(\text{M}, \text{N})$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.
   On donne $d(\text{D}, \text{R}_1) = 5$; $d(\text{D}, \text{R}_2) = 4$; $d(\text{R}_1, \text{R}_3) = 4$; $d(\text{R}_2, \text{R}_3) = 4{,}5$; $d(\text{R}_3, \text{S}) = 2$; $d(\text{R}_1, \text{S}) = 5{,}5$; $d(\text{R}_2, \text{S}) = 6$ (*cf.* schéma *supra*).
   On note X la variable aléatoire qui modélise la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Références

1. E3C 2020 Sujet 25 Exercice 3
2. Asie juin 2010 Exercice 3
3. E3C 2020 sujet 2 Exercice 4
4. Asie juin 2001 Exercice 1

Solutions

EXERCICE 1 [4 Points]

1. Températures.
   (a) $T_{n+1} = T_n + 1,4$ pour tout n
   Donc arithmétique, de premier terme $T_0 = 14$ et de raison $1,4$ (**1 Point**)
   (b) $T_n = 35 \iff n = 15$
   Donc la France deviendrait inhabitable en 2034 (**1 Point** mais **0,5 Point** pour 2033)
2. Précipitations.
   (a) $P_{n+1} = 0,9P_n$ pour tout n
   Donc géométrique, de permier terme $P_0 = 673$ et de raison $0,9$ (**0,5 Point**)
   (b) $P_n = 673 \times 0,9^n$ (**0,5 Point**)
   (c) *Cf.* corrigé sur apmep.fr (**1 Point**)

EXERCICE 2 [5 Points]

1. Définition d'une probabilité conditionnelle :
   $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 0,36$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 0,36$ (**0.5 Point**)
2. Formule des probabilités totales : $p_3 = 0,40$ (**0,5 Point**)
3. Arbre (**0,5 Point**).
4. Formule des probabilités totales : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ (**1 Point**) (suite AG)
5. Équation aux limites et suite auxiliaire : $p_n = 0,2 + 1,6 \cdot 2^{-n}$. (**1 Point**)
6. Or $0 < 0,5 < 1$, donc (p_n) est convergente de limite 0,20. (**1 Point**)
   La probabilité que le test soit positif se stabilise à 1 chance sur 5. (**0,5 Point**)

EXERCICE 3 [5 Points]

1. $\overrightarrow{\mathrm{TD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} = 0$ car l'angle $\widehat{\mathrm{TDA}}$ est droit. (**1 Point**)
2. Relation de Chasle en D ou calcul en base orthonormé.
   $\overrightarrow{\mathrm{TA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TB}} \approx 470,88$ (**1 Point**)
3. Formule trigonométrique du produit scalaire et TA et TB via th. de Pythagore.
   $\widehat{\mathrm{ATB}} \approx 15.6°$ (**3 Points**)

EXERCICE 4 [6 Points]

1. Arbre. *Cf.* corrigé sur apmep.fr. (**1 Point**)
2. (**2 Points**)

$$\mathbf{P}(\mathrm{E}_1) = \frac{1}{4} = 0,25 \qquad \mathbf{P}(\mathrm{E}_2) = \frac{11}{36} \approx 0,31 \qquad \mathbf{P}(\mathrm{E}_3) = \frac{3}{11} \approx 0,27 \qquad \mathbf{P}(\mathrm{E}_4) = \frac{16}{25} = 0,64$$

   (**0,5 Point** chacun, justifications attendues)
3. (a) Loi de X (**1 Point**)

10,0	10,5	11,0
$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{3}{36}$

   (b) $\mathbf{E}(\mathrm{X}) \approx 10,32$ (**1 Point**) (Même si cohérent avec (a) faux)
   Formule de König : $\sigma(\mathrm{X}) \approx 0,32$ (**1 Point**) (*Idem*)