Analyse 2 – Variations et courbes représentatives des fonctions

Contenus.

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa fonction dérivée. Caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités.

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extrema.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré (variations, extremum, allure, etc.).

---

1. Sens de variation et signe de la dérivée.

Théorème (admis). Si f est une fonction dérivable sur un **intervalle** I de $\mathbf{R}$, alors :

- f est croissante si, et seulement si, $f' \geq 0$;
- f est décroissante si, et seulement si, $f' \leq 0$;
- f est constante si, et seulement si, $f' = 0$.

Preuves. Pour les deux premiers points, la condition est clairement nécessaire ; démontrer qu'elle est suffisante nécessite le théorème des accroissements finis. Le troisième point découle des deux premiers. L'hypothèse que I est un intervalle est cruciale : à titre de contre-exemple, considérer la fonction inverse, définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$. Alors, si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Cette condition n'est pas nécessaire (*cf.* la fonction cube).

---

2. Extrema

Définition. Soit f une fonction sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Soit a un point de I. On dit que $f(a)$ est un *minimum* (resp. *maximum*) *local* de f s'il existe un intervalle ouvert J, inclus dans I et qui contient a, tel que, pour tout $x \in \mathrm{J}$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).

Théorème [de l'extremum]. Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** I de $\mathbf{R}$. Soit a un point de I. Si f admet en a un extremum local, alors nécessairement $f'(a) = 0$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

Preuve. Étudier le signe des taux de variation.

L'hypothèse que l'intervalle I soit ouvert est cruciale (*cf.* la fonction identité sur $[0;1]$). Cette condition nécessaire n'est pas suffisante (*cf.* la fonction cube en 0).

Théorème [Une réciproque]. Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** I de $\mathbf{R}$. Soit a un point de I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet en a un extremum local.

Preuve. Étudier les variations de la fonction f au voisinage de a.

Cette condition suffisante n'est pas nécessaire. *Traiter un exemple à titre d'exercice.*

Exercices. LM1 : 5, 5A, 5B, 5C et 5D.