Consignes de présentation des copies

- Rien dans la marge.
- Sur la première page de chaque copie, en haut à gauche : le nom ou le 4G.
- Copies numérotées en haut à droite des pages 1.
- Référence des exercices en rouge minuscules non souligné.
- Exercices séparés par un trait horizontal sur la largeur de la page.
- Résultats soulignés ou encadrés en rouge.
- Traits longs (fractions, tableaux, etc.) : tracés à la règle.
- Résultats intermédiaires, points importants, mots-clefs : soulignés.
- Figures et schémas : grands, aérés, propres et en couleur.
- Écriture lisible et aérée.

Mathématiques

Exercice 1

Soit donc $x > 0$ un nombre réel.
L'inégalité artithmético-géométrique affirme que, pour tous réels $a, b \geq 0$,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Je l'applique pour $a = x$ et $b = 1/x$:

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

C'est-à-dire : $f(x) \geq 2$.
Donc 2 est un minorant de la fonction f.
Et ce minorant est atteint puisque $f(1) = 2$.

En conclusion, la fonction f admet 2 pour minimum.

Exercice 2

J'utilise la formule du binôme de Newton à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)\end{aligned}$$

Donc : $3^3 = 9 + 3 \cdot 3ab$, soit $ab = 3$.
J'obtiens alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 3 \\ ab & = & 2 \end{array}\right.$$

Les formules de Viète assurent que a et b sont les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$, qui sont 1 (racine évidente) et 2 (car le produit des racines vaut 2).
Je vérifie que : $1 + 2 = 3$ et $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$.

Les deux nombres cherchés sont donc 1 et 2.

Exercice 3

J'utilise deux fois de suite la formule de duplication du cosinus :

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1\\ &= 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1\\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

J'en déduis que le polynôme demandé est

$$\boxed{P(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1}$$