3 Suites

3.1 Suites, généralités, pas de limites.

Exercice 40
Ecrire en langage formalisé :

1. La suite (u_n) est majorée.
2. La suite (u_n) n'est pas minorée.
3. La suite (u_n) est croissante.
4. La négation de la proposition précédente. ♦

Exercice 41
Soit, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)2}.$$

1. Ecrire pour u_1, u_2, u_3 les sommes.
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n}$. ♦

Exercice 42

Exercice 43
Soit a, b, c des réels > 0 en progression arithmétique. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ sont en progression arithmétique. ♦

Exercice 44
On suppose que les $a_1, a_2, \dots, a_n$, strictement positifs, sont en progression arithmétique. Montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Exercice 45
Les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont tous non nuls.

1. Si ils sont en progression arithmétique, montrer que :
$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n} \qquad (*)$$
2. Si, pour tout $n \geq 3$, ils vérifient la relation $(*)$, montrer qu'ils sont en progression arithmétique. ♦

Exercice 46

1. Soit un réel q. On considère la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et par, pour tout $n \geq 0$, la relation $u_{n+1} = qu_n$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = q^n u_0$.
2. On considère une suite (a_n). On considère qu'on a, pour tout $n \geq 0$, $|a_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|a_n - 3|$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $|a_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_n - 3|$. ♦

Exercice 47
Soit f définie par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

1. On considère u définie par $u_0 \geq -6$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u est bien définie.
2. On considère u définie par $u_0 \in [-6;3]$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u est croissante et majorée.
3. On considère u définie par $u_0 \geq 3$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u est décroissante et minorée. ♦

Exercice 48
Soit f définie par $f(x) = \sqrt{6-x}$. On considère u définie par $u_0 \in [-30;6]$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que u est bien définie.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

Exercice 49

1. Etablir une formule explicite pour la suite u telle que $u_0 = 4$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
2. Soit a, b des réels. Etablir une formule explicite pour (u_n) définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. ♦

Exercice 50
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. Soit une suite (u_n). On suppose que la suite $(f(u_n))$ est croissante. Etablir les variations de la suite (u_n). ♦

Exercice 51

1. Etablir une formule explicite donnant la somme de termes consécutifs de réels en progression arithmétique.
2. Même question pour des réels en progression géométrique. ♦

Exercice 52
Soit x un réel différent de 1. Pour $n \geq 1$, calculer

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}.$$

Exercice 53
On ordonne les rationnels strictement positifs selon la suite de nombres :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Montrer que $\frac{p}{q}$ est le $\left[\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q\right]$-ème nombre dans cette suite. ♦

3.2 Suites convergentes.

Exercice 54
Soit la suite (u_n), et le réel l.

1. Montrer que
$$|u_n - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon].$$
2. Montrer que
$$(u_n) \to l \Leftrightarrow (u_n - l) \to 0 \Leftrightarrow (|u_n - l|) \to 0.$$

Exercice 55
En utilisant la définition d'une suite convergente :

1. Montrer que la suite $(u_n = 3)$ converge.

2. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.
3. Si $(x_n) \longrightarrow x$ et $a \in \mathbb{R}$, montrer que $(ax_n) \longrightarrow ax$.
4. Si $(x_n) \longrightarrow x$, montrer que $(x_{2n}) \longrightarrow x$.
5. Si $(x_n) \longrightarrow x$, montrer que $(x_{n+1}) \longrightarrow x$.

Exercice 56

1. Ecrire en langage formalisé la négation de $(u_n) \to l$.
2. Montrer que la suite $((-1)^n)$ ne converge pas. ♦

Exercice 57

1. Soit x, y, z des réels. Montrer que
$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$
En déduire que :
   (a) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
   (b) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$. Interpréter géométriquement cette inégalité.
2. Si $(x_n) \longrightarrow x$ et $(y_n) \longrightarrow y$, montrer que $(x_n + y_n) \longrightarrow x + y$.
3. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. Que dire de la somme de deux suites divergentes ?
4. Si $(x_n) \longrightarrow x$, montrer que $(|x_n|) \longrightarrow |x|$. Que dire de la réciproque ? ♦

Exercice 58

1. Montrer que si une suite est convergente, alors elle est bornée. Que dire de la réciproque ?
2. On considère la suite $\left(H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.
   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$,
   $$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$
   (b) En déduire que la suite (H_n) ne converge pas. ♦

Exercice 59

1. Enoncé et preuve du théorème des gendarmes.
2. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.
3. (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $2^n \geq n$.
   (b) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge.
4. Montrer que le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.
5. Si $(x_n) \longrightarrow x$ et $(y_n) \longrightarrow y$, montrer que $(x_n y_n) \longrightarrow xy$.
6. (a) Si $(x_n) \longrightarrow x$ et si $x \neq 0$, montrer que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est bien définie, au moins à partir d'un certain rang.
   (b) On suppose que $(x_n) \longrightarrow x$ et que $(y_n) \longrightarrow y$, avec $y \neq 0$. Montrer que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \longrightarrow \frac{x}{y}$. ♦

Exercice 60

1. Soit a un réel positif, montrer que si, pour tout $\epsilon > 0$, $a \leq \epsilon$, alors $a = 0$.
2. On suppose que $(x_n) \longrightarrow x$. On suppose de plus que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \leq x \leq b$.
3. Si $(x_n) \longrightarrow x$ et $(y_n) \longrightarrow y$, et si, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$, montrer que $x \geq y$.

4. On considère la suite $\left(H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.
   (a) Montrer que, pour $n \geq 1$,
   $$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite (H_n) ne converge pas. ♦

Exercice 61

1. Soit $(x_n) \longrightarrow x$ et $(x_n) \longrightarrow y$. Montrer que $x = y$.
2. Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.
3. Montrer qu'une suite réelle, décroissante et minorée, converge.
4. On considère la suite définie par $s_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, $s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right)$.
   (a) Montrer que cette suite est décroissante minorée par $\sqrt{2}$.
   (b) En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite. ♦

Exercice 62 (Bac C Etranger 1992)

Soit (u_n) la suite réelle définie par son premier terme u_0 et par la condition :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que si (u_n) converge, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 > 0$, alors la suite (u_n) diverge.
4. Démontrer, par récurrence, que si $u_0^2 + u_0 < 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 < u_n < 0$.
5. Conclure sur la convergence de la suite (u_n). ♦

Exercice 63

Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de terme général :

1. $\frac{1}{n + n^3}$.
2. $\frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 3n - 5}$.
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
4. $\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$.
5. $\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4$. ♦

Exercice 64

Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de terme général :

1. $\frac{n!}{(n+3)!}$.
2. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}$.
3. $\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$.
4. $\frac{\cos^2 n}{2^n}$.

5. $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. ♦

Exercice 65
Nature et limite éventuelle de la suite de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$. ♦

Exercice 66
1. Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$
2. Etudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$ ♦

Exercice 67
1. Soit un réel a, $0 < a < 2$. Montrer que $a < \sqrt{2a} < 2$.
2. On pose $a_0 = \sqrt{2}$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.
   (a) Montrer que la suite (a_n) converge.
   (b) Déterminer sa limite. ♦

Exercice 68
On suppose que $\left(\dfrac{x_n - x}{x_n + x}\right)$ tend vers 0. Montrer que (x_n) tend vers x. ♦

3.3 Avec aussi des suites tendant vers l'infini.

Exercice 69
1. Ecrire (langage formalisé) :
   (a) La négation de : $(u_n) \longrightarrow +\infty$.
   (b) $(u_n) \longrightarrow -\infty$.
2. Montrer que $(u_n) \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow (-u_n) \longrightarrow -\infty$.
3. Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers l'infini.
4. Soit une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ et un réel $a > 0$. Montrer que la suite (au_n) tend vers $+\infty$. ♦

Exercice 70
1. Si $(u_n) \longrightarrow +\infty$, montrer que (u_n) n'est pas majorée. En déduire que (u_n) ne converge pas.
2. Si (u_n) est croissante et n'est pas majorée, monter que $(u_n) \longrightarrow +\infty$. En déduire le comportement à l'infini de (H_n).
3. Proposer plusieurs suites tendant vers l'infini sans être monotones.

Exercice 71

1. Si la suite de terme général u_n tend vers $+\infty$, montrer que la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.
2. Ecrire un énoncé de divergence vers l'infini par comparaison, et le prouver.
3. Soit un réel q. Montrer les résultats suivants :
   (a) Si $q > 1$, la suite (q^n) tend vers $+\infty$.
   (b) Si $|q| < 1$, la suite (q^n) converge vers 0.
   (c) Si $|q| < 1$, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} q^k$ converge vers $\frac{1}{1-q}$.
   (d) Si $q \leq -1$, la suite (q^n) diverge.
   (e) Si $|q| \geq 1$, la suite $(1 + q + q^2 + ... + q^n)$ diverge.

Exercice 72

1. Soit un réel x, montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ tend vers 0.
2. Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge.
3. Montrer que la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge.
4. Montrer que les deux suites précédentes ont la même limite. ♦

Exercice 73

1. Soit $h > 0$, soit $n \geq 1$. Montrer que :
   (a) $(1+h)^n \geq 1 + nh$.
   (b) $(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$.
2. En utilisant ce qui précède, montrer que :
   (a) $a^n \longrightarrow +\infty$, pour $a > 1$. (*Poser $a = 1 + h$.*)
   (b) $a^n \longrightarrow 0$, pour $0 < a < 1$.
   (c) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, pour $a > 1$. (*Poser $a = 1 + h_n$ et estimer h_n.*)
   (d) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, pour $0 < a < 1$.
   (e) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$. ♦

Exercice 74

Définissons la suite (a_n) par $a_1 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Déterminer le comportement de la suite (a_n) à l'infini. ♦

Exercice 75

Soit $x > 0$. On définit la fonction f par $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$. Déterminer $f(x)$. ♦