

Suites 6 - Suites homographiques

1. Suite homographique.

On note $I = [0 ; 1]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

- (a) Étudier les variations de f .
- (b) En déduire que I est stable par f .
- (c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$$

Prouver que, pour tout n , $u_n \in I$.

Partie A.

- (d) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé (unité : 10 cm).
- (e) placer les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- (f) Que suggère le graphique au sujet du sens de variation de (u_n) ?
- (g) Calculer $f(x) - x$.
- (h) En déduire l'expression de $u_{n+1} - u_n$ comme une fraction rationnelle en u_n .
- (i) En déduire le sens de variation de (u_n) .

Partie B.

- (j) On pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

- (k) Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n .
- (l) Exprimer u_n en fonction de v_n .
- (m) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .