4. $(1+2x)^{\frac{3}{x}}$ en 0.

Exercice 187
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{2(u_n+2)}$.

1. Etudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{2(x+2)}$. (Domaine de définition, continuité, dérivabilité, monotonies, limites au bord...)
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, et que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
3. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $]0,1[$. On notera a ce point fixe.
4. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$.
5. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_n - a| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - a|.$$
6. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 188
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^x + x.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution réelle, que l'on notera u_n.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \ln n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n - \ln n) \leq u_n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n).
6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n}$.

Exercice 189
Pour tout entier $n > 1$, on note f_n la fonction définie par
$$f_n(x) = (n+1)^x + (n+2)^x + ... + (n+n)^x.$$
Soit $a > 1$ un réel donné. On note E_n l'équation définie par $f_n(x) = na$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n.
2. Etudier les variations de f_n.
3. Démontrer que E_n admet une unique solution notée x_n.
4. Montrer l'encadrement, pour $n > 1$,
$$n(n+1)^{x_n} \leq na \leq n(2n)^{x_n}.$$
5. En déduire un encadrement de x_n.
6. Etudier la limite de la suite $(x_n \ln n)$.

Exercice 190
Déterminer tous les couples (x, y) de réels tels que :

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ \ln x + \ln y = \ln 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ \ln x - \ln y = 5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60. \end{cases}$