Géométrie II – Géométrie repérée.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Contenus.

— Vecteur normal à une droite. Vecteur directeur d'une droite.

— Équation de cercle.

— Parabole représentative d'un polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.

Capacités.

— Déterminer une équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal.

— Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.

— Déterminer l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.

— Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.

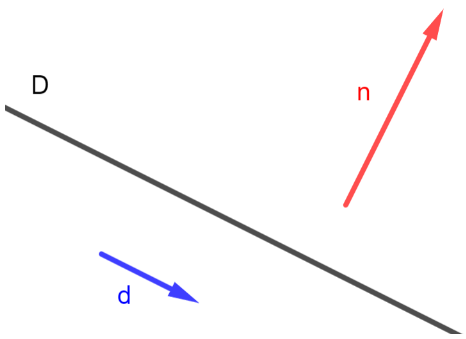
— Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

— Utiliser un repère pour étudier une configuration.

---

1. Droites.

Définition. Un vecteur est dit normal à une droite s'il est orthogonal à un vecteur directeur de la droite. Dans ce cas, il est orthogonal à tout vecteur directeur de la droite. En outre, tout vecteur qui lui est colinéaire est aussi normal à la droite.



Propriété. Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Preuve. Le vecteur $\vec{d}(-b, a)$ dirige la droite et $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$.

Exercice. Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par le point $\mathrm{A}(5\,;-2)$ et dont $\vec{n}(2\,;3)$ est un vecteur normal.

Exercice. On donne la droite $\mathscr{D} : 3x - 2y + 4 = 0$ et le point $\mathrm{M}(-2\,;5)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$. En déduire la distance de M à $\mathscr{D}$.

Propriété [HP]. La distance du point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M})$ à la droite $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(\mathrm{M}, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{MH}} \cdot \vec{n}$.

Exercice. Appliquer la formule aux données de l'exercice *supra* et retrouver la distance de M à $\mathscr{D}$.

---

2. Cercles.

Propriété. Le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r admet pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

qui se récrit :

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

qu'on appelle équation réduite du cercle.

Preuve. $\Omega\mathrm{M}^2=r^2$.

Exercice. A$(4\,;-2)$ et B$(-2\,;6)$. Déterminer l'équation réduite du cercle de diamètre [AB].

Exercice. Déterminer centre et rayon du cercle d'équation réduite :

$$x^2+y^2-2x+6y+6=0$$

---

3. Paraboles.

Pour rappel, le trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ admet pour forme canonique :

$$a\,(x-\alpha)^2+\beta$$

où

$$\alpha=-\frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta=-\frac{\Delta}{4a}=P(\alpha)$$

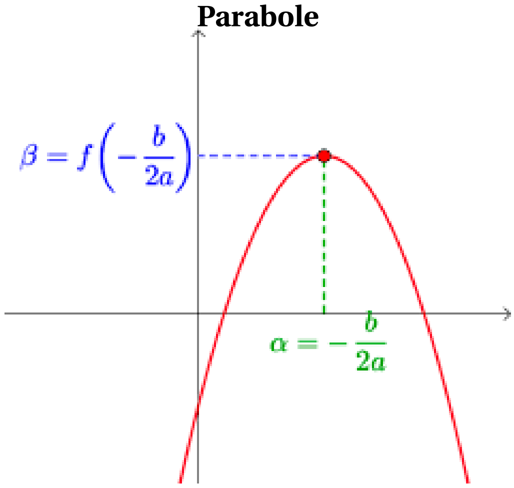
et où $\Delta=b^2-4ac$ est son discriminant.

Définition. La courbe représentatve d'un trinôme du second degré s'appelle une parabole.

Par exemple, en astronomie, la trajectoire d'un comète peut être cyclique, il s'agit alors d'une ellipse, ou non, il s'agit alors, soit d'une parabole, soit d'une hyperbole.

Propriété. On considère le trinôme du second degré ax^2+bx+c, dont la forme canonique est $a\,(x-\alpha)^2+\beta$. Alors, la parabole représentative de ce trinôme admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$, et son sommet est le point S(α,β).

Parabole



Preuve. Pour la symétrie, $P(2\alpha-x)=P(x)$.

Exercice. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}: y=2x^2-4x-6$.

Exercice. On considère le trinôme du second degré unitaire de racines r et s. Déterminer les coordonnées du sommet de sa parabole.
