QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són els primers conceptes de la lògica de primer ordre: el concepte d'equivalència de fórmules de primer ordre, les principals equivalències (negació dels quantificadors) així com les que no són equivalents (que provoquen molts errors). També vam estar treballant amb exemples la formalització d'afirmacions del llenguatge natural.

CLASSE D'AVUI 2/10/2020

VERACITAT I QUANTIFICADORS A LA LÒGICA DE PRIMER ORDRE

Ens hem de plantejar com justificar que una fórmula de primer ordre és certa en un domini i amb unes relacions donades. Tenim dos casos típics: $\exists x P(x)$ i $\forall x P(x)$, veiem cadascun com tractar-los.

- Cas existencial $\exists x P(x)$

  En aquest cas cal trobar un valor de x de forma que sigui cert $P(x)$.

  EX.: Raoneu que és certa l'afirmació $\exists x \in \mathbb{R}(x > 0 \wedge x^2 - 1 < 0)$. És cert per $x = 1/2$ ens quedaria $\frac{1}{2} > 0 \wedge \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ que és $V \wedge V = V$.

  Quan s'ha de demostrar que un $\forall x P(x)$ és fals només caldrà mostrar un exemple pel qual l'afirmació $P(x)$ és falsa. Això es basa en que: $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x(\neg P(x))$. I a un exemple d'aquest tipus se l'anomena **contraexemple** (és un exemple *que va contra* de $P(x)$).

  EX.: Demostreu que és fals $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \to x \geq 1)$. És fals perquè $x = 1/3$ és un contraexemple ja que $\frac{1}{3} > 0 \to \frac{1}{3} \geq 1$ seria $V \to F$ i per tant és F.

  EX.: Demostreu que és fals $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 < 0)$. És fals ja que $x = 1111$ és un contraexemple perquè $1111^2 = 1234321 > 0$ i per tant és falsa l'afirmació $1234321 < 0$.

  És molt important donar NOMÉS UN contraexemple.

- Cas universal $\forall x P(x)$

  Per veure que tot element del domini satisfà $P(x)$ serà molt fàcil si el domini només són uns quants elements perquè es mira per a cadascun si és certa l'afirmació. En el cas que no sigui finit el domini caldrà fer un raonament "amb lletres" (ho treballarem més endavant). També per demostrar que un existeix és fals caldrà fer el mateix, o sigui, demostrar la negació és a dir: $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x(\neg P(x))$.

  EX.: (35) Pel domini $A = \{0, 1, 2, 3\}$ justifiqueu que a) és certa i que són falses b i c):

  a) $\forall x \in A(x^2 - 3 \neq 0)$ cal veure que per a cada element del conjunt A es verifica el que diu: $0^2 - 3 = -3 \neq 0$, $1^2 - 3 = -2 \neq 0$, $2^2 - 3 = 1 \neq 0$,

$3^2 - 3 = 6 \neq 0$.

b) $\exists x \in A(|x+4| = 2)$ per veure que és falsa en primer lloc fem la negació (que haurà de ser certa): $\neg\exists x \in A(|x+4| = 2) \equiv \forall x \in A(|x+4| \neq 2)$; per tant cal veure per a cada element del conjunt A es verifica el que diu la segona afirmació: $|0+4| = 4 \neq 2$, $|1+4| = 5 \neq 2$, $|2+4| = 6 \neq 2$, $|3+4| = 7 \neq 2$.

c)$\exists x \in A(x^3 + 2x^2 - x = 4)$ també és molt fàcil demostrar que és fals perquè la negació és $\neg\exists x \in A(x^3 + 2x^2 - x = 4) \equiv \forall x \in A(x^3 + 2x^2 - x \neq 4)$ i només caldrà mirar: $0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 = 0 \neq 4$, $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 \neq 4$,
$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 = 14 \neq 4$, $3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 = 42 \neq 4$.

- Cas quantificadors barrejats
  Pel cas $\exists x \forall y P(x,y)$ caldrà donar un $x = a$ i veure que és cert $\forall y P(a,y)$.

EX.: $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}(x \leq y)$ per exemple $x = 0$ fa que sigui certa l'afirmació: $\forall y \in \mathbb{N}(0 \leq y)$. Això no cal demostrar-ho perquè se suposa que ho sabem.

Pel cas $\forall x \exists y P(x,y)$ per a cada x fixat caldrà donar un $y = E(x)$ (en general dependrà de x) i veure que és cert $P(x, E(x))$.

EX.: $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}(x < y)$ fixem un x qualsevol i busquem un y que verifiqui l'afirmació. Per exemple $y = x + 1$ va bé ja que $x < x + 1$ és sempre cert (una altra vegada això no ho justifiquem perquè ho sabem).
Per veure que una d'aquestes barreges és falsa caldrà veure que la negació és certa.

EX.: (36) Justifica la veritat o falsedat de l'afirmació $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(xy = 0)$.
L'afirmació és certa. Per exemple $y = 0$ verifica l'afirmació $\forall x \in \mathbb{R}(x \cdot 0 = 0)$ i això és cert sempre.

EX.: (37) Justifica la veritat o falsedat de l'afirmació $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(xy - 1 = 0)$.
És falsa ja que $x = 0$ fa que sigui falsa l'afirmació $\exists y \in \mathbb{R}(0 \cdot y - 1 = 0)$ i no existeix cap y que verifiqui que $0 \cdot y - 1 = 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Quadre resum:

1.2.-DEMOSTRACIONS

Pel cas d'haver de demostrar una afirmació del tipus $\forall x P(x)$ si el domini és finit es redueix a repetir unes quantes comprovacions però si és infinit la justificació s'ha de fer "amb lletres" (és a dir, sense presuposar res de la variable x que no sigui el fet de pertànyer al domini). Normalment la manera de procedir és anar fent un raonament del llenguatge natural (gairebé) en el qual s'encadenen les afirmacions amb un $\Rightarrow$ utilitzant pasos acceptats com a correctes. En aquestes demostracions utilitzarem els símbols matemàtics $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, i, o, no en lloc dels símbols lògics: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Els passos més usuals:

1. $A, B \Rightarrow A$
2. $A \Rightarrow A$ o B
3. A o B, $noA \Rightarrow B$
4. $(A, (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (modus ponens)
5. $(noB, (A \Rightarrow B)) \Rightarrow noA$
6. $ABSURD \Rightarrow A$

Les raons per les quals són certes aquestes implicacions són l'existència de les tautologies següents:

1. $p \wedge q \rightarrow p$
2. $p \rightarrow p \vee q$
3. $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$
4. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ (modus ponens)
5. $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
6. $0 \rightarrow p$

També farem servir totes les manipulacions numèriques que sabem que són certes ja que normalment parlarem d'afirmacions en els nombres reals, els racionals, els enters, els naturals, etc.

PROVA DIRECTA

Per demostrar $A \Rightarrow B$ fem un raonament amb passos intermitjos com els que hem descrit: $A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow A''' \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$.