1. *(2.5 punts)* La fórmula recurrent $a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n}$, amb $a_1 = 1$, defineix una successió de nombres reals $\{a_n\}$.

a) Demostreu que $1 \leq a_n \leq 3, \ \forall n \geq 1$

b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent.

d) Calculeu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. *(2.5 punts)* Considereu la integral següent:

$$I = \int_{1.2}^{1.6} \frac{e^x}{x}\, dx.$$

a) Sabent que la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ satisfà $0 < f^{(4)}(x) < 11, \ \forall x \in [1.2, 1.6]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de quatre decimals correctes fent ús del mètode de Simpson ($error < 0.5 \cdot 10^{-4}$).

b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb la precisió demanada a l'apartat a).

3. *(2.5 punts)* Considereu la funció $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (2, 1)$.

b) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P = (1, 1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

c) Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $M = (1, 1, 16)$.

4. *(2.5 punts)* Considereu la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en el recinte:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ y \geq 0\}.$$

1. *(2.5 punts)* La fórmula recurrent $a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n}$, amb $a_1 = 1$, defineix una successió de nombres reals $\{a_n\}$.

a) Demostreu que $1 \leq a_n \leq 3$, $\forall n \geq 1$

b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent.

d) Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓ:

Considerem la successió de nombres reals $\{a_n\}$ definida per $a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n}$ i $a_1 = 1$.

a) Demostració per inducció sobre n:
(i) És cert per a $n = 1$: $1 \leq a_1 \leq 3$, ja que $a_1 = 1$.
(ii) Suposem que per a cert $n \geq 1$ se satisfà $1 \leq a_n \leq 3$ (Hipòtesi d'inducció: $1 \leq a_n \leq 3$), i demostrarem que aleshores se satisfà per a $n+1$: $1 \leq a_{n+1} \leq 3$: A partir de la hipòtesi d'inducció: $1 \leq a_n \leq 3$, s'obté multiplicant per 3: $3 \leq 3a_n \leq 9$, i fent l'arrel quadrada, que conserva desigualtats: $\sqrt{3} \leq \sqrt{3a_n} \leq 3$; per tant $1 \leq a_{n+1} \leq 3$, com volíem demostrar.

b) Demostrem per inducció sobre n que $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$:
(i) Per a $n = 1$ es satisfà: $a_1 \leq a_2$, ja que $a_1 = 1$ i $a_2 = \sqrt{3}$.
(ii) Suposem que per a cert $n \geq 1$ se satisfà $a_n \leq a_{n+1}$ (Hipòtesi d'inducció: $a_n \leq a_{n+1}$), i demostrarem que aleshores se satisfà per a $n+1$: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$: a partir de la hipòtesi d'inducció: $a_n \leq a_{n+1}$, s'obté multiplicant per 3: $3a_n \leq 3a_{n+1}$, i fent l'arrel quadrada: $\sqrt{3a_n} \leq \sqrt{3a_{n+1}}$, és a dir $a_{n+1} \leq a_{n+2}$, com volíem demostrar.

c) La successió a_n és fitada per l'apartat a) i monòtona per l'apartat b), i per tant és convergent, pel teorema de la convergència monòtona.

d) Sigui $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; aleshores $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$. A partir de la fórmula de recurrència $a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n}$, s'obté:

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3\,a_n} = \sqrt{3l} \;\Rightarrow\; l^2 = 3l \;\Rightarrow\; l(l-3) = 0.$$

Finalment, atès que la successió a_n és creixent i $a_1 = 1$, i per tant l no pot ser 0, tenim $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

2. *(2.5 punts)* Considereu la integral següent:

$$I = \int_{1.2}^{1.6} \frac{e^x}{x}\,dx.$$

a) Sabent que la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ satisfà $0 < f^{(4)}(x) < 11\ \forall x \in [1.2, 1.6]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de quatre decimals correctes fent ús del mètode de Simpson ($error < 0.5 \cdot 10^{-4}$).

b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb la precisió demanada a l'apartat a).

SOLUCIÓ:

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

a) Una fita superior de l'error del mètode de Simpson és:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4,$$

sent M_4 una fita superior del valor abssolut de la derivada quarta de f en l'interval (a, b). En aquest exercici, $a = 1.2,\ b = 1.6$, i atès que $0 < f^{(4)}(x) < 11\ \forall x \in [1.2, 1.6]$, tenim que $M_4 = 11$. Aleshores per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de quatre decimals correctes, trobarem el nombre de subintervals n imposant $\dfrac{(0.4)^5}{180n^4} 11 < 0.5 \cdot 10^{-4}$, que equival a $n^4 > \dfrac{(0.4)^5 \cdot 11 \cdot 10^4}{180 \cdot 0.5}$, és a dir $n \geq 1.89$. Aleshores el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de quatre decimals correctes fent ús del mètode de Simpson és $n = 2$.

b) Substituint $a = 1.2,\ b = 1.6,\ n = 2$ a la fórmula de Simpson, s'obté:

$$\frac{0.2}{3}\,[f(1.2) + 4f(1.4) + f(1.6)] \simeq 1.163246$$

El valor de la integral amb la precisió demanada é $I = 1.16325 \pm 0.00005$.

3. *(2.5 punts)* Considereu la funció $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (2, 1)$.

b) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P = (1, 1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

c) Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $M = (1, 1, 16)$.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$. El vector $\overrightarrow{v}=(2,1)$ no és unitari, el normalitzem i tenim: $\overrightarrow{v}'=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$, aleshores la derivada direccional de f en el punt $P=(1,1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v}=(2,1)$ és:

$$D_{\overrightarrow{v}}f(P)=\overrightarrow{\nabla}f(P)\cdot\overrightarrow{v}'.$$

Les derivades parcials de f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y^2-1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-2xy$$

Per tant $\overrightarrow{\nabla}f(P)=(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,1))=(1,1)$, i aleshores:

$$D_{\overrightarrow{v}}f(P)=\overrightarrow{\nabla}f(P)\cdot\overrightarrow{v}'=(1,1)\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

b) Atès que f és de classe C^1 en el punt P, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P=(1,1)$ és la del vector gradient de f en P, es a dir la direcció del vector $(1,1)$.

La derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient de f en P, es a dir $|(1,1)|=\sqrt{2}$.

c) L'equació del pla tangent a una superfície $z=f(x,y)$ en un punt $(a,b,f(a,b))$ és:

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Per tant, fent $a=1$, $b=1$, $f(a,b)=16$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=1$, tenim l'equació del pla tangent a la superfície $z=f(x,y)$ en el punt $M=(1,1,16)$:

$$z=x+y+14.$$

L'equació contínua de la recta normal a una superfície $z=f(x,y)$ en un punt $(a,b,f(a,b))$ és:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}=\frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}.$$

Per tant, fent $a=1$, $b=1$, $f(a,b)=16$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=1$, tenim l'equació contínua de la recta normal a la superfície $z=f(x,y)$ en el punt $M=(1,1,16)$:

$$x-1=y-1=-z+16.$$

4. *(2.5 punts)* Considereu la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en el recinte:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}:\ x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}.$$

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^2 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els els punts crítics de f són les solucions del sistema:

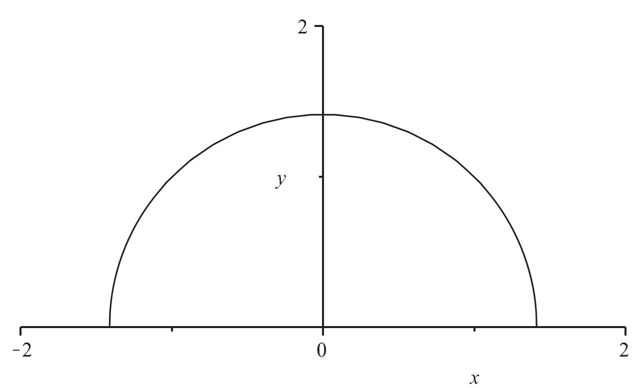
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Per tant la funció f té un únic punt crític que és el punt $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Per tal de classificar aquest punt crític, calculem la matriu Hessiana de f en aquest punt:

$$H(f)\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Atès que el seu determinant és positiu i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, el punt crític $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ és un mínim relatiu.

b) Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte K és un compacte (és un semicercle tancat) , pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en K.



El punt crític trobal a l'apartat anterior no pertany a l'interior de K, per tant no hi ha punts crítics de f a l'interior de K.

Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera de K:

(i) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = 0, \ x^2 + y^2 \leq 2\}$: fent $y = 0$ tenim $f(x,0) = x^2 + x$, que és una funció d'una variable $\varphi(x) = x^2 + x$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$. Així s'obté el punt crític $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment circular $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 2, \ y \geq 0\}$: construïm la funció de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Restant les dues primeres equacions s'obté: $2(x - y)(1 - \lambda) = 0$. Per tant $y = x$ o $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 1$, la primera equació equival a $1 = 0$, per tant no s'obté cap solució.

Si $y = x$, de la tercera equació obtenim $2x^2 = 2$, d'on $x = \pm 1$. En el cas $x = -1$, aleshores $y = -1$, que no compleix la condició $y \geq 0$. En el cas $x = 1$, aleshores $y = 1$ i s'obté el punt crític $(1,1)$.

(iii) Vèrtexs de K: $(-\sqrt{2}, 0)$ i $(\sqrt{2}, 0)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$$f\left(\frac{-1}{2}, 0\right) = \frac{3}{4}, \ f(1,1) = 4, \ f(-\sqrt{2}, 0) = 2 - \sqrt{2}, \ f(\sqrt{2}, 0) = 2 + \sqrt{2}.$$

Per tant, el valor màxim absolut de f en K és 4 i l'assoleix al punt $(1,1)$ i el valor mínim absolut de f en K és $2 - \sqrt{2}$ i l'assoleix al punt $(-\sqrt{2}, 0)$.