**1** Considereu la paràbola $y = 2x^2 - x$ i la recta $y = 4 - x$.

a) Representeu en una mateixa gràfica la paràbola i la recta.

b) Calculeu l'àrea del recinte del pla limitat per la paràbola i la recta.

c) Trobeu tots els nombres reals $x$ que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{2x^2 - x}{4 - x} > 0.$$

Digueu si el conjunt de solucions és acotat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

**2** Considereu les funcions $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1 - \sin t)dt$ i $g(x) = \dfrac{-x^2}{2}$.

a) Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul i calculeu $f'(x)$ per a $x \in [0, \pi/4]$.

b) Proveu que el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f$ en $x_0 = 0$ és $g(x)$.

c) Feu servir el polinomi de Taylor de l'apartat anterior per calcular una aproximació de

$$\int_0^{0.2} \ln(1 - \sin t)dt.$$

d) Fent ús del residu de la Fórmula de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x)$, doneu una cota superior de l'error de l'aproximació trobada a l'apartat c.

**3** Considereu l'equació:

$$8 \ln x + x^2 - 4 = 0.$$

a) Demostreu que té exactament una solució real.

b) Doneu un interval de longitud 1 en el qual es trobi la solució de l'equació.

c) Partint de l'interval trobat a l'apartat b, quantes iteracions del mètode de la bisecció es necessiten per obtenir un valor aproximat de la solució amb error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-8}$?

**1.** Considereu la paràbola $y = 2x^2 - x$ i la recta $y = 4 - x$.

a) Representeu en una mateixa gràfica la paràbola i la recta.

b) Calculeu l'àrea del recinte del pla limitat per la paràbola i la recta.

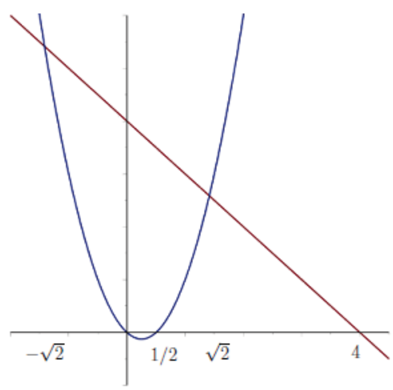
c) Trobeu tots els nombres reals $x$ que satisfan la desigualtat següent:

$$\frac{2x^2 - x}{4 - x} > 0.$$

Digueu si el conjunt de solucions és acotat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

SOLUCIÓ:

a) La figura següent mostra la paràbola i la recta:




b) L'àrea del recinte dibuixat en l'apartat anterior es pot calcular fent:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)dx = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

c) $\dfrac{2x^2 - x}{4 - x} > 0 \Leftrightarrow [(2x^2 - x > 0) \wedge (4 - x > 0)] \vee [(2x^2 - x < 0) \wedge (4 - x < 0)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(2x^2 - x > 0) \wedge (4 - x > 0)] \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 4)$ (com es veu al dibuix).
El conjunt de solucions és acotat només superiorment i el seu suprem és 4.

**2.** Considereu les funcions $f(x) = \int_0^x \ln(1-\sin t)dt$ i $g(x) = \dfrac{-x^2}{2}$

a) Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul i calculeu $f'(x)$ per a $x \in [0, \pi/4]$.

b) Proveu que el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f$ en $x_0 = 0$ és $g(x)$.

c) Feu servir el polinomi de Taylor de l'apartat anterior per calcular una aproximació de

$$\int_0^{0.2} \ln(1-\sin t)dt$$

d) Fent ús del residu de la Fórmula de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x)$, doneu una cota superior de l'error de l'aproximació trobada a l'apartat c.

SOLUCIÓ:

a) Teorema Fonamental del Càlcul: Si $f$ és una funció integrable en un interval $[a, b]$ i $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, aleshores $F$ és contínua en l'interval $[a, b]$. A més, pels $x \in [a, b]$ tals que $f$ és contínua en $x$ es compleix $F'(x) = f(x)$.

La funció $\ln(1-\sin x)$ és contínua per a $x \in [0, \pi/4]$, per tant $f'(x) = \ln(1-\sin x)$ per a tot $x \in [0, \pi/4]$.

b) El polinomi de Taylor de grau 2 d'una funció $f(x)$ en $x_0 = 0$ és: $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2$.

Les derivades primera i segona de $f(x) = \int_0^x \ln(1-\sin t)dt$ són:

$$f'(x) = \ln(1-\sin x), \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

Per tant, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, i el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x)$ centrat en $x_0 = 0$ és:

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} = g(x).$$

c) $\displaystyle\int_0^{0.2} \ln(1-\sin t)dt = f(0.2) \simeq P_2(0.2) = -\frac{(0.2)^2}{2} = -0.02$

d) L'error de l'aproximació $\int_0^{0.2} \ln(1-\sin t)dt \simeq P_2(0.2) = -0.02$ és el valor absolut del residu: $|R_2(0.2)|$.

A més, $f'''(c) = \frac{1}{\sin x - 1}$ i per tant l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{6(\sin c - 1)}$$

per a cert $c$ entre 0 i $x$.

Fent $x = 0.2$ en l'expressió del residu de l'apartat a) s'obté:

$$|R_2(0.2)| = \frac{(0.2)^3}{6(1 - \sin c)},$$

aquesta expressió és creixent en $c$ entre 0 i $\frac{\pi}{2}$, per tant, en ser $0 < c < 0.2$, es té:

$$|R_2(0.2)| = \frac{(0.2)^3}{6(1 - \sin c)} \leq \frac{(0.2)^3}{6(1 - \sin 0.2)} \simeq 0.00166.$$

Per tant, 0.002 és una cota superior de l'error de l'aproximació de l'apartat anterior.

**3.** Considereu l'equació:

$$8 \ln x + x^2 - 4 = 0$$

a) Demostreu que té exactament una solució real.

b) Doneu un interval de longitud 1 en el qual es trobi la solució de l'equació.

c) Partint de l'interval trobat a l'apartat b, quantes iteracions del mètode de la bisecció es necessiten per obtenir un valor aproximat de la solució amb error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-8}$?

SOLUCIÓ:

a) La funció $f(x) = 8 \ln x + x^2 - 4$ és suma d'una funció polinòmica i una funció logarítmica, per tant és contínua en $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

   Donat que la funció $f(x) = 8 \ln x + x^2 - 4$ és contínua en $[1, 2]$, $f(1) = -3 < 0$ i $f(2) = 8 \ln 2 > 0$, el teorema de Bolzano assegura l'existència d'una solució de l'equació en l'interval $(1, 2)$.

   Veurem que la solució és única: per ser la funció $f(x)$ contínua i derivable en tot el seu domini, si l'equació tingués dues solucions reals $a, b \in (0, +\infty)$, pel teorema de Rolle existiria un $c$ real entre $a$ i $b$ en el que $f'(c) = 0$, però: $f'(x) = \frac{8}{x} + 2x > 0$ per a tot $x \in (0, +\infty)$.

b) L'interval és el $(1, 2)$ tal com s'ha vist a l'apartat anterior.

c) El mínim nombre d'iteracions $n$ necessàries per obtenir una aproximació de la solució de l'equació pel mètode de la bisecció amb la precisió demanada és $n = 28$, ja que:

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{2-1}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-8} \Rightarrow n \geq 27.6 \Rightarrow 2^n \geq 2 \cdot 10^8 \Rightarrow n \geq 28$$