1. Considereu la funció $f(x) = xe^x$.

a) *(3 punts)* Escriviu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x)$ a l'origen i el terme complementari corresponent.

b) *(4 punts)* Escriviu el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ a l'origen i el terme complementari corresponent.

c) *(3 punts)* Determineu el mínim grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ a l'origen per calcular $f(-0.5)$ amb una precisió de dos decimals correctes ($error \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$).

SOLUCIÓ:

a) La funció f té derivades de tots els ordres a tota la recta real. El polinomi de Taylor d'ordre 3 a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$. En el cas $f(x) = xe^x$ i donat que $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x \ \ \forall k$, es té $f^{(k)}(0) = k \ \forall k$, i el polinomi és: $P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$.

El reste, residu o terme complementari del polinomi de Taylor d'ordre 3 a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$, per a cert c entre 0 i x. En el cas $f(x) = xe^x$, el terme complementari del polinomi és: $R_3 = \frac{(c+4)e^c}{4!}x^4$, per a cert c entre 0 i x.

b) La funció f té derivades de tots els ordres a tota la recta real. El polinomi de Taylor d'ordre n a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. En el cas $f(x) = xe^x$ i donat que $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x \ \forall k$, es té $f^{(k)}(0) = k \ \forall k$, i el polinomi és:

$$P_n(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

El reste o terme complementari del polinomi de Taylor d'ordre n a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, per a cert c entre 0 i x. En el cas $f(x) = xe^x$, el terme complementari del polinomi és:

$$R_n = \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{per a cert } c \text{ entre } 0 \text{ i } x.$$

c) L'error absolut de l'aproximació de $f(-0.5)$ per $P_n(-0.5)$, és:

$$\varepsilon = |R_n(-0.5)| = |\frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!}(-0.5)^{n+1}| = \frac{|c+n+1|e^c}{(n+1)!}(0.5)^{n+1},$$

amb $-0.5 \leq c \leq 0$.

Es té: $-0.5 \le c \le 0 \Rightarrow |c+n+1| \le (n+1)$, i, per ser la funció exponencial creixent: $-0.5 \le c \le 0 \Rightarrow e^c \le e^0 = 1$. Per tant: $\varepsilon \le \dfrac{n+1}{(n+1)!}(0.5)^{n+1} = \dfrac{(0.5)^{n+1}}{n!}$, i el primer número natural que compleix $\dfrac{(0.5)^{n+1}}{n!} \le 0.005$ és $n=4$. Per tant, el grau del polinomi de Taylor a l'origen de la funció $y = f(x)$ necessari per calcular $f(-0.5)$ amb la precisió demanada és $n \ge 4$.

2. Considereu la funció $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - m$, amb $m \in \mathbb{R}$.

a) *(5 punts)* Estudieu el número de zeros de $f(x)$ en funció del paràmetre m.

b) *(1 punt)* En el cas $m = 7$, calculeu els zeros de $f(x)$.

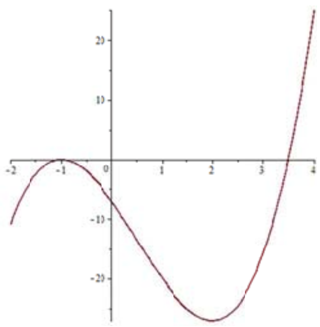
c) *(4 punts)* En el cas $m = 7$, calculeu l'àrea del recinte tancat limitat per la corba $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses.

SOLUCIÓ:

a) Els dos punts crítics de f són els punts d'abscisses $x = -1$ i $x = 2$, ja que: $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow (x = -1 \vee x = 2)$. Donat que $f''(x) = 12x - 6$, tenim que $f''(-1) < 0$ i $f''(2) > 0$. Per tant, calculant $f(-1)$ i $f(2)$, s'obté que: La funció f té en el punt $(-1, 7-m)$ un màxim relatiu i en el punt $(2, -20-m)$ un mínim relatiu. Aleshores: En el cas $m < -20$, la funció f té 1 zero. En el cas $m = -20$, la funció f té 2 zeros. En el cas $-20 < x < 7$, la funció f té 3 zeros. En el cas $m = 7$, la funció f té 2 zeros. I en el cas $m > 7$, la funció f té 1 zero.

b) Sigui $m = 7$, aleshores $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x+1)^2 \cdot (x - \frac{7}{2})$. Per tant, els zeros de f(x) són $x = -1$ i $x = \frac{7}{2}$.

c) La gràfica de la funció $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x+1)^2 \cdot (x - \frac{7}{2})$ és:



Per tant, l'àrea és:

$$A = \left| \int_{-1}^{\frac{7}{2}} (2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{2} - x^3 - 6x^2 - 7x \right]_{-1}^{\frac{7}{2}} \right| = \frac{2187}{32}$$

3. Considereu la funció $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} \frac{sint}{t} dt.$

a) *(2 punts)* Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul.

b) *(4 punts)* Escriviu les equacions del pla tangent i de la recta normal a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(\pi/2, 1, 0)$.

c) *(4 punts)* Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (\pi/2, 1)$? Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

SOLUCIÓ:

a) Sigui f una funció real de variable real contínua en l'interval $[a,b]$. Sigui $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Aleshores, F és contínua en l'interval $[a,b]$, és derivable en (a,b) i $F'(c) = f(c)$ per a tot $c \in (a,b)$.

b) La funció $\dfrac{\sin t}{t}$ és contínua per a tot $t \neq 0$, i les funcions x i xy són polinómiques i per tant contínues i de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$. Per tant la funció $f(x,y)$ és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$.

L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(\pi/2, 1, 0)$ és: $z = f(\pi/2, 1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 1)\,(x - \pi/2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 1)\,(y - 1).$

I la equació de la recta normal a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(\pi/2, 1, 0)$ és: $(x,y,z) = (\pi/2, 1, 0) + \lambda(\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 1)), -1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Les derivades parcials de $f(x,y)$ són: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-\sin x + \sin xy}{x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sin xy}{y}$; per tant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 1) = 0$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 1) = 1.$

L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(\pi/2, 1, 0)$ és:

$$z = y - 1.$$

I la equació de la recta normal a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(\pi/2, 1, 0)$ és:

$$(x,y,z) = (\pi/2, 1, 0) + \lambda(0, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Per ser la funció $f(x,y)$ de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (\pi/2, 1)$ és la direcció i sentit del vector gradient de $f(x,y)$ en el punt P, és a dir: $(0,1)$, i el valor de la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient de $f(x,y)$ en el punt P, és a dir: 1.

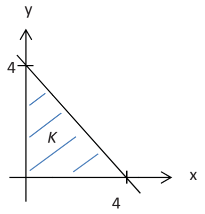
4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ i sigui K el recinte $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 4\}$.

a) *(3 punts)* Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de $f(x, y)$ en el recinte K.

b) *(7 punts)* Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció $f(x, y)$ en el recinte K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

a) La funció $f(x, y)$ és polinòmica i per tant és contínua en tot $\mathbb{R}^2$.



El recinte K és compacte, ja que és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ tancat i acotat. És tancat donat que la seva frontera està continguda en el conjunt: $Fr(K) \subset K$. A més a més, K és un conjunt acotat ja que $K \subset B_5(0, 0)$.

Per tant, com $f(x, y)$ és contínua en K i K és compacte, el Teorema de Weierstrass assegura l'existència d'extrems absoluts de $f(x, y)$ en K.

b) Primer es calculen tots els candidats a punts on s'assoleixen els extrems absoluts:

b.1) Punts crítics de $f(x, y)$ en l'interior de K:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2x - y - 1, -x + 2y - 1) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$$

b.2) Punts crítics de $f(x, y)$ condicionats per $(x, y) \in Fr(K)$:

b.2.1) En $x = 0$: $f(0, y) = y^2 - y$. Derivant, de $2y - 1 = 0$, s'obté: $(x, y) = (0, 1/2)$.

b.2.2) En $y = 0$: $f(x, 0) = x^2 - x$. Derivant, de $2x - 1 = 0$, s'obté: $(x, y) = (1/2, 0)$.

b.2.3) En $y = 4 - x$: $f(x, 4 - x) = 3x^2 - 12x + 12$. Derivant, de $6x - 12 = 0$, s'obté: $(x, y) = (2, 2)$.

b.3) Vèrtexs del triangle: $(0, 0)$, $(0, 4)$ i $(4, 0)$.

Les imatges de tots els punts obtinguts són: $f(1, 1) = -1$, $f(0, 1/2) = f(1/2, 0) = -1/4$, $f(2, 2) = f(0, 0) = 0$, i $f(0, 4) = f(4, 0) = 12$.

Per tant el valor màxim absolut de $f(x, y)$ en K és 12 i s'assoleix en els punts $(0, 4)$ i $(4, 0)$. El valor mínim absolut de $f(x, y)$ en K és -1 i s'assoleix en el punt $(1, 1)$.

(*Els quatre exercicis puntuen igual*)