1. *(3 punts)* Sigui $\{a_n\}$ la successió tal que:

$$a_1 = 256 \ \text{ i } \ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \quad \text{per a tot} \quad n > 1.$$

a) Proveu que $1 \leq a_n \leq 256$, per a tot $n \geq 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és decreixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

2. *(3 punts)* Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció que pren els valors:
$f(0) = 1.1, f(0.1) = 1.2, f(0.2) = 1.3, f(0.3) = 1.4, f(0.4) = 1.5, f(0.5) = 1.4,$
$f(0.6) = 1.3, f(0.7) = 1.4, f(0.8) = 1.5, f(0.9) = 1.6, f(1) = 1.7$, i tal que totes les derivades de f són fitades per 180 en l'interval $[0, 1]$.

Es pot calcular $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ amb un error menor que 10^{-3} fent ús de la Fórmula de Simpson? En cas afirmatiu, calculeu una aproximació de la integral I amb un error menor que 10^{-3}.

3. *(4 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2}$$

a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (4, 3)$.

b) Quina és la direcció en la qual la derivada direccional de f en el punt $(1, 1)$ és màxima? Calculeu el valor de la derivada direccional màxima de f en el punt $(1, 1)$.

c) Dibuixeu el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad y \leq 1,\ y \geq x,\ y \geq -x\}$ i justifiqueu que és compacte.

d) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D y trobeu-los.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.

1. *(3 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que:

$$a_1 = 256 \ \text{ i } \ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \quad \text{per a tot} \quad n > 1.$$

a) Proveu que $1 \le a_n \le 256$, per a tot $n \ge 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és decreixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

SOLUCIÓ:

a) Demostrem per inducció sobre n que $1 \le a_n \le 256 \ \forall n \ge 1$:

(i) És cert per a $n = 1$: $1 \le a_1 \le 256$, ja que $a_1 = 256$.

(ii) Suposem que per a cert $n \ge 1$ se satisfà: $1 \le a_n \le 256$ (Hipòtesi d'inducció), i demostrarem que aleshores se satisfà $1 \le a_{n+1} \le 256$:

A partir de la hipòtesi d'inducció, $1 \le a_n \le 256$: fent l'arrel quadrada, donat que la funció arrel quadrada és una funció creixent, s'obté: $1 \le \sqrt{a_n} \le 16$, i, per ser $16 \le 256$, tenim que: $1 \le a_{n+1} \le 256$, com volíem demostrar.

b) Demostrem per inducció sobre n que $a_n \ge a_{n+1} \ \forall n \ge 1$:

(i) Per a $n = 1$ se satisfà: $a_1 \ge a_2$, ja que $a_1 = 256$ i $a_2 = 16$.

(ii) Suposem que per a cert $n \ge 1$ se satisfà $a_n \ge a_{n+1}$ (Hipòtesi d'inducció) i demostrarem que aleshores se satisfà: $a_{n+1} \ge a_{n+2}$:

A partir de la hipòtesi d'inducció, $a_n \ge a_{n+1}$, fent l'arrel quadrada (donat que $a_n > 0$ i la funció arrel quadrada és una funció creixent), s'obté: $\sqrt{a_n} \ge \sqrt{a_{n+1}}$, és a dir $a_{n+1} \ge a_{n+2}$, com volíem demostrar.

c) La successió $\{a_n\}$ és fitada per l'apartat a) i monòtona per l'apartat b), llavors verifica les hipòtesis de teorema de la convergència monòtona. Per tant la successió $\{a_n\}$ és convergent.

Sigui $l = \lim_{n\to\infty} a_n$; aleshores $l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. A partir de la fórmula de recurrència $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, s'obté:

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{l} \ \Rightarrow\ l = \sqrt{l} \ \Rightarrow\ l^2 = l \ \Rightarrow\ l(l-1) = 0$$
$$\Rightarrow\ (l = 0 \ \vee\ l = 1).$$

Per ser $1 \le a_n \ \forall n \ge 1$, concloem $l = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. *(3 punts)* Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció que pren els valors:

$f(0) = 1.1, f(0.1) = 1.2, f(0.2) = 1.3, f(0.3) = 1.4, f(0.4) = 1.5, f(0.5) = 1.4,$

$f(0.6) = 1.3, f(0.7) = 1.4, f(0.8) = 1.5, f(0.9) = 1.6, f(1) = 1.7$, i tal que totes les derivades de f són fitades per 180 en l'interval $[0, 1]$.

Es pot calcular $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ amb un error menor que 10^{-3} fent ús de la Fórmula de Simpson? En cas afirmatiu, calculeu una aproximació de la integral I amb un error menor que 10^{-3}.

SOLUCIÓ: Una fita superior de l'error del mètode de Simpson amb n subintervals és:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} \cdot M_4,$$

sent M_4 una fita superior del valor absolut de la derivada quarta de f en l'interval (a, b).

En aquest exercici, $a = 0,\ b = 1$, i atès que $f^{(4)}(x) < 180\ \forall x \in [0, 1]$, podem prendre $M_4 = 180$. Si fem servir els valors donats, tenim una partició de l'interval $[0, 1]$ en $n = 10$ subintervals. Per tant:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - S(10) \right| \leq \frac{1}{180 \cdot 10^4} \cdot 180 = \frac{1}{10^4} < 10^{-3}.$$

És a dir, sí que es pot calcular la integral amb l'error demanat fent ús de la Fórmula de Simpson a partir dels valors donats.

Substituint $a = 0,\ b = 1,\ n = 10$ a la fórmula de Simpson, s'obté:

$$\tfrac{1}{30}\Big[f(0) + 4[f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)] +$$

$$+ 2[f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)] + f(1)\Big] \simeq 1.400$$

El valor de la integral amb la precisió demanada és $I = 1.400 \pm 0.001$.

3. *(4 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidea per:

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2}$$

a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (4, 3)$.

b) Quina és la direcció en la qual la derivada direccional de f en el punt $(1, 1)$ és màxima? Calculeu el valor de la derivada direccional màxima de f en el punt $(1, 1)$.

c) Dibuixeu el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad y \leq 1,\ y \geq x,\ y \geq -x\}$ i justifiqueu que és compacte.

d) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D y trobeu-los.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és producte d'una funció polinòmica i una composició d'una funció polinòmica i una exponencial, per tant f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$. El vector $\overrightarrow{v} = (4, 3)$ no és unitari, el normalitzem i tenim: $\overrightarrow{v}' = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, aleshores la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (4, 3)$ és:

$$D_{\overrightarrow{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(P) \cdot \overrightarrow{v}'.$$

Les derivades parcials de f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(1 - x^2 - 2y^2)e^{1-x^2-y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2 - x^2 - 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

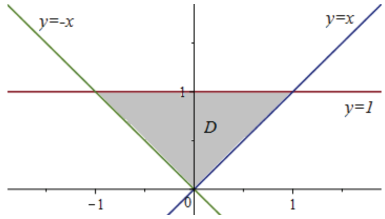
Per tant $\overrightarrow{\nabla} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\right) = \left(-\frac{4}{e}, -\frac{2}{e}\right)$, i aleshores:

$$D_{\overrightarrow{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(P) \cdot \overrightarrow{v}' = \left(-\frac{4}{e}, -\frac{2}{e}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -\frac{22}{5e}$$

b) Atès que f és de classe C^1 en el punt P, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P = (1, 1)$ és la del vector gradient de f en P, es a dir la direcció del vector $\left(-\frac{4}{e}, -\frac{2}{e}\right)$, que és la direcció del vector $(-2, -1)$, o la del vector $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

El valor de la derivada direccional màxima de f en el punt $(1, 1)$ és: $D_{\overrightarrow{\nabla} f(P)} f(P) = ||\overrightarrow{\nabla} f(P)|| = \frac{2\sqrt{5}}{e}$.

c) El dibuix del conjunt D és:



D és un conjunt compacte per ser tancat (donat que conté tots els seus punts frontera, que són els punts dels segments $\{(x,y)|\ y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$, $\{(x,y)|\ y = -x, -1 \leq x \leq 0\}$ i $\{(x,y)|\ y = x, 0 \leq x \leq 1\}$) i D és fitat (donat que $D \subset B_2\big((0,0)\big)$).

d) Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte D és un compacte, pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en D.

La funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els els punts crítics de f són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-2y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ \\ 2y(2-x^2-2y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

De la primera equació s'obté que $x = 0$ o bé $1 - x^2 - 2y^2 = 0$.

Si $x = 0$, de la segona equació s'obté que $y = 0$ (d'on s'obté el punt crític $(0,0)$) o bé $2 - 2y^2 = 0$ (d'on s'obtenen els punts crítics $(0,1)$ i $(0,-1)$).

Si $1 - x^2 - 2y^2 = 0$, de la segona equació s'obté que $y = 0$ (d'on s'obtenen els punts crítics $(1,0)$ i $(-1,0)$) o bé $2 - x^2 - 2y^2 = 0$ (d'on s'obté un sistema incompatible i no s'obté cap punt crític).

Per tant la funció f té cinc punts crítics, que són els punts $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0)$ i $(-1,0)$. Cap d'aquest cinc punts crítics és a l'interior del compacte D.

Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte D:

(i) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y)|\ y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$: fent $y = 1$ tenim $f(x,1) = (x^2+2)e^{-x^2}$, que és una funció d'una variable $\varphi_1(x) = (x^2+2)e^{-x^2}$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_1'(x) = -2x(x^2+1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x^2+1 = 0) \Rightarrow x = 0$. Així s'obté el punt crític $(0,1)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y)|\ y = -x, -1 \leq x \leq 0\}$: fent $y = -x$ tenim $f(x,-x) = 3x^2e^{1-2x^2}$, que és una funció d'una variable $\varphi_2(x) = 3x^2e^{1-2x^2}$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_2'(x) = 6x(-2x^2+1)e^{-2x^2+1} = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. Imposant que $-1 \leq x \leq 0$, s'obtenen els punts crítics $(0,0)$ i $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(iii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x, y) | \ y = x, 0 \leq x \leq 1\}$: fent $y = x$ tenim $f(x, x) = 3x^2 e^{1-2x^2}$, que és una funció d'una variable $\varphi_3(x) = 3x^2 e^{1-2x^2} = \varphi_2(x)$. Per tant, igualant la seva derivada a 0 i resolent: $\varphi_3'(x) = (-12x^3 + 6x)e^{-2x^2+1} = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. Imposant que $0 \leq x \leq 1$, s'obtenen els punts crítics $(0, 0)$ i $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(iv) Els vèrtexs del compacte D són els punts: $(0, 0), (-1, 1)$ i $(1, 1)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$f(0, 1) = 2, f(0, 0) = 0, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}, \ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}, f(-1, 1) = 3e^{-1}, f(1, 1) = 3e^{-1}$.

Per tant, el valor màxim absolut de f en D és 2 i l'assoleix al punt $(0, 1)$ i el valor mínim absolut de f en D és 0 i l'assoleix al punt $(0, 0)$.