1. *(2.5 punts)* Sigui $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

a) Proveu que el màxim de $|f''(x)|$, per $x \in [-1, 1]$, val 1.

b) Aproximeu el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ pel mètode dels Trapezis, amb 4 subintervals.

c) Proveu que l'error comès en l'apartat anterior és més petit que 0.05.

Solució. a) Tenim que $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Calculem les derivades $f'(x)$ i $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left((1+x^2) - x^2\right) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Com que $x^2 \geq 0$, obtenim que $1 + x^2 \geq 1$. Per tant, $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1$ i $f''(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \leq 1$, que demostra la primera part de l'exercici. També podem calcular el màxim de $g(x) = f''(x)$ derivant:

$$g'(x) = f'''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -3x \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Aquesta derivada $g'(x)$ s'anul.la només si $x = 0$ (perqué $1+x^2$ és sempre estrictament positiu), per tant el màxim s'assolirà a $x = 0$ o als extrems $x = \pm 1$. Un simple càlcul demostra que $f(\pm 1) < f(0) = 1$, per tant el màxim és 1. Com que $f''(x) > 0$ per a tot x, aquest és el màxim en valor absolut.

b) Tenim que $b = 1$, $a = -1$, $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = a = -1, \quad x_1 = a+h = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = a+2h = 0, \quad x_3 = a+3h = \frac{1}{2}, \quad x_4 = b = 1.$$

Per tant, per la fórmula dels Trapezis:

$$T(4) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Obtenim que $T(4) = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \approx 2,3251$.

c) L'error en el mètode dels Trapezis ve donat per la fórmula

$$E = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - T(4)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|,$$

per algún $\xi \in (-1, 1)$. Com que en l'apartat a) hem demostrat que $|f''(\xi)| \leq 1$, obtenim que

$$E < \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{8}{12 \cdot 16} = \frac{1}{24} \approx 0,0417 < 0,05,$$

Per tant, queda demostrar que l'error comès és inferior a $0,05$.

2. *(2.5 punts)* Sigui $f(x,\, y) = \cos x + \sin y$.

a) Trobeu el polinomi de Taylor de grau 2 de f en el punt $(0, 0)$.

b) Aproximeu el valor d'$f\left(-\frac{1}{10},\, \frac{1}{10}\right)$ amb el polinomi de Taylor $P_2\big(f,\, (0,\, 0),\, (x,\, y)\big)$.

c) Trobeu la derivada direccional de la funció f en el punt $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ en la direcció del vector $v = (1, -1)$.

d) Escriviu l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solució.

a) La funció és de classe $\mathcal{C}^\infty$, perquè és una suma de sinus i cosinus. Per tant, les derivades creuades coincideixen. Tenim que

$$f_x(x, y) = -\sin x, \quad f_y(x, y) = \cos y;$$

$$f_{xx}(x, y) = -\cos x, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -\sin y.$$

En el punt $P := (0, 0)$, $f(P) = 1$, $f_x(P) = 0$, $f_y(P) = 1$, $f_{xx}(P) = -1$, $f_{yy}(P) = 0$. Aleshores,

$$P_2\big(f,\, (0,\, 0),\, (x,\, y)\big) = 1 + y - \frac{1}{2}x^2.$$

b)

$$f\left(-\frac{1}{10},\, \frac{1}{10}\right) \approx P_2\left(f,\, (0,\, 0),\, \left(-\frac{1}{10},\, \frac{1}{10}\right)\right) = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = \frac{219}{200} = 1.095.$$

c) Denotem $Q := \left(\dfrac{\pi}{4},\, \dfrac{\pi}{4}\right)$. Calculem el gradient:

$$\nabla f(Q) = \left(-\sin\frac{\pi}{4},\, \cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

El vector $\mathbf{v}$ no és unitari: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. El vector unitari que cal prendre, doncs, és $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{v}}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Per tant,

$$D_{\mathbf{w}}f(Q) = \nabla f(Q) \cdot \mathbf{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

d) Apliquem la fórmula que dóna l'equació del pla tangent: com que $f(Q) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, obtenim:

$$z = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + y - x).$$

3. *(2.5 punts)* Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$ amb $k \geq 0$.

a) Trobeu els punts crítics de la funció f.

b) Classifiqueu els punts crítics de la funció f en funció del paràmetre k.

Solució. a) Los puntos críticos de f son puntos donde $\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x,y) = 2x + ky = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y + kx = 0 \end{array} \right.$.

De la segunda ecuación $y = -\dfrac{kx}{2}$, sustituimos en la primera y obtenemos la ecuación $\dfrac{x}{2}(4 - k^2) = 0$ que tiene la solución: $x = 0,\ \forall\, k$ y $k = 2\ (k \geq 0),\ \forall\, x$.

Por lo tanto los puntos críticos de f son $(0,0)$ si $k \neq 2$ y todos los puntos de la recta $y = -x$ si $k = 2$.

b) Para clasificar los puntos críticos de f determinamos la matriz hessiana $H(x,y)$ y calculamos su determinante $\triangle(x,y)$.

Como $\left. \begin{array}{l} f''_{xx}(x,y) = 2 \\ f''_{yy}(x,y) = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = k \end{array} \right\} \Longrightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$ y $\triangle(x,y) = 4 - k^2$.

Si $0 \leq k < 2 \Longrightarrow \triangle(0,0) > 0,\ f''_{xx}(0,0) > 0 \Longrightarrow \exists$ un mínimo relativo de f en el punto $(0,0)$.

Si $k > 2 \Longrightarrow \triangle(0,0) < 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto silla de f.

Si $k = 2 \Longrightarrow \triangle(x,y)|_{y=-x} = 0 \Longrightarrow$ para clasificar los puntos de la recta $y = -x$ hace falta hacer un estudio local de f en el entorno de estos puntos.

Estudio local: notemos que para $k = 2$ la función toma la forma

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 \geq 0,\ \ \forall\,(x,y)$.

Por otro lado, $f(x,y)|_{y=-x} = f(x,-x) = 0$. Por lo tanto, cuando $k = 2$ en todos los puntos de la recta $y = -x$ la función f tiene mínimos relativos.

4. *(2.5 punts)* Donats la funció

$$f(x,\, y,\, z) = e^{xyz}$$

i la circumferència C que s'obté com intersecció del paraboloide $\{z = x^2 + y^2\}$ amb el pla $\{z = 1\}$.

Demostreu que la funció f té extrems absoluts en C i calculeu-los.

Solució. Justificación de la existencia de extremos absolutos de f en C: el dominio en el que estudiar la función es $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z = 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.[1] Así, pues,

$$\left. \begin{array}{r} Fr\,C = C \ \Rightarrow\ Fr\,C \subseteq C \ \Rightarrow\ C \text{ es cerrado} \\ B_2\big(0,0,0\big) \supset C \ \Rightarrow\ C \text{ es acotado} \end{array} \right\} \Rightarrow\ C \ \text{ es compacto.}$$

Además, $f \in \mathcal{C}(R^3)$ por ser la composición de una función exponencial y una polinómica que son continuas en todo $\mathbb{R}^3$. Luego $f \in \mathcal{C}(C)$.

[1] La ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por si sola, no describe una circunferencia en $\mathbb{R}^3$, sino un cilidro.

Por lo tanto, según el Teorema de Weierstrass, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}(C) \\ C \text{ es compacto} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \text{ extremos absolutos de } f \text{ en } C.$$

Cálculo de extremos absolutos de f en C: queremos resolver el problema siguiente

$$\text{extremos de } f(x,y,z) \text{ condicionados a } \left\{\begin{array}{l} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{array}\right.$$

Se trata de un problema de extremos condicionados con dos condiciones. Para resolverlo utilizaremos una combinación del "Método de sustitución" y el Método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, usando la segunda condición, sustituimos $z = 1$ en la función $f(x,y,z)|_{z=1} = e^{xy}$ y en la primera condición $1 = x^2 + y^2$. Definimos $F(x,y) = e^{xy}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ y llegamos al problema equivalente

$$\text{extremos de } F(x,y) \text{ condicionados a } g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Este último problema se resuelve con el Método de multiplicadores de Lagrange. Definimos la función de Lagrange,

$$L(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda\, g(x,y) = e^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

y calculamos los puntos críticos de L resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} L'_x(x,y,\lambda) = y\, e^{xy} + 2\lambda\, x = 0, & (1) \\ L'_y(x,y,\lambda) = x\, e^{xy} + 2\lambda\, y = 0, & (2) \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0. & (3) \end{array}\right.$$

Multiplicando (1) por y, (2) por x y restando, obtenemos

$$y \cdot (1) - x \cdot (2) = (y^2 - x^2)\, e^{xy} = 0 \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y = \pm x.$$

Entonces, (3) $\Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

De (1) o (2) resulta que si $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\lambda = -\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ y también que si $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$. Por consiguiente los puntos críticos de L son:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{e}}{2}\right), \quad \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right).$$

Eliminando la coordenada que corresponde a λ obtenemos los candidatos de extremos condicionados de F:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

De modo que los puntos candidatos de extremos condicionados de f son:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Dado que $e > 1$, tenemos que $\sqrt{e} > \frac{1}{\sqrt{e}}$ y, por lo tanto:

$$\max_C f(x,y,z) = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \sqrt{e}$$

$$\min_C f(x,y,z) = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Nota: Otra solución posible para el cálculo de los extremos consiste en considerar la función lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = e^{xyz} + \lambda_1(x^2+y^2-1) + \lambda_2(z-1)$$

y resolver el sistema

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = (0,0,0,0,0).$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.