Apunts de
FONAMENTS MATEMÀTICS

amb exercicis

Part 1

Rafel Farré

08/08/2020

- Els exercicis en color negre són per fer a les classes de teoria.
- Els exercicis en color blau són per fer a les classes de taller. Els marcats amb (R) són recomanats.
- Els exercicis en color verd està resolts al document *Exercicis Resolts*.

0. SUMATORIS

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)}$$

Exemples:

- $\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$.
- $\sum_{i=-2}^{50} 2i = -4 - 2 + 0 + 2 + 4 + \cdots + 98 + 100$.
- $\sum_{i=5}^{1000} i^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + \cdots + 999^2 + 1000^2$.
- $\sum_{i=1}^{30} (-1)^i (2i-1)^2 = -1^2 + 3^2 - 5^2 + \cdots + 59^2$.

Exercicis: Passeu a notació amb sumatori:

1. (R) $-2 + 0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 50$.
2. $3 + 5 + 7 + \cdots + 55$.
3. $2 - 4 + 6 - \cdots + 50$.
4. $-1^2 + 3^2 - 5^2 + 7^2 - \cdots - 49^2$.
5. (R) $\frac{2}{1^3} + \frac{5}{5^3} + \frac{8}{9^3} + \frac{11}{13^3} + \cdots + \frac{47}{61^3}$.
6. $-3 + 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 60$.
7. $1^3 - 4^3 + 7^3 - 10^3 + \cdots + 61^3$.
8. (R) $\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \cdots - \frac{1}{39}$.
9. $-\frac{2}{1} + \frac{4}{4^3} - \frac{6}{7^3} + \frac{8}{10^3} - \cdots - \frac{42}{61^3}$.

Propietats dels sumatoris

$\sum_{i=m}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=m}^{n} f(i) + \sum_{i=m}^{n} g(i)$
$\sum_{i=m}^{n} cf(i) = c\sum_{i=m}^{n} f(i)$

Exercicis:

10. Expresseu les sumes següents en funció de $S = \sum_{n=1}^{10} a_n$:
    a. $\sum_{m=1}^{10} a_m$
    b. $\sum_{i=0}^{9} a_i$
    c. $\sum_{j=1}^{10} a_{j-1}$
11. (R) Calculeu:
    a. $\sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i$
    b. $\sum_{i=1}^{n+2} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$
12. (R) Proveu que si $n \geq 0$ $\sum_{k=0}^{n+3} r^k - \sum_{k=0}^{n} r^k = r^n(r + r^2 + r^3)$.
13. (R) Calculeu $\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2$, sabent que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ i $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
14. Si $A = \sum_{i=n}^{m} a_i$ i $B = \sum_{i=n}^{m} b_i$, expresseu en funció de A i B :
    a. $\sum_{i=n}^{m} 5a_i$
    b. $\sum_{i=n}^{m} (a_i - b_i)$

c. (R) $\sum_{i=n}^{m} -3b_i$

d. (R) $\sum_{i=n}^{m} (2a_i + 4b_i)$

15. (R) Canvieu l'índex dels sumatoris següents perquè comencin en $j = 0$ (quedin de la forma $\sum_{j=0}$):

a. $\sum_{i=8}^{n} i^2$

b. $\sum_{i=-3}^{n+2} (2i + 3)$

16. Expresseu cada una de les sumes següents amb un sol sumatori:

a. $\sum_{k=1}^{n} (6k - 3) + \sum_{k=1}^{n} (4 - 5k)$

b. $\sum_{k=1}^{n} (4k - 1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (4k + 1)^2$

c. $\sum_{k=1}^{100} (2k - 1)^2 + \sum_{k=0}^{99} (2k - 1)^2$

d. $\sum_{k=0}^{99} (2k + 1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (3k - 2)^2$

Progressions aritmètiques

Cada terme a_{i+1} s'obté de l'anterior a_i sumant un quantitat d anomenada diferència: $a_{i+1} = a_i + d.$

$$\boxed{a_i = a_1 + (i - 1)d}$$

Exemple: La successió $a_n = 5n - 3$ és una progressió aritmètica amb diferència $d = 5$

La suma d'una progressió aritmètica s'obté mitjançant la fórmula:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{(a_m+a_n)(n-m+1)}{2}}$$

Observeu que $n - m + 1$ és el número de termes del sumatori.

Demostració: Ho fem primer pel cas en què el nombre de sumands és parell. Observem que la suma del primer més l'últim és igual que la del segon més el penúltim, que és igual que la del tercer més el antepenúltim ….. Agrupant els sumands de dos en dos obtenim la fórmula, ja que només cal multiplicar $a_m + a_n$ per la meitat del nombre de sumands, que és $\frac{n-m+1}{2}$. Si el nombre de sumands $n - m + 1$ és senar, ens queda un terme desaparellat, que val $\frac{a_m+a_n}{2}$. La resta de sumands dóna $\frac{(a_m+a_n)(n-m)}{2}$. Per tant la suma total en aquest cas s'obté amb la mateixa fórmula.

Progressions geomètriques

Cada terme a_{i+1} s'obté de l'anterior a_i multiplicant per una quantitat r anomenada raó: $a_{i+1} = ra_i$.

$$\boxed{a_i = a_0 r^i = a_1 r^{i-1} = \cdots = a_k r^{i-k}}$$

Exemple: La successió $a_n = \frac{3}{4}2^n$ és una progressió geomètrica amb raó $r = 2$

La suma d'una progressió geomètrica amb $r \neq 1$ s'obté mitjançant la fórmula:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_m}{r-1}}$$

Demostració:
Si multipliquem el sumatori per $r - 1$ obtenim:

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)(r - 1) = (a_m + ra_m + \cdots + r^{n-m}a_m)(r - 1) =$$

$$a_m(1+r+\cdots+r^{n-m})(r-1)=a_m(r^{n-m+1}-1)=a_{n+1}-a_m \,.$$

Productoris

$$\prod_{i=m}^{n} f(i)=f(m)\cdot f(m+1)\cdots f(n-1)\cdot f(n)$$

Propietats dels productoris

$$\prod_{i=m}^{n} f(i)\cdot g(i)=\prod_{i=m}^{n} f(i)\cdot \prod_{i=m}^{n} g(i)$$

$$\prod_{i=m}^{n} f(i)^{c}=\left(\prod_{i=m}^{n} f(i)\right)^{c}$$

$$\prod_{i=m}^{n} cf(i)=c^{(n-m+1)}\prod_{i=m}^{n} f(i)$$

Exercicis:

17. (R) Calculeu $\dfrac{\prod_{i=2}^{n+2} a_i}{\prod_{i=2}^{n} a_i}$.

18. Si $A=\prod_{i=1}^{n} a_i$, expresseu en funció de A:

   a. (R) $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\,k}$

   b. (R) $\prod_{i=1}^{n} ka_i$

   c. $\prod_{i=1}^{n} ia_i$

   d. $\prod_{i=1}^{n} i^{r} a_i^{\,k}$

19. Si $A=\prod_{i=n}^{m} a_i$ i $B=\prod_{i=n}^{m} b_i$, expresseu en funció de A, B:

a. (R) $\prod_{i=n}^{m} a_i b_i$

b. $\prod_{i=n}^{m}\prod_{j=n}^{m} a_i\, b_j$

1. LÒGICA I DEMOSTRACIONS

1.1 LÒGICA

Lògica Proposicional

Enunciat o proposició: frase o expressió correcta del llenguatge natural susceptible de ser certa o falsa. Afirma alguna cosa que té sentit, sigui certa o falsa.

Exemples:

I. Són enunciats:
   - A. $2+3=6$.
   - B. la pissarra és blava.
   - C. són les 7h en punt.
   - D. si $2+3=6$ llavors la pissarra és blava.
   - E. són les 7h en punt i la pissarra és blava.
   - F. $2+3=6$ o la pissarra no és blava.

II. No són enunciats:
   - A. 2+3
   - B. 6
   - C. la pissarra
   - D. Quina hora és?
   - E. Esborreu la pissarra!

Per poder estudiar el valor de veritat d'un enunciat és molt important reconèixer la seva forma. Observem en els exemples que hi ha uns enunciats indescomponibles o atòmics (*2+3=6, són les 7h en punt, la pissarra és blava*) i d'altres que es poden construir a partir d'aquests. Per exemple: *2+3=6 o la pissarra no és blava.*

Per entendre millor la *forma* d'un enunciat, representarem els enunciats atòmics mitjançant les lletres $p, q, r, \ldots$ i farem servir els símbols $\wedge, \vee, \rightarrow$ per denotar la conjunció, la disjunció i la implicació respectivament. També usarem el simbol $\neg$ per denotar la negació. les expressions obtingudes d'aquesta manera en direm **fórmules**. Veiem com es faria a l'exemple anterior.

Exemple: Si usem les lletres p, q, r per denotar respectivament $2+3=6$, *la pissarra és blava, són les 7h en punt*, les frases de l'exemple anterior quedarien formalitzades així:

A. p.
B. q.
C. r.
D. $p \to q$.
E. $r \wedge q$.
F. $p \vee \neg r$.

Les **fórmules** de la lògica proposicional es construeixen amb els símbols següents:

- **Lletres proposicionals**: $p, q, r, s...$ (**àtoms** o **fórmules atòmiques**)
- **Connectives lògiques**:
  - binàries: $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
  - unària: $\neg$

A continuació donem una definició més precisa de *fórmula de la lògica proposicional*. Les fórmules són determinades **seqüències finites dels símbols anteriors**. Són totes les seqüències que s'obtenen aplicant un nombre finit de vegades les regles següents.

Definició Recursiva:

- Les lletres proposicionals són fórmules
- Si φ és una fórmula, $\neg\varphi$ també és una fórmula
- Si φ, ψ són fórmules i $*$ és una connectiva binària, llavors $(\varphi * \psi)$ també és una fórmula

Exemples de fórmules:

p, q, r, $\neg p$, $(p \to q)$, $(p \vee q)$, $(\neg p \wedge q)$, $\neg(\neg p \wedge q)$, $((p \vee q) \to r)$, $(\neg(p \to \neg r) \leftrightarrow (p \vee \neg q))$, ...

Notem que:

1. Els parèntesis només es posen a les connectives binàries i **mai a la negació**: no es posa $(\neg p)$. Es fan servir per evitar ambigüitats de lectura. Per exemple, per distingir $(p \vee q) \to r$ de $p \vee (q \to r)$.
2. Els parèntesis exteriors se **suprimeixen sempre**: posem $(p \vee q) \to r$ en lloc de $((p \vee q) \to r)$.

Nota: És interessant saber que a vegades s'utilitza el conveni següent (encara que a l'assignatura <u>no el farem servir</u>): es prioritzen les connectives binàries seguint aquest ordre: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Es posen parèntesis de tal manera que s'executi primer $\wedge$, segon $\vee$, ... Per exemple, $p \vee q \rightarrow r$ és la fórmula $(p \vee q) \rightarrow r$, $p \wedge q \vee \neg r$ és la fórmula $(p \wedge q) \vee \neg r$, $p \wedge q \leftrightarrow \neg r \vee p$ és la fórmula $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg r \vee p)$.

Significat de les connectives

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$, φ és l'**antecedent** i ψ és el **conseqüent**.

Les **Taules de veritat** es construeixen aplicant les regles anteriors calculant totes les combinacions de valors possibles dels àtoms. Es comença per les fórmules més senzilles.

Exemple:

p	q	r	$\neg r$	$p \to \neg r$	$\neg(p \to \neg r)$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \to \neg r) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1

Tipus de fórmules importants:

Tautologia:	fórmula sempre certa (taula de veritat: columna de 1)
Contradicció:	fórmula sempre falsa (taula de veritat: columna de 0)
Satisfactible:	fórmula que és certa per a alguna assignació (taula de veritat conté algun 1)

insatisfactible = contradicció

Exemples:

- Tautologies: $p \vee \neg p$, $p \to p$, $(p \wedge q) \to p$, $p \to (p \vee q)$, $p \to (q \to p)$, $(p \wedge (p \to q)) \to q$, $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$, $(((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \to r)$, ...
- Contradiccions: $p \wedge \neg p$, $(p \wedge \neg q) \wedge (p \leftrightarrow q)$, la negació de qualsevol tautologia, ...

Equivalència de fórmules

> Quan dues fórmules prenen els mateixos valors de veritat en totes les assignacions es diuen **equivalents.**

Per expressar que les fórmules φ i ψ són equivalents s'escriu:

$$\varphi \equiv \psi$$

Això vol dir que les fórmules φ, ψ ténen la mateixa taula de veritat (ordenant les assignacions de valors de la mateix manera).

Totes les tautologies són equivalents. Una tautologia la denotarem per 1. De la mateixa manera totes les contradiccions són equivalents. Una contradicció la denotarem per 0.

Equivalències importants:
Quan no hi apareixen $\rightarrow, \leftrightarrow$ tota equivalència té una equivalència dual consistent en intercanviar $\wedge$ per $\vee$ i 0 per 1. La taula següent conté una llista d'equivalències importants juntament amb la seva dual a la columna de la dreta.

> *El color vermell indica que són propietats bàsiques a partir de les quals es poden deduir formalment totes les altres.*

Distributiva	$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$
De Morgan	$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
Absorció	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$
Idempotència	$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$
Commutativa	$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
Associativa	$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$	$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$
Neutre	$\varphi \wedge 1 \equiv \varphi$	$\varphi \vee 0 \equiv \varphi$
Anulador	$\varphi \vee 1 \equiv 1$	$\varphi \wedge 0 \equiv 0$

Complementari	$\varphi \vee \neg\varphi \equiv 1$	$\varphi \wedge \neg\varphi \equiv 0$
Doble negació	$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$	
	$\neg 1 \equiv 0$	$\neg 0 \equiv 1$

Nota: La propietat associativa d'una operació permet suprimir parèntesis. Per exemple, $p \wedge (q \wedge r)$ ho escriurem $p \wedge q \wedge r$. També escriurem $p \vee \neg q \vee \neg p \vee r$ enlloc de $(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee r)$.

Equivalències importants per a les demostracions (aquí no hi ha dual):

Traducció de la $\rightarrow$	$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$
Traducció de la $\leftrightarrow$	$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$
Contrarecíproc	$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	
Reducció a l'absurd	$\varphi \equiv \neg\varphi \rightarrow 0$	$\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow 0$
$\vee$ al conseqüent	$\psi \vee \theta \equiv \neg\psi \rightarrow \theta$	$\varphi \rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \theta$
$\vee$ a l'antecedent	$(\psi \vee \theta) \rightarrow \varphi \equiv (\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\theta \rightarrow \varphi)$	

Exercici: Demostreu sintàcticament (utilitzant només les equivalències en vermell, sense usar taules de veritat) les equivalències següents:

1. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$.
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow 0$.
3. $(\psi \vee \theta) \rightarrow \varphi \equiv (\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\theta \rightarrow \varphi)$.
4. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)$.
5. $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \theta) \equiv (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \theta$.
6. (R) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
7. (R) $\varphi \rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \theta$.
8. (R) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \theta \equiv \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$.
9. $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \psi$.
10. $\varphi \leftrightarrow 0 \equiv \neg\varphi$, $\varphi \leftrightarrow 1 \equiv \varphi$.
11. $\varphi \leftrightarrow \varphi \equiv 1$, $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \equiv 0$.

12. Aqui usem $\varphi \oplus \psi$ per a denotar $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$. La $\oplus$ és coneguda com a XOR. Demostreu que:
    a. $\varphi \oplus (\psi \oplus \theta) \equiv (\varphi \oplus \psi) \oplus \theta$.
    b. $\varphi \wedge (\psi \oplus \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \oplus (\varphi \wedge \theta)$.
    c. $\varphi \oplus 1 \equiv \neg\varphi$, $\varphi \oplus 0 \equiv \varphi$.
    d. $\varphi \oplus \neg\varphi \equiv 1$.
    e. $\varphi \oplus \varphi \equiv 0$.
13. (R) $q \vee (p \wedge (\neg p \vee r)) \equiv (q \vee p) \wedge ((q \vee r) \vee (p \wedge \neg p))$.
14. Són equivalents $p \to (q \to (p \to q))$ i $((p \to q) \to p) \to q$?
15. $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.
16. $\varphi \to (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \theta)$.
17. $\varphi \vee (\psi \leftrightarrow \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \theta)$.

Lògica de primer ordre (o lògica de predicats)

Relacions

Per tenir una relació hem de tenir un "domini d'individus" i una propietat d'aquests individus. Una relació d'arietat 1 és una propietat que depèn d'un sol argument. Cada individu del domini té o no té la propietat. Una relació d'arietat 2 té dos arguments; és una propietat que depèn de dos individus. Podem pensar que és una propietat de les parelles d'individus o que relaciona els individus de la parella entre ells. Cada parella d'individus té o no té la propietat (estan relacionats entre ells o no). Una relació d'arietat 3 és una propietat que depèn de tres individus (relaciona aquests tres individus entre ells), etc.

Exemples:

- Domini $\mathbb{Z}$. Les relacions "ser parell" , "ser un quadrat", "ser múltiple de 4" son relacions d'arietat 1. Les relacions "ser menor que" ($x < y$),"ser igual que" ($x = y$), "ser congruents mòdul 5" ($x \equiv y \ (mod\ 5)$) són relacions d'arietat 2. La relació "x està entre y i z" és una relació d'arietat 3. La relació "x és congruent amb y mòdul z" és una relació d'arietat 3.
- Domini: Els alumnes de l'aula. Les relacions "ser alt", "ser treballador", "portar ulleres", … són relacions d'arietat 1. Les relacions "seure al costat de", "ser amics", "calçar el mateix número de sabata", són relacions d'arietat 2.

Fórmules atòmiques

Es formen a partir dels símbols de relació i variables. Igual que les relacions, tenen una arietat que pot ser $1, 2, 3, 4, \ldots$

Definició:

Si R és un símbol de relació d'arietat n, i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són variables, la següent és una **fórmula atòmica**:

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple: Si tenim els símbols de relació P d'arietat 1, Q, $<$ d'arietat 2 i R d'arietat 3, les següents són fórmules atòmiques: $P(x)$, $Q(x,y)$, $Q(z,z)$, $x<y$, $R(x,y,z)$, $R(x,z,x)$. També considerem fórmules atòmiques: $x>0$, $x=y^2$, $1 \leq y^2+y$ (aquí els símbols de relació són: $>, =, \leq$).

Notes:

1. A les relacions binàries (arietat 2) es pot usar notació infixa en lloc de prefixa: es pot escriure xRy en lloc de $R(x,y)$. Per exemple s'escriu: $x<y$, $x=y$, $x \leq y$, $x \in y$, ...
2. A les fórmules atòmiques també hi poden aparèixer expressions més complicades en lloc de simples variables. Com ara noms d'individus particulars, nombres... o bé expressions com ara $0, 1, y^2, x^2+2x \ldots$[1].

Fórmules de la lògica de primer ordre

Les fórmules de la lògica de primer ordre es formen a partir de les atòmiques combinant-les entre elles amb les connectives lògiques ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$) i els **quantificadors:**

$$\forall \;, \; \exists$$

Definició Recursiva:

- Les fórmules atòmiques són fórmules.
- Si φ, ψ són fórmules i $*$ és una connectiva binària llavors $(\varphi * \psi)$ també és una fórmula.
- Si φ és una fórmula $\neg\varphi$ també és una fórmula.
- Si φ és una fórmula i x una variable, $\forall x\varphi$ i $\exists x\varphi$ també són fórmules.

---

[1] és el que s'acostuma a denominar **termes**, però no en donarem la definició formal

Exemple: Si tenim els símbols de relació P d'arietat 1, Q, $<$ d'arietat 2 i R d'arietat 3: $P(x)$, $Q(x,y)$, $x<y$, $R(x,y,z)$, $\neg R(x,y,z)$, $P(x)\to Q(x,y)$, $\forall x(P(x)\to Q(x,y))$, $\exists y\forall x(P(x)\to Q(x,y))$, $\exists y\forall x(P(x)\to Q(x,y))\vee\neg R(x,y,z)$ $\forall z(\exists y\forall x(P(x)\to Q(x,y))\vee\neg R(x,y,z))$, $\forall x\exists y(x>0\to x=y^2)$, ...

Nota: Igual que a la lògica proposicional, només es posen parèntesis a les connectives binàries i se suprimeix el parèntesi exterior. No posem parèntesis ni als quantificadors ni a la negació.

Significat de les fórmules de la lògica de primer ordre

Perquè les fórmules de la lògica de primer ordre tinguin sentit, necessitem:

- Un domini (o univers) d'individus. És el domini de variació de les variables i sempre ha de contenir algun individu (un com a mínim).
- El "significat" o "interpretació" dels símbols de relació. Han de ser relacions concretes entre individus del domini.

Llavors:

- $\forall x\varphi$ significa que *tots els individus* x *del domini compleixen* φ.
- $\exists x\varphi$ significa que *hi ha (almenys) un individu* x *del domini que compleix* φ.

Exemple: Si el domini és $\mathbb{Z}$, $P(x)$ s'interpreta: x *és un parell* , $Q(x)$ s'interpreta: x *és un quadrat*, $M(x)$ s'interpreta: x *és múltiple de* 4 i *,* $x<y$ s'interpreta de manera obvia (x *és menor que* y):

fórmula	**Significat**
$\forall x\,(M(x)\to P(x))$	Tot enter múltiple de 4 és parell
$\exists x\,(P(x)\wedge\neg M(x))$	Hi ha nombres parells que no són múltiples de 4
$\forall x\,((P(x)\wedge Q(x))\to M(x))$	Tot parell quadrat és múltiple de 4
$\exists x\,(P(x)\wedge\neg M(x)\wedge\neg Q(x))$	Hi ha nombres parells que ni són múltiples de quatre ni són quadrats
$P(2)\wedge\neg Q(2)\wedge\neg M(2)$	2 és parell però no és quadrat ni múltiple de 4
$\exists x\,(\,P(x)\wedge x>2\wedge\neg Q(x)\,)$	Hi ha nombres parells més grans que 2 que no són quadrats

Nota:

- A vegades, el domini de variació de les variables s'indica a la fórmula. Així, fórmules de l'exemple anterior les podem escriure: $\forall x \in \mathbb{Z}(M(x) \to P(x))$, $\exists x \in \mathbb{Z}(P(x) \wedge \neg M(x))$, $\exists x \in \mathbb{Z}(P(x) \wedge \neg M(x) \wedge \neg Q(x))$ ...
- A vegades s'escriuen expressions de l'estil $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{N}(x < y)$, però això ja no és una fórmula de primer ordre. Perquè fos una fórmula de primer ordre hauríem d'afegir un predicat $N(x)$ (que s'interpretés com x *és natural*) i escriure: $\forall x(N(x) \to x > y)$ o bé $\forall x \in \mathbb{Z}(N(x) \to x > y)$.

Equivalència en lògica de primer ordre

Dues fórmules[2] de la lògica de primer ordre són **equivalents** quan prenen el mateix valor de veritat en totes les "interpretacions" possibles (en tot "domini" i en tota tota "interpretació" dels símbols de relació).

Algunes equivalències importants:

$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$	$\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$
$\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$	$\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$
$\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$	$\exists x\, (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \exists x \psi$

Observació:

1. No és certa l'equivalència: de $\forall x \exists y \varphi$ i $\exists y \forall x \varphi$. Per exemple, si el domini són els nombres naturals $\forall x\, \exists y(x < y)$ és certa, en canvi $\exists y \forall x(x < y)$ és falsa.
2. Tampoc són certes $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv \forall x \varphi \vee \forall x \psi$ ni $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$. Per exemple, si el domini son els nombres naturals, $P(x)$ és "x és parell", $S(x)$ és "x és senar", $\forall x(P(x) \vee S(x))$ és certa en canvi $\forall x P(x) \vee \forall x S(x)$ és falsa.

Exercicis. Demostreu les equivalències següents:

18. $\neg \exists x\, (C(x) \wedge N(x)) \equiv \forall x\, (C(x) \to \neg N(x))$.
19. $\neg \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$.
20. (R) $\exists x\, (P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$.
21. (R) $\neg \forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x\, (Q(x) \wedge \neg P(x))$.
22. (R) Demostreu que la fórmula $\exists x\, (P(x) \to \forall y P(y))$ sempre és certa (sigui qui

[2] sense variables lliures

sigui P).

23. $\neg\exists x\exists y(x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)) \equiv \forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
24. $\forall x\,(C(x) \rightarrow \neg N(x)) \equiv \forall x\,(N(x) \rightarrow \neg C(x)) \equiv \forall x\,(\neg C(x) \vee \neg N(x))$.

Formalització

Formalitzar consisteix en expressar en un llenguatge "formal" un enunciat. En el nostre cas consistirà en trobar una fórmula de la lògica de primer ordre. Quan formalitzem amb quantificadors es pressuposen:

- Un domini (o univers) d'individus.
- Relacions entre individus que "interpretin" els símbols de relació.

Hi ha dos **patrons** que apareixen de manera habitual:

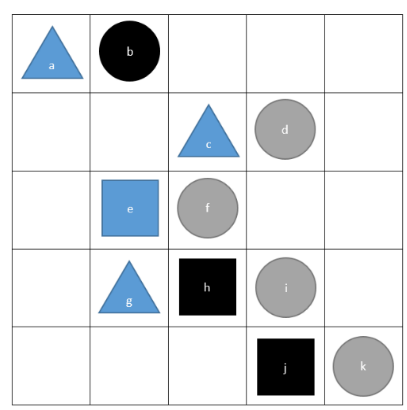
A. $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$ Tots els individus de tipus A (que tenen la propietat A) tenen la propietat B .

B. $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$ Hi ha individus de tipus A que tenen la propietat B .

ULL: Si volem expressar que x té les propietats P i Q, no es pot posar $P(Q(x))$, s'ha de posar $P(x) \wedge Q(x)$

Exercicis:

25. Un món de Tarski està format per una graella i diverses formes geomètriques que tenen un color i que poden portar una etiqueta, com a la figura. Considerem els símbols de relació següents:



$T(x)$: x és un triangle
$C(x)$: x és un cercle
$Q(x)$: x és un quadrat
$B(x)$: x és blau
$N(x)$: x és negre
$G(x)$: x és gris
$E(x,y)$: x està a l'esquerra de y
$S(x,y)$: x està a sobre de y
$K(x,y)$: x té el mateix color que y

Usant els símbols indicats, formalitzeu les frases següents:

a. Hi ha un quadrat negre.
b. Tots els cercles són blaus;
c. No hi ha cap cercle negre.

d. a està a sobre de e.
e. Hi ha un cercle que té el mateix color que d.
f. (R) d està a l'esquerra de qualsevol cercle.
g. (R) Alguna forma geomètrica és blava.
h. Algun cercle és blau.
i. Tots els quadrats són negres.
j. (R) Tots els triangles estan a l'esquerra de d.
k. Hi ha un triangle a l'esquerra de d.
l. (R) Hi ha un triangle que està a sobre de d però no a l'esquerra de a.
m. Algun triangle no és gris.
n. (R) Cap quadrat té el mateix color que b.
o. Tots els cercles estan a sobre de d.
p. Tot triangle està a l'esquerra de a o a sobre de b.

26. Usant els símbols de relació del problema anterior, expresseu en llenguatge natural les proposicions següents i determineu si a la figura anterior són certes o falses:
  a. $\forall x(B(x) \to (T(x) \lor Q(x))$
  b. $\exists y(C(y) \land \neg S(y,d))$
  c. (R) $\forall x(N(x) \to (T(x) \lor Q(x))$
  d. $\exists y(C(y) \land S(y,d))$
  e. (R) $\exists y(C(y) \land \neg E(y,d))$
  f. $\forall x(T(x) \to \exists y(Q(y) \land K(x,y)))$

27. En aquest exercici el domini és el conjunt dels enters. A més de les variables, connectives i quantificadors, podeu utilitzar només els símbols següents: $|, <, \cdot, =, +, P, Q, 0, 1, 2, 3, 4...$

  $x \mid y$ formalitza x *divideix* y (o y *és múltiple de* x).
  $P(x)$ formalitza x *és primer*.
  $Q(x)$ formalitza x *és un quadrat*.

  Formalitzeu els enunciats següents:
  a. 1 no és primer.
  b. Tot enter múltiple de 6 és també múltiple de 3 i de 2.
  c. Cap nombre primer és un quadrat.
  d. (R) Tot enter múltiple de 3 i de 5 és múltiple de 15.
  e. 2 és primer i és parell.
  f. Tot quadrat parell és múltiple de 4.
  g. (R) La suma de dos senars és parell.
  h. (R) Tot enter positiu és suma de quatre quadrats.
  i. Hi ha nombres senars que són primers i d'altres senars que no són primers.

j. x és un nombre parell (amb una variable lliure: la x). Les variables lliures d'una fórmula són les que no estan sota l'efecte d'un quantificador.
k. Tot nombre parell més gran que 2 és suma de dos primers.

28. En aquest exercici suposem que totes les variables prenen valors enters. A més de les variables, connectives lògiques i quantificadors, **només** podeu utilitzar els símbols següents: $<, \cdot, =, +, 0, 1, 2, 3, 4...$ (Ull, ara no podem usar: $|, P, Q$). Formalitzeu:
   a. (R) x divideix y (x, y són variables lliures).
   b. x és un quadrat (x variable lliure).
   c. (R) x és un nombre primer (x variable lliure).
   d. (R) 2 és l'únic nombre primer parell.
   e. (R) Hi ha infinits nombres primers (pista: sempre n'hi un més gran que un donat).
   f. 2 és el nombre primer més petit.
   g. Tots els apartats de l'exercici anterior.

Veracitat i quantificadors

Com es justifica (o demostra) que un enunciat és cert? En general, depèn de la seva "forma". Normalment, encara que a vegades de manera no explícita, hi ha quantificadors. La justificació dependrà, en primer lloc, de si els quantificadors són existencials o universals.

Demostració d'un existencial $\exists x P(x)$:

El mètode més senzill és donar un element a del domini que tingui la propietat P. Un sol exemple és suficient.

Exemples:

- $\exists x \in \mathbb{R}\,(x > 0 \wedge x^2 - 1 < 0)$ és cert.
- $\exists x \in \mathbb{Z}\,(x \ \ parell \ \wedge \ x \equiv 1 \ mod \ 5)$ és cert.

Això mateix s'aplica a la demostració que un enunciat universal és fals, ja que $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$. La demostració de la falsedat de $\forall x P(x)$ es fa donant un element a del domini que **no** tingui la propietat P; a rep el nom de **contraexemple.**

Exemples:

- $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \to x \geq 1)$ és fals.
- $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x \equiv 1\ mod\ 3\ \to\ x\ \ senar)$ és fals

Exercicis: Dieu quins enunciats són certs i quins són falsos:

29.(R) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 2 \wedge x < 5)$.
30.(R) $\forall x \in \mathbb{Z}\ (x^2\ múltiple\ de\ 16\ \to\ x\ \ múltiple\ de\ 8)$.
31. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 5 \wedge x < 2)$.
32. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 2 \to x < 5)$.
33. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 - x > 1 \wedge x^2 + x < 1)$.

Demostració d'un universal $\forall x P(x)$:

Hem de veure que tots els elements del domini satisfan la propietat P. Si hi ha pocs elements, ho podem verificar un a un. Si n'hi ha molts o infinits no quedarà més remei que donar-ne una "demostració". Una demostració és un raonament que segueix unes certes regles. Tot i que fer una demostració pot arribar a ser molt difícil, la comprovació que aquesta és correcte no hauria de ser-ho. Però això requereix que la demostració estigui ben escrita. A l'apartat següent explicarem com es fa això.
El mateix s'aplica a la demostració que un existencial és fals.

Exemples/exercicis. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

34. Justifiqueu que són certes:
    a. $\forall x \in A\ \ x^2 \leq 3x$
    b. $\forall x \in A\ (\ |x - 1| < 2\ \ \vee\ \ x^2\ -\ 9 = 0)$
35. Justifiqueu que són falses:
    a. $\exists x \in A\ (|x + 4| = 2)$
    b. $\exists x \in A\ (x^3 + 2x^2 - x = 4)$

Quantificadors barrejats

Demostració de:

- $\exists y \forall x\, P(x,y)$: donar un element y que tingui la propietat $P(x,y)$ per a cada x. Fem $y=a$ i demostrem que $\forall x P(x,a)$ és cert. La y no pot dependre de x.

  Exemple: $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\ y \leq x$ és cert. Fem $y=0$ i veiem que $\forall x \in \mathbb{N}\ 0 \leq x$.
- $\forall x \exists y\, P(x,y)$: per a cada x cal donar una y que satisfà $P(x,y)$. La y normalment dependrà de x. Fem $y=E(x)$ i demostrem que $\forall x P(x,E(x))$ és cert.

  Exemple: $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\ x<y$ és cert. Fem $y=x+1$ i veiem que $\forall x \in \mathbb{N}\ x<x+1$
- La demostració de la falsedat de $\exists x \forall y\, P(x,y)$ o de $\forall x \exists y\, P(x,y)$ es pot fer veient que els seus negats són certs.

Fet: $\exists y\ \forall x P(x,y)$ "implica"[3] $\forall x \exists y\ P(x,y)$, però no és cert el recíproc en general. En el primer cas necessitem un mateix valor de y que funcione per a qualsevol x, mentre que en el segon cas necessitem una y per a cada x (la y pot anar variant).

Exercicis: En aquest exercici el domini és $\mathbb{R}$. Justifiqueu la veritat o falsedat de:

36. $\exists y \forall x\ \ x\,y=0$.
37. $\forall x \exists y\ (xy-1=0)$.
38. (R) $\forall x \exists y (x \neq 0 \rightarrow xy-1=0)$.
39. (R) $\exists y \forall x\ \ x\,y=x$.
40. $\exists y \forall x\ \ x\,y=1$.
41. (R) $\forall x \exists y\ (xy+2y-1=0)$.
42. $\forall x \exists y\ (3x+2y-1=0)$.
43. $\exists y \forall x\ (3x+2y-1=0)$.

[3] Això vol dir que sempre que la primera fórmula és certa, la segona també. Això es coneix com a conseqüència lògica.

A continuació teniu un quadre resum d'aquest apartat:

Volem demostrar	Què cal fer
$\exists x \in A \;\; P(x)$ Cert	Donar un **exemple:** Donar $a \in A$ tal que $P(a)$
$\forall x \in A \;\; P(x)$ Fals	Donar un **contraexemple:** Donar $a \in A$ tal que $\neg P(a)$
$\exists y \in A \; \forall x \in A \; P(x,y)$ Cert	Donar $a \in A$ tal que $\forall x \in A \; P(x,a)$ [4]
$\forall x \in A \; \exists y \in A \; P(x,y)$ Cert	Per a cada $x \in A$ donar $y = E(x)$ tal que $\forall x \in A \; P(x, E(x))$ [5]

[4] La y no pot dependre de x: és constant

[5] La y acostuma a dependre de x, encara que en alguna ocasió pot ser constant

1.2 DEMOSTRACIONS

Per justificar la veracitat d'un enunciat amb quantificadors universals haurem de donar una demostració. Això és imprescindible si el domini de variació dels quantificadors és infinit o molt gran. Quan fem demostracions fem servir un llenguatge "semi-formal". Cal saber reconèixer la "forma" (l'hem de saber formalitzar) però no usarem la formalització. Per exemple, el quantificador universal no s'escriu, se sobreentén[6].

A més, en el llenguatge semi-formal (fora de les fórmules), farem servir:

$$\text{i, o , no , } \Rightarrow \text{, } \Leftrightarrow$$

en lloc de:

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Aquests últims els reservem per les fórmules. La coma , es fa servir per representar també la conjunció. Igualment escriurem $A\ implica\ B$ o $si\ A\ llavors\ B$ com a alternativa a $A \Rightarrow B$. La majoria de vegades es treballa amb implicacions $\Rightarrow$. Quan estem fent una demostració de $A \Rightarrow B$, A rep el nom de **Hipòtesi** i B de **Tesi.**

Exemple: Volem demostrar que: *per tot enter* n*, si* n *és senar llavors* $n^2 + 4n - 1$ *és parell.* En primer ordre es pot formalitzar així:

$$\forall x(\ S(x)\ \rightarrow P(x^2 + 4x - 1))\ ,$$

on $S(x)$ formalitza "x és senar", $P(x)$ formalitza "x és parell", i el domini són els enters. Ara bé, per a fer-ne una demostració ho escriurem així :

$$n \text{ senar } \Rightarrow\ n^2 + 4n - 1 \text{ parell}$$

Què és una demostració?

Una demostració és una justificació de la veracitat d'un enunciat fet amb unes regles força precises.

Una demostració sempre consta d'una sèrie de petits passos que podríem anomenar implicacions bàsiques o propietats bàsiques *combinades* d'acord a una sèrie de regles o mètodes de demostració que explicarem a continuació. Comencem explicant què o quins són aquests petits passos bàsics (implicacions o propietats bàsiques).

[6]A vegades tampoc s'escriuen els quantificadors existencials, que també se sobreentenen. Encara que això pot causar confusió al principi, es reconeixen pel context.

Han de ser o bé propietats que no ofereixen cap mena de dubte sobre la seva veracitat (les podríem anomenar axiomes) o bé petites implicacions que tampoc no ofereixen cap mena de dubte.

Què podem usar en una demostració?
Alguns passos bàsics

Aquí donarem, a moda d'exemple alguns dels passos bàsics més habituals. A l'apèndix hi ha una llista força més exhaustiva. Comencem pels passos bàsics de tipus lògic o petites implicacions lògiques.

Passos lògics: (aquí A, B, C són enunciats)

I.	$A \ , \ B$	$\Rightarrow$	A
II.	A	$\Rightarrow$	$A \text{ o } B$
III.	$A \text{ o } B, \text{ no } A$	$\Rightarrow$	B
IV.	$A \ , \ A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$	B
V.	$\text{no } B \ , \ A \Rightarrow B$	$\Rightarrow$	$\text{no } A$
VI.	$ABSURD$	$\Rightarrow$	A

La manera de veure que cada una d'aquestes implicacions és correcta és comprovar que cada una de les fórmules següents són tautologies:

I. $(p \wedge q) \to p$

II. $p \to (p \vee q)$

III. $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

IV. $(p \wedge (p \to q)) \to q$

V. $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

VI. $0 \to p$

Ara donem alguns exemples de passos bàsics de tipus no lògic importants. Aquest tipus de propietats es solen anomenar axiomes i s'accepten com a certs sense demostració.

Passos no lògics: (aquí $a, b, c, d...$ són números reals)

I. $a = b \Rightarrow E(a) = E(b)$ (aquí $E(x)$ és una expressió on apareix x)

II. $a = b\,,\ b = c \Rightarrow a = c$.

III. $a = b\,,\ a' = b' \Rightarrow a + a' = b + b'\,,\ aa' = bb'$.

IV. $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$.

V. $a \leq b \Rightarrow -a \leq -b$.

VI. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

VII. $a \leq b,\ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.

VIII. $a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$.

IX. $0 \leq a \leq b,\ 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.

Com combinem els passos bàsics?
Mètodes de demostració

Ara que ja sabem què són aquests passos bàsics anem a veure com s'estructuren per a donar lloc a una demostració correcta. Així com fer una demostració pot requerir un grau molt elevat d'enginy (hi ha demostracions que han trigat centenars d'anys a trobar-se posant a prova generacions dels millors matemàtics), verificar-la no hauria de requerir-ne gens. Això últim depèn del llenguatge en el que estiguin escrites. Si la demostració està escrita en un llenguatge totalment formal (com per exemple la lògica de primer ordre) aquesta pot ser verificada fàcilment per un ordinador. A la pràctica no es fan servir aquest tipus de demostracions (en un llenguatge formal) perquè esdevenen llarguíssimes i il·legibles per a una persona. [7]

Al nivell que treballarem aquí les demostracions han de ser escrites d'una manera clara indicant quin mètode s'utilitza. Redactada de tal manera que qualsevol persona amb uns mínims coneixements matemàtics pugui saber quin mètode de

[7] De totes maneres, amb ajuda de "proof assistants" hi ha importants teoremes matemàtics que han estat formalitzats i verificats per ordinador: El teorema dels nombres primers, el teorema del mapa dels 4 colors, El teorema Feit-Thomson, el teorema d'incompletesa de Gödel o el teorema de la curva tancada de Jordan. Una demostració verificada formalment deixa un marge d'error molt baix en comparació amb una demostració publicada en llenguatge matemàtic estàndad.

prova s'està utilitzant i pugui reconèixer que és el que es fa a cada pas. Un sol pas incorrecte invalida una demostració.

Prova directa.

És el mètode més senzill, i consisteix a concatenar una sèrie d'implicacions bàsiques i/o propietats bàsiques. També es poden fer servir resultats coneguts (que ja han sigut demostrats prèviament). El que és important és que en cada moment o bé usem una propietat bàsica, un resultat conegut o apliquem una implicació bàsica.
Esquemàticament, ho podem resumir així:

Volem demostrar $A \Rightarrow B$.
$A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow B$

Exercicis: Demostreu que:

1. El quadrat d'un nombre enter senar és senar.
2. La suma d'un nombre parell i un nombre senar és senar.
3. El producte de dos quadrats és un quadrat.
4. (R) La suma de dos nombres senars és parell.
5. El quadrat d'un nombre parell és parell.
6. (R) n és enter. Si n és senar llavors $5n^2 - 1$ és parell.
7. El producte de dos nombres senars és senar.

Prova pel contrarecíproc.

Es basa en: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Volem demostrar $A \Rightarrow B$.
$\neg B \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow \neg A$

Exercicis: Demostreu que:

8. n és enter. Si n^2 és parell llavors n és parell.
9. n és enter. Si $3n^2+6n+5$ és parell llavors $n+1$ és parell.
10. Aquí a,b,c són nombres reals positius. Si $c=ab$ llavors $a \leq \sqrt{c}$ o $b \leq \sqrt{c}$.
11. (R) n és enter. Si $5n^2+1$ és senar llavors n és parell.
12. n és enter. Si n^3 és senar llavors n també és senar.
13. (R) Siguin x,y nombres reals positius. Demostreu que si $xy>1$ llavors $x>1$ o $y>1$.
14. x,y són reals. Si $x+y \leq 2$ llavors $x \leq 1$ o $y \leq 1$.
15. n,m són enters. Si nm és parell llavors n és parell o m és parell.

Reducció a l'absurd

Es basa en: $p \equiv \neg p \to 0$

Volem demostrar A
$\neg A \quad \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad Contradicció$

Exercicis: Demostreu que:

16. $\sqrt{2}$ és irracional.
17. Si triem 15 dies diferents d'un calendari, n'hi ha 3 que cauen el mateix dia de la setmana.
18. a,b,c enters. Demostreu que $a+b$ és parell o $b+c$ és parell o $c+a$ és parell.
19. No hi ha cap nombre racional r tal que $r^3+r+1=0$ (useu que un zero racional, en forma reduïda, $\frac{a}{b}$ del polinomi $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ compleix que a divideix a_0 i b divideix a_n).
20. Idem per a la mitjana geomètrica. Aquí suposem que els nombres són tots positius.
21. (R) a,b,c reals. Demostreu que $a \leq \frac{b+c}{2}$ o $b \leq \frac{a+c}{2}$ o $c \leq \frac{a+b}{2}$.
22. (R) $log_2 3$ és irracional.
23. $\sqrt{6}$ és irracional.
24. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és irracional (Pista: useu que $\sqrt{6}$ és irracional).

25. Donats n nombres reals, algun d'ells ha de ser menor o igual que la mitjana aritmètica dels restants.
26. Idem per a la mitjana geomètrica. Aquí suposem que els nombres són tots positius.
27. (R) Demostreu que $a+c$ és senar o $b-a$ és senar o $b+c-1$ és senar.
28. Donats n nombres reals $a_1, \ldots, a_n$, algun d'ells ha de ser més gran o igual que la seva mitjana aritmètica $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.
29. $2\sqrt{2}$-2 és irracional. (Pista: useu que $\sqrt{2}$ és irracional.)

Reducció a l'absurd II

Es basa en: $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$

Volem demostrar $A \Rightarrow B$.			
$A, \neg B$ $\Rightarrow$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Rightarrow$	$Contradicció$

Exercicis: Demostreu que:

30. La suma d'un nombre racional i un irracional és irracional.
31. Si a, b, c són nombres enters i $a+b+c=0$, com a mínim un d'ells és parell.
32. Si p és primer llavors $\sqrt{p}$ és irracional. (podeu usar que si a^2 és múltiple de p llavors a és múltiple de p).
33. a, b, c són reals positius. Si $c = ab$ llavors o $a \leq \sqrt{c}$ o $b \leq \sqrt{c}$.
34. (R) El resultat de multiplicar un racional no nul que és un quadrat per un racional que no és un quadrat és un nombre racional que no és un quadrat (que un nombre racional sigui un quadrat vol dir que és igual al quadrat d'un cert nombre racional).
35. Si a, b, c són nombres enters i $a+3=b+c$, com a mínim un d'ells és senar.
36. Si n és un quadrat llavors $n+2$ no és un quadrat (n enter).
37. Si p és un primer senar llavors $log_2 p$ és irracional.

Prova d'una disjunció

Es basa en: $(q \vee r) \equiv (\neg q \to r)$

Volem provar $B \vee C$		
$\neg B \Rightarrow$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Rightarrow C$

També val amb més disjuntands : $p_1 \vee \cdots \vee p_n \equiv (\neg p_1 \wedge \cdots \wedge \neg p_{n-1}) \rightarrow p_n$

Volem provar $B_1 \vee \cdots \vee B_n$ **:**		
$\neg B_1, \neg B_2, \cdots, \neg B_{n-1} \Rightarrow$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Rightarrow B_n$

Exercicis:

38. n és enter. Demostreu que n és senar o n^2 és múltiple de 4.
39. a, b són reals. Demostreu que $a \leq \frac{a+b}{2}$ o $b \leq \frac{a+b}{2}$.
40. a, b, c són reals. Demostreu que $a \leq \frac{a+b+c}{3}$ o $b \leq \frac{a+b+c}{3}$ o $c \leq \frac{a+b+c}{3}$.
41. a, b són reals positius. Demostreu que o $a \leq \sqrt{ab}$ o $b \leq \sqrt{ab}$.
42. n és enter. Demostreu que n o n^2+1 és senar.
43. a, b, c són reals positius. Demostreu que $a \leq \sqrt[3]{abc}$ o $b \leq \sqrt[3]{abc}$ o $c \leq \sqrt[3]{abc}$
44. (R) a, b són enters. Demostreu que $a-b$ és parell o $b-c$ és parell o $c-a$ és parell.
45. a, b, c són reals. Demostreu que $a \leq \frac{b+c}{2}$ o $b \leq \frac{a+c}{2}$ o $c \leq \frac{a+b}{2}$.

Disjunció al conseqüent

Es basa en: $p \rightarrow (q \vee r) \;\equiv\; (p \wedge \neg q \rightarrow r)$

Volem provar $A \Rightarrow (B \vee C)$		
$A, \neg B \Rightarrow$	$\cdots\cdots\cdots$	$\Rightarrow C$

Amb més disjuntands:

$$p \to (q_1 \vee \cdots \vee q_n) \equiv (p \wedge \neg q_1 \wedge \cdots \wedge \neg q_{n-1}) \to q_n$$

Volem provar $A \Rightarrow (B_1 \vee \cdots \vee B_n)$
$A, \neg B_1, \neg B_2 \cdots, \neg B_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad B_n$

Exercicis: Demostreu que:

46. La suma d'un nombre racional i un irracional és irracional (amb contrarecíproc).
47. x, y reals. Si $x + y \le 2$ llavors $x \le 1$ o $y \le 1$.
48. a, b, c són enters. Si $a + 5 = c - b$ llavors a és senar o b és senar o c és senar.
49. x, y, z reals. Si $x < \frac{2y+z}{3}$ llavors $y \ge \frac{2z+x}{3}$ o $z \ge \frac{2x+y}{3}$.
50. a, b, c, d són enters. Si $a + b + c + d$ és parell llavors $a + b$ és parell o $a + c$ és parell o $a + d$ és parell. Podem afirmar que els tres són parells? Val el recíproc?
51. a, b, c són nombres reals positius. Si $c = ab$ llavors $a \le \sqrt{c}$ o $b \le \sqrt{c}$.
52. (R) a, b, c, d són nombres reals positius. Si $d = abc$ llavors $a \le \sqrt[3]{d}$ o $b \le \sqrt[3]{d}$ o $c \le \sqrt[3]{d}$.
53. a, b, c són nombres real. Si $c = a + b$ llavors $2a \le c$ o $2b \le c$.
54. a, b, c són enters. Si $a + c$ és senar llavors $a + b$ és senar o $b + c$ és senar.
55. a, b, c són enters. Si $a + b + c$ és senar llavors $a - b$ és parell o c és parell.
56. a, b, c són enters. Si $12 + a - b - 3c = 0$ llavors $a + 3b - c$ és parell o $a - b - 5c$ és parell o $a + b - c$ és parell.
57. a, b, c, d són enters. Si $a + b + c + d$ és senar llavors $a + b$ és senar o $a + c$ és senar o $a + d$ és senar. Podem afirmar que els tres són senars? Val el recíproc?
58. x, y, z reals. Si $x < \frac{2y+3z}{5}$ llavors $y \ge \frac{2z+3x}{5}$ o $z \ge \frac{2x+3y}{5}$.
59. a, b, c són enters. Si $1 - a - 3b - 5c = 0$ llavors $a + b + c$ és senar o $a - b - c$ és senar o $a + b - c$ és senar. Podem afirmar que els tres són senars? Val el recíproc?

Disjunció a l'antecedent: $(B \vee C) \Rightarrow A$

Es basa en: $(q \vee r) \rightarrow p \equiv (q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$

És equivalent a fer una prova per casos (distingim segons B o C).

Volem demostrar $(B \vee C) \Rightarrow A$
$B \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow A$ $C \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow A$

També val amb més casos:

Volem demostrar $(B_1 \vee \cdots \vee B_n) \Rightarrow A$
$B_1 \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow A$ .... $B_n \Rightarrow \cdots\cdots\cdots \Rightarrow A$

Exercicis: Demostreu que:

60. n és enter. Si el residu de n al dividir per 4 és 1 o 3, el residu de n^2 és 1.
61. n és enter. Si n acaba en 3 o en 7 llavors n^2 acaba en 9 (Pista: n acaba en 9 sii $n = 10k + 9$ per algun k enter).
62. (R) m, n són enters. Si mn és senar llavors m i n són senars (amb contrarecíproc).
63. x és enter. Demostrar que si el residu de dividir x per 6 és $0, 3$ o 4 llavors x^2 i x tenen el mateix residu al dividir-los per 6 (Pista: el residu de dividir x per 6 és 4 sii $n = 6k + 4$ per algun k enter. Idem els altres residus).

Prova per casos

Es basa en la tautologia:

$$(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \to (\ p \leftrightarrow (p_1 \to p) \wedge \cdots \wedge (p_n \to p)\ )$$

Es pot usar en qualsevol moment.

Volem demostrar B, distingim els casos $A_1, \ldots, A_n$
<u>Cas 1:</u> A_1 $A_1 \ \Rightarrow \ \cdots\cdots\cdots \ \Rightarrow \ B$ … <u>Cas n:</u> A_n $A_n \ \Rightarrow \ \cdots\cdots\cdots \ \Rightarrow \ B$

Important: Cal que els diferents casos exhaureixin **totes** les possibilitats (es compleix $A_1 \vee \cdots \vee A_n$).

Exercicis: Demostreu que:

64. n és enter. $n^2 + n$ és parell (2 casos).
65. La suma de dos nombres enters de la mateixa paritat és parell (2 casos).
66. Si n és enter, llavors $n^2 \geq n$ (2 o 3 casos).
67. Si x, y, z són nombres reals llavors:
    a. $max(x, y) + min(x, y) = x + y$ (2 casos).
68. Si la suma de dos nombres enters és parell llavors tenen la mateixa paritat. (amb contrarecíproc)
69. n és enter. $3n^2 + n + 3$ es senar (2 casos).
70. (R) n és enter. $n^3 + 2n$ es múltiple de 3 (3 casos).
71. Tot quadrat perfecte que no és múltiple de 3 és de la forma $3k + 1$ (2 casos).
72. n és enter. Si n no és múltiple de 3 llavors $n^2 - 1$ és múltiple de 3 (2 casos).
73. Si x, y són nombres reals llavors $|xy| = |x| \cdot |y|$ (4 casos).
74. Si x, y són nombres reals llavors $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (6 o 8 casos).

75. Si x, y, z són nombres reals llavors:

a. (R) $z \geq x$ i $z \geq y \iff z \geq max(x, y)$ (2 casos).

b. (R) $min(min(x,y),z) = min(x, min(y,z)) = min(x,y,z)$ (6 casos).

c. $max(max(x,y),z) = max(x, max(y,z)) = max(x,y,z)$ (6 casos).

d. $max(z+x, z+y) = z + max(x,y)$ (2 casos).

76. El quadrat d'un nombre enter mai acaba en 8 (10 casos).

77. Tot cub perfecte és de la forma $9k$ o $9k-1$ o $9k+1$ per a algun k (3 casos).

78. m, n són enters. Si $m+n$ és senar llavors mn és parell (2 casos).

79. n és enter. El residu de la divisió de n^2 per 4 no és mai 3 (2 casos).

80. Si x, y, z són nombres reals llavors:

a. $z \leq x$ i $z \leq y \iff z \leq min(x, y)$ (2 casos).

b. $min(z+x, z+y) = z + min(x,y)$ (2 casos).

Demostració d'una equivalència

Es basa en: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Volem demostrar $A \Leftrightarrow B$
$A \Rightarrow B$ $B \Rightarrow A$

Equivalència de 3 o més. Es basa en:

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \leftrightarrow p_n) \equiv$$
$$\equiv (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1)$$

Volem demostrar que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són equivalents (dos a dos)
$A_1 \Rightarrow A_2$ $A_2 \Rightarrow A_3$ ... $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ $A_n \Rightarrow A_1$

Nota: Podem canviar l'ordre dels enunciats $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Exercicis: Demostreu que:

81. n és enter. n és senar si i només si n^2+3 és parell.
82. n, m és enters. Són equivalents:
    a. $5n+3m$ és senar,
    b. $n-3m$ és senar,
    c. n i m tenen diferent paritat .
83. a, b són reals. Són equivalents:
    a. $a > \frac{a+b}{2}$.
    b. $a > b$.
    c. $b < \frac{a+b}{2}$.
84. n és enter. mn és parell si i només si n és parell o m és parell .
85. a, b són racionals. $a + b\sqrt{2}$ racional $\Leftrightarrow$ $b = 0$
86. (R) n és enter. Són equivalents:
    a. $n = 3k+1$ per a algun k enter.
    b. $n^2 + n = 9k + 2$ per a algun k enter.
    c. $n^2 + n$ no és múltiple de 3.
87. n, m són enters. Són equivalents:

a. n i m tenen la mateixa paritat,

b. $n+m$ és parell,

c. $n-m$ és parell .

88. n és enter. Són equivalents:

a. n parell,

b. $n+1$ senar,

c. $3n^2+1$ senar .

89. x és real. Són equivalents:

a. x és racional,

b. $3x-1$ és racional,

c. $(x+1)/2$ és racional .

90. (R) a, b són reals. Són equivalents (pista: $(a-b)^2 \geq 0$):

a. $a^2+b^2=2ab$

b. $a^2+b^2 \leq 2ab$

c. $a=b$

91. a, b són reals positius. Són equivalents:

a. $a > \sqrt{ab}$

b. $a > b$

c. $b < \sqrt{ab}$

92. n és enter. Són equivalents:

a. El residu de dividir n per 4 és 3 .

b. $n(n+2)(n+3)$ no és múltiple de 4 .

c. $2n^2+n-1$ és múltiple de 4 .

93. n és enter. Són equivalents:

a. n és el producte de dos enters consecutius.

b. $4n+1$ és un quadrat.

94. x és real. Són equivalents:

a. x irracional.

b. $x+1$ irracional.

c. $x/3$ és irracional .

95. a, b són enters. Són equivalents:

a. $a+b, ab$ parells.

b. a, b parells.

c. $a+b, a+2b$ parells .

96. a, b, c són reals. Són equivalents:

a. $a > \frac{b+c}{2}$

b. $a > \frac{a+b+c}{3}$

c. $a - b > \frac{c-b}{2}$

Demostració de la unicitat

Quan diem que *"si hi ha un x que satisfà $P(x)$ aquest és únic"* volem dir que *hi ha com a molt un x satisfent $P(x)$*. O també que *no hi ha dos x diferents que satisfacin $P(x)$*. Ho podem expressar així: $\neg\exists x\exists y(x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y))$. Aquesta fórmula és equivalent a:

$$\forall x, y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$$

Volem veure: hi ha com a molt un x tal que $P(x)$.
$P(x),\ P(y) \quad \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad x = y$

Nota: No afirmem que l'element x existeixi. Potser no n'hi ha cap x satisfent $P(x)$.

Exercicis:

97. En una operació $(A,*)$ associativa ($\forall x, y, z \in A(x*(y*z) = (x*y)*z)$) el neutre ($u$ és neutre sii $\forall x \in A(x*u = u*x = x)$), en cas d'existir, és únic.
98. (R) La inversa d'una matriu, si existeix, és única.
99. En una operació $(A,*)$ associativa amb neutre u, l'invers y d'un element x (aquell element y que verifica $x*y = y*x = u$), si existeix, és únic.

Nota: Quan volem veure que "hi ha un únic x tal que $P(x)$" haurem de veure dues coses: que l'element x existeix i que és únic.

Exemple: El quocient i el residu de la divisió euclidiana existeixen i són únics.

2. INDUCCIÓ

2.1 Inducció simple

El mètode de demostració per inducció simple es basa en el principi següent:

$$\forall n \geq n_0 \, P(n) \quad \equiv \quad P(n_0) \wedge \forall n > n_0 \; (P(n-1) \rightarrow P(n))$$

Volem demostrar $\forall n \geq n_0 \, P(n)$
$P(n_0)$ $\forall n > n_0 \; (P(n-1) \rightarrow P(n))$

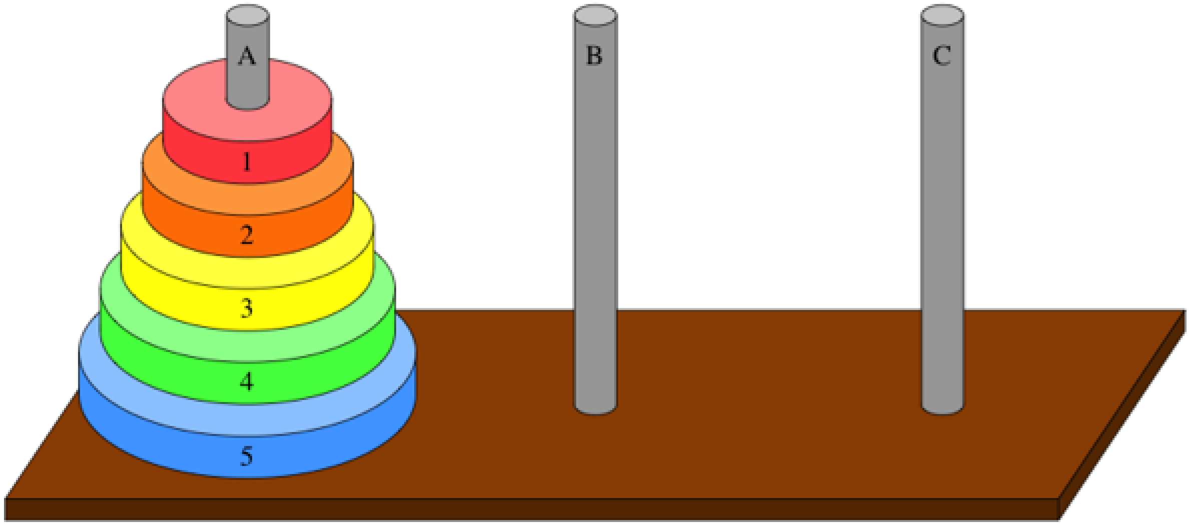
Ho presentem així:

- Pas Base. $P(n_0)$
- Pas inductiu. Sigui $n > n_0$:
    - Hipòtesi d'Inducció: $P(n-1)$
    - Volem veure(tesi d'inducció): $P(n)$

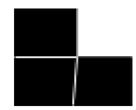
En efecte:

Exercicis:

1. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ per a $n \geq 0$.
2. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ per a $n \geq 1$.
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1}$ per a $n \geq 1$.
4. $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$ per a $n \geq 2$.
5. $3^n < (n+2)!$ per a $n \geq 0$.
6. $\sum_{i=2}^{n} 1/i^2 < \frac{n-1}{n}$, $n \geq 2$.
7. Demostreu que $6^{2n+1} - 6$ és múltiple de 210 per a $n \geq 0$.
8. Calculeu el mínim nombre de passos per resoldre el problema de les torres de Hanoi amb n discs. (Pista: considereu $f(n)$ el mínim nombre de passos per resoldre el problema amb n discs i trobeu una fórmula recurrent per calcular-la).



9. Sigui $n \geq 1$. Demostreu per inducció que si suprimim un quadrat 1×1 a un tauler d'escacs de mida $2^n \times 2^n$, la resta es pot recobrir amb peces com les de la figura.



10. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per a $n \geq 1$.

11. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ per a $n \geq 1$.

12. (R) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ per a $n \geq 1$.

13. $\sum_{i=0}^{n} 2^i i!(2i+1) = 2^{n+1}(n+1)! - 1$ per a $n \geq 0$.

14. $\prod_{i=3}^{n}(1 - \frac{2}{i}) = \frac{2}{n(n-1)}$ per a $n \geq 3$.

15. (R) Definim una successió recurrent mitjançant $a_0 = -2$ i $a_n = 3a_{n-1} + 6$ per a $n > 0$. Demostreu per inducció que $a_n = 3^n - 3$ per a tot $n \geq 0$.

16. $4^n < n!$ per a $n \geq 9$.

17. (R) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \leq n/3 + 1$ si $n \geq 0$.

18. $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ($n \geq 0$, $x \geq 0$).

19. (difícil). Demostreu que $(\frac{n}{e})^n < n!$ per a $n \geq 1$ (Pista: useu que $(1 + \frac{1}{n})^n < e$).

20. (R) Demostreu que $2^{3n+1} + 3 \cdot 5^{2n+1}$ és múltiple de 17 per a $n \geq 0$.

21. Demostreu que $\sum_{i=1}^{n} i!$ és de la forma de $90k+63$ per a $n \geq 5$.

22. Calculeu unes quantes potències de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjectureu una fórmula per calcular A^n i demostreu-la per inducció. (per si no la "trobeu" aquí teniu la fórmula) .

23. $\sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i!} = 1 - \frac{1}{n!}$ per a $n \geq 2$.

24. $\sum_{i=1}^{n} 1/i \leq n/2+1$ si $n \geq 1$.

25. Demostreu que $2 \cdot 3^n + 5^{2n-1}$ és múltiple de 11 per a $n \geq 1$.

26. Definim una successió recurrent mitjançant $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ per a $n \geq 0$. Demostreu per inducció que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{a_n}{n!}$ per a tot $n \geq 0$ (càlcul del nombre e).

27. Demostreu que la suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $180(n-2)$ per a $n \geq 3$.

Variant: A vegades és necessari fer més d'un cas inicial:

Ho presentem així:

- Pas Base. $P(n_0), \ldots, P(n_1)$
- Pas inductiu. Sigui $n > n_1$:
    - Hipòtesi d'Inducció: $P(n-1)$
    - Volem veure: $P(n)$

Exemple: $5^n \leq 27n!$ per a $n \geq 0$.

2.2 Inducció completa

El mètode de demostració per inducció completa es basa en el principi següent:

$$\forall n \geq n_0\, P(n) \quad \equiv \quad P(n_0) \wedge \forall n > n_0 \; (P(n_0) \wedge \ldots \wedge P(n-1) \rightarrow P(n))$$

Volem demostrar $\quad \forall n \geq n_0\, P(n)$
$P(n_0)$ $\forall n > n_0 \; (P(n_0) \wedge \ldots \wedge P(n-1) \rightarrow P(n))$

Ho fem així:

- Pas Base: $P(n_0)$
- Pas inductiu: per a $n > n_0$:
  - H.I. $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n-1)$
  - Volem veure: $P(n)$

Exercicis:

28. Fet En un determinat país, per a cada dues ciutats hi ha una carretera d'un sol sentit que les uneix sense passar per cap altre ciutat. Demostreu que es pot fer un recorregut passant per totes les ciutats un sol cop. Pista: trieu una ciutat C i considereu d'una banda totes les ciutats a les que es pot anar desde C i de l'altra totes desde les quals es pot anar a C.
29. Demostreu que si tenim una rajola de xocolata de de $n \times m$ preses, es faci com es faci s'han de fer $nm - 1$ talls (trencar una de les peces en dues) per deixar-la en trossos d'una presa.
30. Fet Demostreu que tot nombre enter $n \geq 2$ es primer o es descomposa en producte de primers. És a dir, $n = p_1 \cdots p_k$ per a algun $k \geq 1$ i primers $p_1, \ldots, p_k$. (Pista: Useu que si un enter positiu n no és primer llavors $n = rs$ per a uns certs r, s enters, amb $2 \leq r, s < n$).

31. Fet Definim una funció recursivament així: $f(1) = 0$ $f(n) = 2f(E(n/2)) + n$, si $n > 1$. Demostreu que $f(n) \leq nlog_2 n$ per a $n \geq 1$. (Pista: useu que $2E(n/2) \leq n$. Aquí demostrem que el nombre de comparacions que es fa amb Mergesort és $O(nlog_2 n)$).

    Nota: $E(x)$ és la part entera inferior del nombre real x.
32. Fet Definim una funció recursivament així: $f(1) = 0$ i, si $n > 1$, $f(n) = f(n/p) + 1$, on p és el primer més petit que divideix n. Qui és $f(n)$? Demostreu-ho per inducció.
33. Fet La longitud d'una fórmula proposicional és el nombre total de símbols (comptant parèntesis i repeticions) que té. Aquí no suprimim els parèntesis exteriors. Demostreu que: $l(\varphi) = n(\varphi) + 4cb(\varphi) + 1$ ($l(\varphi)$ és la longitud de φ i $n(\varphi)$ és el nombre de negacions de φ i $cb(\varphi)$ és el nombre de connectives binàries de φ). Doneu una definició recursiva de la longitud de la fórmula.
34. Fet Definim una successió recursivament així: $x_1 = 1$ i per a tot $n > 1$ $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + 2^2 x_{n-3} + \cdots + 2^{n-2} x_1 + 2^{n-1}$. Demostreu que $x_n = 3^{n-1}$ per a $n \geq 1$.
35. Els joc dels mistos. Hi ha dues piles amb el mateix nombre de mistos i dos jugadors. Cada jugador tria una pila i treu com a mínim un misto d'aquesta pila. Juguen alternativament. El joc acaba quan no queden mistos i guanya l'últim que treu mistos. Demostreu que si el segon jugador treu cada cop els mateixos mistos que el primer però de l'altre pila, guanya.
36. (difícil) Definim $x_1 = 1,\ x_{2r} = 2x_r,\ x_{2r+1} = 2x_{r+1}$ per $r > 0$. Demostreu que $x_n = 2^{ES(log_2 n)}$ per a $n \geq 1$.

    Nota: $ES(x)$ és la part entera superior del nombre real x.

Aquesta és la versió **amb més casos inicials** (Se suposa que $n_0 \leq n_1$):

- Pas Base: $P(n_0),\ P(n_0 + 1),\ ...,\ P(n_1)$
- Pas inductiu: per a $n > n_1$:
    - H.I. $P(n_0),\ P(n_0 + 1),\ ...,\ P(n - 1)$
    - Volem veure: $P(n)$

Exercicis:

37. Fet Definim una successió a_n recursivament fent $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ per a $n \geq 2$. Demostreu que $a_n = n2^n$ per a $n \geq 0$.
38. Fet Demostreu que tot $n \geq 12$ es pot posar de la forma $n = 5a + 4b$ amb a, b naturals. (Pista: considereu 4 casos inicials).
39. Definim una successió a_n recursivament fent $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per a $n > 2$. Demostreu que $a_n = 2^n + 1$ per a $n \geq 1$.
40. Definim una successió a_n recursivament fent $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2$ per a $n > 2$. Demostreu que $a_n = 2^n - n^2$ per a $n \geq 0$.
41. Definim una successió a_n recursivament fent $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ per a $n > 2$. Demostreu que $a_n = 1 - 2^n + 3^n$ per a $n \geq 0$.
42. El problema de les piles. Tenim una pila de n caixes i la volem convertir en n piles d'una caixa. Això ho farem subdividint cada pila de k caixes en dues piles de r i s caixes, on $r + s = k$, $r, s > 0$. Li demanem a un operari que efectuï aquesta feina i cada vegada que divideix una pila de $r + s$ caixes en dues piles de r i s caixes li paguem rs euros. Demostreu que al final, independentment de l'estratègia que l'operari hagi seguit, si al principi hi ha n caixes, li pagarem $n(n-1)/2$ euros.
43. Només tenim monedes de 3 i de 4 cèntims. Demostreu que per a tot $n \geq 9$ es pot pagar una factura de n cèntims amb monedes de 3 i 4 cèntims (Pista: feu 3 casos inicials).
44. Definim una funció així: $f(1) = 2$, si $n \geq 2$, $f(n) = (f(n/p))^2$, on p és el primer més petit que divideix n. Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 2$, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ és la descomposició en factors primers de n llavors $f(n) = 2^{2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}}$.
45. Considerem la funció definida recursivament per $f(n) = n$ si $n \leq 2$, $f(n) = f(E(n/3)) + f(ES(2n/3))$, altrament. Aquí $E(x)$ i $ES(x)$ denoten la part entera i la part entera superior del nombre real x respectivament. Demostreu que per a tot $n \geq 1$ tenim que $f(n) \leq 2n - 1$ (Pista: useu que $E(n/3) + ES(2n/3) = n$).

46. Definim recursivament una funció així: $f(1) = 1$, $f(n) = f(E(n/2)) + 1$, si $n > 1$. Demostreu que $f(n) \leq log_2 n + 1$ per a $n \geq 1$.
47. Definim una funció recursivament així: $f(1) = 0$ $f(n) = 4f(E(n/4)) + n$, si $n > 1$. Demostreu que $f(n) \leq nlog_4 n$ per a tot $n \geq 1$.
48. Demostreu que tot nombre enter $n \geq 0$ es pot escriure en base 2 (pista: feu la divisió euclidiana per 2).
49. Tenim una successió de nombres reals que sabem que compleix $a_1 = 0$, $a_p = 1$ si p és primer i $a_{nm} \leq 2a_n + a_m$. Demostreu que $a_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}} \leq 2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_k - 1$.
50. Definim $a_0 = 1$, $a_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$ si $n > 0$. Demostreu que $a_n = 0$ per a $n \geq 2$.
51. (Dues induccions)
    a. Demostreu per inducció simple que per a tot $n \geq 2$ $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! = n!$.
    b. Definim $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$ per $n \geq 2$. Demostreu per inducció completa que $a_n = n!/2$ per $n \geq 2$. (Pista: useu l'apartat a.)
52. Definim $x_1 = 1$, $x_{2r} = 2x_r$, $x_{2r+1} = 2x_{r+1}$ per $r > 0$. Demostreu que $x_n \leq n^2$ per a $n \geq 1$.
53. Definim recursivament l'altura d'una fórmula proposicional φ així: $h(p) = 0$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$, $h(\varphi * \psi) = max\{h(\varphi), h(\psi)\} + 1$.
    a. Demostreu que el nombre de lletres proposicionals de φ és $\leq 2^{h(\varphi)}$.
    b. Demostreu que per a cada $n \geq 0$ hi ha una fórmula d'altura n que compleix la igualtat.
    c. (difícil) Demostreu que per a cada $n \geq 0$ i cada m amb $1 \leq m \leq 2^n$ existeix una fórmula d'altura n amb exactament m lletres proposicionals. (Pista: feu inducció completa sobre n. Useu que tot nombre $\leq 2^n$ és de la forma $2^r + s$ amb $r < n$ i $s \leq 2^r$).

3. CONJUNTS I RELACIONS

3.1 CONJUNTS

Els conjunts són un nou tipus d'objecte. **Idea**: Mena de "bossa" que conté certs objectes a l'interior, de manera desordenada. Només importa quins objectes hi són i quins no. També podem pensar en una espècie de llista on no importa l'ordre i no hi poden haver repeticions. No podem "cridar" el primer element, només podem preguntar si un determinat objecte hi és o no (això és un Booleà, que els matemàtics anomenen "funció característica").

Quan un objecte x és al conjunt A direm que x **és un element de** A o que x **pertany a** A. Ho notem per $x \in A$.
Quan un objecte x no és al conjunt A direm que x **no és un element de** A o que x **no pertany a** A. Ho notem per $x \notin A$.

Notem que: quan posem $x \in A$, A ha de ser conjunt, mentre que x pot ser qualsevol tipus d'objecte.

Descripció d'un conjunt

Per descriure un conjunt hem de dir quins elements té (i quins no té). Hi ha dues maneres de fer-ho:
Per **extensió:** Donem la "llista" (cal recordar que no importa l'ordre i no hi ha repeticions) dels seus elements entre claus:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Per **comprensió:** Donem una propietat $P(x)$ que caracteritza els seus elements (una propietat $P(x)$ que tenen tots els seus elements i ningú més):

$$A = \{\, x \mid P(x) \,\}.$$

Exemple:

- $A = \{x \mid x \text{ és } enter\ senar,\ 0 \le x \le 10\}$.
- $B = \{x \mid\ x \in \mathbb{Z}\ ,\ x \text{ és }\ parell\}$.

Notem que: Si $A = \{\, x \mid\ P(x)\ \}$ llavors,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{per a tot } x:\\ x \in A \iff P(x)\end{array}}$$

Notació alternativa

Si volem definir el conjunt de tots els elements de B que satisfan la propietat P es pot fer alternativament així:

$$\{\, x \in B \mid\ P(x)\ \} = \{\, x \mid\ x \in B,\ \ P(x)\ \}$$

Exemple: $\{x \in \mathbb{Z} \mid\ x \text{ és }\ parell\} = \{x \mid\ x \in \mathbb{Z}\ ,\ x \text{ és }\ parell\}$.

Notem que: Si $A = \{\ x \in B \mid\ P(x)\ \}$ llavors

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{per a tot } x \in B:\\ \qquad x \in A \iff P(x)\end{array}}$$

Però **no** es compleix per a tot x (hi poden haver $x \notin B$ que compleixin $P(x)$)

Igualtat entre conjunts (principi d'extensionalitat)

El que caracteritza un conjunt són els elements que té (i els que no té). Expressat més clarament, dos conjunts A, B són iguals si i només si tenen els mateixos elements:

$$\boxed{A = B \qquad \iff \qquad \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)}$$

Exemple: els conjunts $\{1,3,5,7,9\}$ i $\{x \mid x \text{ és } enter\ senar,\ 0 \leq x \leq 10\}$ són iguals. Són <u>el mateix conjunt</u>!

Conjunt buit

És el conjunt que no té elements i es denota per $\emptyset$:

$$\boxed{\emptyset = \{\} = \{x \mid x \neq x\}}$$

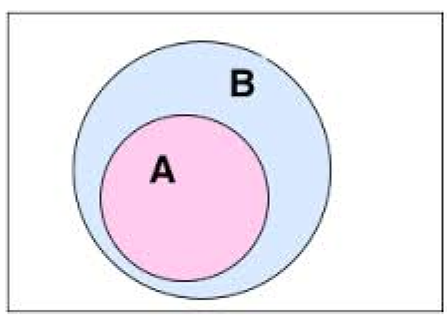
Inclusió entre conjunts ($\subseteq$)

Idea: A és una "part" de B : A conté "alguns" (potser tots!) dels elements de B. Aquesta idea s'expressa més clarament dient que tots els elements de A també són elements de B:

Definició:

$$\boxed{A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)}$$

Es llegeix dient que A **és subconjunt de** B (o que A **està inclòs** a B)



Exemple: $A = \{1,3,5\}$ **,** $B = \{1,3,5,7,9\}$ **,** $\quad A \subseteq B$.

Notem que: el principi d'extensionalitat s'expressa així:

$$\boxed{A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subseteq B,\ \ B \subseteq A}$$

Per tant, quan volem demostrar una igualtat entre conjunts, tenim una segona manera de fer-ho: demostrar les dues inclusions.

Propietats:

I. $\emptyset \subseteq A$.
II. $A \subseteq A$.
III. $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$.

Exercicis:

1. Siguin $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $Z = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$. Dieu quines afirmacions són certes i quines són falses:
   - $1 \in X$, $1 \in Y$, $1 \in Z$.
   - $\{1\} \in X$ $\{1\} \in Y$, $\{1\} \in Z$, $\{1\} \subseteq X$, $\{1\} \subseteq Y$, $\{1\} \subseteq Z$. $\{3,4\} \in X$, $\{3,4\} \in Y$, $\{3,4\} \in Z$, $\{3,4\} \subseteq X$, $\{3,4\} \subseteq Y$, $\{3,4\} \subseteq Z$.
2. Demostreu que les dues fórmules següents són equivalents:
   a. $\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.
   b. $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$.
3. Demostreu les propietats I., II. i III. anteriors.

Operacions amb conjunts

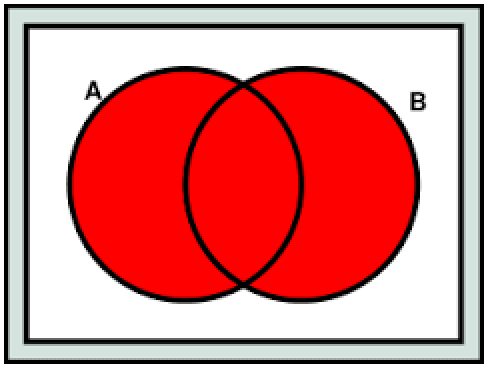
Unió

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt unió** (o reunió) de A i B així:

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\vee\; x \in B}$$



Exemples:

- Si $A = \{1,3,5,7,9\}$ i $B = \{5,6,7,8,9,10\}$
  $A \cup B = \{1,3,5,6,7,8,9,10\}$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } parell\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } senar\}$
  $A \cup B = \mathbb{Z}$.

Propietats:

I. $A \cup A = A$.
II. $A \cup \emptyset = A$.
III. $A \cup B = B \cup A$.
IV. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
V. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.
VI. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$.
VII. $A \cup B \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C \;,\; B \subseteq C$.

Exercicis:

4. Demostreu les propietats I., III., V. anteriors.
5. Demostreu les propietats II.(R), VI. anteriors.
6. Demostreu les propietats IV. i VII. anteriors.

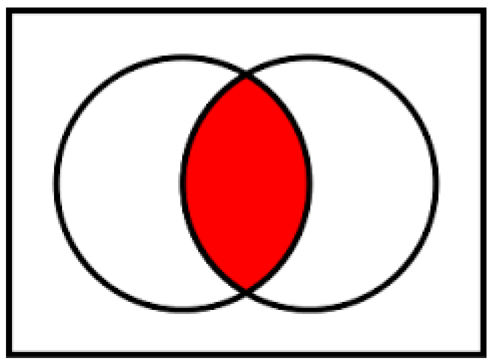
Intersecció

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt intersecció** de A i B així:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A \cap B \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \ i \ \ x \in B}$$



Exemple:

- Si $A = \{1,3,5,7,9\}$ i $B = \{5,6,7,8,9,10\}$
  $A \cap B = \{5,7,9\}$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } parell\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } senar\}$
  $A \cap B = \emptyset$.

Propietats:

I. $A \cap A = A$.
II. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
III. $A \cap B = B \cap A$.
IV. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

V. $A \cap B \subseteq A$.

VI. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$.

VII. $C \subseteq A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C \subseteq A$ i $C \subseteq B$.

Exercicis:

7. Demostreu les propietats IV. i V. anteriors.
8. Demostreu les propietats I., III. i VII.(R) anteriors.
9. Demostreu les propietats II. i VI. anteriors.

Quan dos conjunts A, B no tenen elements comuns es diu que són **disjunts**:

$$\boxed{A \text{ i } B \text{ són } \textbf{disjunts} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset}$$

Exercicis. Expresseu mitjançant quantificadors i $\in$ el fets següents:

10. $A = \emptyset$.
11. $\neg (A \subseteq B)$.
12. $A \subset B$. ($A \subset B$ vol dir $A \subseteq B$ i que són diferents)
13. $A \neq \emptyset$.
14. $\neg (A \subset B)$.
15. (R) A i B no són disjunts.
16. A i B son disjunts.
17. $A \neq B$.

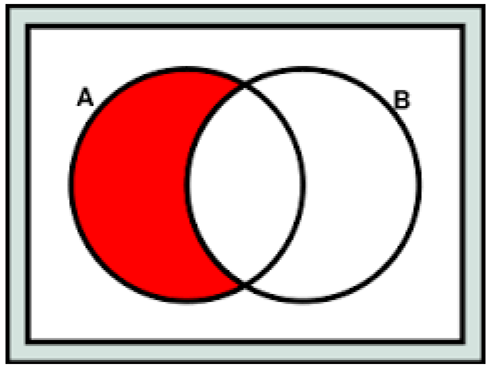
Diferència

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt diferència** de A i B així:

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \ i \ \ x \notin B$$



Exemples:

- Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:
$$A - B = \{1, 3\}$$
- Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } parell\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és } senar\}$:
$$A - B = A$$

Propietats:

I. $A - A = \emptyset$

II. $A - \emptyset = A$

III. $\emptyset - A = \emptyset$

IV. $A - B \subseteq A$,

V. $(A - B) \cap B = \emptyset$

VI. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A - B = \emptyset$

VII. $C \subseteq A - B \quad \Leftrightarrow \quad C \subseteq A \ \wedge \ C \cap B = \emptyset$

Exercicis:

18. Demostreu les propietats I., III., i VII. anteriors.
19. Demostreu les propietats II. i IV.(R) anteriors.
20. Demostreu les propietats V. i VI. anteriors.

Altres propietats:

I. **(distributiva)**

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

II. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

III. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

IV. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ i la unió és disjunta (els conjunts $(A - B)$, $(B - A)$, $(A \cap B)$ són disjunts 2 a 2)

Exercicis:

21. Demostreu les propietats I. i III. anteriors.
22. Demostreu que $(A - B) \cup (B - A) = A$ sii $B = \emptyset$.
23. Demostreu les propietats II. i IV. anteriors.
24. Raoneu si és cert o fals i demostreu-ho:
    a. (R) $A - (A - B) = A \cap B$.
    b. $(A - B) \cup B = A \cup B$.
    c. $(A - A \cap B) \cap (B - A \cap B) = \emptyset$
    d. (R) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$.
    e. Si $A \cap B = A \cap C$ llavors $B = C$.
    f. Si $A \subseteq B \cup C$ i $A \cap B = \emptyset$ llavors $A \subseteq C$.
25. Demostreu que $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$. Val la igualtat?
26. Demostreu que $A - B \subseteq C$ sii $A - C \subseteq B$ (Pista: contrarecíprocs).
27. Demostreu que si $B \cap C = \emptyset$ llavors $(A - B) \cup C \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B)$.
28. (R) Demostreu que si $B \subseteq C$ llavors $A - C \subseteq A - B$.
29. (R) Demostreu que $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$ sii $A \cap B = \emptyset$.
30. Demostreu que si $A \cap C \subseteq B \cap C$ i $A \cup C \subseteq B \cup C$ llavors $A \subseteq B$. (Pista: distingir segons $x \in C$ o no). Deduiu que si $A \cap C = B \cap C$ i $A \cup C = B \cup C$ llavors $A = B$.
31. Demostreu que si $A \cap B \neq \emptyset$ i $B \cap C^c = \emptyset$ llavors $A \cap C \neq \emptyset$.
32. Demostreu que si $A \cup C = B \cup C$ llavors $A - C = B - C$. Val el recíproc?

33. Definim la diferència simètrica $\Delta(A,B)$ de A,B així:

$$\Delta(A,B) = (A - B) \cup (B - A).$$

Demostreu que:

g. $\Delta(A,B) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A = B$

h. $\Delta(A,C) \subseteq \Delta(A,B) \cup \Delta(B,C)$

i. $\Delta(\ A, \Delta(B,C)\ ) = \Delta(\ \Delta(A,B), C\ )$

34. Demostreu que $A \cup B = A \cap B$ sii $A = B$.

35. Raoneu si és cert o fals i demostreu-ho:

a. $(A \cup B) - B = A$.

b. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

c. Si $A \cup B = \varnothing$ llavors $A = B = \varnothing$.

36. Demostreu que $(A - B) - C \subseteq A - (B \cup C)$. Val la igualtat?

37. Demostreu que si $A \cap B = \varnothing$ llavors $A - B = A$. Val el recíproc?

Complementari

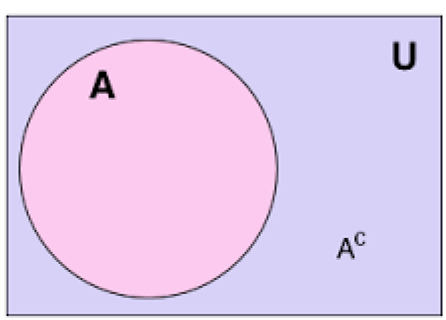
Ara suposem que hi ha un conjunt *gran* o *univers* Ω al qual pertanyen tots els elements amb els que treballarem. En particular tots els altres conjunts són subconjunts d'aquest.

Donat un conjunt A subconjunt de Ω, definim el **conjunt complementari** de A així:

$$\boxed{A^C = \Omega - A = \{\, x \in \Omega \mid x \notin A \,\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A^C \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \wedge x \notin A}$$



Par a tot $x \in \Omega$: $x \in A^C \;\Leftrightarrow\; x \notin A$

Nota: Encara que la notació A^C no ho indiqui, aquest conjunt depèn de Ω. Per exemple, el complementari de $A = \{0,1,2\}$ relatiu a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ és $\{3,4,5,6\}$ mentre que el complementari de A relatiu a $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$ és $\{3,4,5,6,7,8,9,...\}$.

Propietats:

Suposem que $A, B, C \subseteq \Omega$

I. $\left(A^C\right)^C = A$.

II. $\emptyset^C = \Omega$, $\Omega^C = \emptyset$.

III. $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cup A^C = \Omega$.

IV.

(De Morgan) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

V.

$A - B = A \cap B^C$

VI. $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; B^C \subseteq A^C \;\Leftrightarrow\; A \cap B^C = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A^C \cup B = \Omega$.

VII. $A \subseteq B^C \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A^C \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A^C \cup B^C = \Omega$.

VIII. $A^C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; B^C \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A^C \cap B^C = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \cup B = \Omega$.

IX. $B = A^C \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$.

Exercicis:

38. Demostreu les propietats II., IV. i VI. anteriors.
39. Demostreu les propietats I., III., V. i VIII.(R) alguna anteriors.

40. Demostreu les propietats VII.alguna i IX. anteriors.

Parts d'un conjunt

Donat un conjunt A definim el **conjunt de les parts** (o conjunt potència) de A així:

$$\boxed{P(A) = \{\ x \mid x \subseteq A\ \}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in P(A) \quad \Leftrightarrow \quad x \subseteq A}$$

Exemples:

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\ \{1\}\ ) = \{\ \emptyset, \{1\}\ \}$
- $P(\ \{1,2\}\ ) = \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\ \}$
- $P(\ \{1,2,3\}\ ) = \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\ \}$
- $P(\ \{1,2,3,4\}\ ) = \{\ \ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\},$
  $\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\ \ \}$

Nota: El nombre d'elements d'un conjunt A rep el nom de **cardinal de** A i es denota per $|A|$. Tenim: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Propietats:

I. $\emptyset \in P(A)$.

II. $A \in P(A)$.

Exercicis: Demostreu:

41. Les 2 propietats anteriors.
42. $\{a\} \in P(A) \quad \Leftrightarrow \quad a \in A$.
43. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

44. $A \subseteq P(A)$, $B \subseteq P(B) \Rightarrow A \cap B \subseteq P(A \cap B)$.

45. $|P(A)| = 2^{|A|}$ per inducció simple sobre $|A|$.

46. $\{a,b\} \in P(A) \Leftrightarrow a \in A,\ b \in A$.

47.(R) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

48. $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\emptyset\}$.

49. $\{A,B\} \in P(P(C)) \Rightarrow \{A \cup B\} \in P(P(C))$. Val el recíproc?

50. Són equivalents:

   a. Per a tot x,y: $y \in x \in A \Rightarrow y \in A$.

   b. Per a tot x: $x \in A \Rightarrow x \subseteq A$.

   c. $A \subseteq P(A)$.

   d. $A \in P(P(A))$.

51. (R) $A \subseteq P(A)$, $B \subseteq P(B) \Rightarrow A \cup B \subseteq P(A \cup B)$.

52. $A \subseteq P(A)$ implica $P(A) \subseteq P(P(A))$. Val el recíproc?

53. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Val la igualtat?

54. Si $A \subseteq B$ llavors $P(A) \subseteq P(B)$. Val el recíproc?

55. Si $A \cap B = \emptyset$ llavors $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$. Val el recíproc?

Parella ordenada

La parella ordenada d'objectes no la definirem formalment. Idea: la **parella ordenada** és com una llista (o vector) de longitud 2 posada entre parèntesis: (a,b).
La propietat fonamental (que podem prendre com a "definició") de les parelles ordenades és la següent:

$$\boxed{(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c\ ,\ b = d}$$

Producte cartesià

Donats dos conjunts A,B definim el **conjunt producte cartesià** de A per B així:

$$\boxed{A \times B := \{\, x \mid x = (a,b) \ \ per\ a\ uns\ certs\ a \in A\ i\ b \in B \,\}}$$

Aquest conjunt també l'escriurem, de manera més informal, així:

$$\boxed{A \times B := \{\ (a,b)\ \mid\ a \in A,\ b \in B\ \}}$$

Exemple:

$\{1,2,3,4\} \times \{a,b\} = \{\ (1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\ \}$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x = (a,b) \quad \textit{per a uns certs } a \in A \textit{ i } b \in B}$$

Sabent que els elements de $A \times B$ són tots parells ordenats, també es pot expressar així:

$$\boxed{(a,b) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \ \wedge\ b \in B}$$

Notem que: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Exercici: Demostreu aquesta fórmula per inducció.

Propietats:

I. $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$.
II. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
III. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
IV. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Exercicis: Demostreu:

56. Les propietats I. i II. anteriors.
57. $A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad o \quad A = \emptyset \quad o \quad B = \emptyset$.
58. La propietats III. (R) anterior.
59. (R) $A \times B = C \times D,\ \ B \neq \emptyset\ ,\ \ D \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = C$.

60. $(A\times A)-(B\times B)=A\times(A-B)\cup(A-B)\times(B\cap A)$.

61. (difícil) $(A\times A)-(B\times B)=(A-B)\times(A-B) \quad \Leftrightarrow \quad A\cap B=\emptyset \;\vee\; A\subseteq B$.

62. La propietat IV. anterior.

63. $(A\times A)-(B\times B)=A\times(A-B)\cup(A-B)\times A$.

64. $A\times B=(C\times D)\cup(E\times F),\; B\neq\emptyset\;,\; D\neq\emptyset\,,\; F\neq\emptyset \;\Rightarrow\; A=C\cup E$.

RECEPTES: Demostracions amb conjunts

Demostració de la igualtat entre conjunts (1a. manera)

Volem veure: $A=B$
Sigui x qualsevol: $x\in A \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \quad x\in B$

Demostració d'una inclusió entre conjunts

Volem veure: $A\subseteq B$
Sigui x qualsevol: $x\in A \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad x\in B$

Demostració de la igualtat entre conjunts (2a. manera)

Volem veure: $A = B$	
Demostrem dues coses: $A \subseteq B$, $B \subseteq A$	

Demostració que un conjunt és buit

Una bona estratègia per provar que un conjunt és buit és fer-ho per reducció a l'absurd (encara que no és pas l'únic mètode).

Volem veure: $A = \emptyset$
Per reducció a l'absurd: $\exists x \in A \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad Absurd$

Més generalment:

Demostració on intervé que un conjunt és buit

En aquest tipus de demostracions una bona estratègia és usar contrarecíproc o reducció a l'absurd per tal que la condició "ser buit" hi apareixi negada.

Notem que:

- $A \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \; x \in A$
- $A \not\subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \, (x \in A \wedge x \notin B)$
- $A \neq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \, (x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x \, (x \in B \wedge x \notin A)$

Exercici: Useu aquesta estratègia per a demostrar que:

65. $A \cap \emptyset = \emptyset$
66. $A - A = \emptyset$
67. $\emptyset - A = \emptyset$
68. $(A - B) \cap B = \emptyset$
69. $A \cap A^C = \emptyset$
70. $\Omega^C = \emptyset$

71. $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$
72. (R) $A \subseteq B$ si i només si $A - B = \emptyset$
73. $C \subseteq (A - B)$ si i només si $C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset$

3.2 RELACIONS D'EQUIVALÈNCIA

Aquí només treballarem amb relacions binàries.

Idea intuïtiva: una relació binària en un conjunt A "relaciona" parelles d'elements de A. Cada parella d'elements de A poden estar o no estar relacionats. Determinar la relació consisteix en indicar quines parelles estan relacionades i quines no.
Siguin $x, y \in A$. Si estan relacionats per la relació R ho escriurem així:

$$xRy$$

Quan no estan relacionats ho denotarem per:

$$x \not R y$$

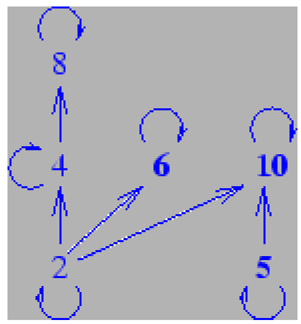
Exemples:

- Al conjunt $\mathbb{Z}$, les relacions següents:
    - "tenir el mateix residu mòdul 4"
    - "ser més petit o igual que"
    - "ser més gran que"
- Al conjunt A dels alumnes d'aquesta classe, les relacions següents:
    - "seure al costat de"
    - "calçar el mateix número que"
    - "residir a menys d'un km de"
- A un conjunt A qualsevol, les relacions següents:
    - "ser igual que"
    - la relació "buida"(ningú està relacionat amb ningú)
    - la relació "total"(tothom està relacionat amb tothom)

Una relació R en A està determinada pel conjunt dels parells que "estan relacionats" per la relació.

Exemple: $A = \{2,4,5,6,8,10\}$
$R = \{\ (2,2),(2,4),(2,6),(2,10),(4,4),(4,8),(5,5),(5,10),(6,6),(8,8),(10,10)\ \}$

Això vol dir, per exemple, que $2R4$ (2 està relacionat amb 4, ja que la parella $(2,4) \in R$) en canvi 2 no està relacionat amb 3 perquè la parella $(2,3) \notin R$.
També es poden representar les relacions mitjançant diagrames de Venn amb fletxes: cada fletxa representa una parella relacionada. L'exemple anterior seria:



En tot conjunt A sempre hi ha les relacions següents:

- La identitat en A (o igualtat), definida per: $x\, I_A\, y \ \Leftrightarrow\ x = y$:
  $I_A = \{\ (x,y) \in A \times A \ |\ x = y\ \} = \{\ (x,x)\ |\ x \in A\ \}$
- La relació buida (ningú està relacionat amb ningú): $R = \emptyset$
- La relació total (tothom està relacionat amb tothom) $R = A \times A$

Propietats importants que *poden tenir* les relacions:

Reflexiva	$\forall x \in A \ \ xRx$
Simètrica	$\forall x,y \in A\ (\ xRy \rightarrow yRx\ )$
Transitiva	$\forall x,y,z \in A\ (\ xRy \wedge yRz \rightarrow xRz\ )$
Antisimètrica	$\forall x,y \in A\ (\ xRy \wedge yRx \rightarrow x = y\ )$

Una **relació d'equivalència** és una relació binària que és reflexiva, simètrica i transitiva.

Exercicis: Sigui R una relació a A. Demostreu que:

74. R és reflexiva $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$.
75. Suposem que R és simètrica i reflexia a A. Considerem $B = \{x \in A \mid xRy \; per\ a\ algun\ y \in A\}$. Demostreu que:
    a. $B = \{x \in A \mid xRx\}$.
    b. R és una relació d'equivalència a B.
76. La intersecció de relacions d'equivalència és relació d'equivalència. Més precisament: si R, S són relacions d'equivalència en A llavors la relació T definida per $xTy \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$ és d'equivalència.
77. Si R és simètrica i antisimètrica llavors $R \subseteq I_A$.
78. (R) Una relació R a A es diu *circular* si verifica $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \rightarrow zRx)$. Demostreu que una relació binària és d'equivalència $\Leftrightarrow$ és reflexiva i circular.
79. (R) Suposem que R és irreflexiva ($\forall x \neg xRx$) i transitiva. Definim S així: $xSy \Leftrightarrow xRy \vee x = y$. Demostreu que S és reflexiva, antisimètrica i transitiva.
80. (difícil i llarg) Sigui S una relació binària qualsevol en A. Definim la relació R així: $xRy \Leftrightarrow$ existeixen $x_1, \ldots, x_n$ amb $n \geq 1$ tals que $x = x_1$, $y = x_n$ i per a tot $1 \leq i < n$ es compleix: ($x_i S x_{i+1} \vee x_{i+1} S x_i$). Demostreu que R és la més petita relació d'equivalència que conté (estén) S. Per fer això, heu de veure tres coses: 1. Que R és una relació d'equivalència. 2. Que R conté S. 3. Que si T és una relació d'equivalència que conté S llavors $R \subseteq T$ (aquí heu d'usar inducció).
81. (difícil i llarg) Sigui S una relació binària qualsevol en A. Demostreu que existeix una relació binària R en A que és la més petita relació que estén S i que es reflexiva i transitiva. Pista: modifiqueu convenientment la definició de l'exercici 10 i verifiqueu que es compleixen totes les propietats.
82. Si R és simètrica, transitiva i compleix $\forall x \in A \exists y \in A(xRy)$ llavors R és reflexiva.
83. Si R és transitiva, llavors la relació S definida per

$$xSy \Leftrightarrow x = y \vee (xRy \wedge yRx)$$

és d'equivalència.

84. Si R és reflexiva, simètrica i antisimètrica llavors $R = I_A$. Val el recíproc?

85. Suposem que R és reflexiva, antisimètrica i transitiva. Definim S així: $xSy \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$. Demostreu que S és irreflexiva ($\forall x\, \neg xSx$) i transitiva.

Classes d'equivalència i conjunt quocient

Si R és una relació d'equivalència en A i $a \in A$ la **classe de** a es defineix així:

$$\boxed{\overline{a} = \{ x \in A \mid xRa \}}$$

Per tant, donats $a, b \in A$ tenim:

$$\boxed{b \in \overline{a} \Leftrightarrow bRa}$$

El **conjunt quocient ,** que denotem per A/R , és el conjunt de totes les classes:

$$\boxed{A/R = \{ x \mid x = \overline{a} \text{ per a un cert } a \in A \} = \{ \overline{a} \mid a \in A \}}$$

Notem que:

1. Cada classe d'equivalència és un subconjunt del domini A .
2. El conjunt quocient A/R és un subconjunt de $P(A)$ (exercici: demostrar-ho).

Propietats de tota relació d'equivalència:

I. $x \in \overline{x}$.

II. Si $x \in \overline{y}$ llavors $\overline{x} = \overline{y}$.

III. Si $x \notin \overline{y}$ llavors $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

IV. Les classes formen una "partició" de A . És a dir:

   a. Cada classe és no buida (ja que $x \in \overline{x}$).
   b. Dues classes diferents són disjuntes: $\forall x, y \in A\, (\overline{x} \neq \overline{y} \rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset)$.
   c. La reunió de totes les classes és A .

Exercicis:

86. Demostreu les 4 propietats anteriors.

87. Demostreu que la relació "tenir el mateix residu mòdul 4" a $\mathbb{Z}$ és d'equivalència i que el seu conjunt quocient és $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

88. Sigui $A \subseteq \mathbb{Z}$, i a un enter fixat. La relació:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad mcm(x, a) = mcm(y, a)$$

és una relació d'equivalència a A. Calculeu el conjunt quocient quan $A = \{1, 2, ..., 11, 12\}$ i $a = 8$.

89. Si R és una relació d'equivalència a A i $x, y \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que són equivalents:

  a. $\overline{x} = \overline{y}$.
  b. Existeix $z \in A$ tal que $\overline{z} \subseteq \overline{x} \cap \overline{y}$.
  c. Per a tot $z \in A$, si $\overline{x} \cap \overline{z} \neq \emptyset$ llavors $\overline{y} \cap \overline{z} \neq \emptyset$.

90. (R) Sigui $A \subseteq \mathbb{N}$, i s l'aplicació $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per $s(n) =$ la suma dels dígits de n expressat en base 10. Demostreu que la relació

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = s(y)$$

és una relació d'equivalència a A. Calculeu el conjunt quocient quan $A = \{4, 44, 42, 22, 36, 8, 11, 35, 13, 15, 17, 18, 51, 33, 6\}$.

91. (R) Si B, C són conjunts i $B \subseteq C$, al conjunt $A = P(C)$ definim la relació següent: Donats $x, y \in P(C)$:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \cup B = y \cup B.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència. Calculeu totes les classes de R i el conjunt quocient A/R quan $C = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$.

92. (R) A $\mathbb{Z}$ definim la relació següent:

Donats $x, y \in \mathbb{Z}$, $\qquad xRy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3y = y^2 + 3x$.

Demostreu que és d'equivalència, calculeu les classes de $0, 1, 2, 3, 4$. Calculeu la classe $\overline{n}$ d'un element qualsevol n i el conjunt quocient $\mathbb{Z}/R$.

93. (R) Considerem la relació "tenir la mateixa part entera" a $\mathbb{R}$. Demostreu que és d'equivalència, calculeu les classes de $1.2,\ \pi,\ -1.2$. Descriviu el conjunt quocient.

94. (R) Si $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, considerem la relació: $(x, y)\, R\, (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad xy = x'y'$. Demostreu que és d'equivalència, calculeu les classes de $(1, 0),\ (1, 1),\ (2, 1),\ (2, 3),\ (-2, 4)$. Descriviu el conjunt quocient.

95. (R alguna) Si R és una relació d'equivalència a A i $x, y \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que són equivalents:

   a. $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$.
   b. $\overline{x} \subseteq \overline{y}$.
   c. $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{y}$.
   d. Existeix $z \in A$ tal que $\overline{x} \cup \overline{y} \subseteq \overline{z}$.
   e. Existeix $z \in A$ tal que $\overline{x} \subseteq \overline{z} \subseteq \overline{y}$.
   f. Per a tot $z \in A$, si $\overline{z} \subseteq \overline{x}$ llavors $\overline{y} \subseteq \overline{z}$.

96. Si R és una relació d'equivalència a A i $x, y, z \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que si $\overline{z} \subseteq \overline{x} \cap \overline{y}$ llavors $\overline{x} \cup \overline{y} \subseteq \overline{z}$.

97. Demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que en una relació d'equivalència no hi ha dues classes diferents, una continguda a l'altre.

98. (R) Demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que en una relació d'equivalència es verifica: si $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ i $\overline{x} \cap \overline{z} \neq \emptyset$ llavors $\overline{y} \cap \overline{z} \neq \emptyset$.

99. (difícil i llarg) Sigui S una relació a A que és reflexiva i transitiva. Demostra que la relació R definida per $xRy \Leftrightarrow xSy \wedge ySx$ és d'equivalència. En el conjunt quocient A/R definim la relació binària següent: $\overline{x} T \overline{y} \Leftrightarrow xSy$. Demostreu que està ben definida (no depèn del representant: $xSy, xRx', yRy' \Rightarrow x'Sy'$) i satisfà les propietats reflexiva, antisimètrica i transitiva (és una relació d'ordre parcial).

100. Si R és una relació d'equivalència a A i $x, y, z \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que:

$$x \in \overline{z},\ y \in \overline{z} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}.$$

101. Si R és una relació d'equivalència a A i $x, y \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que són equivalents:

   a. xRy.
   b. $x \in \overline{y}$.
   c. $\overline{x} \cup \overline{y} = \overline{y}$.

102. Si $A \subseteq \mathbb{Z}$, la relació "tenir els mateixos divisors primers " és d'equivalència a A. Calculeu el conjunt quocient quan $A = \{1, 2, \ldots, 11, 12\}$.

103. Si B, C són conjunts i $B \subseteq C$, al conjunt $A = P(C)$ definim la relació següent: Donats $x, y \in P(C)$:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \cap B = y \cap B.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència. Calculeu totes les classes de R i el conjunt quocient A/R quan $C = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{1,2\}$.

104. Sigui $A \subseteq \mathbb{Z}$, i a un enter fixat. Demostreu que la relació en el conjunt A:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad mcd(x,a) = mcd(y,a)$$

és una relació d'equivalència a A. Calculeu el conjunt quocient quan $A = \{1, 2, ..., 11, 12\}$ i $a = 8$.

105. A $\mathbb{Z}$ definim la relació següent:

Donats $x, y \in \mathbb{Z}$, $\quad xRy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2y = y^2 - 2x$.

Demostreu que és d'equivalència, calculeu les classes de $0, 1, 2, 3, 4$. Calculeu la classe $\overline{n}$ d'un element qualsevol n i el conjunt quocient $\mathbb{Z}/R$.

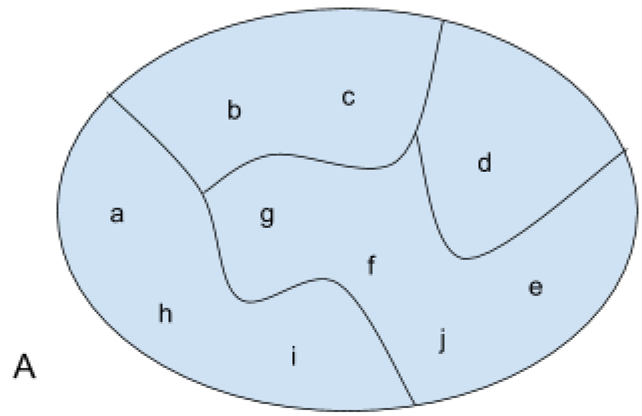
106. A $\mathbb{R}$ definim la relació següent:

Donats $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad xRy \quad \Leftrightarrow \quad xy > 0 \vee x = y = 0$.

Demostreu que és d'equivalència, calculeu totes les classes i el conjunt quocient $\mathbb{R}/R$.

PARTICIONS

La idea de partició és molt senzilla: tenim un conjunt A i el trenquem (o repartim) en trossos.



En el dibuix hem trencat el conjunt $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ en 4 trossos: $\{b,c\}$ $\{d\}$ $\{e,f,g,j\}$ $\{a,h,i\}$.
El conjunt format per aquestes 4 parts és una partició de A:

$$\{\ \{b,c\},\ \{d\},\ \{e,f,g,j\},\ \{a,h,i\}\ \}$$

Definició:

> Una **partició** P de A és un conjunt de subconjunts no buits de A, disjunts 2 a dos i tal que la seva reunió és A.

Més precisament: P és una partició de A si :

- $\forall B \in P \ \ B \subseteq A$ (de manera equivalent: $P \subseteq P(A)$).
- $\forall B \in P \ \ B \neq \emptyset$.
- $\forall B \in P \forall C \in P \ (B \neq C \to B \cap C = \emptyset)$.
- Si $P = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ llavors $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$
  ($\forall x \in A \ \exists B \in P \ \ x \in B$ si la partició no és finita).

Exemples:

A. $\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5,6,7\}\}$ és una partició de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

B. $\{\{1,3,5\},\{2,3\},\{4\},\{5,6,7\}\}$ **no** és una partició de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

C. $\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{6,7\}\}$ **no** és una partició de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Exemple/Exercici: Trobeu totes les particions del conjunt $\{1,2,3,4\}$.

Hem vist que si R és una relació d'equivalència a A, llavors A/R és una partició de A. De fet, totes les particions són el quocient d'una relació d'equivalència. Si P és una partició de A podem definir una relació R així:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ i } y \text{ pertanyen a un mateix } B \in P$$

En els exercicis veurem que és una relació d'equivalència i que el conjunt quocient és $A/R = P$.

Exercicis:

107. (R) Considerem a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la relació següent:

$$(x,y)\,R\,(z,t) \quad \Leftrightarrow \quad |x|+|y| = |z|+|t| \; .$$

a. Proveu que R és una relació d'equivalència.

b. Dibuixeu en el pla la classe del punt $(1,0)$.

c. Dibuixeu en el pla la classe del punt (a,b).

d. Doneu el conjunt quocient.

e. Quina partició determina? Dibuixeu les classes.

108. (R) Definim la funció $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ així:

$f(x,y)=1$ si $xy>0$.

$f(x,y)=0$ si $xy=0$.

$f(x,y)=-1$ si $xy<0$.

A $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definim la relació: $(x,y)R(u,v)$ sii $f(x,y)=f(u,v)$. Demostreu que és una relació d'equivalència i descriviu les classes i el conjunt quocient.

109. Sigui P una partició de A. Definim una relació R a A així:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in P(x \in B \wedge y \in B)$$

Demostreu que:

a. per a cada $x \in A$ hi ha un únic $B \in P$ tal que $x \in B$.

b. R és una relació d'equivalència a A.

c. Si $x \in B$ i $B \in P$ llavors $\bar{x} = B$.

d. $A/R = P$.

110. A $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ considerem la relació "estar a la mateixa distància de l'origen".

a. Proveu que R és una relació d'equivalència.
b. Dibuixeu en el pla la classe del punt $(1,0)$.
c. Dibuixeu en el pla la classe del punt (a,b).
d. Doneu el conjunt quocient.
e. Quina partició determina? Dibuixeu les classes.

111. A $\mathbb{Z}-\{0\}$ es defineix la relació: dos enters estan relacionats si i només si tenen mateix signe i mateixa paritat o diferent signe i diferent paritat. Demostreu que és una relació d'equivalència i descriviu les classes i el conjunt quocient.

Apèndix: Passos bàsics

En aquest apèndix intentarem donar una llista força exhaustiva de propietats o passos bàsics. I les presentarem per grups. Comencem pels passos bàsics de tipus lògic o petites implicacions lògiques.

Passos lògics: (aquí A, B, C són enunciats)

1. $A\ ,\ B \quad \Rightarrow \quad A$
2. $A \quad \Rightarrow \quad A\ o\ B$
3. $A\ o\ B,\ no\ A \quad \Rightarrow \quad B$
4. $A\ ,\ A \Rightarrow B \quad \Rightarrow \quad B$
5. $no\ B\ ,\ A \Rightarrow B \quad \Rightarrow \quad no\ A$
6. $ABSURD \quad \Rightarrow \quad A$
7. $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \quad \Rightarrow \quad A \Rightarrow C$

La manera de veure que cada una d'aquestes implicacions és correcta (aquest passos són correctes) és comprovar que cada una de les fórmules següents són tautologies:

1. $(p \wedge q) \to p$
2. $p \to (p \vee q)$
3. $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
4. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
5. $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$
6. $0 \to p$
7. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

El color vermell indica que són propietats bàsiques a partir de les quals es poden demostrar totes les altres.

A continuació donem una llista de propietats bàsiques relacionades amb la igualtat:

Passos bàsics de la igualtat (aquí $a, b, c, ..$ són nombres reals)**:**

1. $a = a$ (reflexiva)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (simètrica)
3. $a = b$, $b = c \Rightarrow a = c$ (transitiva)
4. $a = b \Rightarrow E(a) = E(b)$ (aquí $E(x)$ és una expressió on apareix x)
5. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
6. $a = b \Rightarrow ac = bc$
7. $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
8. $a = b$, $a' = b' \Rightarrow a + a' = b + b'$
9. $a = b$, $a' = b' \Rightarrow aa' = bb'$

Exercici: Demostreu que totes les propietats 5,6,7,... surten de les 4 primeres (pista: prendre $E(x)$ adequades).

Propietats bàsiques de la suma i el producte (aquí $a, b, c, ..$ són nombres reals)**:**

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Associativa de la suma)
2. $a + b = b + a$ (Commutativa de la suma)
3. $a + 0 = a$ (0 és el neutre de la suma)
4. $a + (-a) = 0$ ($-a$ és l'invers de a per la suma)
5. $a(bc) = (ab)c$ (Associativa del producte)

6. $ab = ba$ (Commutativa del producte)
7. $a1 = a$ (1 és el neutre del producte)
8. $a \neq 0 \Rightarrow a\cdot(1/a) = 1$ ($1/a$ és l'invers de a pel producte)
9. $a(b+c) = ab + ac$ (distributiva)

Passos bàsics de l'ordre (aquí $a, b, c, ..$ són nombres reals):

1. $a \leq a$ (reflexiva de $\leq$)
2. $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$ (antisimètrica de $\leq$)
3. $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitiva de $\leq$)
4. $a \leq b$ o $b \leq a$ (total)
5. **$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (compatibilitat amb la suma)**
6. **$a \leq b,\ c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$ (compatibilitat amb el producte)**
7. $a \leq b,\ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
8. $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$
9. $a^2 \geq 0$
10. $0 \leq a \leq b,\ 0 \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$
11. $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$
12. És cert $(a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2)$?
13. $a \leq b \Rightarrow a^3 \leq b^3$
14. (n natural parell) $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$
15. (n natural senar) $a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$
16. El recíproc de l'anterior

Exercici: Demostreu que totes aquestes propietats es dedueixen de les 6 primeres. Demostreu també les següents tenint en compte que $a < b$ és una abreviatura de $a \leq b \wedge a \neq b$.

17. $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$.
18. $a < b$ o $a > b$ o $a = b$.
19. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
20. $a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
21. $a < b,\ c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$.
22. $a < b \Rightarrow -a > -b$.

23. $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2$.

24. És cert $(a < b \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2)$?

25. $a < b \quad \Rightarrow \quad a^3 < b^3$.

26. (n natural parell) $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^n < b^n$.

27. (n natural senar) $a < b \quad \Rightarrow \quad a^n < b^n$.

28. El recíproc de l'anterior.

Altres:

1. a natural, b natural $\Rightarrow$ $a+b$ natural , ab natural. [8]
2. a enter, b enter $\Rightarrow$ $-a$ enter, $a+b$ enter, ab enter.
3. a racional, b racional $\Rightarrow$ $-a$ racional, $a+b$ racional, ab racional.
4. b racional, $b \neq 0$ $\Rightarrow$ $1/b$ racional.
5. a racional, b racional, $b \neq 0$ $\Rightarrow$ a/b racional.

Exercici: Demostreu que totes surten de la primera (pista: un **enter** és un element de la forma $\pm a$ amb a natural. Un **racional** és un nombre de la forma n/m amb n, m enters, $m \neq 0$).

A vegades les implicacions $\Rightarrow$ són reversibles i podem usar el $\Leftrightarrow$ en lloc de la implicació. Per exemple, els passos 5 i 8 de l'ordre són reversibles, mentre que el 19 no ho és.

[8] Podem definir els naturals així: 0 és natural i si a és natural, a+1 és natural. No hi ha més naturals que els que es construeixen aplicant un nombre finit de vegades aquestes regles.