# Capítulo 2

## Sucesiones de números reales.

### 2.1 Problemas

**1.** Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{b) } n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad \text{c) } \sqrt[n]{n}.$$

**Solución.**

**a)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \alpha^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ 1, & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ 0, & \text{si} \; -1 < \alpha < 1 \\ \nexists, & \text{si} \quad \alpha = -1 \\ \infty, & \text{si} \quad \alpha < -1 \end{cases}$, **b)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 1, & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ 0, & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$,

**c)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \left(\infty^0\right),$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de la raíz-cociente: $a_n = n, \quad a_{n+1} = n+1,$

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n+1|}{|n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = l = 1.$$

**2.** Calculeu el límit de les successions següents:

$$\text{a) } \frac{6n^3+4n+1}{2n}; \qquad \text{b) } \frac{n^2-6n-2}{3n^2-9n}; \qquad \text{c) } \left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\dfrac{2n-1}{3n-1}}.$$

**Solución.**

**a)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^3+4n+1}{2n} = +\infty,$ **b)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-6n-2}{3n^2-9n} = \frac{1}{3},$

**c)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\dfrac{2n-1}{3n-1}} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3n-1}} =$

$$= \left(\sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1}}\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

**3.** Feu servir el criteri del sandvitx per trobar, si és possible, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ on el terme general de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

**Solución.**

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = (0\cdot\infty).$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = a_n \geq b_n \\[2ex] \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = c_n \leq b_n \end{array}\right\} \Longrightarrow a_n \geq b_n \geq c_n,$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 1.$$

**4.** Calculeu el límit de les successions següents:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!}, \quad |\alpha| > 1\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\beta^n}, \quad |\beta| > 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$

**Solución.**

**a)** $|\alpha| > 1, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Para calcular este límite aplicamos el criterio del cociente: $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!},$

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{\alpha^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\alpha^{n+1}\right| n!}{(n+1)!\,|\alpha^n|} =$$

$$= \lim \frac{|\alpha|^{n+1}\,n!}{(n+1)\,n!\,|\alpha|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha|}{(n+1)} = 0 \,<\, 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

**b)** $|\beta| > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\beta^n} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Para calcular este límite aplicamos el criterio de la raíz: $a_n = \dfrac{n^\alpha}{\beta^n},$

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^\alpha}{\beta^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{|\beta^n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^\alpha}}{\sqrt[n]{|\beta^n|}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha}{\sqrt[n]{|\beta|^n}} = \frac{1^\alpha}{|\beta|} = \frac{1}{|\beta|} < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\beta^n} = 0.$$

**5.** Calculeu el límit de les successions següents:

a) $\dfrac{\cos n}{n^2}\,;$ b) $\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\,;$ c) $\left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{\dfrac{2n-1}{5}}\,;$ d) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}.$

**Solución.**

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\cdot\cos n\right) = (0\cdot \text{acotada}) = 0.$

**b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n} = \left(\dfrac{(+\infty)+(+\infty)}{(+\infty)-(+\infty)}\right) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n\left(\dfrac{2^n}{3^n}+1\right)}{3^n\left(\dfrac{2^n}{3^n}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = -1.$

**c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{\dfrac{2n-1}{5}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-3}-1\right)\dfrac{2n-1}{5}} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2-n+3}{n-3}\cdot\dfrac{2n-1}{5}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n-3}\cdot\dfrac{2n-1}{5}} = e^2.$$

**d)** $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sqrt{\frac{n+1}{2}} =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sqrt{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sqrt{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**6.** Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = -2/3$ i $3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \geq 1$.

a) Proveu que $-2 \leq a_n \leq 1$, per a tot $n \geq 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

**Solución.**

**a)** Método de la inducción matemática.

Paso base. $-2 \leq a_1 = -\dfrac{2}{3} \leq 1.$

Paso inducción ($n \geq 2$).

Hipótesis: $-2 \leq a_n \leq 1.$ Tesis: $-2 \leq a_{n+1} \leq 1.$

Partiendo de la hipótesis

$-2 \leq a_n \leq 1 \Longrightarrow -8 \leq a_n^3 \leq 1 \Longrightarrow -8+2 \leq a_n^3+2 \leq 1+2 \Longrightarrow -6 \leq a_n^3+2 \leq 3 \Longrightarrow$

$-\dfrac{6}{3} \leq \dfrac{a_n^3+2}{3} \leq \dfrac{3}{3} \Longrightarrow -2 \leq a_{n+1} \leq 1$ llegamos a la tesis.

**b)** $(a_n)$ es creciente $\Longleftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \;\forall\, n \geq 1.$

Método de la inducción matemática.

Paso base. $a_2 = \dfrac{a_1^3+2}{3} = \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3+2}{3} = \dfrac{-\frac{8}{27}+\frac{54}{27}}{3} = \dfrac{46}{81} \geq -\dfrac{2}{3} = a_1.$

Paso inducción ($n \geq 2$).

Hipótesis: $a_n \geq a_{n-1}$. Tesis: $a_{n+1} \geq a_n$.

Partiendo de la hipótesis

$a_n \geq a_{n-1} \Longrightarrow a_n^3 \geq a_{n-1}^3 \Longrightarrow a_n^3+2 \geq a_{n-1}^3+2 \Longrightarrow \dfrac{a_n^3+2}{3} \geq \dfrac{a_{n-1}^3+2}{3} \Longrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

llegamos a la tesis.

**c)** $\left.\begin{array}{l} b) \Rightarrow (a_n)\,\text{creciente} \\ a) \Rightarrow (a_n)\,\text{acotada superiormente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow (a_n)\,\text{convergente}.$

Cálculo: $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3+2}{3}$ ¿ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^3+2}{3}$ ? Sí.

$l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^3+2}{3} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^3+2}{3} = \frac{l^3+2}{3}$

$\Longrightarrow l = \dfrac{l^3+2}{3} \Longrightarrow l^3-3l+2=0 \Longrightarrow (l-1)^2(l+2)=0 \Longrightarrow l=1,\, l=-2.$

Nota: $l \neq -2$ ya que $a_1 = -\dfrac{2}{3}$ y $(a_n)$ es creciente $\Longrightarrow l = 1.$