1. *(3 punts)* Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

2. *(4 punts)* Sigui $f(x) = x\sin x - \dfrac{1}{100}$.

a) Demostreu que la funció té un únic zero entre 0 i 0.2.

b) Per trobar el valor aproximat d'aquest zero:

(1) Sigui $g(x)$ la funció obtinguda al substituir $\sin x$ pel seu polinomi de Taylor de grau 1 al voltant de 0 en la expressió de $f(x)$.
Resoleu l'equació $g(x) = 0$.

(2) Comproveu que el valor positiu obtingut en (1) és una aproximació del zero de $f(x)$ en l'interval $(0, 0.2)$ amb un error menor que 10^{-2} (Indicació: podeu fer servir el Teorema de Bolzano en un subinterval convenientment escollit).

3. *(3 punts)* Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = |x| + e^{x/2}$ i les rectes $y = 0, x = -2$ i $x = 3$.

1. *(3 punts)* Calculeu el límit de les successions següents:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$

SOLUCIÓ:

a) Primer es multipliquen el numerador i el denominador de l'exponent per $(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})$. Després d'operar s'obté la indeterminació $1^{+\infty}$ i es resol de la manera habitual:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}-1\right)\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}\sqrt{2n}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})} = e.$$

b) Utilitzarem el criteri de arrel-quocient:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n^n n!}{(2n)!}}{\dfrac{(n-1)^{n-1}(n-1)!}{(2(n-1))!}} =$$

Simplificant:

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4n-2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\,e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\,e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}(n-1)} = \frac{e}{4}.$$

2. *(4 punts)* Sigui $f(x) = x \sin x - \dfrac{1}{100}$.

a) Demostreu que la funció té un únic zero entre 0 i 0.2.

b) Per trobar el valor aproximat d'aquest zero:

(1) Sigui $g(x)$ la funció obtinguda al substituir $\sin x$ pel seu polinomi de Taylor de grau 1 al voltant de 0 en la expressió de $f(x)$.
Resoleu l'equació $g(x) = 0$.

(2) Comproveu que el valor positiu obtingut en (1) és una aproximació del zero de $f(x)$ en l'interval $(0, 0.2)$ amb un error menor que 10^{-2} (Indicació: podeu fer servir el Teorema de Bolzano en un subinterval convenientment escollit).

SOLUCIÓ:

Considerem la funció $f(x) = x \sin x - \dfrac{1}{100}$.

a) La funció f és contínua i derivable en tota la recta real (és la suma d'una funció constant amb el producte de una funció lineal per la funció sinus, totes contínues i derivables en tota la recta real).

En particular f és contínua en l'interval $[0, 0.2]$. A més $f(0) = -0.01 < 0$ i $f(0.2) \simeq 0.02973386616 > 0$. En aquestes condicions, el Teorema de Bolzano demostra l'existència d'un zero de $f(x)$ en l'interval $(0, 0.2)$.

Passarem a demostrar la unicitat. Es pot fer per reducció a l'absurd: si hi haguessin dues solucions diferents $a, b \in [0, 0.2]$, amb $a < b$, llavors per ser f una funció contínua i derivable en tota la recta real, el teorema de Rolle assegura que existiria un $c \in (a, b) \subseteq (0, 0.2)$ amb $f'(c) = 0$, però $f'(x) = \sin x + x \cos x$ que no s'anul·la en cap punt de l'interval obert $(0, 0.2)$.

b) Seguirem els passos indicats:

(1) Donat que $\sin 0 = 0$, la derivada de $\sin x$ és $\cos x$ i $\cos 0 = 1$, el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $\sin x$ al voltant de 0 és $P_1(x) = x$.
Per tant $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{100}$.
Aleshores $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{100} = 0 \Leftrightarrow (x = 0.1) \vee (x = -0.1)$. Per tant, les solucions de l'equació són 0.1 i -0.1.

(2) Per tal de comprovar que el valor positiu obtingut en (1), que és 0.1, és una aproximació del zero de $f(x)$ en l'interval $(0, 0.2)$ amb un error menor que $10^{-2} = 0.01$ es pot fer seguint la indicació:
La funció f és contínua en l'interval $[0.1 - 0.01, 0.1 + 0.01] = [0.09, 0.11]$. A més $f(0.09) \simeq -0.001910930572 < 0$ i $f(0.11) \simeq 0.00207561309 > 0$. En aquestes condicions, el Teorema de Bolzano demostra l'existència d'un zero de $f(x)$ en l'interval $(0.09, 0.11)$, que és un interval centrat en 0.1 i té radi 10^{-2}.

3. *(3 punts)* Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = |x| + e^{x/2}$ i les rectes $y = 0, x = -2$ i $x = 3$.

SOLUCIÓ: $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$ i la funció $f(x) = |x| + e^{x/2}$ és positiva en l'interval $[-2, 3]$,per tant l'àrea demanada, que és l'àrea sota la corba $y = f(x)$ en aquest interval és:

$$\text{Àrea} = \int_{-2}^{3} (|x| + e^{x/2})\, dx = \int_{-2}^{0} (-x + e^{x/2})\, dx + \int_{0}^{3} (x + e^{x/2})\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2e^{x/2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 2e^{x/2} \right]_{0}^{3} = \frac{13}{2} - 2\, e^{-1} + 2\, e^{3/2}.$$