**RESPOSTES**

1 **(a$_1$)** Enuncieu el teorema de Bolzano.

**(a$_2$)** Demostreu que l'equació $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2$ té una solució. Doneu un interval de longitud 1 amb la solució.

**(b$_1$)** Enuncieu el teorema de Rolle.

**(b$_2$)** Demostreu que l'equació $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2$ té només una solució real.

**Resolució**: $(0.25 + 1 + 0.25 + 1 = 2.5$ punts)

**(a$_1$)** *Teorema de Bolzano. Siguin $a < b$ nombres reals, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix un nombre real $\xi$, amb $a < \xi < b$ tal que $f(\xi) = 0$.*

**(a$_2$)** *Sigui $f_1(x) = 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, l'equació s'escriu $f_1(x) = 2$ o $f_1(x) - 2 = 0$. Una demostració vàlida s'obté fent servir del teorema de Bolzano i la funció $g(x) = f_1(x) - 2$. Comprovació, $g(0) = -4 + \cos(0) = -3$, $g(2) = 6 - 4 + \cos(\pi) = 6 - 5 = 1$, i del fet que $\cos(t)$ és contínua a tot $\mathbb{R}$, podem concloure que $g(x)$ és contínua en qualsevol interval que considerem. És a dir $g(x)$ satisfà les hipotesis del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$, així hi ha una solució de l'equació demanada. Calculant, $g(1) = 3 - 4 + \cos(\pi/2) = -1$, i l'interval demanat és $[1, 2]$.*

**(b$_1$)** *Teorema de Rolle. Siguin $a < b$ nombres reals, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en $(a, b)$, tal que $f(a) = f(b)$, aleshores existeix un nombre real $\xi$, amb $a < \xi < b$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

**(b$_2$)** *Demostració per "reducció a l'absurd". La equació no pot tindre dues solucions, ja que de tenir-les la funció $g$ de l'apartat* **(a$_2$)** *verificaria totes les hipotesis del teorema de Rolle amb $g(a) = g(b) = 0$, i existiria un nombre real $\xi$ tal que $g'(\xi) = 0$ fet que no és cert. Comprovació, $g$ és contínua i derivable per a qualsevol real, amb $g'(x) = 3 - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, llavors $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{6}{\pi}$ i del fet que $\frac{6}{\pi} > 1$ resulta que no existeix $\arcsin\left(\frac{6}{\pi}\right)$; llavors podem concloure que $g'(x) \neq 0$ per a qualsevol real $x$.*

Exercici 2 $\longrightarrow$

**2** Considereu la paràbola d'equació $y = x^2$,

**(a)** Escriviu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $P(-1, 1)$.

**(b)** Doneu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

**(c)** Representeu gràficament $\mathcal{R}$, el recinte del pla limitat per la paràbola i les dues rectes tangents anteriors.

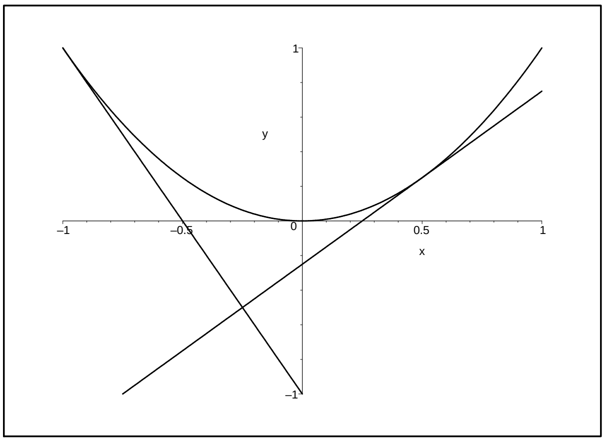
**(d)** Calculeu l'àrea del recinte $\mathcal{R}$.

**Resolució**: $(0.5 + 0.5 + 0.5 + 1 = 2.5$ punts)

**(a)** La recta tangent a la paràbola en el punt d'abscisa $x = -1$ és $y = -2x - 1$.

**(b)** La recta tangent a la paràbola en el punt d'abscisa $x = \frac{1}{2}$ és $y = x - \frac{1}{4}$.

**(c)** Una representació gràfica vàlida del recinte del pla limitat per la paràbola i les dues rectes tangents és:




**(d)** L'abscisa del punt d'intersecció de les dues rectes tangents és $x = -\frac{1}{4}$. L'àrea es pot calcular per

$$\int_{-1}^{-1/4} x^2 - (-2x - 1)\, dx + \int_{-1/4}^{1/2} x^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)\, dx = \frac{9}{32}u^2 = 0.28125u^2\,.$$

Exercicis 3 i 4 $\longrightarrow$

**3** Es demana,

**(a)** Escriviu l'equació del pla tangent a la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per l'equació: $z = \sqrt[3]{x\,y}$, en el punt $P\,(1,\,1,\,1)$.

**(b)** Calculeu aproximadament mitjançant un polinomi de primer grau la quantitat $\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01}$.

**(c)** Feu servir la fórmula de propagació de l'error per calcular una cota superior de l'error comès a l'apartat **(b)**.

**(d)** Calculeu l'error en l'aproximació de l'apartat **(b)**. Compareu-lo amb el resultat de l'apartat **(c)**, feu-ne una anàlisi.

**Resolució**: $(1 + 1 + 0.25 + 0.25 = 2.5$ punts)

**(a)** *L'equació del pla tangent en el punt* $P\,(1,\,1,\,1)$ *és* $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3}$.

**(b)** *Substituint* $x = 0.99$ *i* $y = 1.01$ *a* $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3}$ *obtenim un valor aproximat de la quantitat* $\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01}$ *pel polinomi de Taylor de primer grau de la funció* $f(x,y) = \sqrt[3]{x\,y}$ *en* $(x,y) = (1,1)$. *El valor resultant és* 1, *llavors* $\sqrt[3]{0.99 \cdot 1.01} \approx 1$

**(c)** *La fórmula de propagació de l'error per al nostre cas és*

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)\right| \cdot 0.1 + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\right| \cdot 0.1 = \frac{2}{30} \approx 0.00667.$$

**(d)** *L'error en l'aproximació de l'apartat* **(b)** *és* $|1 - .99996667| = .00003333$. *S'observa que l'error obtingut és molt inferior a la cota obtinguda amb la fórmula de propagació de l'error.*

**4** Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^4 + y^2$,

**(a)** Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de $f$ en el seu domini.

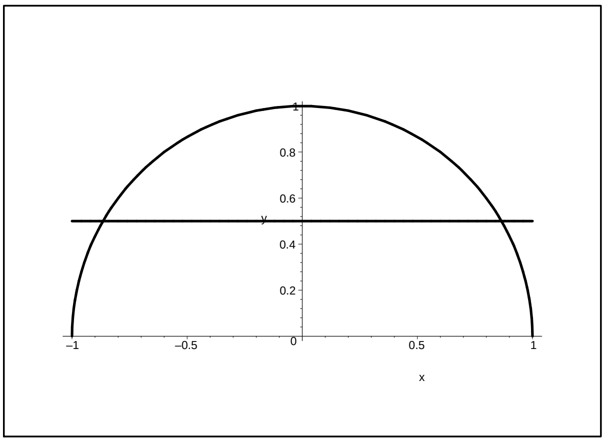
**(b)** Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de $f$ en el recinte

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x^2 + y^2 \leq 1\,, \quad y \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

**(c)** Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de $f$ en el recinte $\mathcal{K}$.

**Resolució**: $(1 + 0.5 + 1 = 2.5$ punts)

**(a)** *El domini de la funció és* $\mathbb{R}^2$. *En aquest domini la funció presenta només un punt crític que és* $(0,0)$. *S'observa que* $f(0,0) = 0$ *i que en qualsevol altre punt la funció és positiva, llavors* $(0,0)$ *és un mínim relatiu.*




**(b)** *Una representació gràfica d'una part del cercle $x^2+y^2=1$ i de la recta $y=\dfrac{1}{2}$ ens permet visualtizar el recinte $\mathcal{K}$, que consta dels punts del pla de dins del cercle de radi 1 amb ordenada més gran que $\frac{1}{2}$.*

*$\mathcal{K}$ és un conjunt fitat. Comprovació, una bola tancada de centre $(0,0)$ i radi 2 (conjunt fitat) conté al conjunt $\mathcal{K}$.*

*$\mathcal{K}$ és un conjunt tancat, els punts de la frontera són al conjunt. Els punts $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ de la frontera satisfan $x^2+y^2=1$ amb $\frac{1}{2}\le y\le 1$ o bé $y=\frac{1}{2}$ per a $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

*La funció $f$ és contínua en el conjunt $\mathcal{K}$ tancat i fitat, llavors la funció té màxim i mínim absoluts (T. de Weierstrass).*

**(c)** *Els candidats a màxim i mínim absolut, per aquest cas són:*

1. *Les punxes del recinte $\mathcal{K}$ de coordenades $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.*
2. *Els extrems de $f$ sobre la semirecta $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y=\frac{1}{2}\right\}$. S'obté el punt de coordenades $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, optimitzant la funció $f(x,\frac{1}{2})=x^4+\frac{1}{4}$.*
3. *Els extrems de $f$ sobre l'arc de circumfència $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x^2+y^2=1\right\}$. Fent ús del mètode dels multiplicadors de Lagrange s'obtenen tres punts, les coordenades dels quals són $(0,1)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.*

*Per a decidir, cal avaluar la funció en tots els candidats. Els valors són*

$$
\begin{aligned}
&f\left(0,\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{4}=0.25,\\
&f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.75,\\
&f\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right)=f\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right)=0.8125,\\
&f(0,1)=1.
\end{aligned}
$$

*El màxim absolut s'obté en el punt de coordenades $(0,1)$ i val 1.*

*El mínim absolut s'obté en el punt de coordenades $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ i val $\dfrac{1}{4}$.*