3. CONJUNTS I RELACIONS

3.1. CONJUNTS

① $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad Y = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$

$Z = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$

a) $1 \in X$ ✓ $\quad 1 \in Y$ NO $\quad 1 \in Z$ NO

b) $\{1\} \in X$ NO $\quad \{1\} \in Y$ NO

$\{1\} \subseteq X$ ✓ $\quad \{1\} \subseteq Y$ NO

$\{1\} \subseteq Z$ NO $\quad \{3,4\} \in X$ NO

$\{3,4\} \in Z$ NO $\quad \{3,4\} \subseteq X$ ✓

$\{3,4\} \subseteq Y$ NO $\quad \{3,4\} \subseteq Z$ NO

② $$\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \longleftrightarrow \underbrace{\forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in A)}_{\forall x \left[\underbrace{(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)}_{x \in A \leftrightarrow x \in B}\right]} \overset{?}{=} 1$$

ped

4 i 5

Demostrar:

I $A \cup A = A$

II $A \cup \emptyset = A$

III $A \cup B = B \cup A$

IV $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

V $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

VI $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

VII $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \quad B \subseteq C$

I Hem de veure $\underset{1}{A \cup A \subseteq A}$ i $\underset{2}{A \subseteq A \cup A}$

1 $x \in A \cup A \Rightarrow x \in A$ ó $x \in A \Rightarrow x \in A$ ✓

2 $x \in A \Rightarrow x \in A$ ó $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A$

$p \equiv p \vee p$

II $A \cup \emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A \cup \emptyset$

$x \in A$ ó $\underbrace{x \in \emptyset}_{\text{és fals!}} \Rightarrow x \in A$ ✓

$p \vee 0 \equiv p$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ ó fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ ó $x \in \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cup \emptyset$

III $A \cup B \subseteq B \cup A$ i $B \cup A \subseteq A \cup B$

igual

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$x \in B$ ó $x \in A$

✓

IV $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$\subseteq$) $x \in A$ ó $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$ ó $x \in C$

mutatis mutandi

✓

$\supseteq$) ✓

V $A \subseteq B \cup A$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ ó qualsevol cosa $\Rightarrow x \in A$ o $x \in B$

→ Simètric per $B \subseteq A \cup B$

VI $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$\Rightarrow$) $\forall x \in A \to x \in B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ o } x \in B \overset{*}{\Rightarrow} x \in B \text{ ó } x \in B \checkmark \\ x \in B \Rightarrow x \in B \text{ ó qualsevol cosa} \Rightarrow x \in A \text{ ó } x \in B \Rightarrow \checkmark \end{cases}$

(*) Teorem

~~Només cal que demostrem ① , ja que ② és simètric~~

~~Tenim $A \subseteq C$ Volem $A \cup B \subseteq C$~~

~~$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$~~

$p \to q$

$r \to s$

$p \vee r \to q \vee s \equiv (p \to q) \wedge (r \to s)$

$\neg p \wedge \neg r \vee q \vee s \qquad (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$

$\neg p \wedge \neg r \vee \neg p \wedge s \vee q \wedge \neg r \vee q \wedge s$

$(p \to q) \wedge (r \to q) \equiv p \vee r \to q$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg r \vee q$

$\neg p \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \vee q \wedge \neg r \vee q \wedge q$

$\neg p \wedge (\neg r \vee q) \vee (q \wedge \neg r) \qquad q$

$q.$

$\Leftarrow)$ Tenim $A \cup B \overset{(*)}{=} B$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ o qualsevol cosa $\Rightarrow x \in A$ ó $x \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cup B \overset{(*)}{=} B \Rightarrow x \in B$ ✓

Hem vist $\forall x \in A \rightarrow x \in B$

(VII) $A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C$ i $B \subseteq C$

$\Rightarrow)$ Tenim $A \cup B \subseteq C$ $(*)$

Volem $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$

Vegem $A \subseteq C$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ o qualsevol cosa $\Rightarrow x \in A$ ó $x \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cup B \overset{(*)}{\Rightarrow} x \in C$ ✓

Vegem $B \subseteq C$

igual que

$\Leftarrow)$ Tenim $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B \Rightarrow x \in C$ ó $x \in C \Rightarrow x \in C$

(hem fet $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \vee r \rightarrow q$)

7-8-9

Resolver:

I $A \cap A = A$

II $A \cap \emptyset = \emptyset$

III $A \cap B = B \cap A$

IV $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

V $A \cap B \subseteq A$

VI $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

VII $C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A$ i $C \subseteq B$

I $\subseteq$] $x \in A \cap A \Rightarrow x \in A$ i $x \in A \Rightarrow x \in A$ ✓

$\supseteq$] $x \in A \underset{\uparrow}{\Rightarrow} x \in A$ i $x \in A \Rightarrow x \in A \cap A$

$p = p \wedge p$

II

$\subseteq$] $x \in A \cap \emptyset \Rightarrow x \in A$ i $\underbrace{x \in \emptyset}_{\text{fals}} \Rightarrow$ qualsevol cosa

$\supseteq$] $\emptyset \subseteq A \ \forall A$ (ja demostrat abans)

III $x \in A$ i $x \in B \iff x \in B$ i $x \in A$ → " $\wedge$ és commutativa"

IV $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$\subseteq$] $x \in A$ i $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ i $x \in B$ i $x \in C$

→ L "i" és associativa i commutativa

V $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in A$

$p \wedge q \to p$

VI $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$\Rightarrow$) Tenim $A \subseteq B$

Volem $A \cap B = \cancel{B}A$

ja sabem que $A \cap B \subseteq \cancel{B}A$ sempre.

Només cal veure $\cancel{B}A \subseteq A \cap B$

$x \in A \Rightarrow x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

ja que $p \wedge (p \to q) \equiv p \wedge q$

$\Leftarrow$) Tenim $A \cap B = A$ (*)

Volem $A \subseteq B$

$x \in A \underset{(*)}{\Rightarrow} x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in B$

$p \wedge q \to p$

VII $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \subseteq B$

$\Rightarrow$) $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ i $x \in B$

$\Leftarrow$) $x \in C \Rightarrow x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

(12) $A \subset B$

$$\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists y \, (y \in B \wedge y \notin A)$$

(13) $A \neq \emptyset$

$$\exists x \in A$$

(14) $\neg (A \subset B)$

$$\neg \left[\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B) \right] \equiv \exists x \, \neg \underbrace{(x \in A \rightarrow x \in B)}_{x \notin A \vee x \in B} \equiv$$

$$\equiv \exists x \, (x \in A \wedge x \notin B)$$

(15) $A \cap B \neq \emptyset$

$$\exists x \in A \cap B \equiv \exists x \, (x \in A \wedge x \in B)$$

⚠ S'entén ara que $\exists x (\varphi \wedge \psi) \neq \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$

18 - 19 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

I $A \setminus A = \emptyset$

II $A \setminus \emptyset = A$

III $\emptyset \setminus A = \emptyset$

IV $A \setminus B \subseteq A$

V $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

VI $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset$

VII $C \subseteq A \setminus B \iff C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset$

I $\subseteq$] $\left(x \in A \text{ i } x \notin A \Rightarrow \text{fals} \Rightarrow x \in \{x \mid x \neq x\} \right)$

$\uparrow$

$p \wedge \neg p \to 0$

Si això no convenç, fem-ho per reducció a l'absurd:

Suposem que $\exists x \in A \setminus A$. Veurem que porta a contradicció.

$\exists x \in A \setminus A \Rightarrow x \in A$ i $x \notin A \Rightarrow 0$!!!

$\supseteq$] $\emptyset \subseteq B \quad \forall B$ fet

I) $A \setminus \emptyset = A$

$\subseteq$] $x \in A \setminus \emptyset \Rightarrow x \in A$ i $x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A$

cert

$p \wedge 1 \equiv p$

$\supseteq$] $x \in A \Rightarrow x \in A$ i qualsevol cosa sempre certa $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ i $x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A \setminus \emptyset$

II) $\emptyset - A = \emptyset$

$\supseteq$] sempre

$\subseteq$] $\left(x \in \emptyset \setminus A \Rightarrow x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow \text{fals i cert} \Rightarrow \text{fals} \right)$

Si no ens convenç, podem fer-ho per reducció a l'absurd.

Veurem que si $\exists x \in \emptyset \setminus A$ arribarem a un absurd

$\exists x \in \emptyset \setminus A \Rightarrow \exists x (x \in \emptyset \wedge x \notin A) \Rightarrow \exists x\, 0 \Rightarrow 0$

IV) $A \setminus B \subseteq A$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ i $x \notin B \Rightarrow x \in A$ ✓

(V) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

$\supseteq$] sempre ✓

$\subseteq$] Fem reducció a l'absurd.

Suposem que $\exists\, x \quad x \in A \setminus B \wedge x \in B$

i arribarem a un absurd

$\exists x \quad x \in A \setminus B$ i $x \in B \Rightarrow x \in A \wedge \underbrace{x \notin B \wedge x \in B}_{\emptyset}$

$\Rightarrow$ fals!!

(VI) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

$\Rightarrow$] Tenim $A \subseteq B$

Volem $A \setminus B = \emptyset$ Només cal provar $A \setminus B \subseteq \emptyset$

Fem-ho per reducció a l'absurd

$\exists x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ i $x \notin B \underset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} x \in B$ i $x \notin B$

$\Rightarrow$ fals.

$\Leftarrow$] Tenim $A \setminus B = \emptyset$

$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \vee \underbrace{x \in A \wedge x \notin B}_{\emptyset}$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$ ✓

VII $C \subseteq A \setminus B \iff C \subseteq A \wedge C \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow]$ Tenim $C \subseteq A \setminus B$ (*)

Volem $\underbrace{C \subseteq A}_{1}$ i $\underbrace{C \cap B = \emptyset}_{2}$

1 $x \in C \underset{(*)}{\Longrightarrow} \cancel{x \in A \setminus B}\ x \in A$ i $x \notin B \Rightarrow x \in A$

$p \wedge q \to p$

2 Només cal veure que $\nexists\, x \in C \cap B$

Si $\exists\, x \in C \cap B \Rightarrow x \in C$ i $x \in B \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \underbrace{x \in A \text{ i } x \notin B \text{ i } x \in B}_{\emptyset} \Rightarrow \emptyset$!!!

$\Leftarrow]$ $x \in C \Rightarrow x \in A$

Volem veure que $x \notin B$

Si $x \in B$ i $x \in C \Rightarrow$!!! (ja que $C \cap B = \emptyset$)

21 22 23

I $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

II $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

III $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

IV $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

a més, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ són disjunts 2 a 2.

I → És fer servir $\wedge$, $\vee$

II

III $\subseteq$] $x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Rightarrow$

$p \equiv p \wedge p$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \Rightarrow$ ✓

$\supseteq$] igual que $\uparrow$ aplicant $p \wedge p \equiv p$

IV $\subseteq$] $x \in A$ o $x \in B \Rightarrow$ ✓

$p \vee q \equiv p \wedge \neg q \vee p \wedge q \vee q$

$\supseteq$] ✓

(24)

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

→ Si $A \cap B = \emptyset$. Si $x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in A \wedge \underbrace{x \notin (A \setminus B)} \Rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \notin A}_{\ominus} \vee \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{\ominus}$$

$$\neg [x \in A \setminus B] \Leftrightarrow \neg [x \in A \wedge x \notin B] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$$

$\Rightarrow \ominus$!!

O sigui, $A \cap B \Rightarrow A \setminus (A \setminus B) = \emptyset$

→ Suposem $A \cap B \neq \emptyset$

$\exists x \in A \cap B \Rightarrow \exists x \quad x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in A \setminus (A \setminus B)$

ja que: $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in (A \setminus B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow$$

$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

b) $(A\setminus B)\cup B \overset{?}{=} A\cup B$

$\underbrace{(x\in A \wedge x\notin B)\vee x\in B}_{} \iff (x\in B \vee x\in A)\wedge \underbrace{(x\in B \vee x\notin B)}_{1}$

distributiva

→ ¿ cal fer els casos $A=\emptyset$, $A=B=\emptyset$

c) $(A\setminus A\cap B)\cap(B\setminus A\cap B) \overset{?}{=} \emptyset$

Fem-ho per reducció a l'absurd.

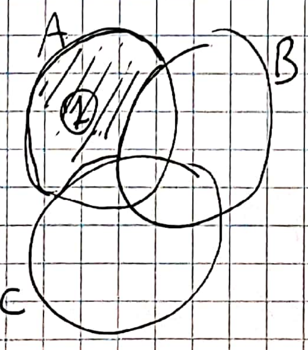
$\exists x \mid \underbrace{x\in A}_{} \wedge x\notin A\cap B \wedge x\in B \wedge \underbrace{x\notin A}_{} \wedge x\in B$

0

d) $\overbrace{A\setminus(B\cup C)}^{①} \overset{?}{=} \overbrace{A\setminus B \cup A\setminus C}^{②}$

① $x\in A \quad x\notin(B\cup C) \iff x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C \iff$

② $x\in A\wedge x\notin B \vee x\in A\wedge x\notin C \iff x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)$



queda clar que $A\cap C\subseteq A\setminus B\cup A\setminus C$

$A\cap B\subseteq A\setminus B\cup A\setminus C$

però $A\cap C\not\subseteq A\setminus(B\cup C)$

↑

sempre que $A\cap C\neq\emptyset$

Per tant, en general d és fals,

ja que si $A \cap C \neq \emptyset$

$\exists x \in A \cap C$ i $x \notin A \setminus (B \cup C)$

Però $x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

e) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$??

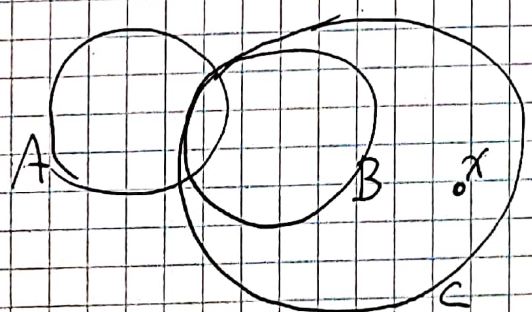
c) $x \in B \Rightarrow$ si $x \notin C$, llavors

$x \notin A \cap C = A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$ i $x \notin A \vee x \notin C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \wedge (x \notin A \vee x \notin C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \vee$ ~~...~~ No surt.

Potser és fals!



Clàrament, $A \cap B = A \cap C$

però pot $\exists x \in C$ i $x \notin B$

f) $A \subseteq (B \cup C)$ i $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq C$

$x \in A \Rightarrow x \in B$ ó $x \in C$

Veiem $x \in C$. Intentem veure que $x \notin B$

Si $x \in B \Rightarrow x \in A$ i $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow$!!

25) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$

$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow$

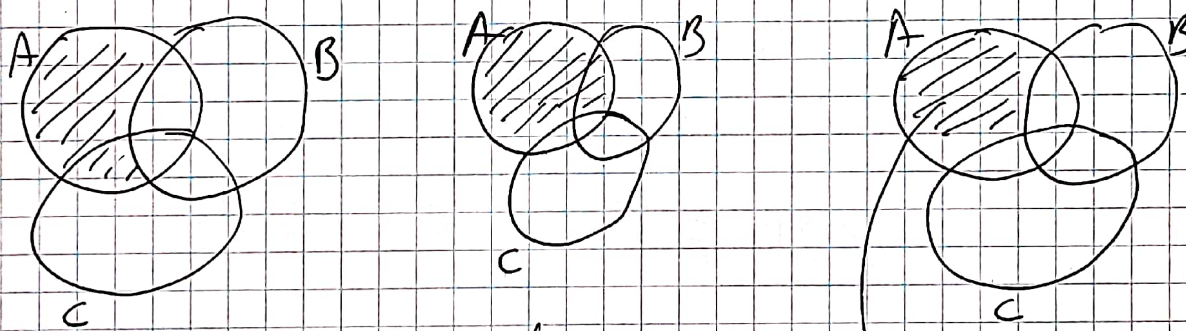
$p \wedge q \wedge p \wedge r \to p \wedge q \vee p \wedge r$

$\cancel{\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$ ✓

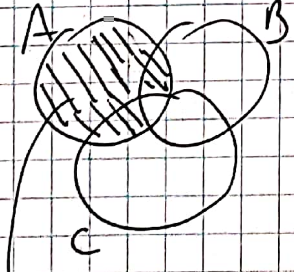
La igualtat <u>no</u> és certa!



/// → $A \setminus B$

$A \setminus C$

$A \setminus B \cap A \setminus C$



$A \setminus (B \cap C)$

→ per tant, si $\exists x \in B \cap A \setminus C$

ó si $\exists x \in C \cap A \setminus B$

llavors no es compleix la igualtat

(26) $A \setminus B \subseteq C \iff A \setminus C \subseteq B$

$\Rightarrow$] Veurem $A \setminus C \not\subseteq B \Rightarrow A \setminus B \not\subseteq C$

Cal veure que $\exists\, x \in A \setminus B \mid x \notin C$

Sabem que $\exists\, y \in A \setminus C \mid y \notin B$

O sigui, $\exists\, y \in A \wedge y \notin \cancel{B} \wedge y \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \quad y \in A \wedge y \notin B \wedge y \notin \cancel{B} \Rightarrow$

ordre

$\Rightarrow \exists\, y \in A \setminus B \mid y \notin C$ ✓

$\Leftarrow$] Veurem $A \setminus B \not\subseteq C \Rightarrow A \setminus C \not\subseteq B$

O sigui, cal veure $\exists\, x \in A \setminus C \mid x \notin B$

Tenim $\exists y \quad y \in A \wedge y \notin B \wedge y \notin C$

$\Rightarrow \exists y \quad y \in A \wedge y \notin C \wedge y \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists y \quad y \in A \setminus C \wedge y \notin B$ ✓

(27)

$$B \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \cup C \subseteq (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$$

Hem de veure

$$\underbrace{x \in A \setminus B \text{ ó } x \in C} \overset{?}{\Rightarrow} x \in (A \cup B \cup C) \wedge x \notin A \cap B$$

$$x \in A \wedge x \notin B \vee x \in C \overset{?}{\Rightarrow} (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

Recordem que $p \vee q \to r \equiv \underbrace{(p \to r)}_{A} \wedge \underbrace{q \to r}_{B}$

Per tant:

(I) $x \in A \wedge x \notin B \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{(x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)}$

$$\underbrace{(x \notin A \wedge x \in A)}_{0} \vee (x \in A \; x \notin B) \vee (x \in B \; x \notin A) \vee \underbrace{(x \in B \; x \notin B)}_{0}$$

$$\vee (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B)$$

és cert!, ja que $p \wedge q \to p \wedge q \vee$ "coses"

(II) $x \in C \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{(x \in A \; x \notin B) \vee (x \in B \; x \notin A)}_{\cancel{\text{és fals}}} \vee \underbrace{(x \in C \; x \notin A) \vee (x \in C \; x \notin B)}$

$$\cancel{(x \in C)} \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

$$x \notin A \cap B$$

Com ho fem?

Volem arribar aquí →

$$(x\in A \;\; x\notin B) \vee \underbrace{(x\notin A \;\; x\in B) \vee (x\in C \;\; x\notin A)}_{\equiv\, (x\notin A)\wedge(x\in B \vee x\in C)} \vee (x\in C \;\; x\notin B)$$

$\circledast \nearrow$ $x\in C$ (sota $x\notin B$) ; $\circledast \nearrow$ $x\in C$ (sota $x\notin B$ final)

$x\notin A \wedge x\in C$ ja que $p\wedge q \to p\wedge(q\vee r)$

$\circledast$ Ja que tenim que $B\cap C=\emptyset$

o sigui $x\in B \Rightarrow x\notin C$

$x\in C \Rightarrow x\notin B$

O sigui, si ho escrivim bé:

$$x\in C \Rightarrow (x\in C \wedge x\in A) \vee (x\notin A \wedge x\in C) \vee (x\in C \wedge x\in C)$$

ja que $p \to (p\wedge q) \vee (p\wedge \neg q) \vee (p\wedge p)$

$$\Rightarrow \underbrace{(x\notin B \wedge x\in A)}_{①} \vee \underbrace{[(x\notin A)\wedge(x\in B \vee x\in C)]}_{②} \vee \underbrace{(x\in C \wedge x\notin B)}_{③} \Rightarrow$$

① per arribar-hi, hem fet $B\cap C=\emptyset \equiv [x\in C \Rightarrow x\notin B]$

② hem fet $p\wedge q \to p\wedge(q\vee r)$

③ hem fet $B\cap C=\emptyset \Rightarrow [x\in C \Rightarrow x\notin B]$

$\Rightarrow$ desenvolupant ②, queda exactament el que volem

ped

28) $B \subseteq C \Rightarrow A \setminus C \subseteq A \setminus B$

Volem que $x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus B$

sabent que $y \in B \Rightarrow y \in C$

$$x \in A \wedge x \notin C \overset{?}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \notin B$$

Veurem $\underbrace{x \notin A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{x \notin A}_{p} \vee \underbrace{x \in C}_{r}$

Recordem que $p \vee q \rightarrow p \vee r \equiv q \rightarrow p \vee r \equiv q \wedge \neg p \rightarrow r$

O sigui volem que $x \in B \wedge x \in A \overset{?}{\Rightarrow} x \in C$

cert, ja que $B \subseteq C$

qed

29) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$ Suposem que $\exists\, x \in A \cap B$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = A \setminus B \cup B \setminus A \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge \underbrace{x \notin B}_{0} \vee \underbrace{x \notin A}_{0} \wedge x \in B \Rightarrow 0$!!

Per tant, $\nexists\, x \in A \cap B$, o sigui $A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow$] $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \overset{?}{=} A \cup B$, tenint $A \cap B = \emptyset$

$\subseteq$] $x \in A \setminus B \cup B \setminus A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B$

Recordem $p \vee q \rightarrow r \equiv p \rightarrow r \wedge q \rightarrow r$

(i) $\begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B \\ x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \end{cases}$ ✓

$\supseteq$] Volem $x \in A \cup B \overset{?}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \notin B \vee x \in B \wedge x \notin A$

Ho farem provant que $x \in A \cup B \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A$

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \equiv \cancel{x \in B \wedge x \notin A \vee}$

$\underbrace{(x \in A \wedge x \in B)}_{\emptyset} \vee (x \notin A \wedge x \in B) \vee x \in B$

~~Altrament;~~ $\cancel{\neg(x \notin A \vee x \in B) \vee x \in B \Rightarrow \neg x \notin A \wedge x \in B}$

Volem $x \notin A \wedge x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A$

Cal fer:

(I) $x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A$ tautològic ✓

(II) $x \in B \overset{?}{\Rightarrow} x \in B \wedge x \notin A$

cert, ja que $A \cap B = \emptyset$, $x \in B \Rightarrow x \notin A$ ✓

30

$$A \cap \cancel{B}C \subseteq B \cap C \quad i \quad A \cup C \subseteq B \cup C \overset{?}{\Rightarrow} A \subseteq B$$

- Cas $x \in C$

$$x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \checkmark$$

- Cas $x \notin C$

$$x \in A \text{ i } x \notin C \underset{A \cup C \subseteq B \cup C}{\Longrightarrow} (x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \Rightarrow x \in B \checkmark$$

* Corol·lari:

$$A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Longrightarrow A = B$$

ja que es pot aplicar la proposició 30

simètricament $A \leftrightarrow B$.

(31) $A\cap B=\emptyset \wedge B\cap C^c=\emptyset \Rightarrow A\cap C=\emptyset$

Dem

Ho farem per reducció a l'absurd.

$\exists x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C$

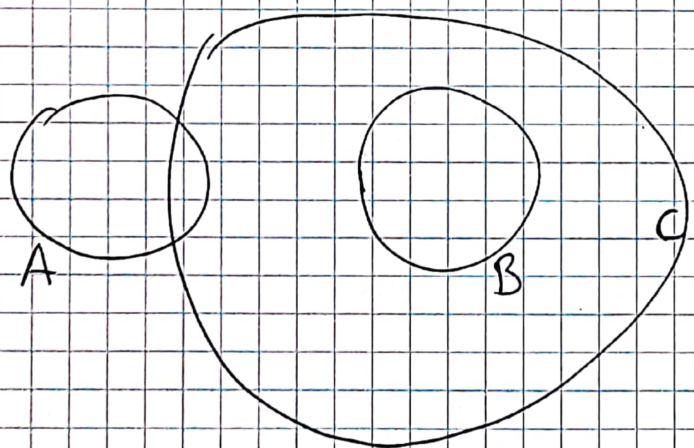
• Cas $x\in B$

$x\in A \wedge x\in C \wedge x\in B \Rightarrow \underbrace{x\in A\cap B}_{①}$ ~~$x\in B\cap C$~~ ②

$\Rightarrow$!!!

• Cas $x\notin B$

(*) L'exercici està malament!!!



Compleix $A\cap B=\emptyset$ i $B\cap C^c=\emptyset$ però $A\cap C\neq\emptyset$

* Tampoc estaria bé $A\cap B=\emptyset \wedge B\cap C=\emptyset \Rightarrow A\cap C=\emptyset$

Ja que si fem $A=C$ compleix però $A\cap C\neq\emptyset$

(32) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A \setminus C = B \setminus C$

$\subseteq]$ $x \in A$ i $x \notin C \overset{?}{\Longrightarrow} x \in B$ i $x \notin C$

$x \in A \vee x \in C \rightarrow x \in B \vee x \in C$

$x \in B$ i $x \notin C$ ✓

$\supseteq]$ simètric

(*) És cert el recíproc?

Volem veure $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A \cup C = B \cup C$

$\subseteq]$ $x \in A \vee x \in C \overset{?}{\Longrightarrow} x \in B \vee x \in C$

Cal veure $\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \vee x \in C & \text{(I)} \\ \& \\ x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in C & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow x \in B \checkmark \\ x \in C \checkmark \end{cases}$

(II) $x \in C \Rightarrow x \in B \vee x \in C$ ✓

$\supseteq]$ simètric

→ ÉS CERT

33) $\Delta(A,B) := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

g) $\Delta(A,B) = \emptyset \iff A = B$

h) $\Delta(A,C) \subseteq \Delta(A,B)\cup\Delta(B,C)$

i) $\Delta(A,\Delta(B,C)) = \Delta(\Delta(A,B),C)$

Dem

g) $\Rightarrow]$ $\subseteq]$ Vegem que $x\in A \Rightarrow x\in B$

Si fos $\exists x /$ $x\in A$ i $x\notin B$ llavors

$\exists\, x\in A\setminus B$

però $\emptyset = \Delta(A,B) = \underset{\uparrow x}{(A\setminus B)}\cup(B\setminus A)$

!!!

$\supseteq]$ simètric

$\Leftarrow]$ Si fos $\exists x \in \Delta(A,B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

tindríem que $(x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B \wedge x\notin A)$

Però això és $A\neq B$!!

Ja que $A\neq B \equiv \neg\left[(x\in A\to x\in B)\wedge(x\in B\to x\in A)\right] \equiv$

$\equiv \neg\underbrace{(x\in A\to x\in B)}_{x\notin A\,\vee\, x\in B} \vee \neg(x\in B\to x\in A) \equiv$

!!!

h) $\Delta(A,C) \subseteq \Delta(A,B) \cup \Delta(B,C)$

$x \in \Delta(A,C) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Sabem pe $\Delta(A,B) \cup \Delta(B,C) =$

$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$

Tenim $x \in A \wedge x \notin C \vee x \in C \wedge x \notin A$

Volem $x \in A \wedge x \notin B \vee \overline{x \in B} \wedge x \notin A \vee \overline{x \in B} \wedge x \notin C \cup x \in C \wedge x \notin B$

$\cancel{\equiv x \notin B \wedge (x \in A \vee x \in C) \vee x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin C)}$

Forem $x \in A = a$, $x \in B = b$, ...

Volem veure:

$a \wedge \neg c \vee c \wedge \neg a \rightarrow (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b) \overset{?}{\equiv} 1$

$(a \vee c) \wedge (\neg a \vee a) \vee$ ...

$(\neg a \wedge \neg c) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b)$

$\neg a \wedge (\neg c \vee b) \vee a \wedge (c \vee \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b)$

Ho farem en 2 parts:

$$\begin{cases} a \wedge \neg c \rightarrow a \wedge \neg b \vee b \wedge \neg a \vee b \wedge \neg c \vee c \wedge \neg b & \text{I} \\ \neg a \wedge c \rightarrow a \wedge \neg b \vee b \wedge \neg a \vee b \wedge \neg c \vee c \wedge \neg b & \text{II} \end{cases}$$

I

$$\neg a \vee c \vee (a \wedge \neg b) \vee \cancel{(b \wedge \neg a)} \vee (b \wedge \neg c) \vee \cancel{(c \wedge \neg b)}$$

$$\underbrace{\neg a \vee (a \wedge \neg b)}_{(\underbrace{\neg a \vee a}_{1}) \wedge (\neg a \vee \neg b)} \vee \underbrace{c \vee b \wedge \neg c}_{(c \vee b) \wedge (\underbrace{c \vee \neg c}_{1})}$$

I $\quad \neg a \vee \underbrace{\neg b \vee c \vee b}_{1} \equiv 1$ ✓

II

$$a \vee \neg c \vee \cancel{a \wedge \neg b} \vee b \wedge \neg a \vee \cancel{b \wedge \neg c} \vee c \wedge \neg b$$

$$\underbrace{a \vee b \wedge \neg a}_{} \vee \neg c \vee c \wedge \neg b$$

$$(a \vee b) \wedge (\underbrace{a \vee \neg a}_{1}) \vee (\underbrace{\neg c \vee c}_{1}) \wedge (\neg c \vee \neg b) \equiv a \vee b \vee \neg c \vee \neg b \equiv 1$$

1

i) $\Delta(A, \Delta(B,C)) \stackrel{?}{=} \Delta(\Delta(A,B), C)$

$$A \setminus \underbrace{(B\setminus C \cup C\setminus B)}_{B\setminus C \,\cup\, C\setminus B} \cup (B\setminus C \cup C\setminus B)\setminus A$$

$$[A\setminus(B\setminus C)] \cap [A\setminus(C\setminus B)] \cup (B\setminus C \cup C\setminus B)\setminus A$$

$$(A\setminus B \cup B\setminus A)\setminus C \;\cup\; \underbrace{C\setminus(A\setminus B \cup B\setminus A)}_{[C\setminus(A\setminus B) \,\cap\, C\setminus(B\setminus A)]}$$

Avorrit

$$x \in A^c \overset{\text{Def}}{\iff} x \notin A$$

39

I $(A^c)^c = A$

II $\emptyset^c = \Omega \quad , \quad \Omega^c = \emptyset$

III $A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = \Omega$

IV $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad , \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

V $A \setminus B = A \cap B^c$

VI $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c \iff A \cap B^c = \emptyset \iff A^c \cup B = \Omega$

VII $A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c \iff A \cap B = \emptyset \iff A^c \cup B^c = \Omega$

VIII $A^c \subseteq B \iff B^c \subseteq A \iff A^c \cap B^c = \emptyset \iff A \cup B = \Omega$

IX $B = A^c \iff A \cap B = \emptyset , \ A \cup B = \Omega$

Dem.

I $\subseteq]$ $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A$

$\supseteq]$ igual (sin $\iff$)

II $\emptyset^c = \Omega \quad \to \quad x \in \emptyset^c \iff x \notin \emptyset \underset{\text{definición de } \Omega}{\iff} x \in \Omega$

$\Omega^c = \emptyset$

$\hookrightarrow \emptyset \subseteq \Omega^c$ ✓

$\hookrightarrow x \in \Omega^c \Rightarrow x \notin \Omega \Rightarrow$ "$\nexists x$" $\Rightarrow x \in \emptyset$

III $A \cap A^c = \emptyset$ $\quad$ $A \cup A^c = \Omega$

- $\emptyset \subseteq A \cap A^c$ ✓
- $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \Rightarrow \nexists x$

$B \subseteq \Omega \quad \forall B$

$x \in \Omega \Rightarrow x \in A$ i $x \notin A$ ✓

IV $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cup x \notin B$

V $A \setminus B = A \cap B^c$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

VI (a) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

ja que: $x \in B^c \Rightarrow x \notin B \underset{(\text{ja que } A \subseteq B)}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A^c$ ✓

(b) $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$

$x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A \wedge x \in B^c \underset{B^c \subseteq A^c}{\Longrightarrow} x \in A \wedge x \in A^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A$

$\nexists x$!!

c) $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A^c \cup B^c = \Omega$

$A^c \cup B^c \subseteq \Omega$ sempre, já que $\forall C, C \subseteq \Omega$

Vejam $\Omega \subseteq A^c \cup B^c$

$x \in \Omega \Rightarrow x \in A \vee x \notin A \Rightarrow x \in A \vee x \in A^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \vee \underbrace{x \in A \wedge x \notin B}_{\emptyset} \vee x \in A^c \wedge x \in B \wedge x \in A^c \wedge x \notin B$

$\Rightarrow \underbrace{x \in A \cap B}_{\Rightarrow A^c \cup B} \vee \underbrace{x \in A^c \wedge x \in B}_{\Rightarrow A^c \cup B} \vee \underbrace{x \in A^c \wedge x \in B^c}_{\Rightarrow A^c \cup B} \Rightarrow x \in A^c \cup B$

d) $A^c \cup B = \Omega \Rightarrow A \subseteq B$

$x \in A \Longrightarrow x \in B$ ✓

$\forall y \in \Omega, y \notin A \vee y \in B$

(*)

VII) a) $A \subseteq B^c \Rightarrow B \subseteq A^c$

$x \in B \Rightarrow x \in A \lor x \notin A \Rightarrow x \notin B \lor x \notin A$

$\Downarrow (*)$

$x \in B^c$

Tenim $\underbrace{x \in B \land x \notin B}_{\emptyset} \lor x \in B \land x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

b) $B \subseteq A^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

Suposem que $\exists x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \land x \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \land x \in A^c \Rightarrow x \in A \land x \notin A \Rightarrow !!$

c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A^c \cup B^c = \Omega$

$x \in \Omega \Rightarrow x \in A \lor x \notin A \Rightarrow \underbrace{x \in A\ x \in B}_{\emptyset!} \lor \underbrace{x \notin A\ x \in B}_{x \in A^c \cap B} \lor \underbrace{x \in A\ x \notin B}_{x \in A \cap B^c} \lor x \notin A \land x \notin B$

$x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \lor x \in B^c \lor x \in A^c \cap B^c \Rightarrow$ ✓

$\underset{A^c \cup B^c}{\shortparallel}$

d) $A^c \cup B^c = \Omega \Rightarrow A \subseteq B^c$

$x \in A \Rightarrow \underbrace{x \in A \land x \in B}_{\text{No!}} \lor x \in A \land x \notin B \Rightarrow x \in B^c$

Ja que $\neg(x \notin A \lor x \notin B) = \emptyset$

VIII) a) $A^c \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A$

$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee \underbrace{x \notin A \wedge x \notin B}_{\text{✗ - ja que } A^c \subseteq B \; x \in B \wedge x \notin B} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$ ✓

b) $B^c \subseteq A \Rightarrow A^c \cap B^c = \emptyset$

suposem que $\exists x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

però $x \notin B \Rightarrow x \in B^c \subseteq A \Rightarrow x \in A$

$\Downarrow$

$x \notin A \wedge x \in A \Rightarrow$!!

c) $A^c \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \Omega$

$x \in \Omega \Rightarrow x \in A \cup B \vee x \notin A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B \vee x \in (A \cup B)^c$

Però $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ ó $\underbrace{x \in A^c \cap B^c = \emptyset}_{0} \Rightarrow x \in A \cup B$ ✓

d) $A \cup B = \Omega \Rightarrow A^c \subseteq B$

$x \in A^c \Rightarrow x \notin A \Rightarrow \cancel{x \notin A \wedge x \in B \vee x \notin A \wedge x \notin B}$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \in \Omega = A \cup B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x \notin A \wedge x \in A}_{0} \vee x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$

(14) $B = A^c \iff A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega$

$\Rightarrow$] Hem de veure que $\underbrace{\nexists x \in A \cap B}_{(1)}$ i que $\underbrace{\forall x,\ x \in A \cup B}_{(2)}$

(1) Si $\exists x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B = A^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A$!!

(2) Si $\exists x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B = A^c \Rightarrow x \notin A \wedge x \in A \Rightarrow$!!

(15) $|P(A)| = 2^{|A|}$

Cas $A = \emptyset$ $\quad |\emptyset| = 0, \quad P(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad |P(\emptyset)| = 1 = 2^0$

Suposem que $|P(A_{n-1})| = 2^{n-1}$ $\forall A_{n-1}$ amb $|A_{n-1}| = n-1$

$A_n = \{x_1 \dots x_n\} = A_{n-1} \cup \{x\}$ amb $x \notin A_{n-1}$

$P(A_{n-1}) = \{P_1, P_2, \dots, P_{2^{n-1}}\}$

$P(A_n) = \{P_1, P_2, \dots P_{2^{n-1}}, \{x\} \cup P_1, \dots \{x\} \cup P_{2^{n-1}}\}$

$\Rightarrow |P(A_n)| = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ qed

(46) $\{a,b\} \in P(A) \iff a \in A \wedge b \in A$

$\Leftarrow]$ $\{a,b\} \in P(A) \iff \{a,b\} \subseteq A \iff a,b \in A$

(47) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \iff A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$

$\Rightarrow]$ ~~Forem: $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \wedge A \not\subseteq B \implies B \subseteq A$~~

~~$x \in B \implies \{x\} \in P(B) \subseteq P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \implies$~~

~~$\implies \{x\} \subseteq A \cup B$~~

~~Si $x \notin A \implies$~~

Forem $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A \implies P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$

O sigui, $\exists_{x,y}\; x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in B \wedge y \notin A$

Llavors, $\{x,y\} \in P(A \cup B)$ (ja que $\{x,y\} \subseteq A \cup B$)

Però $\{x,y\} \notin P(A) \cup P(B)$ (ja que $\{x,y\} \not\subseteq A$ i $\{x,y\} \not\subseteq B$)

Per tant, hem vist que $\exists\, \alpha \in P(A) \cup P(B)$ tal que $\alpha \notin P(A \cup B)$

Per tant, $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$

$A \subseteq B$ ó $B \subseteq A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

Cal veure $A \subseteq B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ①

i també $B \subseteq A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ ②

Però només cal fer ①, ja que ② és simètric $A \leftrightarrow B$.

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow \underbrace{P(A \cup B)}_{\substack{\| \\ P(B)}} \overset{?}{=} P(A) \cup P(B)$$

Nota: és obvi que $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Només hem de veure que $P(A) \cup P(B) \supseteq P(A \cup B) = P(B)$

obvi!!

(48) $P(A \setminus B) \subseteq (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

$X \in P(A \setminus B) \Rightarrow X \subseteq A \setminus B \Rightarrow \forall x \in X,\ x \in A \wedge x \notin B$ ó $X = \emptyset$

Vegem si $X \neq \emptyset \overset{?}{\Rightarrow} X \in \underbrace{(P(A) \setminus P(B))}$

$$Y \in P(A) \wedge Y \notin P(B)$$

$$Y \subseteq A \wedge Y \not\subseteq B$$

$$\forall y \in Y (y \in A \wedge y \notin B)$$

és el que volem!

(49) $\{A, B\} \in P(P(C)) \overset{?}{\Longleftrightarrow} \{A \cup B\} \in P(P(C))$

$\Updownarrow \leftarrow \text{def } X \in P(Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y \qquad \Updownarrow$

$\{A, B\} \subseteq P(C) \qquad \{A \cup B\} \subseteq P(C)$

$\Updownarrow \leftarrow \text{def } X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \in X,\ x \in Y \qquad \Updownarrow$

$A \in P(C) \wedge B \in P(C) \qquad A \cup B \in P(C)$

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Longleftrightarrow A \cup B \subseteq C$

(50)

a) $\forall x, y \quad y \in x \in A \Rightarrow y \in A$

b) $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \subseteq A$

c) $A \subseteq P(A)$

d) $A \in P(P(A))$

$a \Rightarrow b$| Volem $\forall y \in x \Rightarrow y \in A$

Com que tenim $x \in A$, $y \in x \in A \underset{a)}{\Rightarrow} y \in A$ com volíem

$b \Rightarrow c$| volem $x \in A \Rightarrow x \in P(A)$

Tenim $x \in A \underset{b)}{\Rightarrow} x \subseteq A \Rightarrow x \in P(A)$

c ⇒ d) Volem que $A \subseteq P(A)$, cosa que és certa per c)

d ⇒ a) $y \in x \in A$ volem $y \in A$

$$x \in A \underset{d)}{\Rightarrow} x \in A \in P(P(A)) \Rightarrow x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A$$

$$\left[x \in A \in P(B) \Rightarrow x \in B \quad (\text{ja que } A \in P(B) \Rightarrow A \subseteq B) \right]$$

$\Rightarrow [y \in x \Rightarrow y \in A]$ com volíem ✓

(51) $A \subseteq P(A)$, $B \subseteq P(B) \Rightarrow A \cup B \subseteq P(A \cup B)$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ó } x \in B \overset{*}{\Rightarrow} x \in P(A) \text{ ó } x \in P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \quad ✓$$

ja que $A \subseteq A \cup B$
$B \subseteq A \cup B$ i *

(52) $A \subseteq P(A) \Rightarrow P(A) \subseteq P(P(A))$

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq P(A) \Rightarrow x \in P(P(A)) \quad ✓$$

• i el recíproc?

$$P(A) \subseteq P(P(A)) \Rightarrow A \subseteq P(A)$$

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \subseteq P(P(A)) \Rightarrow \{x\} \subseteq P(A)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in P(A) \text{ com volíem}$$

* Però i si $A = \emptyset$ funciona?? $\underbrace{P(\emptyset)}_{\{\emptyset\}} \subseteq \underbrace{P(P(\emptyset))}_{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}} \Rightarrow \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

56 58

I) $A \times \emptyset = \emptyset \quad , \emptyset \times A = \emptyset$

II) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

III) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

IV) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Dem

I) Suposem que $\exists\ \alpha \in A \times \emptyset$

Llavors $\alpha = (a, ??)$

què poso?? $\Rightarrow$ RES

II) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$\subseteq$] ~~Also~~ $(a, x) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A , x \in B \cap C$

$(a, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow a \in A \cap A , y \in B \cap C$

III) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(a, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow a \in A \quad y \in B \cup C$

$a \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$(a, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Leftrightarrow$ ~~$a \in A \cup A , y \in B \cup C$~~

$a \in A \quad y \in B \quad \vee \quad a \in A \quad y \in C$

IV

$(a,y) \in (A, B\setminus C) \iff a\in A \wedge y \in B\setminus C$

$(a,y) \in (A,B)\setminus(A,C) \iff \underbrace{(a,y)\in(A,B) \wedge (a,y)\notin(A,C)}$

$\Updownarrow$

$a\in A \wedge y\in B \wedge (a\notin A \vee y\notin C)$

$\Updownarrow$

$\underbrace{a\in A \wedge a\notin A \wedge y\in B}_{\emptyset} \vee a\in A \wedge y\in B \wedge y\notin C$

(57) $A\times B = B\times A \iff A=B$ ó $A=\emptyset$ ó $B=\emptyset$

$\Rightarrow$) Suposem $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$. Vegem $A=B$

$\exists x\in A$
$\exists y\in B$

~~Fem~~ ~~$\forall a\in A, b\in B$~~

$\forall \alpha \in A\times B \Rightarrow \alpha\in B\times A$
$\alpha = (a,b)$

$\Rightarrow \forall a\in A \Rightarrow a\in B$
&
$b\in B \Rightarrow b\in A$

$\Downarrow$

$A=B$ ✓

59 $A\times B = C\times D,\ B\neq\emptyset,\ D\neq\emptyset \overset{?}{\Rightarrow} A = C$

$c\in C,\ d\in D \Rightarrow (c,d) \in A\times B \Rightarrow c\in A,\ d\in B$ → hem vist $A\supseteq C$

Per tant, $A\neq\emptyset$ (ja que $\emptyset\neq D\subseteq A$)

$a\in A,\ b\in B \Rightarrow (a,b)\in A\times B = C\times D \Rightarrow a\in C,\ b\in D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ acabem de veure que $A\subseteq C$ ✓

60

$(A\times A)\setminus(B\times B) = A\times(A\setminus B)\cup(A\setminus B)\times(\cancel{B}A)$

Suposem que $A, B\neq\emptyset$ (si no, és trivial)

$\alpha\in(A\times A)\setminus(B\times B) \Leftrightarrow \alpha=(x,y) \mid x\in A\wedge y\in A\wedge(x\notin B\vee y\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{x\in A\wedge y\in A\wedge x\notin B}_{(x,y)\in \cancel{A\times(A\setminus B)}\ (A\setminus B)\times A} \vee \underbrace{x\in A\wedge y\in A\wedge y\notin B}_{(x,y)\in A\times(A\setminus B)}$

✓

61

$$(A\times A)\setminus(B\times B) = (A\setminus B)\times(A\setminus B) \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset \vee A\subseteq B$$

~~$\Rightarrow$) Suposem que $A\cap B \neq \emptyset$~~

~~$x\in A$~~

Suposem que $A \not\subseteq B$ (o sigui $\exists x \quad x\in A \wedge x\notin B$)

Hem de veure que $A\cap B=\emptyset$

Si fos $A\cap B\neq\emptyset$, llavors $\exists y \in A\cap B$

Podem fabricar $(x,y)\in A\times A \setminus B\times B$

ja que:

$(x,y)\in A\times A$ i $(x,y)\notin B\times B$

$\Updownarrow$

$$x\in A \wedge y\in A \wedge \neg[x\in B \wedge y\in B] \equiv x\in A \wedge y\in A \wedge [x\notin B \vee y\notin B] \equiv$$

$$\equiv \underbrace{x\in A\wedge y\in A\wedge x\notin B}_{x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in A\cap B} \vee \underbrace{x\in A\wedge y\in A\wedge \underbrace{y\notin B}_{0}}_{0}$$

Però $(x,y)\in A\times A\setminus B\times B = A\setminus B\times A\setminus B$

$$\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in A\wedge \underbrace{y\notin B}_{0} \Longrightarrow (x,y)\notin A\setminus B\times A\setminus B$$

ja que $y\in A\cap B$

$\Downarrow$

!!!

69 $A \cap A^c = \emptyset$

$\emptyset \subseteq A \cap A^c$ sempre

Cal veure $\supseteq$) $A \cap A^c \subseteq \emptyset$

Suposem que $\exists x \in A \cap A^c$ i arribem a contradicció

$x \in A \wedge x \in A^c \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \Rightarrow \perp$!

70 $\Omega^c = \emptyset$

Suposem que $\exists x \in \Omega^c \Rightarrow x \notin \Omega \Rightarrow \nexists x$!!!

71 $A \times \emptyset = \emptyset \times \cancel{A}$ $\emptyset \times A = \emptyset$ $\leftarrow$ Ej el 56

72 $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset$

$\Rightarrow$) Suposem que $\exists x \in A \setminus B$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B \Rightarrow$!!

$\Leftarrow$) $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \vee \underbrace{x \in A \wedge x \notin B}_{x \in A \setminus B} \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \setminus B \Downarrow$ No!!

$\Downarrow$ $x \in B$ ✓

73 $C \subseteq A \setminus B \iff C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$) $x \in C \subseteq A \setminus B \Rightarrow x \in A$ ✓

Suposem que $\exists y \in C \cap B \Rightarrow y \in C \Rightarrow y \in A \setminus B \Rightarrow y \notin B \Rightarrow$!!

$y \in B$

$\Leftarrow)$ $x \in C \Rightarrow x \in A$ ja que $C \subseteq A$

Volem que $x \notin B$

si $x \in C$ i $x \in B \Rightarrow x \in C \cap B = \emptyset \Rightarrow !!$