1 Enuncieu el criteri del sandwich per a successions de números reals.
Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\,\sin(n!)}{n+1}$$

Resolució: *Criteri del sandwich. Siguin (a_n), (b_n) i (c_n) tres successions de números reals que compleixen: $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$. Si les successions (a_n) i (c_n) són convergents i $\lim a_n = \lim c_n$, aleshores la successió (b_n) també és convergent el seu límit coincideix amb el de les altres dues.* *(0.5 punts)*

Càlcul del límit. Donat que $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$, $\forall n \geq 0$, es té:

$$-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1},$$

i del fet que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\pm\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\pm\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right) = 0,$$

aplicant el criteri del sandwich, s'obté que *(0.5 punts)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0$$

2 Considereu la funció $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x} - \dfrac{1}{2}$.

a) Proveu que l'equació $f(x) = 0$ té solució a l'interval [2,3].

b) Feu 4 iteracions del mètode de la bisecció per calcular un valor aproximat de la solució de l'equació $f(x) = 0$ en l'interval [2,3].
Doneu una fita superior de l'error comès.

c) Calculeu $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Resolució: *a) El domini s'obté considerant que la funció* ln *només admet arguments positius i que en un quocient el denominador ha de ser diferent de zero.*

$$D = (-1,0)\cup(0,+\infty)$$

La funció és contínua en D, atès que és suma d'una constant i un quocient de funcions contínues (amb denominador diferent de zero, com ja s'ha dit) L'interval $[2,3]$ està contingut al domini D. Per tant, f és contínua a $[2,3]$.

Calculem el signe de f en els extrems de l'interval:

$$f(2) = \frac{\ln(3)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\ln(3) - 1}{2} > 0$$

$$f(3) = \frac{\ln(4)}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\ln(4) - 3}{6} = \frac{\ln(16) - 3}{6} < 0$$

El teorema de Bolzano ens diu que existeix $c \in (2,3)$ tal que $f(c) = 0$. *(0.5 punts)*

b) *Fem quatre iteracions del mètode de la bisecció.*

- *Interval inicial:* $[2,3]$ *Primera bisecció:* $f(2.5) > 0$
- *Segon interval:* $[2.5,3]$ *Segona bisecció:* $f(2.75) < 0$
- *Tercer interval:* $[2.5,2.75]$ *Tercera bisecció:* $f(2.625) < 0$
- *Quart interval:* $[2.5,2.625]$ *Quarta bisecció* $f(2.5625) < 0$

L'arrel es troba a l'interval $(2.5, 2.5625)$*. Els extrems o qualsevol valor d'aquest interval es pot prendre com a aproximació a la solució de $f(x) = 0$.*

L'error comès està fitat per la longitud de l'interval, que és $\frac{3-2}{2^4} = \frac{1}{2^4} = 0.0625$.

Si aproximem l'arrel pel punt mitjà de l'interval, és a dir, per 2.53125*, podem fitar l'error per la meitat de la longitud:* 0.03125*. En qualsevol cas, l'única xifra decimal que podem assegurar que és correcta és la primera.* *(1 punt)*

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ *presenta una indeterminació del tipus* $\dfrac{0}{0}$*, es resoldrà fent ús de la regla de l'Hôpital. Les funcions del numerador $g_1(x) = \ln(1+x)$ i del denominador $g_2(x) = x$ són derivables i contínues en un entorn de $x = 0$, amb $g_1(0) = g_2(0) = 0$, i existeix el límit*

$$\lim_{x\to 0} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

llavors segons la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existeix i val* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. *(0.5 punts)*

3 a) Per a la funció $f(x) = e^{x^2}$, demostreu que $0 < f^{(4)}(x) < 228$ si $0 \le x \le 1$.

b) Fent ús del Mètode de Simpson, calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les rectes $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ i la corba $y = e^{x^2}$, amb un error menor que 10^{-3}.

Resolució: *a) Como x^2, $e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tenemos que la función $f(x) = e^{x^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ por ser la composición de funciones infínitamente derivables. Calcularemos las siguientes derivadas de f*

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2(1+2x^2)e^{x^2}, \quad f'''(x) = 4x(3+2x^2)e^{x^2},$$

$$f^{(4)}(x) = 4(3+12x^2+4x^4)e^{x^2}, \quad f^{(5)}(x) = 8x(15+20x^2+4x^4)e^{x^2}.$$

Considerando que

$$f^{(5)}(x) = 0 \iff x = 0 \quad y \quad f^{(5)}(x) > 0,\, \forall x \in (0,1]$$

concluimos que $f^{(4)}$ *es una función creciente en* $[0,1]$ *y, por lo tanto,*

$$\min_{[0,1]} f^{(4)}(x) = f^{(4)}(0) = 12 \quad y \quad \max_{[0,1]} f^{(4)}(x) = f^{(4)}(1) = 76e.$$

En consequencia $0 < 12 \le f^{(4)}(x) \le 76e < 228,\, \forall x \in [0,1]$. *(1 punt)*

b) Para resolver este apartado hace falta justificar y realizar los siguientes pasos:

- Cálculo del área (A) limitada por las rectas $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ y la curva $y = e^{x^2}$.

  Como $f(x) = e^{x^2} > 0,\, \forall x \in [0,1]$ *entonces según el sentido geométrico de la integral definida*

  $$A = \int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

- Fórmulas del Método de Simpson.

  $$I = \int_a^b f(x)dx \simeq S = \frac{h}{3}\Big[f(a) + f(b) + 2\Big(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{n-2})\Big) + 4\Big(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})\Big)\Big]$$

  y el error absoluto cometido es

  $$I - S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c),$$

  donde $a \le c \le b$, $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$, $\quad n$ *es el número par de subintervalos de* $[a,b]$.

- Cálculo de la cota superior del error.

  $$\Big|I - S\Big| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\Big|f^{(4)}(c)\Big| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\max_{[0,1]}\Big|f^{(4)}(x)\Big| < \frac{(1-0)^5}{180n^4}228 = \frac{228}{180n^4} = CotaSup$$

- Cálculo de n *(el número de subintervalos que garantiza el error menor que* 10^{-3}*).*

  Es evidente que si $CotaSup < 10^{-3}$ *entonces* $\Big|I - S\Big| < 10^{-3}$.

  $$CotaSup = \frac{228}{180n^4} < 10^{-3} \quad \iff \quad n > \sqrt[4]{\frac{228}{180}10^3} \simeq 5.97.$$

  En consecuencia $n \ge 6$. *Cogeremos* $n = 6$.

- Cálculo del valor aproximado de A.

  En nuestro caso $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{6}$, $\quad x_i = a + ih = \dfrac{i}{6}$. *Por lo tanto,*

  $$\begin{aligned} A &= \int_0^1 e^{x^2}dx \simeq \frac{1}{3\cdot 6}\Big[f(0) + f(1) + 2\Big(f(\tfrac{2}{6}) + f(\tfrac{4}{6})\Big) + 4\Big(f(\tfrac{1}{6}) + f(\tfrac{3}{6}) + f(\tfrac{5}{6})\Big)\Big] = \\ &= \tfrac{1}{18}\Big[1 + e + 2\Big(e^{\frac{1}{9}} + e^{\frac{4}{9}}\Big) + 4\Big(e^{\frac{1}{36}} + e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{25}{36}}\Big)\Big] = \\ &= \tfrac{1}{18}[1 + 2.7182 + 2(1.1175 + 1.5596) + 4(1.0282 + 1.2840 + 2.0026)] = 1.4629 \end{aligned}$$

  El área pedida es $A \simeq 1.463 \pm 10^{-3}$. *(2 punts)*

4 Considereu la funció $f(x, y) = x^2 y$.

a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de la superfície $z = f(x, y)$ corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) Trobeu els extrems relatius de f en el seu domini.

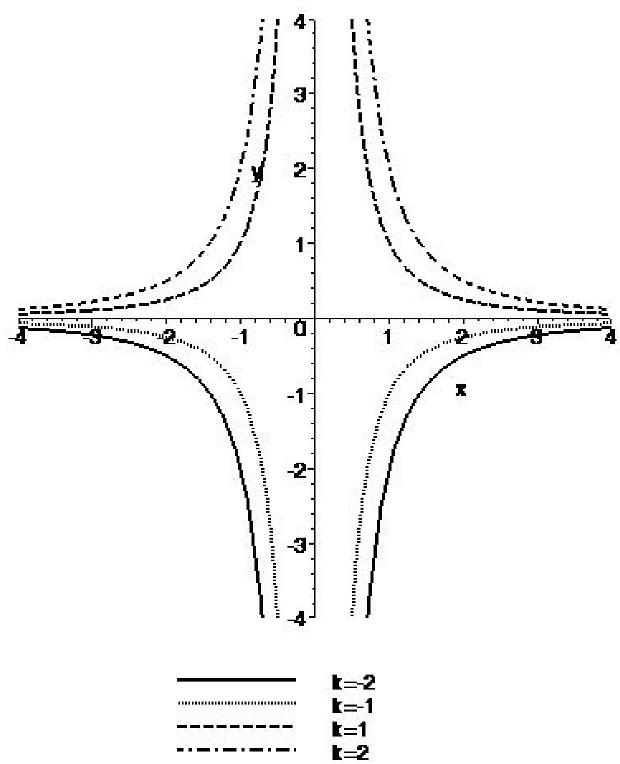
c) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte $\mathcal{K} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - 2x + y^2 - 1 \le 0\,,\ x \ge 1\}$.

d) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de f en el recinte $\mathcal{K}$.

Resolució:

a) Com que $x^2 y = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $y = 0$, la "corba" de nivell 0 està formada pels eixos.

Per a $x^2 y = k$ amb $k \neq 0$, no pot ser $x = 0$ ni $y = 0$, i podem escriure i dibuixar $y = k/x^2$ amb $k = -2,\ -1,\ 1,\ 2$. *(0.7 punts)*



b) Tenim $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy\ ,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$. *Aleshores totes dues derivades parcials són zero si, i només si, es tracta d'un punt de la forma $(0, b)$, on b és qualsevol nombre real.*

Les derivades segones són $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\ ,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\ ,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Aleshores, la matriu hessiana en el punts crítics és $Hf(0, b) = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

que té determinant zero i per tant no decideix el caràcter dels punts crítics.

En tots els punts crítics tenim $f(0,b)=0$.

Si $b>0$, les corbes de nivell ens indiquen que a la dreta i a la esquerra del punt $(0,b)$ la funció pren valors positius. Per tant, si $b>0$, f té un mínim relatiu en $(0,b)$. (També podem raonar dient que si y és a prop de $b>0$, tindrem $x^2y>0$).

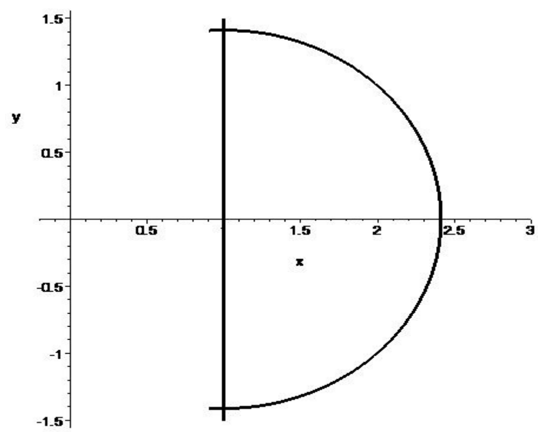
Un raonament anàleg mostra que si $b<0$, f té un màxim relatiu en $(0,b)$.

Finalment, al voltant de $(0,0)$ els valors de x^2y poden ser positius o negatius depenent del signe de y, per tant $(0,0)$ és un punt de sella de f. *(1 punt)*

c) *Observem en primer lloc que*

$$x^2-2x+y^2-1\le 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+1y^2-1-1\le 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2+y^2\le 2\,,$$

que correspon als punts que la seva distància al punt $(1,0)$ és mes petita o igual que $\sqrt{2}$. És a dir, el conjunt $\mathcal{K}$ és la meitat dreta del disc de centre $(1,0)$ i radi $\sqrt{2}$.



La vora de $\mathcal{K}$ és $l_1\cup l_2$, on

$$l_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x=1,-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}\}\,,\;\; l_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x\ge 1,(x-1)^2+y^2=2\}.$$

Degut a les desigualtats no estrictes en la definició de $\mathcal{K}$, aquest conté a la seva vora i per tant és tancat.

Com que $(x,y)\in\mathcal{K}\;\Rightarrow 1\le x\le 1+\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$, tenim que $\mathcal{K}$ és fitat.

Per tant, $\mathcal{K}$ és compacte, i com que f és una funció polinòmica, és contínua. Segons el teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en $\mathcal{K}$. *(0.7 punts)*

d) *Els punts crítics de f trobats anteriorment no pertanyen a $\mathcal{K}$. Per tant, els extrems absoluts s'assoleixen a la vora de $\mathcal{K}$.*

Els vèrtexs són candidats a punts d'extrem absolut, i són els punts $(1,\sqrt{2})$ i $(1,-\sqrt{2})$.

Cerquem els punts crítics de f restringida a l_1. Tenim $f(1,y)=y$. Com que la derivada de la funció $h(y)=y$ mai és zero, no hia punts crítics en l_1.

Cerquem els punts crítics de f restringida a l_2. Ho farem pel mètode de Lagrange, determinant els punts crítics de la funció

$$F(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda\left((x-1)^2 + y^2 - 2\right).$$

Calculem les seves derivades parcials i les igualem a zero. Hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2xy + 2\lambda(x-1) & = 0 \\ x^2 + 2\lambda y & = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 & = 2 \end{cases}$$

Si $x = 1$, hauria de ser $y = 0$ i no es verifica la tercera equació. Per tant, de la primera podem obtenir $\lambda = -\dfrac{xy}{x-1}$.

Si $y = 0$, en la segona hauria de ser $x = 0$ i no es verifica la tercera equació. Per tant, de la segona podem obtenir $\lambda = -\dfrac{x^2}{2y}$.

Igualem totes dues expressions de λ i obtenim $y^2 = \dfrac{x(x-1)}{2}$. Substituim en la tercera i tenim

$$(x-1)^2 + \frac{x(x-1)}{2} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 + x^2 - x = 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}.$$

Només és vàlid $x = 2$. Els valors corresponents de y són ± 1.

Calculem f en els candidats obtinguts:

$$f(1,\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,,\ f(1,-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\,,\ f(2,1) = 4\ \ f(2,-1) = -4.$$

Per tant, el màxim absolut de f en $\mathcal{K}$ és $f(2,1) = 4$, i el mínim absolut de f en $\mathcal{K}$ és $f(2,-1) = -4$. *(1.6 punts)*