1 *(5 punts)* Considereu la funció $f(x) = e^x$.

a) Escriviu el seu polinomi de Taylor de grau n a l'origen i el corresponent residu de Taylor en forma de Lagrange.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ necessari per calcular $\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}}$ amb tres decimals correctes i utilitzeu-lo per donar una aproximació de $\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}}$.

c) Escriviu una fita superior de l'error més acurada que $0.5 \cdot 10^{-3}$ utilitzant el residu de Taylor en forma de Lagrange.

SOLUCIÓ

a) El polinomi de Taylor de grau n d'una funció f a l'origen és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

i el corresponent residu de Taylor en forma de Lagrange és: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, per a cert c entre 0 i x.

Totes les derivades de la funció són $f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k$. Per tant, $f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k$; $f^{(n+1)}(c) = e^c$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ a l'origen és:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

i el corresponent residu de Taylor en forma de Lagrange és: $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, per a cert c entre 0 i x.

b) Si s'aproxima $\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}} = f(-3/10) = f(-0.3)$ pel valor de $P_n(-0.3)$, l'error de l'aproximació és, per a cert c amb $-0.3 \le c \le 0$:

$$error = |R_n(-0.3)| = |\frac{e^c}{(n+1)!}(-0.3)^{n+1}| = \frac{e^c}{(n+1)!}(0.3)^{n+1} \le \frac{e^0}{(n+1)!}(0.3)^{n+1} =$$

$= \frac{(0.3)^{n+1}}{(n+1)!}$, i el primer n natural que compleix que $\frac{(0.3)^{n+1}}{(n+1)!} \le 0.5 \cdot 10^{-3}$ és $n = 3$.

Per tant, el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ necessari per calcular $\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}}$ amb tres decimals correctes és $n = 3$ i utilitzant-lo s'obté l'aproximació $\frac{1}{\sqrt[10]{e^3}} \cong$

$1+(-0.3)+\frac{(-0.3)^2}{2!}+\frac{(-0.3)^3}{3!}\cong 0.7405.$

c) La fita superior de l'error més acurada que $0.5\cdot 10^{-3}$ utilitzant el residu de Taylor en forma de Lagrange és:

$$error=|R_3(-0.3)|=|\frac{e^c}{4!}(-0.3)^4|=\frac{e^c}{4!}(0.3)^4\leq\frac{e^0}{4!}(0.3)^4=\frac{(0.3)^4}{4!}\cong 0.00034.$$

2 *(5 punts)* Considereu la funció $f(x)=\sin x^3$.

a) Demostreu que l'equació $f(x)=0$ té solució a l'interval $\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Justifiqueu per què podem afirmar que l'equació $f(x)=0$ té una solució única a l'interval $\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Enuncieu el Teorema fonamental del Càlcul.

d) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x^4}.$$

SOLUCIÓ

La funció $f(x)=\sin x^3$ és contínua i derivable en tota la recta real, per ser composició d'una funció polinòmica i la funció sin.

a) Amb la calculadora s'obté: $f\left(\frac{7\pi}{16}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)^3\cong 0.52>0$ i $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cong -0.67<0$. Per ser la funció $f(x)$ contínua en l'interval $\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]$, el teorema de Bolzano assegura l'existència d'una solució de l'equació $f(x)=0$ a l'interval.

b) La justificació de per què podem afirmar que l'equació $f(x)=0$ té una solució única a l'interval $\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]$, es pot fer per reducció a l'absurd i utilitzant el teorema de Rolle, com segueix:
Suposem que hi existeix dues solucions de l'equació $f(x)=0$ a l'interval $[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}]$:

$$\exists\, a,b\in\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]\text{ tals que } f(a)=f(b)=0$$

Llavors, per ser la funció $f(x)$ contínua en l'interval $\left[\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right]$ i derivable en l'interval $\left(\frac{7\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right)$, el teorema de Rolle asseguraria l'existència d'una solució de l'equació $f'(x)=0$

a l'interval (a,b) i com que $(a,b) \subseteq \left(\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right)$, l'existència d'una solució de l'equació $f'(x) = 0$ a l'interval $\left(\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Però la derivada de $f(x)$ és $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x^3$ i per tant:
$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x^3 = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (\cos x^3 = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi)$, amb $k \in \mathbb{Z}$.
Per tant les solucions reals de $f'(x) = 0$ són $x = 0$ i $x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$. Com que: $0 \notin \left(\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} < \frac{7\pi}{16}$ i $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}} > \frac{\pi}{2}$, resulta que l'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució a l'interval $\left(\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right)$. Que està en contradicció amb l'existència d'una solució de l'equació $f'(x) = 0$ a l'interval $\left(\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Queda així justificat que no poden existir dues solucions de l'equació $f(x) = 0$ a l'interval $[\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}]$, que juntament amb l'apartat anterior justifica que l'equació $f(x) = 0$ té una solució única a l'interval $\left[\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Sigui f una funció integrable en un interval real $[a,b]$, i sigui $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funció definida per $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Aleshores:
i) La funció $F(x)$ és contínua en l'interval $[a,b]$, i
ii) Si la funció f és contínua en algun $x \in [a,b]$, per a aquests x es té $F'(x) = f(x)$.

d) El límit presenta una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, per resoldre-la es pot aplicar la Regla de L'Hôpital, donat que tant el numerador com el denominador són funcions derivables en tota la recta real, i en particular en un entorn de 0. En efecte, el numerador es derivable en tota la recta real pel Teorema fonamental del Càlcul per ser f(x) contínua en tota la recta real; i el denominador es derivable en tota la recta real per ser una funció polinòmica. Aleshores aplicant la Regla de L'Hôpital i el Teorema fonamental del Càlcul:
$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{4x^3}$
i tornant a aplicar la Regla de L'Hôpital (torna a donar una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, i numerador i denominador tornen a ser derivables):
$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cos x^3}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3}{4} = \frac{1}{4}$.