1. *(2 punts)* Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu els límits següents segons els valors d'a:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a+1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{a+2}{n^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{a+n}{n^2\sqrt{n}}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}.$$

2. *(2 punts)* Considereu la integral següent:

$$I=\int_1^{1.8}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

a) Sabent que $|f^{(4)}(x)| < 7,\ \forall x \in [1, 1.8]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I fent ús del mètode de Simpson amb una precisió de com a mínim tres decimals correctes (error absolut $< 0.5\cdot 10^{-3}$).

b) Fent ús del mètode de Simpson i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

3. *(2 punts)* Considereu la funció següent:

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{5}-\sqrt{9-x^2-y^2})$$

a) Trobeu i representeu gràficament el domini de f.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència del domini de f.

c) És el domini de f tancat? És obert? És acotat?

4. *(4 punts)* Considereu la funció $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f.

b) Representeu gràficament el recinte $K \subset \mathbb{R}^2$ definit per:

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\le 4,\ x-y\ge -4,\ y\ge x^2-16\}.$$

c) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

d) Trobeu els extrems absoluts de f en K.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.

1. *(2 punts)* Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu els límits següents segons els valors d'a:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a+1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{a+2}{n^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{a+n}{n^2\sqrt{n}}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}.$$

SOLUCIÓ: El primer límit es pot calcular aplicant el criteri del sandwich o fent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a+1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{a+2}{n^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{a+n}{n^2\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an+1+2+\cdots+n}{n^2\sqrt{n}}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an+\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+(2a+1)n}{2n^2\sqrt{n}}\right)=0$$

Per tant, per tots els valors d'$a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a+1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{a+2}{n^2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{a+n}{n^2\sqrt{n}}\right)=0$$

El segon límit es pot calcular fent ús del criteri del qüocient, considerem $a_n=\dfrac{a^n}{n!}$, aleshores:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a|}{n}=0<1$$

Per tant, per tots els valors d'$a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

2. *(2 punts)* Considereu la integral següent:

$$I = \int_1^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

a) Sabent que $|f^{(4)}(x)| < 7, \ \forall x \in [1, 1.8]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I fent ús del mètode de Simpson amb una precisió de com a mínim tres decimals correctes (error absolut $< 0.5 \cdot 10^{-3}$).

b) Fent ús del mètode de Simpson i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

SOLUCIÓ:

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

a) L'expressió:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4,$$

ens dóna una cota superior de l'error del mètode de Simpson, sent M_4 una cota superior del valor absolut de la derivada quarta de f en l'interval $[a,b]$.

En aquest exercici, $a = 1, \ b = 1.8$, i podem prendre $M_4 = 7$, aleshores determinem el nombre de subintervals n:

$$\frac{(0.8)^5}{180n^4} \cdot 7 < 0.5 \cdot 10^{-3} \quad \Longrightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(0.8)^5 \cdot 7 \cdot 10^3}{180 \cdot 0.5}} \simeq 2.25.$$

Per tant, el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de tres decimals correctes fent ús del mètode de Simpson, que ha de ser parell, és com a mínim $n = 4$.

b) Substituint $a = 1, \ b = 1.8, \ n = 4$ a la fórmula de Simpson, s'obté:

$$\frac{0.2}{3} \left[f(1) + 4[f(1.2) + f(1.6)] + 2f(1.4) + f(1.8) \right] \simeq 0.4211356735$$

El valor de la integral amb la precisió demanada és $I = 0.4211 \pm 0.0005$.

3. *(2 punts)* Considereu la funció següent:

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{5} - \sqrt{9 - x^2 - y^2})$$

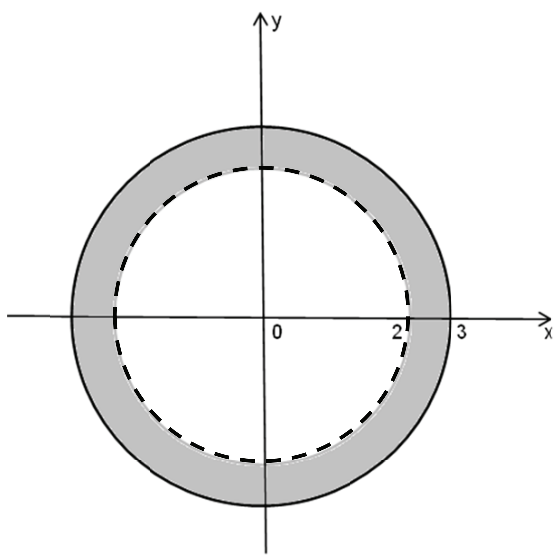
a) Trobeu i representeu gràficament el domini de f.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència del domini de f.

c) És el domini de f tancat? És obert? És acotat?

SOLUCIÓ: El domini de f és:

a) El domini de f és:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 9 - x^2 - y^2 \geq 0, \ \sqrt{5} - \sqrt{9 - x^2 - y^2} > 0\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9, \ \sqrt{9 - x^2 - y^2} < \sqrt{5}\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9, \ 9 - x^2 - y^2 < 5\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9, \ x^2 + y^2 > 4\}$.
Per tant, el domini de f és la corona circular:



incloent la circumferència gran ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9\}$) i excloent la petita ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$).

b) La frontera del domini de f está formada per les dues circumferències: $Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9\}$.
L'interior és: $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.
L'adherència: $adh(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

c) El domini de f no és tancat, ja que no conté alguns dels seus punts frontera ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$).
El domini de f no és obert, ja que conté a alguns dels seus punts frontera ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9\}$).
El domini de f sí és acotat, ja que está contingut dins de la bola de centre el punt $(0,0)$ i radi 4.

4. *(4 punts)* Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f.

b) Representeu gràficament el recinte $K \subset \mathbb{R}^2$ definit per:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \le 4,\ x - y \ge -4,\ y \ge x^2 - 16\}.$$

c) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

d) Trobeu els extrems absoluts de f en K.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^2 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els seus punts crítics de f són les solucions del sistema d'equacions:

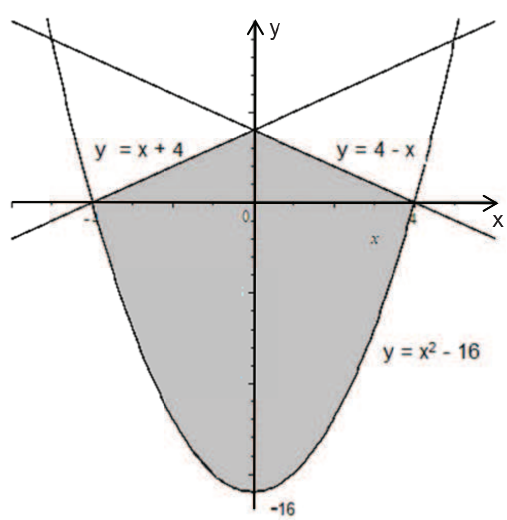
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per tant la funció f té un únic punt crític que és el punt $(0,0)$. Per tal de classificar aquest punt crític, calculem la matriu Hessiana de f en aquest punt:

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atès que el seu determinant és positiu i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1 > 0$, el punt crític $(0,0)$ és un mínim relatiu (que també és mínim absolut ja que $f(0,0) = 0$ i $f(x,y) \ge 0,\ \forall (x,y)$).

b) Un esquema de la representació gràfica del recinte K és:



c) Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte K és un compacte (és tancat ja que conté a tots els seus punts frontera ($Fr(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x+4, \ -4 \leq x \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 4-x, \ 0 \leq x \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2 - 16, \ -4 \leq x \leq 4\}$), i és acotat ja que $K \subset B((0,0);17))$, pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en K.

d) El punt crític trobat a l'apartat anterior pertany a l'interior de K, per tant hi ha un punt crítics de f a l'interior de K: el $(0,0)$.

Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera de K:

(i) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = x+4, \ -4 \leq x \leq 0\}$: fent $y = x+4$ tenim $f(x, x+4) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(x+4)^2}{2}$, que és una funció d'una variable $\varphi(x) = x^2 + 4x + 8$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$. Així s'obté el punt crític $(-2, 2)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = 4-x, \ 0 \leq x \leq 4\}$: fent $y = 4-x$ tenim $f(x, 4-x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(4-x)^2}{2}$, que és una funció d'una variable $\psi(x) = x^2 - 4x + 8$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\psi'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Així s'obté el punt crític $(2, 2)$.

(iii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment parabòlic $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = x^2 - 16, -4 \leq x \leq 4\}$: també es pot fer, com en els casos (i) i (ii), fent $y = x^2 - 16$ i considerant $f(x, x^2 - 16)$ com una funció d'una variable, si es fa aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \lambda(x^2 - y - 16)$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_x = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\lambda x = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ x^2 - y - 16 = 0 \end{cases}$$

De la primera equació s'obté: $x(1 - 2\lambda) = 0$. Per tant $x = 0$ o $\lambda = \frac{1}{2}$.

Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, de la segona equació s'obté $y = -\dfrac{1}{2}$, i llavors de la tercera equació s'obté $x = \pm\dfrac{\sqrt{62}}{2}$, i els punts crítics són: $\left(\dfrac{\sqrt{62}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ i $\left(-\dfrac{\sqrt{62}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Si $x = 0$, de la tercera equació obtenim $y = -16$ i s'obté el punt crític $(0, -16)$.

(iii) Vèrtexs de K: $(-4, 0)$, $(4, 0)$ i $(0, 4)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$f(0,0) = 0, \ f(-2,2) = 4, \ f(2,2) = 4, \ f(-4,0) = 8, \ f(4,0) = 8,$

$f(0,4) = 8, \ f\left(\dfrac{\sqrt{62}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{63}{8}, \ f\left(-\dfrac{\sqrt{62}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{63}{8}, \ f(0, -16) = 128,$

Per tant, el valor màxim absolut de f en K és 128 i l'assoleix al punt $(0, -16)$ i i el valor mínim absolut de f en K és 0 i l'assoleix al punt $(0, 0)$.