1. Considereu l'equació:

$$x^2 = x \cdot \sin x + \cos x. \tag{1}$$

a) Demostreu que, a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'equació (1) té una solució positiva i una de negativa .

b) Demostreu que l'equació (1) té exactament dues solucions reals.

SOLUCIÓ:

La funció $f(x) = x^2 - x \cdot \sin x - \cos x$ s'obté a partir de productes i sumes de funcions polinòmiques, una funció sin i una funció cos, per tant és contínua i derivable en $\mathbb{R}$.

a) Donat que la funció $f(x) = x^2 - x \cdot \sin x - \cos x$ és contínua en $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$ i $f(0) = -1 < 0$, el teorema de Bolzano assegura l'existència d'una solució de l'equació (1) en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, i per tant l'equació (1) té una solució negativa en l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Donat que la funció $f(x) = x^2 - x \cdot \sin x - \cos x$ és contínua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) = -1 < 0$ i $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$, el teorema de Bolzano assegura l'existència d'una solució de l'equació (1) en l'interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, i per tant l'equació (1) té una solució positiva en l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Demostrarem que l'equació (1) té exactament dues solucions reals per reducció a l'absurd utilitzant el teorema de Rolle:

   Per ser la funció $f(x)$ contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$, si l'equació tingués tres solucions reals $a, b, c \in \mathbb{R}$ amb $a < b < c$, pel teorema de Rolle existirien un $\alpha \in (a, b)$ i un $\beta \in (b, c)$ (amb $\alpha \neq \beta$ donat que $(a, b) \cap (b, c) = \emptyset$) en els que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$; es a dir la funció $f'(x)$ tindria dos zeros reals. Però: $f'(x) = 2x - \sin x - x \cdot \cos x + \sin x = 2x - x \cdot \cos x$, que només té un zero real: $f'(x) = 2x - x \cdot \cos x = x \cdot (2 - \cos x) = 0 \Rightarrow x = 0$: contradicció.

2. Considereu les funcions $f(x) = x - x^2$ i $F(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} e^{t^2} dt$.

a) Trobeu i representeu sobre la recta real el conjunt de solucions de la desigualtat $f(x) \geq 0$. Digueu si tal conjunt es fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

b) Demostreu que la funció $F(x)$ és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ i calculeu $F'(x)$.

c) Calculeu el límit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{f(x)}$$

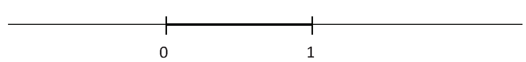
d) Calculeu un valor aproximat de $F(0.5) = \displaystyle\int_0^{0.25} e^{t^2} dt$ fent ús de la regla dels trapezis amb 5 subintervals.

e) Fent ús de la fórmula de l'error de la regla dels trapezis, doneu una fita superior del valor aproximat trobat a l'apartat anterior.

SOLUCIÓ:

a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0) \Leftrightarrow [(x \geq 0)) \wedge (x \leq 1)] \vee [(x \leq 0) \wedge (x \geq 1)] \Leftrightarrow x \in [0,1]$.

Per tant el conjunt de solucions és $[0,1]$, que és acotat, el seu ínfim és 0 i el seu suprem és 1. La seva representació sobre la recta real és:



b) La funció e^{t^2} és contínua $\forall t \in \mathbb{R}$, donat que és composició d'una funció polinòmica i una exponencial, i la funció $f(x) = x - x^2$ és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, donat que és polinòmica. Per tant, el Teorema Fonamental del Càlcul i la Regla de la cadena ens asseguren que la funció $F(x)$ és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ i $F'(x) = (1-2x)e^{(x-x^2)^2}$.

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x-x^2} e^{t^2} dt}{x - x^2}.$$

Tenim que $\lim_{x \to 0} \displaystyle\int_0^{x-x^2} e^{t^2} dt = 0$, $\lim_{x \to 0}(x - x^2) = 0$, $\displaystyle\int_0^{x-x^2} e^{t^2} dt$ és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ com hem vist a l'apartat anterior, i $x - x^2$ és derivable

$\forall x \in \mathbb{R}$ donat que és una funció polinòmica. Per tant, podem calcular aquest límit utilitzant la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x-x^2} e^{t^2} dt}{x-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-2x)e^{(x-x^2)^2}}{1-2x} = \lim_{x\to 0} e^{(x-x^2)^2} = 1.$$

d) Calcularem un valor aproximat de $F(0.5) = \displaystyle\int_0^{0.25} e^{t^2} dt$ fent ús de la regla dels trapezis amb 5 subintervals.
Per això, $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0.25}{5} = 0.05$ i $x_0 = 0$, $x_1 = 0.05$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.15$, $x_4 = 0.2$, $x_5 = 0.25$. Dient $g(t) = e^{t^2}$ la fórmula de la regla del trapezis amb 5 subintervals és:
$T(5) = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{g(x_0)}{2} + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4) + \dfrac{g(x_5)}{2}\right) =$
$= 0.05\left(\dfrac{g(0)}{2} + g(0.05) + g(0.1) + g(0.15) + g(0.2) + \dfrac{g(0.25)}{2}\right) \simeq 0.2554183166$
per tant:

$$F(0.5) = \int_0^{0.25} e^{t^2} dt \simeq T(5) = 0.2554183166$$

e) La fórmula de la cota de l'error de la regla dels trapezis per a l'aproximació de l'apartat anterior és:

$$error \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{0.25^3}{300} M_2,$$

on M_2 és una cota superior de $\{g''(x) : x \in [0, 0.25]\}$. Calculem M_2:
$g(x) = e^{x^2} \Rightarrow g'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow g''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2}$.
$g''(x)$ és positiva i creixent en l'interval $[0, 0.25]$, per tant:
$M_2 = (2 + 4(0.25)^2)e^{(0.25)^2} = 2.395112533 \simeq 2.4$
Aleshores $\dfrac{0.25^3}{300} M_2 = 0.0001247454444 \simeq 0.000125$.
Per tant, 0.000125 és una cota superior de l'error de l'aproximació de l'apartat anterior.