

1. (2 punts) Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}$ si $n \geq 1$.
- (a) Demostreu que $0 \leq a_n \leq 2$, $\forall n \geq 1$.
 - (b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.
 - (c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.
2. (2 punts)
- (a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 4 de la funció $f(x) = \cos x$ en el punt $x_0 = 0$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.
 - (b) Utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat a) calculeu el valor aproximat de $\cos \frac{1}{2}$ i doneu una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació.
3. (2 punts) Siguin $f(x) = -x^2 - 2x$ i $g(x) = x^2 - 4$.
- (a) Trobeu els nombres reals x tals que $f(x) \geq g(x)$. Representeu sobre la recta real el conjunt de solucions, digueu si és fitat i si té suprem, ínfim, màxim i mínim.
 - (b) Dibuixeu els gràfics de f i g . Calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.
4. (2 punts) Donada la funció de dues variables
- $$f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$
- (a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells 0, 1, 2, 3.
 - (b) Trobeu la derivada direccional en el punt $P(1, 2)$ en la direcció del vector que va del punt P a l'origen.
 - (c) Determineu la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1, 2)$ i trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.
5. (2 punts) Donada la funció $f(x, y) = x^2 - y^3$.
- (a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f en \mathbb{R}^2 .
 - (b) Justifiqueu l'existència dels extrems absoluts de la funció f en el conjunt
- $$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
- (c) Determineu el màxim i mínim absoluts de f en la regió K .