QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat és teoria de conjunts i múltiples exemples per entendre els conceptes.

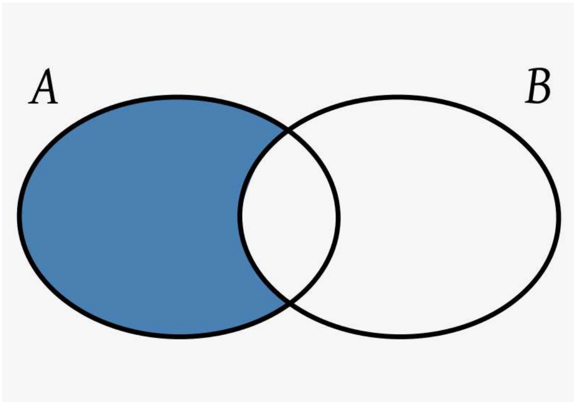
CLASSE D'AVUI 26/10/2020

Seguim amb el tema de teoria de conjunts:

La tercera operació important és la diferència de conjunts:

DEF.: Donats dos conjunts A, B anomenem conjunt diferència de A i B al conjunt

$A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$ (molt sovint també s'escriu com a $A \backslash B$).



EX.: Siguin $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,6\}$, $C = \{\{1\},2,3\}$, $D = \{\{1\},\{2,3\},5,6\}$. Calculeu $A - B$, $B - A$, $A - C$, $B - \varnothing$, $\varnothing - B$, $A - D$, $D - B$.

- $A - B = \{3,4\}$,
- $B - A = \{5,6\}$,
- $A - C = \{1,4\}$,
- $B - \varnothing = \{1,2,5,6\}$,
- $\varnothing - B = \varnothing$,
- $A - D = \{1,2,3,4\}$,
- $D - B = \{\{1\},\{2,3\}\}$.

Les principals propietats que satisfà aquesta operació són:

PROP.: Siguin A, B, C conjunts. Aleshores

1. $A - A = \varnothing$
2. $A - \varnothing = A$
3. $\varnothing - A = \varnothing$
4. $A - B \subseteq A$
5. $(A - B) \cap B = \varnothing$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$
7. $C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \cap B = \varnothing$

DEM.: Demostrem 1: per demostrar $A - A = \emptyset$ s'ha de demostrar dues inclusions

- $A - A \supseteq \emptyset$ OK (sempre!!)
- $A - A \subseteq \emptyset$ hem de veure que si tenim $x \in A - A$ aleshores tinedrem que $x \in \emptyset$; o sigui hem de demostrar que arribem a una contradicció (perquè el buit no té elements). Sigui un $x \in A - A \Rightarrow x \in A$ i $x \notin A$ cosa impossible.

Demostrem 3: com a l'anterior:

- $\emptyset - A \supseteq \emptyset$ OK
- $\emptyset - A \subseteq \emptyset$ hem de veure que si tenim $x \in \emptyset - A$ hem de veure que $x \in \emptyset$; o sigui hem de demostrar que arribem a una contradicció (perquè el buit no té elements). Sigui un $x \in \emptyset - A \Rightarrow x \in \emptyset$ i $x \notin A \Rightarrow x \neq x$ i $x \notin A \Rightarrow x \neq x$ cosa impossible.

Demostrem 7: cal demostrar una equivalència $C \subseteq A - B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset$ per tant dues implicacions,

- $\Rightarrow$: suposem que $C \subseteq A - B$ i volem demostrar que $C \subseteq^{???} A$ i $C \cap B =^{???} \emptyset$
  - $C \subseteq^{???} A$: sigui un $x \in C$ i vull demostrar que $x \in^{???} A$; i això és cert perquè si $x \in C \subseteq A - B \Rightarrow x \in A$ i $x \notin B \Rightarrow x \in A$ com volia demostrar
  - $C \cap B =^{???} \emptyset$: hi ha una inclusió que sempre és certa: $C \cap B \supseteq \emptyset$; per tant només queda demostrar l'altra inclusió $C \cap B \subseteq^{???} \emptyset$ per tant només caldrà suposar que tinc un $x \in C \cap B$ i arribar a una contradicció: $x \in C \cap B \Rightarrow x \in C$ i $x \in B$ i com que sé que $C \subseteq A - B$ tindré que $x \in A$ i $x \notin B$ i $x \in B$ cosa impossible.
- $\Leftarrow$: suposem que $C \subseteq A$ i $C \cap B = \emptyset$ i vull demostrar que $C \subseteq^{???} A - B$, o sigui donat un $x \in C$ cal veure que serà $x \in^{???} A - B$; en efecte si $x \in C \subseteq A$ per tant $x \in A$; ara cal veure que també $x \notin B$; supossem per un moment que $x \in B$, com que $x \in A$ aleshores $x \in C \cap B = \emptyset$ cosa impossible, per tant ha de ser que $x \notin B$.

També tenim les següents propietats importants en les quals intervenen més d'una operació:

PROP.: Siguin A, B, C conjunts. Aleshores

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

3. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

4. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$ i la unió és disjunta (els tres subconjunts són disjunts dos a dos)

DEM.: Demostrem 1: surt de la distributiva de la $\wedge$ respecte de la $\vee$ i de la $\vee$ respecte de la $\wedge$

Sigui $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i $\left(x \in B \text{ o } x \in C\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x \in A \text{ i } x \in B\right)$ o $\left(x \in A \text{ i } x \in C\right) \Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ o $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Com que hem fet una justificació utilitzant només $\Leftrightarrow$ llavors tinc demostrades les dues inclusions (és el principi d'extensionalitat).

Demostrem 3: Utilitzarem les lleis de De Morgan. Sigui x :

- $x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i no $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ i no $\left(x \in B \text{ o } x \in C\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A$ i $\left(x \notin B \text{ i } x \notin C\right)$

- $x \in (A - B) \cap (A - C) \Leftrightarrow x \in (A - B)$ i $x \in (A - C) \Leftrightarrow x \in A$ i $x \notin B$ i $x \in A$ i $x \notin C$

Com que totes dues expressions són equivalents, tenim provada la igualtat.

EX.: Demostreu que $(A - B) \cup (B - A) = A$ sii $B = \varnothing$.

Siguin A, B conjunts:

- $\Leftarrow$: suposem que $B = \varnothing$ llavors veure aquesta igualtat és molt fàcil perquè $(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$
- $\Rightarrow$: suposem que $(A - B) \cup (B - A) = A$ i a partir d'aquí hauríem de demostrar que $B =^{???} \varnothing$; fem el típic raonament per reducció a l'absurd: suposem per un moment que B tingués un element, o sigui tenim un $x \in B$ fent un dibuix de la situació indueix a pensar que podem distingir dos casos (i en tots dos arribarem a contradicció, per tant serà cert $B = \varnothing$):
  - $x \in A$ llavors per la hipòtesi tindrem que en ser $x \in B$ i $x \in A$ aleshores $x \notin A - B$ i $x \notin B - A$ i per tant $x \notin (A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow x \notin A$ en contradicció amb $x \in A$
  - $x \notin A$ llavors en ser $x \in B$ i $x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow$ $x \in (A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow x \in A$ en contradicció amb $x \notin A$

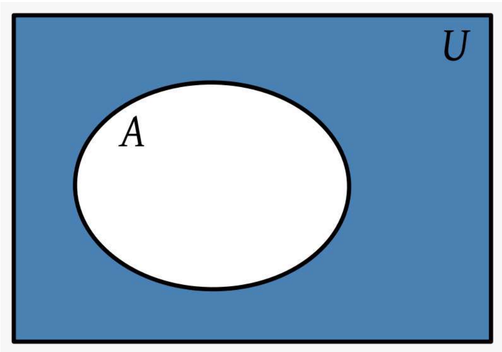
Recordeu que en tots aquests exemples i demostracions val la pena fer-se un dibuix

al costat.

La quarta operació que definirem és el complementari:

DEF.: Considerem un conjunt marc o univers U (de vegades es diu Ω) i un subconjunt A dintre seu. Definirem el conjunt complementari de A de la manera següent

$$A^C = U - A = \{x \in U | x \notin A\}$$



EX.: En el univers $U = \{1,2,3,4,\{1,2\},\{4\},5\}$ considerem $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,\{4\}\}$, $C = \{\{1,2\},1,2\}$. Calculeu A^C, B^C, $(A^C)^C$, $C \cap C^C$, $B \cap B^C$, U^C, $\varnothing^C$.

- $A^C = \{\{1,2\},\{4\},5\}$
- $B^C = \{1,2,3,4,\{1,2\}\}$
- $(A^C)^C = \{1,2,3,4\} = A$
- $C \cap C^C = \varnothing$
- $B \cap B^C = \varnothing$
- $U^C = \varnothing$

- $\varnothing^C = U$

Tenim les propietats següents del complementari:

PROP.: Siguin $A, B, C \subseteq U$ subconjunts d'un univers U. Aleshores

1. $(A^C)^C = A$
2. $\varnothing^C = U$, $U^C = \varnothing$
3. $A \cap A^C = \varnothing$, $A \cup A^C = U$
4. (Lleis de De Morgan) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
5. $A - B = A \cap B^C$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A^C \Leftrightarrow A \cap B^C = \varnothing \Leftrightarrow A^C \cup B = U$
7. $A \subseteq B^C \Leftrightarrow B \subseteq A^C \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A^C \cup B^C = U$
8. $A^C \subseteq B \Leftrightarrow B^C \subseteq A \Leftrightarrow A^C \cap B^C = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = U$
9. $B = A^C \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing, A \cup B = U$

DEM.: Demostrem 2: per demostrar $U^C =^{???} \varnothing$ mirem la doble inclusió; una es verifica sempre: $U^C \supseteq \varnothing$; l'altra ($U^C \subseteq \varnothing$) és fàcil de justificar perquè si $x \in U^C$ només caldrà arribar a una contradicció: $x \in U^C \Rightarrow x \in U$ i $x \notin U$ per tant és una contradicció, o sigui $x \in \varnothing$

Demostrem 4: $x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow$no$\left(x \in A \text{ o } x \in B\right) \Leftrightarrow x \notin A$ i $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C$ i $x \in B^C$
$\Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$. Com que estan connectats amb una equivalència, pel principi d'extensionalitat surt que són iguals els dos conjunts. I l'altre igual.

La família dels subconjunts és un conjunt important. El nom d'aquesta família de subconjunts és: les parts d'un conjunt (o conjunt potència) de A:

DEF.: Per un conjunt A anomenem el conjunt de les parts d'aquest conjunt:

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

També podem dir equivalentment que $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$.

EX.: Calculeu $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1,2\})$, $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\},$
  $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

Un concepte definit pels conjunts és el seu cardinal:

DEF.: Per un conjunt finit (no hem definit què vol dir) A anomenem cardinal d'A, i l'escriurem $|A|$, al seu número d'elements.

EX.: Utilitzant l'exemple anterior digueu quant valen $|\varnothing|$, $|\mathcal{P}(\varnothing)|$, $|\{1\}|$, $|\mathcal{P}(\{1\})|$, $|\{1,2\}|$, $|\mathcal{P}(\{1,2\})|$, $|\{1,2,3\}|$,$|\mathcal{P}(\{1,2,3\})|$, $|\{1,2,3,4\}|$, $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})|$. Si $|A| = n$, llavors quin és el $|\mathcal{P}(A)|$?

$|\varnothing| = 0$, $|\mathcal{P}(\varnothing)| = 1$, $|\{1\}| = 1$, $|\mathcal{P}(\{1\})| = 2$, $|\{1,2\}| = 2$, $|\mathcal{P}(\{1,2\})| = 4$, $|\{1,2,3\}| = 3$,$|\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8$, $|\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})| = 16$. S'observa que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

PROP.: Sigui A un conjunt. Aleshores:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
2. $A \in P(A)$
3. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

DEM.: (41) Demostrem 1: és directa perquè per definició això vol dir que $\varnothing \subseteq A$.
Demostrem 2: també és directa perquè per definició això vol dir que $A \subseteq A$.

EX.: (42) Demostreu que $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow a \in A$.
Sigui un a, A:

- $\Rightarrow$: suposem que $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$, o sigui $\{a\} \subseteq A$ per tant com que $a \in \{a\}$ llavors podem dir que $a \in A$.
- $\Leftarrow$: suposem $a \in A$ i haig de demostrar que $\{a\} \in^{???} \mathcal{P}(A)$ que vol dir que $\{a\} \subseteq A$ i per demostrar això és molt fàcil: els elements de $\{a\}$ pertanyen a A ja que sabem que $a \in A$ (a és l'únic element que té $\{a\}$).

EX.: (43) Demostreu que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Demostrem les dues inclusions:

- $\subseteq$: si $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \subseteq A$ i $\Rightarrow X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\supseteq$: si $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subseteq A$ i $X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

A posteriori veiem que enel fons les dues inclusions ess poden demostrar a la vegada perquè es poden canviar els $\Rightarrow$ per $\Leftrightarrow$.

EX.: (44) Demostreu que $X \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \cap Y \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Suosem que $X \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(B)$ (o sigui $X \subseteq A, Y \subseteq B$) i ara hem de justificar que és cert $X \cap Y \subseteq^{???} \mathcal{P}(A \cap B)$. Com que hem de demostrar una inclusió apliquem la seva definició: sigui un $C \in X \cap Y$ i demostrem que $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ o sigui que $C \subseteq^{???} A \cap B$. Però això és trivial perquè sabem que $X \subseteq A, Y \subseteq B$ i llavors $C \in X \cap Y \subseteq A \cap B \Rightarrow C \in A \cap B$ com volíem demostrar.

El darrer concepte que tractarem de teoria de conjunts és el de parella ordenada i producte cartesià:

DEF.: Siguin dos conjunts A i B anomenem:

- la parella ordenada formada per $a \in A$ i $b \in B$ és el parell (a,b) caracteritzades $(a,b) = (a',b')$ si i només si $a = a'$ i $b = b'$ (no és una definició molt formal)
- el producte cartesià del conjunt A pel conjunt B és per definició $A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$

EX.: Calculeu $\{1,2,3,4\} \times \{a,b\}$.
$\{1,2,3,4\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b)\}$

Com a propietats importants a destacar del producte cartesià tenim:
PROP.: Sigui A un conjunt. Aleshores:

1. $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
5. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

DEM.: (56) Demostrem 1: només cal tenir en compte la definició del buit.
Demostrem 2:

- $(a,b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B$ i $b \in C$
- $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B$ i $(a,b) \in A \times C \Leftrightarrow a \in A$ i $b \in B$ i $a \in A$ i $b \in C$

les dues expressions són equivalents i per tant com que ho hem demostrat amb $\Leftrightarrow$ queda justificada la igualtat de conjunts.