1 a) *(1 punt)* Enunicieu el criteri del qüocient per a successions de números reals.

b) *(2 punts)* Calculeu el límit:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$$

Resolució: *a) Sea (a_n) una sucesión de numeros reales. El* **Criterio del cociente** *se puede enunciar de una de las formas siguientes:*

1. *Si* $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
   $(a_n \neq 0, \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N})$

2. *Si* $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Longrightarrow \begin{cases} si \quad l < 1 & \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ si \quad l > 1 & \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$
   $(a_n \neq 0, \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N})$

b) Para calcular este límite utilizaremos el **Criterio del cociente**. *En este caso* $a_n = \frac{n^n}{4^n n!}$ *y* $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}$. *Por lo tanto*

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{4^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} 4^n\, n!}{4^{n+1}(n+1)!\, n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,(n+1)\, n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{4\, n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4}$$

Como $l = \frac{e}{4} < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{4^n n!} = 0.$

2 a) *(2 punts)* Trobeu els nombres reals x tals que:

$$x^2 - 2x + 1 < |x|\,.$$

Representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim).

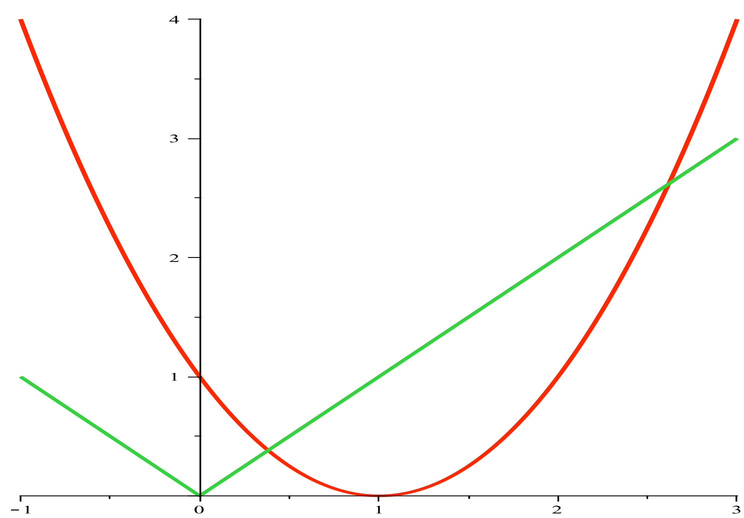
b) *(2 punts)* Representeu graficament les corbes $y = x^2 - 2x + 1$ i $y = |x|$. Calculeu l'àrea de la regió del primer quadrant limitada per les dues corbes.

Resolució: *a) Per a $x \leq 0$, l'inequació s'escriu $x^2 - 2x + 1 < -x$, és a dir, $x^2 - x + 1 < 0$.*
El polinomi $x^2 - x + 1$ no té arrels reals i es positiu per algun valor de x, per tant es positiu per a tot x.
Aleshores, l'inequació no té solució per a $x \leq 0$.

Per a $x \geq 0$, l'inequació s'escriu $x^2 - 2x + 1 < x$, és a dir, $x^2 - 3x + 1 < 0$.
Les arrels del polinomi $x^2 - 3x + 1$ són $r_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ i $r_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ i, per tant, l'inequació s'escriu

$$(x - r_1)(x - r_2) < 0.$$

El producte d'aquests dos factors és negatiu tan sols si $r_1 < x < r_2$. Per tant, el conjunt solució de l'inequació és l'interval $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. (També es pot resoldre gràficament, vegeu l'apartat (b)).
Com que qualsevol x d'aquest interval acompleix $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, una fita superior és $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ i una fita inferior és $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. El conjunt és fitat.
Qualsevol nombre més petit que $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ no pot ser fita superior. Per tant $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ és el suprem.
Qualsevol nombre més gran que $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ no pot ser fita inferior. Per tant $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ és l'ínfim.
b) A la figura es mostren les gràfiques.



Els punts d'intersecció són les solucions de l'equació $x^2 - 2x + 1 = x$, és a dir, les arrels del polinomi $x^2 - 3x + 1$, que són els nombres r_1 i r_2 calculats a l'apartat (a).

Per tant, l'àrea demanada és

$$A = \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} (x - (x^2 - 2x + 1))\ dx = \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} (-x^2 + 3x - 1)\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= -\frac{(3+\sqrt{5})^3}{24} + \frac{3(3+\sqrt{5})^2}{8} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{(3-\sqrt{5})^3}{24} - \frac{3(3-\sqrt{5})^2}{8} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Després de simplificar, obtenim

$$A = \frac{5\sqrt{5}}{6} \simeq 1.8634\,.$$

3 a) *(1 punt)* Justifiqueu per què podem afirmar que l'equació:

$$x\ \ln(x) = 10$$

té solució a l'interval $[5, 6]$.

b) *(2 punts)* Calculeu, amb un error menor que 0.05, una aproximació de la solució de

$$x\ \ln(x) = 10$$

a l'interval $[5, 6]$.

Resolució: *a) Una solució de l'equació* $x \ln(x) - 10 = 0$ *és un zero de la funció*

$$f(x) = x \ln(x) - 10.$$

La funció identitat $x \to x$ *és una funció polinòmica, contínua a tot* $\mathbb{R}$*. La funció logarítmica* $x \to \ln(x)$ *és contínua a* $(0, +\infty)$*. El producte d'aquestes dues funcions és una funció contínua a* $(0, +\infty)$*. En sumar-li una constant seguim tenint una funció contínua. Per tant,* f *és contínua a* $(0, +\infty)$*. En particular, ho és a l'interval* $[5, 6]$*.*
El signe de la funció en els extrems de l'interval és: $f(5) = -1.953 < 0$ *i* $f(6) = 0.751 > 0$*.*
Atès que es satisfan totes les hipòtesis del teorema de Bolzano, podem afirmar que existeix $c \in (5, 6)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*
b) La solució aproximada és pot trobar pel mètode de la bisecció, el mètode de Newton o el mètode de la secant. Explicitem els càlculs pels tres mètodes.

Mètode de la bisecció *Podem saber a priori quantes subdivisions de l'interval* $[5, 6]$ *són necessàries per obtenir una aproximació amb error* < 0.05*:*

$$\frac{6-5}{2^n} < 0.05 \Rightarrow 2^n > 20 \Rightarrow n \geq 5$$

Primera bisecció: $\dfrac{5+6}{2} = 5.5 \qquad f(5.5) = -0.624 < 0$

Segona bisecció: $\dfrac{5.5+6}{2} = 5.75 \qquad f(5.75) = 0.058 > 0$

Tercera bisecció: $\dfrac{5.5+5.75}{2} = 5.625 \qquad f(5.625) = -0.284 < 0$

Quarta bisecció: $\dfrac{5.625+5.75}{2} = 5.6875 \qquad f(5.6875) = -0.114 < 0$

Cinquena bisecció: $\dfrac{5.6875+5.75}{2} = 5.71875.$

LLavors, 5.72 ± 0.05 *és la solució aproximada de l'equació* $x \ln(x) = 10$ *amb la precisió demanada.*

Mètode de Newton o de la tangent *Prenem* $x_0 = 5$ *i calculem*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fins que la diferència entre dos termes consecutius $|x_{n+1} - x_n| < 0.05$ *i que* $|f(x_{n+1})| < 0.05$.
Si $f'(x) = \ln(x) + 1$, *els càlculs són:*

$x_0 = 5$	$x_1 = 5.748364401$	$\|x_1 - x_0\| > 0.75 > 0.05$	$\|f(x_1)\| = 0.054 > 0.05$
$x_1 = 5.748364401$	$x_2 = 5.728937535$	$\|x_2 - x_1\| < 0.02 < 0.05$	$\|f(x_2)\| \approx 0.000033 < 0.05$

LLavors, 5.73 ± 0.05 *és la solució aproximada de l'equació* $x\ln(x) = 10$ *amb la precisió demanada.*

Mètode de la secant *Prenem* $x_0 = 5$, $x_1 = 6$ *i calculem*

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

fins que $|x_{n+1} - x_n| < 0.05$ *i que* $|f(x_{n+1})| < 0.05$.
Els càlculs són:

$x_0 = 5$	$x_1 = 6$	$\|x_1 - x_0\| = 1 > 0.05$	
$x_1 = 6$	$x_2 = 5.722362247$	$\|x_2 - x_1\| = 0.277637753 > 0.05$	$f(x_2) = -0.0181$
$x_2 = 5.722362247$	$x_3 = 5.728870318$	$\|x_3 - x_2\| < 0.00651 < 0.05$	$\|f(x_3)\| < 0.0002$

LLavors, 5.73 ± 0.05 *és la solució aproximada de l'equació* $x\ln(x) = 10$ *amb la precisió demanada.*