Probabilitat i Estadística

FIB-UPC

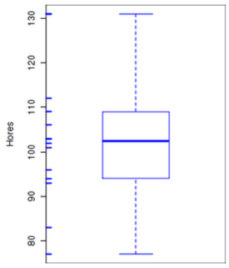
Problemes d'e-status:

B4 – Evidència i inferència

ECTS

Correcció: ECTS

La Facultat ha pres una mostra de les respostes dels alumnes a la enquesta ECTS, amb la qual s'estudia el temps que es dedica a cada assignatura (resultats en hores). A la mostra que es visualitza a la figura han participat 14 estudiants que han valorat una assignatura determinada.



Copiar dades per enganxar a un altre programa

✔	1. Quina és l'estimació puntual del temps mitjà que els estudiants dediquen a l'assignatura en qüestió? Doneu la resposta amb un decimal correcte almenys. Nota: 1.429	102.9286
✔	2. Amb la mostra disponible, doneu una estimació de l'error de la mitjana (error tipus, o standard error, la magnitud de la variació d'origen aleatori que és propi de la mitjana mostral). (dos decimals correctes, com a mínim) Nota: 1.429	4.063323
✔	3. Es demana que trobeu una estimació per interval de confiança al 90% de la mitjana poblacional de la variable "Temps dedicat a l'assignatura". Assumiu que la desviació poblacional val 20. (dos decimals correctes per cada banda, nombres separats per un espai) Nota: 2.857	94.13568 111.72147
✔	4. Calculeu una altra estimació per al mateix paràmetre, però sense assumir coneguda la desviació poblacional. Feu l'interval amb confiança 99%. (igual que a la pregunta anterior) Nota: 2.857	90.68872 115.16842
✔	5. Volem trobar un interval de confiança al 98% per a la mitjana, Suposem també que l'autèntica desviació és σ=20, i es desitja que l'amplada de l'interval sigui de 5 hores, com a molt. Quantes observacions necessitem recollir? amplada = límit superior - límit inferior Nota: 1.429	347

Resultat	
Nota	10

Script en R

```
dades = c(102, 131, 103, 106, 94, 109, 77, 96, 112, 131, 103, 101, 93, 83)
p1 = mean(dades)
p2 = sd(dades)/sqrt(length(dades))
```

$$IC(\mu,\ 1-\alpha) = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

v	0,6	0,75	0,9	0,95	0,975
∞	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960

```
# z0.95 en http://www-eio.upc.es/teaching/pe/TAULES/TStud.pdf
p3 = c(mean(dades) - (1.645*20)/sqrt(length(dades)),
mean(dades) + (1.645*20)/sqrt(length(dades)))
p4 = t.test(dades, conf.level=99/100)$conf.int
p4 = c(p4[1], p4[2])
z = qnorm(1 - (1 - (98/100))/2) # z0.99 en la taula T-STUDENT
p5 = ceiling(((z*20)/2.5)^2)

p1; p2; p3; p4; p5
```

Consola de R

```
> dades = c(102, 131, 103, 106, 94, 109, 77, 96, 112, 131, 103, 101, 93, 83)
> p1 = mean(dades)
> p2 = sd(dades)/sqrt(length(dades))
> p3 = c(mean(dades) - (1.645*20)/sqrt(length(dades)),
mean(dades) + (1.645*20)/sqrt(length(dades)))
> p4 = t.test(dades, conf.level=99/100)$conf.int
> p4 = c(p4[1], p4[2])
> z = qnorm(1 - (1 - (98/100))/2)
> p5 = ceiling(((z*20)/2.5)^2)
> p1; p2; p3; p4; p5

[1] 102.9286
[1] 4.063323
[1] 94.13568 111.72147
[1] 90.68872 115.16842
[1] 347
```

Huevos de gallina feliz

Correcció: Huevos de gallina feliz

El experto en huevos ecológicos de una granja conoce la distribución del peso (en gramos) de un huevo de gallina criada con grano, y es N(63.6, 3.1). Por supuesto, cuando los huevos se colocan en embalajes, se mezclan los más grandes con otros más pequeños, y esto puede crear suspicacias en el consumidor. En realidad, deberíamos tener claro que el peso medio de un conjunto de huevos permanece más estable que las variaciones naturales que se observan sobre un solo huevo.

✓	1. Para empezar, introduce un intervalo (a,b) para el peso de un solo huevo. Este intervalo debe cumplir que el peso de un huevo elegido al azar estará entre sus límites con una probabilidad entre 65% y 70%. Como siempre, el valor menor primero, y con un espacio en blanco en medio. Nota: 2.5	60.54887 66.65113
✓	2. ¿Qué pasaría si tomamos grupos de 2 huevos? Si se hace la media del peso de 2 huevos independientes y tomados al azar, ¿cómo se distribuye? Vuelve a proporcionar un intervalo que contenga con probabilidad entre 65% y 70% el peso medio de un grupo de tamaño 2. Nota: 2.5	61.44253 65.75747
✓	3. Repite, pero para el peso medio de un grupo de tamaño 10. Nota: 2.5	62.63515 64.56485
✓	4. Supóngase que el intervalo (62.9452, 64.2548) representa el peso medio de 'n' huevos, con una probabilidad de 77.5%. ¿Puedes hallar el valor de 'n'? Nota: 2.5	33

Resultat	
Nota	10

Script en R

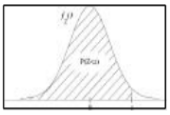
```
x = 63.6

desv = 3.1

alfa = 1 - (65/100 + 70/100)/2
```

TABLA C

Áreas acumuladas de la distribución **NORMAL ESTANDARIZADA**



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

```
# z1-α/2 = z0.8375

# z0.8375 = qnorm(0.8375)

# z0.8375 ≈ 0.985

p1 = c(x - qnorm(1 - alfa/2)*desv, x + qnorm(1 - alfa/2)*desv)

p2 = c(x - (qnorm(1 - alfa/2)*desv)/sqrt(2), x + (qnorm(1 -
alfa/2)*desv)/sqrt(2))

p3 = c(x - (qnorm(1 - alfa/2)*desv)/sqrt(10), x + (qnorm(1 -
alfa/2)*desv)/sqrt(10))

alfa = 1 - 77.5/100

p4 = round(((qnorm(1 - alfa/2)*desv)/(64.2548 - x))^2)

p1; p2; p3; p4
```

Consola de R

```
> x = 63.6
> desv = 3.1
> alfa = 1 - (65/100 + 70/100)/2
> p1 = c(x - qnorm(1 - alfa/2)*desv, x + qnorm(1 - alfa/2)*desv)
> p2 = c(x - (qnorm(1 - alfa/2)*desv)/sqrt(2), x + (qnorm(1 -
alfa/2)*desv)/sqrt(2))
> p3 = c(x - (qnorm(1 - alfa/2)*desv)/sqrt(10), x + (qnorm(1 -
alfa/2)*desv)/sqrt(10))
> alfa = 1 - 77.5/100
> p4 = round(((qnorm(1 - alfa/2)*desv)/(64.2548 - x))^2)
> p1; p2; p3; p4
[1] 60.54887 66.65113
[1] 61.44253 65.75747
[1] 62.63515 64.56485
[1] 33
```

New tires

Correcció: New tires

The manufacturer of a new fiberglass tire claims that its average life will be at least 40,000 miles. To verify this claim a sample of 13 tires is tested, with their lifetimes (in 1,000 of miles) being as follows:

tire	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
life	43.7	41.1	39.6	39.5	41.4	32.6	43	41.2	39.8	40.1	42.8	36.5	34.6

1. The null hypothesis is as follows: H_0: $\mu = \mu_0$ Which should be the value of μ_0? Nota: 0.769	40
2. We want to test the claim from the manufacturer's point of view (who expects to prove that his tires are very good). What is the correct direction to take into account this point of view? 1. two-sided (≠) 2. one-sided (to the left, <) 3. one-sided (to the right, >) Nota: 0.769	3
3. Which is the sample estimation of the mean life for the new tires? Nota: 1.538	39.68462
4. Find the value of the test statistic (three figures). Nota: 1.538	-0.3448545
5. Compute the p-value of the test data (three figures). Nota: 1.538	0.6319137
6. Find a 80 percent confidence interval for the mean life of the tires tested (two figures of accuracy). Nota: 1.538	38.4443 40.92494
7. Compute the standard deviation of the preceding data, up to an accuracy of 1 mile (but answer with the unit in thousands of miles). Nota: 1.538	3.297435
8. Find a 80 percent confidence interval for the variance of the tires life (two figures of accuracy). Nota: 0.769	7.034044 20.698151

Resultat	
Nota	10

Script en R

```
p1 = 40 # H0: μ = 40
p2 = 3  # manufacturer's point of view -> H1: μ > 40
        # user's point of view         -> H1: μ < 40
dades = c(43.7, 41.1, 39.6, 39.5, 41.4, 32.6, 43, 41.2, 39.8,
40.1, 42.8, 36.5, 34.6)
```

`p3 = mean(dades)` # $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{43.7 + \ldots + 34.6}{13}$

```
p4 = (mean(dades) - 40)/(sd(dades)/sqrt(length(dades)))
```

$\hat{t} = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$

`p5 = pt(-p4, length(dades)-1)` # H_1: $\mu > 40 \rightarrow P(t > \hat{t}) = P(t < -\hat{t})$

H_1: $\mu < 40 \rightarrow P(t < \hat{t})$

$$IC(\mu,\ 1-\alpha) = \bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

```
alfa = 1 - 80/100
```

```
p6 = c(mean(dades) - (qt(1-alfa/2, length(dades)-1) *
sd(dades)) / sqrt(length(dades)), mean(dades) + (qt(1-alfa/2,
length(dades)-1) * sd(dades)) / sqrt(length(dades)))

p7 = sd(dades)
```

$$IC(\sigma^2,\ 1-\alpha)=\left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}},\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}\right)$$

```
p8 = c((sd(dades)^2 * (length(dades)-1)) / qchisq(1-alfa/2,
length(dades)-1), (sd(dades)^2 * (length(dades)-1)) /
qchisq(alfa/2, length(dades)-1))


p1; p2; p3; p4; p5; p6; p7; p8
```

Consola de R

```
> p1 = 40
> p2 = 3
> dades = c(43.7, 41.1, 39.6, 39.5, 41.4, 32.6, 43, 41.2,
39.8, 40.1, 42.8, 36.5, 34.6)
> p3 = mean(dades)
> p4 = (mean(dades) - 40)/(sd(dades)/sqrt(length(dades)))
> p5 = pt(-p4, length(dades)-1)
> alfa = 1 - 80/100
> p6 = c(mean(dades) - (qt(1-alfa/2, length(dades)-1) *
sd(dades)) / sqrt(length(dades)), mean(dades) + (qt(1-alfa/2,
length(dades)-1) * sd(dades)) / sqrt(length(dades)))
> p7 = sd(dades)
> p8 = c((sd(dades)^2 * (length(dades)-1)) / qchisq(1-alfa/2,
length(dades)-1), (sd(dades)^2 * (length(dades)-1)) /
qchisq(alfa/2, length(dades)-1))
> p1; p2; p3; p4; p5; p6; p7; p8

[1] 40
[1] 3
[1] 39.68462
[1] -0.3448545
```

```
[1] 0.6319137
[1] 38.44430 40.92494
[1] 3.297435
[1] 7.034044 20.698151
```

Captchas

Correcció: Captchas

Como probablemente sabes, los captchas son pruebas que ciertos formularios web incluyen para que el ordenador sepa que eres un humano y no una máquina (como el test de Turing, pero al revés).

Por supuesto, la retorcida mentalidad de los científicos se ha volcado para tratar de encontrar sistemas anti-captcha, es decir, procedimientos que pueden responder a la cuestión planteada sin mediación humana. Un equipo especialmente perverso de la UPC trabaja en un procedimiento con el objetivo de reventar el sistema Captcha de Google, uno de los más resistentes de los habitualmente usados.

Qualifying question

Just to prove you are a human, please answer the following math challenge.

Q: Calculate:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[7\cdot\sin\left(5\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\Big|_{x=2\pi}.$$

A:

mandatory

Note: If you do not know the answer to this question, reload the page and you'll (probably) get another, easier, question.

✔	1. El equipo de la UPC ha preparado un estudio en el que trata de adivinar la respuesta de 350 captchas independientes, de los que consigue la respuesta correcta en 48 de ellos. Obtén en forma de IC 98% la estimación de la probabilidad de éxito para su procedimiento. (responde con proporciones, no con porcentajes; tres decimales correctos al menos para cada extremo del intervalo) Nota: 2.222	0.0944 0.1799
✔	2. El equipo UPC prepara un nuevo trabajo con una técnica modificada. Está calculando el tamaño de muestra necesario, y se han definido los siguientes requisitos: • confianza: 80%, • el intervalo resultante tendrá una amplitud total esperada igual a 7.4%, • no se espera que la proporción de éxitos real sea mayor que 25%. Deduce el número de observaciones que se requiere observar. Nota: 2.222	225
✔	3. ¿Y si no se hace ninguna suposición sobre el umbral superior de la proporción que se desea estimar, cuál sería entonces el cálculo del tamaño de muestra? Nota: 1.111	300
✔	4. Aparece en la revista científica "Journal of Irreproducible Results" un trabajo en el que se describe una experiencia similar al objeto de estudio de nuestro equipo. En este trabajo, los autores presentan una proporción de éxito (0.3849, 0.4711), con confianza 95%. Sin embargo, los autores han olvidado incluir el dato de cuántos captchas utilizaron. ¿Puedes averiguarlo tú? *La respuesta ha de ser un número entero, coge el valor redondeado por exceso.* Nota: 1.111	507
✔	5. Volviendo a los resultados de la primera pregunta, el equipo se prepara para resolver una prueba de hipótesis. De acuerdo a estudios previos, se trata de plantearse si sus resultados coinciden o no con una proporción auténtica igual a 0.16: H_0: π = 0.16 Determina el valor del estadístico asociado a esta prueba, a partir de aquellos resultados. (tres decimales al menos) Nota: 1.111	-1.1664
✔	6. Calcula el valor P de la prueba anterior. (tres decimales correctos) Nota: 2.222	0.24344

Resultat	
Nota	10

Script en R

$$IC(\pi,\,1-\alpha)=P\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{P(1-P)/n}$$

```
n = 350
P = 48/n
alfa = 1 - 98/100
p1 = c(P - qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)/n), P + qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)/n))
```

$$\left.\begin{array}{l} 0.25+1.282\sqrt{\dfrac{0.25\times0.75}{n}}=y+0.074 \\[2ex] 0.25-1.282\sqrt{\dfrac{0.25\times0.75}{n}}=y \end{array}\right\}\quad n=\left(\frac{2\times1.282\sqrt{0.25\times0.75}}{0.074}\right)^2$$

```
P = 25/100
alfa = 1 - 80/100
p2 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/0.074)^2)
```

```
P = 50/100
p3 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/0.074)^2)
amplitud = 0.4711 - 0.3849
P = 0.3849 + amplitud/2
alfa = 1 - 95/100
p4 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/amplitud)^2)
```

$$\boxed{\hat{z} = \frac{(p-\pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}}$$

```
pi = 0.16
P = 48/n
p5 = (P-pi)/sqrt(pi*(1-pi)/n)
z = abs(p5)
p6 = 2*pnorm(-z)  # H1: π ≠ 0.16 → P(|Z| > |ẑ|) = P(Z > ẑ) + P(Z < −ẑ) =
                  #  = 2 * P(Z < −ẑ) =  2 * pnorm(−z)
                  #  = 2 * P(Z > ẑ) = 2 * (1 − P(Z < ẑ)) = 2 * (1 − pnorm(z))
                  #  = 1 − P(Z < ẑ) + P(Z < −ẑ) = 1 − pnorm(z) + pnorm(−z)

p1; p2; p3; p4; p5; p6
```

Consola de R

```
> n = 350
> P = 48/n
> alfa = 1 - 98/100
> p1 = c(P - qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)/n), P + qnorm(1-
alfa/2)*sqrt(P*(1-P)/n))
> P = 25/100
> alfa = 1 - 80/100
> p2 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/0.074)^2)
> P = 50/100
> p3 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/0.074)^2)
> amplitud = 0.4711 - 0.3849
```

```
> P = 0.3849 + amplitud/2
> alfa = 1 - 95/100
> p4 = ceiling(((2*qnorm(1-alfa/2)*sqrt(P*(1-P)))/amplitud)^2)
> pi = 0.16
> P = 48/n
> p5 = (P-pi)/sqrt(pi*(1-pi)/n)
> z = abs(p5)
> p6 = 2*pnorm(-z)
> p1; p2; p3; p4; p5; p6

[1] 0.0943672 0.1799185
[1] 225
[1] 300
[1] 507
[1] -1.166424
[1] 0.2434432
```