1. *(2 punts)* Resoleu la inequació

$$\left|\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}\right| \geq 1.$$

Digueu si el conjunt que s'obté està fitat i, en cas que en tingui, trobeu-ne el suprem i l'ínfim.

Solució. Notemos que la expresión no tiene sentido para $x = 2$.

$$\left|\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}\right| \geq 1 \iff |x^2-4x-12| \geq (x-2)^2 \iff \begin{array}{lll} x^2-4x-12 & \geq (x-2)^2 & (1) \\ & \text{o} & \\ x^2-4x-12 & \leq -(x-2)^2 & (2) \end{array}$$

En el primer lugar observamos que la desigualdad (1) no se cumple para ningún x ya que

$x^2-4x-12 \geq (x-2)^2 \iff x^2-4x-12 \geq x^2-4x+4 \iff -12 \geq 4.$

En el segundo lugar resolvemos la desigualdad (2):

$x^2-4x-12 \leq -(x-2)^2 \iff x^2-4x-12 \leq -x^2+4x-4 \iff 2x^2-8x-8 \leq 0$

$\iff x^2-4x-4 \leq 0 \iff 2-2\sqrt{2} \leq x \leq 2+2\sqrt{2}$

ya que $x^2-4x-4 = 0 \iff x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

Entonces, teniendo en cuenta la condición que $x \neq 2$, llegamos a la solución del problema que es el conjunto $D = \big[2-2\sqrt{2}, 2\big) \cup \big(2, 2+2\sqrt{2}\big]$.

D es acotado superiormente ya que $\exists\, K : x \leq K,\ \forall x \in D$, por ejemplo, $K = 6$.

D es acotado inferiormente ya que $\exists\, k : x \geq k,\ \forall x \in D$, por ejemplo, $k = -2$.

Además $\exists \sup D = 2+2\sqrt{2}$ y $\exists \inf D = 2-2\sqrt{2}$.

2. *(2 punts)* Calculeu els límits següents:

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad b) \lim_{n\to+\infty} \left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Indiqueu els criteris que feu servir i justifiqueu tots els passos.

Solució.

- Part a): Aquest límit es pot resoldre mitjançant el criteri del quacient i mitjançant el criteri del sandwitch:

- $*$ **Criteri del quocient**: Hem de calcular el límit de $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Com que $n! = n \cdot (n-1)!$ i $(2n)! = (2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right|}{\left|\frac{((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2n(2n-1)}\frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}}{\frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-2n} = \frac{1}{4}.$$

  Com que $\frac{1}{4} < 1$, apliquem el criteri de quocient per a obtindre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- $*$ **Criteri del sandwitch**: Observeu que

$$(2n)! = \prod_{i=1}^{2n} i = \prod_{i=1}^{n}(2i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = 2^n\cdot n!\cdot\prod_{i=1}^{n}(2i-1) \geq 2^n\cdot n!\cdot\prod_{i=1}^{n} i = 2^n\cdot(n!)^2,$$

  ja que $(2i-1) \geq i$ si $i \geq 1$. Per tant,

$$0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \frac{(n!)^2}{2^n\cdot(n!)^2} = \frac{1}{2^n}.$$

  Com que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, pel criteri del sandwitch deduïm que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0.$$

– Part b): A l'hora de veure de quin tipus d'indeterminació es tracta, observem dintre del límit tenim l'expressió $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ que és de la forma $\infty - \infty$. Utilitzem la fórmula $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$ per a obtindre

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Per tant el limit que volem calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}},$$

és clarament del tipus 1^∞. Apliquem la fórmula $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$, si $a_n \to 1$ i $b_n \to \infty$: Com que en aquest cas:

$$\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \frac{1}{2},$$

ja que $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$. Deduïm que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

3. *(3 punts)* Considereu l'equació $4xe^{-x} = 1$.

a) Proveu que té exactament dues solucions a l'interval [0, 3].

b) Trobeu una aproximació de la solució més propera a $x = 2$ amb error absolut més petit que 0.05.

Solució. Resoldre l'equació equival a trobar els zeros de la funció

$$f(x) = 4xe^{-x} - 1.$$

Aquesta funció és contínua i derivable a tot $\mathbb{R}$, perquè $4xe^{-x}$ és producte d'un polinomi i una exponencial i a aquest producte sumem la constant -1. f s'obté operant funcions que són contínues i derivables.

La derivada de $f(x)$ és

$$f'(x) = 4e^{-x}(1 - x)$$

i $f'(x) = 0$ només té la solució $x = 1$.

Atès que f' té un únic zero, el teorema de Rolle ens permet afirmar que f en técom a molt dos a tot $\mathbb{R}$.

Avaluem la funció en alguns punts de l'interval $[0, 3]$:

$$f(0) = -1 < 0; \quad f(1) = \frac{4}{e} - 1 \approx 0.47 > 0;$$

$$f(2) = \frac{8}{e^2} - 1 \approx 0.08 > 0; \quad f(3) = \frac{12}{e^3} - 1 \approx -0.40 < 0.$$

Aleshores, pel Teorema de Bolzano, f té com a mínim un zero a (0, 1) i un altre a (2, 3).

Finalment, combinant els dos resultats, es conclou que f té exactament dos zeros a [0, 3] (i a tot $\mathbb{R}$).

Pel que hem vist, la solució més propera a $x = 2$ és la que hi ha a l'interval (2, 3). Per trobar-ne una aproximació, es pot aplicar el mètode de la bisecció, a [2, 3] i amb 5 iteracions; o bé el de la secant, al mateix interval (n'hi ha prou amb 2 iteracions), o el de la tangent, amb $x_0 = 2$ (també n'hi ha prou amb 2 iteracions). Per exemple, per aquest darrer mètode:

Iteració n	x_{n-1}	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	2	≈ 2.152736	≈ 0.152736	≈ 0.000298
2	≈ 2.152736	≈ 2.153292	≈ 0.000556	$\approx 2 \cdot 10^{-7}$

I l'aproximació buscada és $x_2 \approx 2.15$.

4. *(3 punts)* Considerem la funció $f(x) = \sqrt[3]{(x+8)^2}$.

a) Useu $P_2(f, 0, x)$, el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f en 0, per tal d'avaluar $\sqrt[3]{81}$.

b) Escriviu el residu en la forma de Lagrange corresponent a $P_2(f, 0, x)$ i doneu una fita superior de l'error absolut en l'aproximació de l'apartat a).

c) Determineu $a > 0$ tal que per a qualsevol $x \in (0, a]$ l'error comès en aproximar $f(x)$ per $P_2(f, 0, x)$ sigui menor o igual que 0.1.

Solución.

a) Calculamos el polinomio de Taylor de grado 2 en el origen:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+8)^{-1/3}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}(x+8)^{-4/3}$$

Tomando los valores de la función y de las derivadas en el origen:

$$f(0) = 4\,, \quad f'(0) = \frac{1}{3}\,, \quad f''(0) = -\frac{1}{72}$$

Por tanto el polinomio de Taylor será:

$$P_2(f, 0, x) = 4 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{144}$$

Ahora lo usaremos para aproximar $\sqrt[3]{81}$, teniendo en cuenta que es igual a $f(1)$. Es cierto que también es igual a $f(-17)$ pero este valor está mucho más alejado del origen y por tanto lo lógico es tomar $x = 1$ para calcular la aproximación. En consecuencia,

$$\sqrt[3]{81} = f(1) \approx P_2(f, 0, 1) = 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{144} = \frac{623}{144} \approx 4.32639$$

b) El resto de Lagrange asociado al polinomio de Taylor del apartado anterior es

$$R_2(f, 0, x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{4x^3}{81(c+8)^{7/3}}$$

siendo c un número real entre 0 y x. Lo utilizamos para calcular una cota superior del error cometido en la aproximación del apartado anterior. Por lo tanto, tomamos $x = 1$ y el error vendrá dado por

$$|R_2(f, 0, 1)| = \frac{4}{81(c+8)^{7/3}}\,, \quad \text{con} \quad c \in (0, 1)$$

Podemos observar que la expresión anterior es claramente decreciente con c en el intervalo $(0, 1)$ debido a que $c + 8$ es creciente y se encuentra en el denominador. En consecuencia, podemos obtener una cota superior del error tomando $c = 0$ en la fórmula de $R_2(f, 0, 1)$, es decir,

$$|R_2(f, 0, 1)| = \frac{4}{81(c+8)^{7/3}} < \frac{4}{81 \cdot 8^{7/3}} = \frac{1}{2592} \approx 3.9 \cdot 10^{-4}$$

c) A partir de la fórmula del resto de Lagrange del apartado anterior, cuando $x > 0$ se puede acotar superiormente el error cometido en la aproximación tomando $c = 0$ ya que $c \in (0, x)$ y el resto es decreciente con c. Por tanto,

$$|R_2(f, 0, x)| = \frac{4x^3}{81(c+8)^{7/3}} < \frac{4x^3}{81(8)^{7/3}} = \frac{x^3}{2592}$$

Para que el error cometido en la aproximación sea inferior o igual a 0.1 debe cumplirse que

$$\frac{x^3}{2592} \leq 0.1$$

Resolviendo esta inecuación se obtiene que $x \leq \sqrt[3]{259.2}$. Por lo tanto se deduce que $a = \sqrt[3]{259.2} \approx 6.3760$.