1. *(2 punts)* Trobeu els nombres reals x tals que:

$$\left|\frac{3x}{x+1}\right| \geq 5.$$

Representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment (inferiorment). En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem (ínfim). Digueu si tal conjunt té màxim o mínim. Quins són?

Solución. $|\frac{3x}{x+1}| \geq 5 \Leftrightarrow x \in C = A \cup B$, con $A = \{\frac{3x}{x+1} \geq 5\}$ y $B = \{\frac{3x}{x+1} \leq -5\}$.
Resolvemos A:

$$\frac{3x}{x+1} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-5}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{-2x-5 \geq 0\} \cap \{x+1 > 0\} \Leftrightarrow \emptyset \\ \text{ó} \\ \{-2x-5 \leq 0\} \cap \{x+1 < 0\} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -1 \end{array} \right\}$$

Resolvemos B:

$$\frac{3x}{x+1} \leq -5 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8x+5}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{8x+5 \leq 0\} \cap \{x+1 > 0\} \Leftrightarrow -1 < x \leq -\frac{5}{8} \\ \text{ó} \\ \{8x+5 \geq 0\} \cap \{x+1 < 0\} \Leftrightarrow \emptyset \end{array} \right\}$$

Por lo tanto: $C = A \cup B = [-\frac{5}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{5}{8}]$.

C es acotado superiormente ya que $\exists\, K \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, $K = 0$): $K \geq x$, $\forall x \in C$.
C es acotado inferiormente ya que $\exists\, k \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, $k = -3$): $k \leq x$, $\forall x \in C$.
$\exists \sup C = -\frac{5}{8} \in C \implies \exists \max C = -\frac{5}{8}$.
$\exists \inf C = -\frac{5}{2} \in C \implies \exists \min C = -\frac{5}{2}$.

2. *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = \sqrt{3}$ i $a_{n+1} = \sqrt{3\, a_n}$ si $n \geq 1$.

a) Demostreu que $0 \leq a_n \leq 3, \quad \forall n \geq 1$.
b) Demostreu que $\{a_n\}$ és monótona.
c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

Solución.

a) Usamos inducción en n. Primero observar que $a_1 = \sqrt{3}$ entonces claramente el enunciado es verdad para $n = 1$. Ahora fijamos $k \geq 1$ y suponemos **Hipotesis:** $0 \leq a_k \leq 3$. Debemos demostrar que **Tesis:** $0 \leq a_{k+1} \leq 3$. La primera desigualdad es evidente entonces queda demostrar que $a_{k+1} \leq 3$. Por hipotesis $a_k \leq 3$ entonces $3a_k \leq 9$ y así $a_{k+1} = \sqrt{3a_k} \leq 3$. Lo que concluye la demostración.

b) Demostraremos que es creciente. Esto es equivalente a demostrar que $a_n \leq a_{n+1}$ para $n \geq 1$ y entonces usamos inducción. Primero observar que $a_1 = \sqrt{3}$ y $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}$ entonces claramente el enunciado es verdad para $n = 1$. Ahora fijamos $k \geq 1$ y suponemos **Hipotesis:** $a_k \leq a_{k+1}$. Debemos demostrar que **Tesis:** $a_{k+1} \leq a_{k+2}$. Desde la hipotesis obtenemos $3a_k \leq 3a_{k+1}$ entonces $a_{k+1} := \sqrt{3a_k} \leq \sqrt{3a_{k+1}} =: a_{k+2}$. Lo que concluye la demostración.

c) Desde a) y b) sabemos que $\{a_n\}$ es monótona y acotada entonces por el teorema de la convergencia monótona deducimos que es convergente. Llamemos $L \in \mathbb{R}$ este límite. Entonces la parte a) implica $0 \leq L \leq 3$, pero como $a_1 > 0$ y la sucesión en cuestion es creciente deducimos que $0 < L$. Ahora observemos que L es tambien el límite de la sucesión $\{a_{n-1}\}_{n\geq 1}$ obtenida desde $\{a_n\}_{n\geq 1}$ disminuyendo el subíndice en 1. Ahora tomando límites en la igualdad $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ obtenemos $L = \sqrt{3L}$ lo que implica que $L^2 = 3L$. Esta última igualdad implica que $L = 0$ o $L = 3$. Como observado más arriba la unica opción posible es L. Así el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 3.

3. *(3 punts)* Considereu l'equació

$$e^{-x} = 5x$$

a) Justifiqueu que aquesta equació té solució real a l'interval $(0, 1)$.

b) Demostreu que l'equació només té una solució real.

c) Useu el mètode de la tangent per calcular, amb un error menor que 0.005, una aproximació de la solució de l'equació.

Solución. Considerem la funció $f(x) = e^{-x} - 5x$.

a) La funció f és contínua i derivable en tota la recta real (és la resta d'una funció exponencial i una funció lineal, ambdues contínues i derivables en tota la recta real). En particular f és contínua en l'interval $[0, 1]$. A més $f(0) = 1 > 0$ i $f(1) \simeq -4.63212 < 0$. En aquestes condicions, el Teorema de Bolzano demostra l'existència d'un zero de $f(x)$ en l'interval $(0, 1)$, és a dir l'existència d'una solució de l'equació a l'interval $(0, 1) \subset [0, 1]$.

b) Per a demostrar la unicitat, es pot fer per reducció a l'absurd: si hi haguessin dues solucions diferents $a, b \in \mathbb{R}$, amb $a < b$, llavors per ser f una funció contínua i derivable en tota la recta real, el teorema de Rolle assegura que existiria un $c \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ amb $f'(c) = 0$, però $f'(x) = -e^{-x} - 5$ que és estrictament negativa per a tot $x \in \mathbb{R}$ i per tant no s'anul·la en cap punt de la recta real.

c) La funció f i la seva derivada són: $f(x) = e^{-x} - 5x$, $f'(x) = -e^{-x} - 5$. Aleshores, utilitzant el mètode de Newton-Raphson, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, amb valor inicial $x_0 = 0$, obtenim: $x_1 = 0.16666666671$, $x_2 = 0.1689156075$.
Donat que x_2 és la primera iteració que satisfà el criteri d'aturada del mètode: $|x_2 - x_1| < 0.005$ i $|f(x_2)| < 0.005$,
Una aproximació de la solució amb error més petit que 0.005 és $x \simeq x_2 = 0.169$.

4. *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = (2x-3)e^{x-1}$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt $x_0 = 1$.

b) Determineu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f en el punt $x_0 = 1$ y el residu corresponent en la forma de Lagrange.

c) Calculeu el valor aproximat de $f(0.9)$ y una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació utilitzant el polinomi y el residu de l'apartat b).

Solución.

a) Para escribir la fórmula del polinomio de Taylor de grado n, primero necesitamos obtener la fórmula de la derivada n-ésima de la función f. Utilizando la regla de derivación del producto de funciones se obtiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{x-1} + (2x-3)e^{x-1} = (2x-1)e^{x-1}; \\ f''(x) &= 2e^{x-1} + (2x-1)e^{x-1} = (2x+1)e^{x-1}; \\ f'''(x) &= 2e^{x-1} + (2x-1)e^{x-1} = (2x+3)e^{x-1} \end{aligned}$$

A partir de las expresiones anteriores, cualquiera de las siguientes fórmulas se puede postular como válida para describir la derivada n-ésima de $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = 2ne^{x-1} + (2x-3)e^{x-1} = (2x-3+2n)e^{x-1}$$

Utilizando el principio de inducción se demuestra que la fórmula anterior es cierta para todo $n \geq 1$. El paso base de la demostración ya sabemos que es cierto por las primeras derivadas que hicimos de f. Por tanto solo queda demostrar el paso inductivo, es decir, suponiendo que la fórmula es cierta para n deducimos que también lo es para el siguiente valor $n+1$. Para eso es suficiente derivar la expresión de $f^{(n)}(x)$ (por ejemplo la segunda de las postuladas antes) con lo cual obtenemos:

$$f^{(n+1)}(x) = 2e^{x-1} + (2x-3+2n)e^{x-1} = (2x-3+2n+2)e^{x-1} = (2x-3+2(n+1))e^{x-1}$$

que es la fórmula para $n+1$.

Una vez tenemos la expresión de la derivada n-ésima, la evaluamos en el punto que nos pide el enunciado, $x_0 = 1$, para calcular los coeficientes del polinomio de Taylor:

$$f^{(n)}(1) = (2-3+2n)e^0 = 2n-1$$

Los valores de las derivadas siguen por tanto la secuencia de los números impares empezando en 1.

Puesto que $f(1) = -1$, la fórmula del polinomio de Taylor que se pide en el enunciado es:

$$P_n(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!}(x-1)^k$$

ó bien

$$P_n(x) = -1 + (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{2n-1}{n!}(x-1)^n$$

b) Naturalmente, aunque no hayamos podido deducir la expresión del polinomio de Taylor de grado n, podemos calcular el de grado 3 haciendo las tres primeras derivadas de $f(x)$ y evaluándolas en $x = 1$. Teniendo en cuenta que los valores de las sucesivas derivadas siguen la secuencia de números impares como se vio en el apartado anterior, obtendremos:

$$P_3(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 = -1+(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{5}{6}(x-1)^3$$

La fórma de Lagrange del resto correspondiente tiene la siguiente expresión:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4$$

siendo c un punto entre x y 1. Calculando la derivada cuarta de f o bien tomando la fórmula general deducida en el apartado (a), obtenemos:

$$R_3(x) = \frac{(2c+5)e^{c-1}}{24}(x-1)^4$$

c) El valor aproximado de $f(0.9)$ se obtiene de evaluar el polinomio de Taylor del apartado (b) en $x = 0.9$, es decir, de calcular $P_3(0.9)$. Por tanto,

$$P_3(0.9) = -1 - 0.1 + \frac{3}{2}(-0.1)^2 + \frac{5}{6}(-0.1)^3 = -1.1 + 0.015 - \frac{0.005}{6} \approx -1.085833$$

Como comprobación podemos usar la calculadora para evaluar $f(0.9)$ usando la fórmula de la función, se obtiene $f(0.9) = (1.8-3)e^{-0.1} \approx -1.0858049$. De esta manera se puede confirmar que el valor obtenido con el polinomio de Taylor de grado 3 ciertamente aproxima el valor real de la función f en $x = 0.9$.

Para calcular una cota superior del error absoluto de esta aproximación con el resto del apartado anterior, necesitamos acotar superiormente el valor absoluto del resto. Ya que el error absoluto de la aproximación, E, viene dado por

$$E = |R_3(0.9)| = \left|\frac{(2c+5)e^{c-1}}{24}(-0.1)^4\right| = (2c+5)e^{c-1}\frac{0.0001}{24}$$

siendo ahora c un punto del intervalo $(0.9, 1)$. Observar que se ha omitido el valor absoluto en la segunda igualdad pues todas las cantidades que dependen de c son positivas cuando $c \in (0.9, 1)$. Finalmente, teniendo en cuenta que $2c+5$ claramente aumenta con el valor de c, y que la exponencial es siempre creciente, podemos obtener una cota superior del error intercambiando la c por 1, es decir:

$$|R_3(0.9)| = (2c+5)e^{c-1}\frac{0.0001}{24} < (2+5)e^0\frac{0.0001}{24} = \frac{0.0007}{24} \approx 2.92\,10^{-5} < 0.00003$$

Por tanto el error cometido estaría en la quinta cifra decimal, lo cual concuerda con la comprobación que hicimos antes al comparar los valores de $f(0.9)$ y $P_3(0.9)$.