RESOLUCIÓ

1 Considerem l'equació

$$e^x = \frac{1}{2}x + 2. \tag{1}$$

(a) Enuncieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

(b) Demostreu que l'equació (1) té una solució positiva i una de negativa a l'interval $[-5, 2]$.

(c) Demostreu que l'equació (1) només té dues solucions reals.

(d) Calculeu, sense fer **cap** iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva l'equació (1) amb un error absolut menor que 10^{-8}.

Resolució: $(2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 10$ punts)

(a$_1$) *Teorema de Bolzano. Siguin $a < b$ nombres reals, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix un nombre real ξ, amb $a < \xi < b$ tal que $f(\xi) = 0$.*

(a$_2$) *Teorema de Rolle. Siguin $a < b$ nombres reals, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b), tal que $f(a) = f(b)$, aleshores existeix un nombre real ξ, amb $a < \xi < b$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

(b) *Sigui $h(x) = e^x - \frac{x}{2} - 2$, l'equació s'escriu $h(x) = 0$. Una demostració vàlida s'obté fent servir del teorema de Bolzano i la funció $h(x)$.*
Comprovació per a l'arrel positiva, $h(0) = -1 < 0$, $h(1) = e - \dfrac{1}{2} - 2 \approx .2183 > 0$, i del fet que $\exp(t)$ és contínua a tot $\mathbb{R}$, podem concloure que $h(x)$ és contínua en qualsevol interval que considerem. És a dir $h(x)$ satisfà les hipotesis del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 1]$, conclusió, a l'interval $[0, 1]$ hi ha una solució de l'equació.

Comprovació per a l'arrel negativa, $h(0) = -1 < 0$, $h(-4) = e^{-4} > 0$ i $h(x)$ és contínua en aquest interval, aleshores $h(x)$ satisfà les hipotesis del teorema de Bolzano a l'interval $[-4, 0]$. Conclusió, a l'interval $[-4, 0]$ hi ha una solució de l'equació (1).

(c) *Demostració per "reducció a l'absurd". La equació no pot tindre tres solucions, ja que de tenir-les la funció h de l'apartat* **(b)** *verificaria totes les hipotesis del teorema de Rolle en dos intervals diferents amb $h(a) = h(b) = h(c) = 0$. Existirien dos nombres reals ξ tal que $h'(\xi) = 0$ fet que no és cert.*
Comprovació, h és contínua i derivable per a qualsevol real, amb $h'(x) = e^x - \frac{1}{2}$, llavors $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$; llavors $g'(x) = 0$ només en un cas, no en dos. No existeixen tres reals diferents a, b i c solucions de l'equació ($h(a) = h(b) = h(c) = 0$).

(d) *En el mètode de la bisecció, la longitud del interval amb la solució en cada pas és la meitat de la longitud de l'anterior. Començant a l'interval, $I_0 = [a, b]$, en n pasos, l'interval $I_n = [a_n, b_n]$ té longitud $l_n = \dfrac{1}{2^n} l_0 = \dfrac{1}{2^n}|b - a|$. Per a donar l'arrel positiva amb un error absolut menor que 10^{-8} es suficent demanar $l_n < 10^{-8}$. Condició que si prenen com a interval inicial l'interval $I_0 = [0, 1]$, equival a $2^{-n} < 10^{-8} \Leftrightarrow 10^8 < 2^n \Leftrightarrow n > 26.575\ldots$ llavors $n = 27$; és a dir si l'interval inicial és $I_0 = [0, 1]$ necessitem 27 pasos del mètode de la bisecció per obtenir la solució amb la cota d'error fixada.*

2 Considereu les funcions $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$, i $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\sin t}\, dt$.

(a) Calculeu l'expressió de $g'(x)$. Enuncieu el teorema i verifiqueu les hipotesis en que es fonamenta el vostre càlcul.

(b) Proveu que la paràbola tangent (polinomi de Taylor de grau 2) a la corba $y = g(x)$ en el punt $x_0 = 0$ és $y = f(x)$.

(c) Empreu el polinomi de Taylor de grau 2 (paràbola tangent) de la funció $g(x)$ per calcular una aproximació de

$$\int_0^{0.2} e^{\sin t}\, dt.$$

(d) Fent ús del residu de la Fórmula de Taylor d'ordre 2 de la funció $g(x)$, doneu una fita superior de l'error comès en aproximar el valor $\displaystyle\int_0^{0.2} e^{\sin t}\, dt$ pel valor obtingut a l'apartat anterior.

Resolució: $(2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 10$ punts)

(a) *Per a obtenir l'expressió de $g'(x)$ fem ús del teorema següent.*
Teorema Fonamental del Càlcul Integral. Siguin $a < b$ nombres reals, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$

contínua en $[a,b]$*, aleshores la funció* $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$ *és derivable i* $H'(x) = h(x)$ *per a qualsevol* $x \in (a,b)$.
En particular $h(t) = e^{\sin t}$ *verifica les hipòtesis del Teorema; està definida per a tot real* t *i és contínua per a tot real* t *ja que és la composició de dues funcions contínues, llavors la funció* $g(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x e^{\sin t}dt$ *és derivable,* $g(0) = 0$ *i per a qualsevol* x $g'(x) = e^{\sin x}$.

(b) *El polinomi de Taylor* $P_2(x) = g(0) + g'(0)x + \dfrac{1}{2}g''(0)x^2$ *és* $x + \dfrac{x^2}{2}$*, llavors l'equació de la paràbola tangent a* $y = g(x)$ *en* $x = 0$ *és* $y = x + \dfrac{x^2}{2}$ *que coincideix amb l'expressió de* $f(x)$.

(c) *Subtituïm* $x = 0.2$ *a l'expressió del polinomi de Taylor de* $g(x)$ *en* $x_0 = 0$*, el valor que s'obté és una aproximació de la quantitat demanada. És a dir:*

$$\int_0^{0.2} e^{\sin t}\, dt = g(0.2) \approx P_2(0.2) = 0.2 + (0.2)^2/2 = 0.22$$

(d) *L'expressió del residu de la fórmula de Taylor per al càlcul de l'apartat* **(c)** *és* $\dfrac{g'''(\xi)}{3!}(0.2)^3$ *per a* $0 \le \xi \le 0.2$. *Per a determinar el punt de màxim de* $g'''(\xi)$ *a l'interval* $[0, 0.2]$ *es raona de la manera següent:*

(a) *La funció és contínua a l'interval tancat, pel teorema de Weierstrass, hi ha un màxim i un mínim. Els candidats són els punts crítics a l'inteval* $(0, 0.2)$*, i els extrems de l'interval* $x = 0$ *i* $x = 0.2$.

(b) *Calculem els punts crítics de* $g'''(\xi)$ *a l'inteval* $(0, 0.2)$. *No n'hi ha.*
La funció $g^{(iv)}(x) = -\cos x \sin x\,(3 + \sin x)\, e^{\sin x}$ *no s'anul.la a l'interval* $(0, 0.2)$*, aleshores,* $g'''(\xi)$ *no té cap punt crític.*

(c) *Calculem* $g'''(0) = 1$ *i* $g'''(0.2) \approx 0.929302$.

(d) *Conclusió, el valor màxim de* $|g'''(\xi)|$ *a l'interval* $[0, 0.2]$ *és* 1.

En consequència una cota de l'error és

$$\frac{|g'''(0)|}{6}(0.2)^3 = \frac{(0.2)^3}{6} = 0.0013333\ldots < 0.0014.$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇