RESOLUCIÓ

1 Considerem l'equació :

$$e^{-x} = \ln x. \tag{1}$$

a) Enuncieu el Teorema de Bolzano.

b) Demostreu que l'equació (1) té una solució en el conjunt $[1, +\infty)$.

c) Doneu un interval de longitud 0.1 que contingui aquesta solució.

d) Raoneu perquè l'equació donada no pot tenir dues solucions en $[1, +\infty)$.

e) Apliqueu Newton-Raphson amb el valor inicial $x_0 = 1$ per a determinar l'arrel positiva. Atureu el càlcul quan la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que 10^{-4}. Quantes iteracions calen en aquest cas?

Resolució: $(1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 10$ punts)

a) *Teorema de Bolzano. Siguin $a < b$ nombres reals, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix un nombre real ξ, amb $a < \xi < b$ tal que $f(\xi) = 0$.*

b) *Sigui $f(x) = e^{-x} - \ln x$, l'equació s'escriu $f(x) = 0$. Una demostració vàlida s'obté fent servir del teorema de Bolzano i la funció $f(x)$.*
Calculem $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0$, i, per exemple, $f(2) = e^{-2} - \ln 2 \simeq -0.558 < 0$.
Del fet que $\exp(t)$ és contínua a tot $\mathbb{R}$ i $\ln(t)$ és contínua a $(0, +\infty)$, podem concloure que $f(x)$ és contínua en el conjunt $[1, +\infty)$. És a dir $f(x)$ satisfà les hipotesis del teorema de Bolzano a l'interval $[1, +\infty)$, conclusió, a l'interval $[1, +\infty)$ hi ha una solució de l'equació.

c) *Com hem vist, $f(1) > 0$ i $f(2) < 0$. Calculem $f(1.5) \simeq -0.182 < 0$ i deduïm que la solució es troba a l'interval $(1, 1.5)$. Calculem, successivament $f(1.1) \simeq 0.238$, $f(1.2) \simeq 0.119$, $f(1.3) \simeq 0.010$, $f(1.4) \simeq -0.090$ i obtenim que la solució es troba l'interval $(1.3, 1.4)$.*

d) *La funció és estrictament decreixent a $[1, +\infty)$, ja que $f'(x) = -e^{-x} - 1/x$ és negativa per a tot $x \in [1, +\infty)$. I és per aquesta raó que $f(x)$ no pot prendre dues vegades el mateix valor en $[1, +\infty)$.*

e) *La successió $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ amb x_0 donat dona els diferents iterats del mètode de Newton-Raphson (també conegut com a mètode de la tangent). Prenent $x_0 = 1$, s'obtenen els valors $x_1 = 1.2689414\ldots$, $x_2 = 1.30910084\ldots$, $x_3 = 1.3097993\ldots$ i $x_4 = 1.3097996\ldots$, i ja no cal seguir ja que x_4 i x_3 ja compleixen la condició $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$.*

2 **a)** Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul Integral.

b) Feu servir aquest teorema per calcular, si és possible, el següent límit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x (\ln(1+t)-t)\ dt}{\displaystyle\int_x^0 \left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\ dt}.$$

c) Enuncieu la regla de Barrow.

d) Calculeu l'àrea de la figura limitada per les tres corbes següents:

$$y=\frac{1}{x}\,, \quad y=x^2\,, \quad y=8x^2\,.$$

Resolució: $(1+4+1+4=10$ punts)

a) Teorema Fonamental del Càlcul Integral.
Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ és contínua en $[a,b]$, llavors la funció $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ definida per

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

és una funció **contínua i derivable**, la funció derivada és $F'(x)=f(x)\,,\ \forall x\in[a,b]$.
En particular, si $F(x)=\displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$, amb $u(x)$ i $v(x)$ funcions derivables, fent ús de la regla de la cadena i el teorema fonamental es té $F'(x)=u'(x)f(u(x))-v'(x)f(v(x))$ per a tot x de $[a,b]$.

b) En un primer pas, s'obté indeterminació: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x (\ln(1+t)-t)\ dt}{\displaystyle\int_x^0 \left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\ dt}=\left(\frac{0}{0}\right).$

Les funcions del numerador i el denominador respectivament satisfan les hipòtesis de la Regla de L'Hôpital. Comprovació:

Notem

$$F(x)=\int_0^x (\ln(1+t)-t)\ dt \quad i \quad G(x)=\int_x^0 \left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\ dt\,.$$

La funció $f(t)=\ln(1+t)-t$ és contínua per a tot real $t>0$, llavors pel teorema del fonamental del càlcul, la funció $F(x)$ és derivable i la seva derivada és $F'(x)=\ln(1+x)-x$ per a $x>0$.

Com que la funció $g(t)=1-\sqrt{1-t^2}$ és contínua per a tot real $t>0$, llavors pel teorema del fonamental del càlcul, la funció $G(x)$ és derivable i la seva derivada és $G'(x)=\sqrt{1-x^2}-1$ per a $x>0$.

En un segon pas, altre vegada s'obté indeterminació:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Com que el numerador i del denominador són funcions derivables en tot els reals positius podem fer ús de la Regla de L'Hôpital per resoldre aquest límit. Llavors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F''(x)}{G''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)-1}{-2x/2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sqrt{1-x^2}}{-x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}=1\,.$$

Finalment, el valor del límit és 1, fet que es dedueix de:

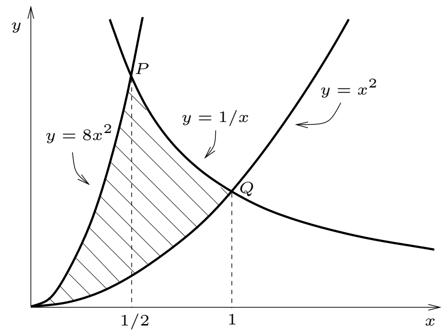
$$\lim_{x\to 0}\frac{F''(x)}{G''(x)}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x (\ln(1+t)-t)\;dt}{\displaystyle\int_x^0 \left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\;dt}=1.$$

c) Regla de Barrow.

Si $f\colon [a,b]\to R$ és contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$ llavors es verifica que

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

d) El següent gràfic és un esquema de la regió definida per les corbes de l'exercici.



Les corbes $y=x^2$ i $y=8x^2$ es tallen a $(0,0)$. Resolent el sistema format per les equacions $y=x^2$ i $y=1/x$ trobem el punt $Q=(1,1)$. Resolent el sistema format per les equacions $y=8x^2$ i $y=1/x$ trobem el punt $P=(1/2,2)$. Aleshores, l'àrea de la regió demanada és

$$A=\int_0^{1/2}\left(8x^2-x^2\right)dx+\int_{1/2}^1\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx$$

Fent els càlculs tenim

$$A=\left[\frac{7x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[\ln(x)-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^1=\frac{7}{24}-0+\ln 1-\frac{1}{3}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}=\ln(2).$$

Aleshores, l'àrea demanada és $\ln(2)$.