1. *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}$ si $n \geq 1$.

(a) Demostreu que $0 \leq a_n \leq 2, \quad \forall n \geq 1$.

(b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.

(c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

Solución. (a) Utilizamos el método de la inducción matemática:

1) n=1: $0 \leq a_1 = 1 \leq 2$.
2) Suponemos que $0 \leq a_n \leq 2$.
3) Comprobaremos que $0 \leq a_{n+1} \leq 2$. Partiendo de la hipótesis Lo haremos del modo siguiente,
$0 \leq a_n \leq 2 \implies 0 \leq a_n^2 \leq 4 \implies 4 \leq a_n^2 + 4 \leq 8 \implies \sqrt[3]{4} \leq \sqrt[3]{a_n^2 + 4} \leq 8 \implies 0 \leq \sqrt[3]{4} \leq a_{n+1} \leq 2$.

De 1) + 2) + 3) tenemos que $0 \leq a_n \leq 2, \quad \forall n \geq 1$.

(b) $\{a_n\}$ es creciente $\iff a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n \geq 1$. Para demostrar esta desigualdad utilizamos el método de la inducción matemática:

1) n=1: $a_2 = \sqrt[3]{1 + 1^2} = \sqrt[3]{2} \geq a_1 = 1$.
2) Suponemos que $a_n \geq a_{n-1}$.
3) Comprobaremos que $a_{n+1} \geq a_n$. Partiendo de la hipótesis Lo haremos del modo siguiente,
$a_n \geq a_{n-1} \geq 0 \implies a_n^2 \geq a_{n-1}^2 \implies a_n^2 + 4 \geq a_{n-1}^2 + 4 \implies$
$\sqrt[3]{a_n^2 + 4} \geq \sqrt[3]{a_{n-1}^2 + 4} \implies a_{n+1} \geq a_n$.

De 1) + 2) + 3) tenemos que $a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n \geq 1 \implies \{a_n\}$ es creciente.

(c) De (a) y (b) resulta que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente y por lo tanto, según el Teorema de la convergencia monótona, $\{a_n\}$ es convergente
$\implies \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{4 + a_n^2} \implies l = \sqrt[3]{4 + l^2} \implies l^3 - l^2 - 4 = 0 \implies (l - 2)(l^2 + l + 2) = 0$.

La última ecuación tiene una única solución real $l = 2 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

2. *(2 punts)*

(a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 4 de la funció $f(x) = \cos x$ en el punt $x_0 = 0$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

(b) Utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat a) calculeu el valor aproximat de $\cos\frac{1}{2}$ i doneu una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació.

Solución.

(a) La fórmula del polinomio de Taylor de grado 4 en el punto 0 para una función f es

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$$

Cuando $f(x) = \cos(x)$ las derivadas son:

$$f'(x) = -\sin(x);\ f''(x) = -\cos(x);\ f^{(3)}(x) = \sin(x);\ f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Y sus respectivos valores en 0 son:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;\ f''(0) = -1;\ f^{(3)}(0) = 0;\ f^{(4)}(x) = 1$$

Por lo tanto, el polinomio que se pide calcular en el enunciado es:

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

El resto de Lagrange correspondiente a este polinomio viene dado por la expresión:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{120}x^5$$

siendo c un número real entre 0 y el valor de x. Evaluando pues la derivada quinta de la función coseno, obtenemos la siguiente expresión para el resto que se pide en el enunciado:

$$R_4(x) = -\frac{\sin(c)}{120}x^5$$

(b) El valor aproximado de $\cos(1/2)$ mediante el polinomio de Taylor anterior es:

$$P_4(1/2) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{384} = \frac{337}{384} \approx 0.87760417$$

redondeando la última cifra decimal. El error absoluto de esta aproximación es igual al valor absoluto del resto de Lagrange evaluado en $x = 1/2$, y viene dado por la siguiente expresión:

$$|R_4(1/2)| = \frac{|\sin(c)|}{120} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{|\sin(c)|}{3840}$$

Puesto que para cualquier valor de c se tiene que $|\sin(c)| \leq 1$ obtenemos que una cota superior del error absoluto es $\frac{1}{3840} \approx 0.0003$, tras redondear el resultado a la primera cifra decimal no nula.

También es correcto escribir: $\cos(1/2) = 0.8776 \pm 0.0003$.

3. *(2 punts)* Siguin $f(x) = -x^2 - 2x$ i $g(x) = x^2 - 4$.

(a) Trobeu els nombres reals x tals que $f(x) \geq g(x)$. Representeu sobre la recta real el conjunt de solucions, digueu si és fitat i si té suprem, infim, màxim i mínim.

(b) Dibuixeu els gràfics de f i g. Calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

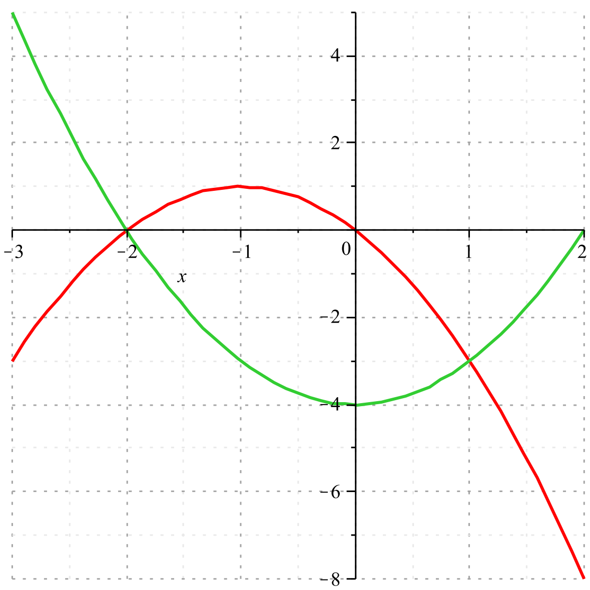
Solución.

(a) Los números reales que verifican $f(x) \geq g(x)$ son las soluciones de la inecuación

$$-x^2 - 2x \geq x^2 - 4 \ \leftrightarrow\ 0 \geq 2x^2 + 2x - 4 \ \leftrightarrow\ 0 \geq x^2 + x - 2$$

Usando la fórmula habitual para resolver una ecuación de segundo grado, obtenemos las raíces del polinomio $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, de manera que cuando los factores $x - 1$ y $x - 2$ sean nulos o de signo opuesto, obtendremos una solución de la inecuación. Esto sucede cuando $x \in [-2, 1]$ que será el conjunto de soluciones que nos pide el enunciado. Este conjunto es claramente acotado al ser un intervalo cerrado. El supremo es 1 que también es el máximo del conjunto al formar parte de él. El ínfimo es -2 que también es el mínimo pues pertenece al conjunto de soluciones.

(b) En la figura se representan las dos funciones, se trata de sendas parábolas, la función f es la curva roja y g es la curva verde.



Los puntos de corte de ambas funciones corresponden a los valores de x donde se verifica la igualdad de la inecuación del apartado anterior, por tanto se trata de los puntos $(1, -3)$ y $(-2, 0)$. El área, A, que se pide calcular es el área que queda encerrada entre ambas curvas que, como se ve en la figura, corresponde a valores de $x \in [-2, 1]$, para los cuales $f(x) \geq g(x)$ como se vio en el apartado anterior, de manera que podemos plantear el cálculo de A mediante la siguiente integral:

$$A = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = -2 \int_{-2}^{1} x^2 + x - 2\, dx$$

Puesto que una primitiva del polinomio $x^2 + x - 2$ es $x^3/3 + x^2/2 - 2x$, aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$-2 \int_{-2}^{1} x^2 + x - 2\, dx = -2 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{1} = 9$$

4. *(2 punts)* Donada la funció de dues variables

$$f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}.$$

(a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells 0, 1, 2, 3.

(b) Trobeu la derivada direccional en el punt $P(1,2)$ en la direcció del vector que va del punt P a l'origen.

(c) Determineu la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,2)$ i trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

Solución.

(a) Es evidente que $f(x,y) \geq 1$ en todo su dominio, por tanto no posee curvas de nivel inferior a 1. Las curvas de nivel $c \geq 1$ vienen dadas por la ecuación:

$$f(x,y) = c \ \leftrightarrow x^2+y^2 = (c-1)^2$$

En el caso de la curva de nivel $c = 1$ se obtiene como única solución el punto $(0,0)$. Para valores de $c > 1$ las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen y de radio $c-1$. Por tanto, para nivel $c = 2$ será una circunferencia de radio 1 y para nivel $c = 3$ será una circunferencia de radio 2.

(b) El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$ de manera que es continua en todos los puntos del plano. Si es diferenciable en P entonces la derivada direccional que nos piden será el producto escalar del vector gradiente en P por el vector unitario en la dirección $(-1,-2)$, que es el vector que va del punto P al origen.

Para calcular el vector gradiente hacemos las derivadas parciales y las evaluamos en P:

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

Vemos que existen y son continuas salvo en el origen. Por tanto f es en efecto diferenciable en P.

$$f_x(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad f_y(1,2) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Por tanto el vector gradiente es $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Dividiendo el vector de la dirección por su norma nos da el vector unitario que necesitamos: $(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Haciendo el producto excalar de ambos vectores se obtiene que el valor de la derivada direccional que nos pide el enunciado es igual a -1.

(c) La dirección en la que f crece más rápido en el punto P es la del vector gradiente en dicho punto, que se ha calculado en el apartado anterior. El valor de la derivada direccional en esa dirección es la norma del vector gradiente en el punto $P(1,2)$. Calculando dicha norma obtenemos que su valor es igual a 1.

5. *(2 punts)* Donada la funció $f(x,y) = x^2 - y^3$.

(a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Justifiqueu l'existència dels extrems absoluts de la funció f en el conjunt

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

(c) Determineu el màxim i mínim absoluts de f en la regió K.

Solución. (a) f puede tener extremos relativos en los puntos críticos. Calculamos estos puntos igualando las primeras derivadas parciales de f a 0:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = -3y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0,0)\,\text{es el único punto crítico.}$$

Para clasificar este punto calculamos las segundas derivadas parciales de f y el determinante de la matriz hessiana, $f''_{xx}(x,y) = 2$, $f''_{yy}(x,y) = -6y$, $f''_{xy} = 0 \Longrightarrow \triangle(0,0) = det\,H(0,0) = 0$. En este caso el criterio de la condición suficiente de extremos relativos falla y hace falta hacer el estudio local. Lo hacemos del modo siguiente

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(x,y)|_{x=0} = -y^3 > 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x,y)|_{x=0} = -y^3 < 0 \text{ si } x > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (0,0)\,\text{es un punto silla.}$$

(b) El conjunto K es un círculo de centro $(0,0)$ y de radio 1, su frontera ∂K es una circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 1, es decir,

$\partial K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\partial K \in K \Longrightarrow K$ es cerrado. Ademas K es acotado ya que $\exists\, B_2(0,0) \supset K$. Por lo tanto K es compacto. Por otro lado, por ser polinómica, $f \in \mathcal{C}(K)$. Entonces, según el teorema de Weierstrass, existen los extremos absolutos de f en K.

(c) f puede tener extremos absolutos en los puntos críticos dentro de K o en los puntos de ∂K. El único punto crítico de f calculado en (a) es $(0,0) \in K$. Es el primer candidato para extremos de f en K. Otros candidatos estan en ∂K. Calculamos estos puntos con el método de los multiplicadores de Lagrange, determinando la función de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 - y^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

y calculando sus puntos críticos igualando sus primeras derivadas parciales a 0:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 2x + 2x\lambda = 2x(1+\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = -3y^2 + 2y\lambda = y(2\lambda - 3y) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

De la primera ecuación tenemos dos casos: $x = 0$ y $\lambda = -1$. En el primer caso, sustituyendo $x = 0$ en la tercera ecuación resulta que $y = \pm 1$, y sustituyendo y en la segunda obtenemos que $\lambda = \pm\dfrac{3}{2}$. Entonces los puntos críticos de L en este caso son $(0, \pm 1, \pm\frac{3}{2})$.

En el segundo caso, sustituyendo $\lambda = -1$ en la segunda ecuación resulta que

$-y(2 + 3y) = 0$ y tenemos dos subcasos más: $y = 0$ e $y = -\dfrac{2}{3}$. En el subcaso $y = 0$ de la tercera ecuación $x = \pm 1 \Longrightarrow (\pm 1, 0, -1)$ tambien son puntos críticos de L.

En el subcaso $y = -\frac{2}{3}$ de la tercera ecuación $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \implies (\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}, -1)$ tambien son puntos críticos de L.

Eliminando la coordenada λ en los puntos críticos de L tenemos los candidatos para extremos de f en ∂K que son $\quad (0, \pm 1),\ (\pm 1, 0),\ (\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$.

Para clasificar todos los candidatos calculamos la imagen de f en todos estos puntos

$f(0,0) = 0,\ f(0, \pm 1) = \mp 1,\ f(\pm 1, 0) = 1,\ f(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{7}{27}$.

y sacamos la conclusión que $\max\limits_K f(x,y) = f(\pm 1, 0) = 1, \quad \min\limits_K f(x,y) = f(0,1) = -1$.