RESPOSTES

1 a) Representeu en la recta real el conjunt $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid \ (x-1)(x-2)(x-3) < 0\}$.
Determineu si el conjunt $\mathcal{C}$ és fitat superiorment, és fitat inferiorment, és fitat o no és fitat.
Trobeu el suprem i/o l'ínfim, si s'escau.

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les gràfiques de

$$y = (x-1)(x-2)(x-3), \ y = 0, \ x = 0 \ \text{ i } x = 4.$$

Resolució: $(5 + 5 = 10$ punts)

a) El conjunt $\mathcal{C}$ és la reunió de la semirecta $(-\infty, 1)$ i l'interval obert $(2, 3)$, és fitat superiorment, no és fitat inferiorment, llavors no és fitat, no té ínfim però si suprem $\sup(\mathcal{C}) = 3$.

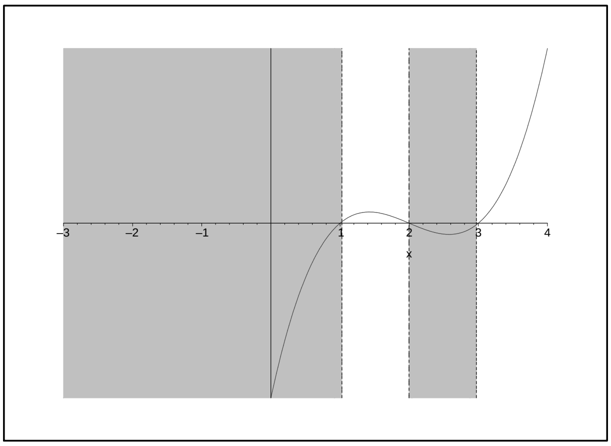

Figura 1: La regió en gris és el domini on $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ és negativa

b) Si $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, l'àrea de la regió és calcula per $\displaystyle\int_0^4 |y| \, dx$, que a partir de l'estudi de l'apartat anterior es desglosa en

$$\int_0^4 |y| \, dx = -\int_0^1 y \, dx + \int_1^2 y \, dx - \int_2^3 y \, dx + \int_3^4 y \, dx \, .$$

Una primitiva de $y = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ és $Y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x$, fent ús de la regla de Barrow l'àrea és

$$\int_0^4 |y| \, dx = Y(0) - 2Y(1) + 2Y(2) - 2Y(3) + Y(4) = 5.$$

2 Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}$ si $n \geq 1$.

a) Calculeu a_1, a_2 i a_3. Obteniu una fórmula recurrent, tipus $a_{n+1} = f(a_n)$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és decreixent.

c) Enuncieu el Teorema de la Convergència Monòtona.

d) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent.

Resolució: $(2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 10$ punts)

a) Els termes demanats són $a_1 = 1/2$, $a_2 = 3/8$ *i* $a_3 = 5/16$. *Per a la fórmula recurrent explicitem* a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = a_n \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)}.$$

b) De la fórmula recurrent, $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)}{(2n+2)}$ *i del fet que* $0 < \dfrac{(2n+1)}{(2n+2)} < 1$ *per a tot natural* n*, es verifica que* $a_{n+1} < a_n$ *per a tot* $n > 1$*; és a dir la successió* $\{a_n\}$ *és decreixent.*

c) Teorema de la Convergència Monòtona.
Tota successió monòtona i fitada és convergent. En particular, tota successió de nombres reals positius fitada inferiorment i decreixent, és convergent.

d) La successió $\{a_n\}$ *és de nombres reals positius. La demostració és pel principi d'inducció.*
▷ *Verifiquem que el primer ho compleix; com* $a_1 = 1/2 > 0$ *queda provat que* $a_1 > 0$.
▷ *Suposem que* $a_n > 0$ *i deduïm que llavors* $a_{n+1} > 0$.
En efecte, de $a_n > 0$ *multiplicant per* $\dfrac{(2n+1)}{(2n+2)}$ *que és positiu per a tot natural* n*, i fent ús de la fórmula recurrent* $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)}{(2n+2)}$ *resulta que* $a_{n+1} > 0$*; podem afirmar que la successió és de nombres positius.*

Així doncs, la successió $\{a_n\}$ *és una successió de nombres reals positius fitada inferiorment per* 0 *i decreixent, per tant verifica les hipotesis del teorema de la convergència monotona, llavors és convergent.*

3 Sigui la integral següent:

$$I = \int_{0.6}^{1.0} x^5 \cos(x)\, dx\,.$$

a) Sabent que $0 < |f^{(4)}(x)| < 200$, $\forall x \in [0.6, 1.0]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes fent ús del mètode de Simpson ($error < 0.5 \cdot 10^{-4}$) .

b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

c) Calculeu una cota superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b).

Resolució: $(5 + 2.5 + 2.5 = 10$ punts)

a) La fórmula de l'error del mètode de Simpson és:

$$\int_a^b f(x)\, dx - S(h) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)\,, \text{ amb } c \in (a, b).$$

En el nostre cas, $a = 0.6$, $b = 1.0$, $0 < f^{(4)}(x) < 200$ *i una precisió de quatre decimals correctes, substituïnt en l'expressió anterior, el nombre de subintervals necessaris ha de verificar que* $\left| -\frac{(0.4)^5}{180n^4} 200 \right| < 0.5 \cdot 10^{-4}$, *equival a* $n > 3.88393$. *Aleshores cal pendre* $\mathbf{n = 4}$ *subintervals per obtenir el valor de la integral pel mètode de Simpson amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes.*

b) Subtituïm $a = 0.6$, $b = 1.0$, $n = 4$ *i* $h = (b - a)/n$ *a la fórmula de Simpson, el resultat és*

$$\frac{1}{30} \left[f(0.6) + 4f(0.7) + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1.0) \right]$$

que per $f(x) = x^5 \cos(x)$ *s'obté el valor de* 0.1014493366. *El valor de la integral amb l'exactitud demanada és* $I = 0.10145 \pm 0.00005$.

c) Per a $n = 4$ *l'expressió de la cota d'error* $\left| -\frac{(0.4)^5}{180n^4} 200 \right|$ *pren el valor de* 0.000044, *s'han obtingut en realitat quatre decimals correctes, s'escriu* $I = 0.10145 \pm 0.000044$.

4 Considereu la la funció $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$.

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 3$.

b) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ creix més ràpidament en el punt $P = (-1,3)$?
Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

c) Quina és la direcció en la qual $f(x,y)$ és constant en el punt $P = (-1,3)$?
Trobeu la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

Resolució: $(4+3+3=10$ punts)

a) La corba de nivell $f(x,y) = 3$ *és un cercle de radi 2 centrat en* $(0,1)$ *d'equació* $x^2+(y-1)^2 = 4$*; la corba de nivell* $f(x,y) = 0$ *és un cercle de radi 1 centrat en* $(0,1)$ *d'equació* $x^2+(y-1)^2 = 1$*; la corba de nivell* $f(x,y) = -1$ *és el punt* $(0,1)$ *d'equació* $x^2 + (y-1)^2 = 0$ *i la corba de nivell* $f(x,y) = -2$ *no té cap punt.*

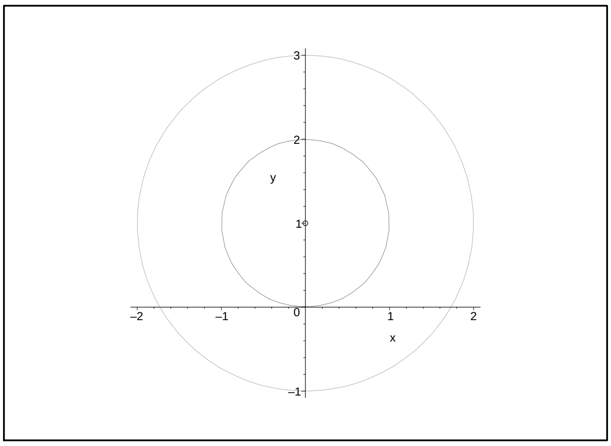

Figura 2: Corbes de nivell de $x^2 + (y-1)^2 - 1 = k, \quad k = \{-1, 0, 3\}$.

b) La direcció en la qual $f(x,y)$ *creix més ràpidament en el punt* $P = (-1,3)$ *és la direcció del gradient de la funció en aquest punt. El vector gradient és* $\nabla f(x,y) = \big(2x\,,\,2(y-1)\big)$*, el valor d'aquest gradient en el punt és* $\nabla f(P) = \big(-2,4\big)$*. La direcció de màxim creixement és* $\vec{v} = \dfrac{\big(-2,4\big)}{\|(-2,4)\|} = \left(\dfrac{-\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$*. En aquesta direcció la derivada pren el valor* $\sqrt{20}$*, el càlcul és*

$$D_{\vec{v}}(f)(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{v} = \big(-2,4\big) \cdot \frac{\big(-2,4\big)}{\sqrt{20}} = \sqrt{20}.$$

c) La direcció en què $f(x,y)$ *és constant en el punt* P *és la direcció que té derivada direccional zero (el pendent de la recta tangent en aquesta direcció és horizontal i pertant zero). En aquest cas, si* $\vec{w} = (w_1, w_2)$ *és el vector de direcció constant,*

$$D_{\vec{w}}(f)(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{w} = (-2,4) \cdot (w_1, w_2) = 0 \;\Rightarrow\; -2w_1 + 4w_2 = 0, \;\Rightarrow w_1 = 2w_2.$$

En coordenades qualsevol vector complint $w_1 = 2w_2$ *és vàlid, i en aquesta direcció la derivada pren el valor* 0.

5 Trobeu els punts de la circumferència $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 16$ tals que la suma de les seves coordenades sigui màxima i mínima, respectivament.

Resolució: $(1 + 2 + 7 = 10$ punts)

És un problema d'extrems condicionats, la funció a optimitzar és *(1p)*

$$f(x, y) = x + y$$

i la condició

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16 = 0.$$

a) *La funció $f(x, y) = x + y$ és contínua en tot punt de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

El conjunt de punts $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 2y = 16\}$ és una circumferència de centre $(1, 1)$ i radi $3\sqrt{2}$ ja que $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$.

El conjunt $\mathcal{K}$ és un conjunt fitat. Comprovació, una bola tancada de centre $(0, 0)$ i radi 6 (conjunt fitat) conté al conjunt $\mathcal{K}$. El conjunt $\mathcal{K}$ és un conjunt tancat, els punts de la frontera són al conjunt.

La funció f és contínua en el conjunt $\mathcal{K}$ tancat i fitat, llavors la funció té màxim i mínim absoluts (T. de Weierstrass). *(2p)*

b) *Els candidats a màxim i mínim absolut, per aquest cas són els extrems de f sobre la circumferència $\mathcal{K}$. Fent ús del mètode dels multiplicadors de Lagrange amb funció*

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16)$$

s'obtenen dos punts, les coordenades dels quals són $(4, 4)$, i $(-2, -2)$. Per a decidir, cal avaluar la funció en tots els candidats. Els valors són $f(4, 4) = 8$, i $f(-2, -2) = -4$,

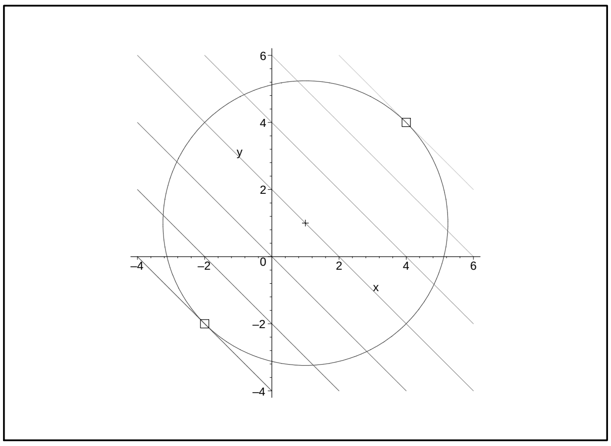

Figura 3: Conjunt $\mathcal{K}$, corbes de nivell de $x + y$ i els valors extrems.

El punt de coordenades $(4, 4)$ és on la suma de coordenades dels punt de la circumferència és màxima i val 8.

El punt de coordenades $(-2, -2)$ és on la suma de coordenades dels punt de la circumferència és mínima i val -4. *(7p)*