

5. La Fórmula de Taylor¹

Un recurso para estudiar el comportamiento de una función en un entorno de un punto es aproximarla mediante alguna otra función fácil de evaluar, particularmente por un polinomio. Asociaremos, localmente, a cada función suficientemente regular un polinomio que la aproxima.

Sea f una función n veces derivable en el punto a . El *polinomio de Taylor de grado n para f en a* es el polinomio

$$P_n(f, a, x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferencia $R_n(f, a, x) = f(x) - P_n(f, a, x)$ se denomina *resto n -ésimo de Taylor* de la función f en el punto a .

Para que exista la derivada n -ésima de f en a , la función $f^{(n-1)}$ debe existir en un entorno U de a . Por tanto, la condición de que exista $f^{(n)}(a)$ puede sustituirse por las condiciones de que f sea $n-1$ veces derivable en un entorno U de a y n veces derivable en a .

Notemos que $y = P_1(f, a, x)$ es la ecuación de la *recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Se cumplen las dos propiedades siguientes.

- El valor del polinomio $P_n(f, a, x)$ y el de todas sus derivadas hasta orden n en el punto a coinciden con los de la función f en este punto; es decir,

$$P_n^{(i)}(f, a, a) = f^{(i)}(a), \quad i = 0, \dots, n.$$

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(f, a, x)}{(x-a)^n} = 0$.

El límite anterior puede interpretarse en el sentido de que la similitud entre $f(x)$ y $P_n(f, a, x)$ es más acusada cuanto mayor es el grado y cuanto más cerca esté x de a .

La fórmula

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f, a, x)$$

se conoce como *desarrollo de Taylor de grado n de la función f en el punto a* .²

Describimos, a continuación, el comportamiento de los polinomios de Taylor respecto a las operaciones con funciones. Enunciamos los resultados en el punto 0. Los resultados correspondientes en un punto a se obtienen mediante el cambio de variable $x \mapsto t = x - a$.

¹Extracto del libro “Cálculo para Ingeniería informática”, por José A. Lubary y Josep M. Brunat, Edicions UPC Temes Clau 08, 2008

²En el caso particular $a = 0$, el desarrollo suele denominarse de *MacLaurin*, aunque nosotros no utilizaremos esta terminología.

Sean f y g dos funciones con derivadas n -ésimas en el punto 0 y sean $p = P_n(f, 0, x)$ y $q = P_n(g, 0, x)$ los correspondientes polinomios de Taylor de grado n . Entonces,

- Si α y β son números reales, el polinomio de Taylor de grado n de $\alpha f + \beta g$ en el punto 0 es $\alpha p + \beta q$.
- El polinomio de Taylor de grado n de $f \cdot g$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de pq suprimiendo los términos de grado $> n$.
- Si $g(0) \neq 0$, el polinomio de Taylor de grado n de f/g en el punto 0 es el cociente de la división de p por q según potencias de x crecientes hasta el grado n incluido.
- Si $f(0) = 0$, el polinomio de Taylor de grado n de $g \circ f$ en el punto 0 es el polinomio obtenido de $q \circ p$ suprimiendo los términos de grado $> n$.

En el cálculo de límites de funciones en un punto a , suele ser útil la sustitución de funciones $f(x)$ por sus expresiones de la forma $f(x) = P_n(f, a, x) + R_n(f, a, x)$.

El teorema de Taylor

En el caso de que f sea una función $n + 1$ veces derivable en un entorno de a , se dispone de la siguiente expresión del resto.

Teorema de Taylor. Sea f una función $n + 1$ veces derivable en un entorno U de a . Entonces, para cada $x \in U \setminus \{a\}$ existe un punto c entre x y a tal que

$$R_n(f, a, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

La expresión anterior se denomina *resto de Lagrange*.

En las condiciones del teorema de Taylor, tenemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

expresión que se denomina *fórmula de Taylor de grado n de la función f en el punto a* , con resto de Lagrange.

A continuación se dan las fórmulas de Taylor de algunas funciones en el punto 0, con resto de Lagrange. El valor c es intermedio entre 0 y x .

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}.$

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sen} c.$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos c.$
- $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-\alpha}},$
donde α es un número real y, para todo entero $k \geq 0$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sinh c.$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh c.$

Cota del error

La siguiente terminología será de utilidad. Sean I un intervalo (de cualquier tipo) y $n \geq 0$ un entero. La *clase* $\mathcal{C}^n(I)$ está formada por todas las funciones f cuyo dominio contiene I y tales que, en todo $x \in I$, existe la derivada n -ésima $f^{(n)}$ y esta derivada es continua. En particular, la clase $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$ está formada por todas las funciones continuas en I . Es claro, además, que si $n > m$, entonces $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I)$. La *clase* $\mathcal{C}^\infty(I)$ está formada por las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en I (equivalentemente, que pertenecen a $\mathcal{C}^n(I)$ para todo $n \geq 0$). Análogamente, si $a \in \mathbb{R}$, las clases $\mathcal{C}^n(a)$ y $\mathcal{C}^\infty(a)$ están formadas por las funciones que tienen derivada n -ésima continua en a y por las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en el punto a , respectivamente.

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un entorno U de a , y supongamos que la función $f^{(n+1)}$ está acotada por una constante K en el intervalo abierto de extremos a y $x \in U$. Entonces,

$$|f(x) - P_n(f, a, x)| = |R_n(f, x, a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Ello permite aproximar $f(x)$ por $P_n(f, a, x)$ en un entorno de a y acotar el error cometido con la aproximación. En particular, si I es el intervalo cerrado de extremos a y x (es decir, $[a, x]$ o $[x, a]$) y $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, entonces la función $f^{(n+1)}$ es continua en el intervalo cerrado I y, por tanto, tiene máximo absoluto en I , por lo que puede tomarse como K dicho máximo.

Estudio local de funciones

El polinomio de Taylor permite generalizar las condiciones suficientes para monotonía, extremos relativos y convexidad vistos anteriormente.

Respecto a la monotonía y los extremos relativos, tenemos las siguientes condiciones suficientes.

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n(a)$ tal que

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces, se tiene que

- n par y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a ;
- n par y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a ;
- n impar y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en un entorno de a .
- n impar y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en un entorno a .

Respecto a la convexidad, tenemos las siguientes condiciones suficientes.

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^n(a)$ tal que

$$f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces, se tiene que

- n par y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en un entorno de a .
- n par y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en un entorno de a .
- n impar $\Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a .