QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són els mètodes estàndard de demostració: prova directa i exemple, prova pel contrarecíproc i exemples, prova per reducció a l'absurd (1) i exemples.

CLASSE D'AVUI 9/10/2020

Fem un exemple més de demostració per reducció a l'absurd:

EX.: (19bis) Demostreu que no hi ha cap nombre racional r tal que $2r^3 + r + 5 = 0$ (useu que un zero a/b racional, en forma reduïda, del polinomi $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ compleix que $b|a_n$ i que $a|a_0$).

Formalitzem: $\forall r \in \mathbb{Q}(2r^3 + r + 5 \neq 0)$. Sigui un r qualsevol racional. Fem una demostració per reducció a l'absurd: suposem por un moment que fos fals, llavors tindríem $r = \frac{a}{b}$ arrel del polinomi $2r^3 + r + 5$, per tant:

$a|5,\ b|2 \Rightarrow a = \pm1, \pm5, b = \pm1, \pm2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm1, \pm5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

Ara només caldrà veure que aquests nombres no són zeros del polinomi:

- $2(1)^3 + (1) + 5 = 8$ (cap nombre positiu pot ser zero del polinomi per tant no mirem cap més)
- $2(-1)^3 + (-1) + 5 = 2$
- $2(-5)^3 + (-5) + 5 = -250$
- $2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{17}{4}$
- $2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 + \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -\frac{115}{4}$

per tant és fals que hi hagi una arrel racional. Aleshores no s'anul.la mai, és a dir, $\forall r \in \mathbb{Q}(2r^3 + r + 5 \neq 0)$.

Reducció a l'absurd (2)

Es basa en: $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$. Volem demostrar $A \Rightarrow B$ i per això fem $A, \neg B \Rightarrow \ldots \Rightarrow contradicció$.

EX.: (30) Demostreu que la suma d'un nombre racional i un irracional és irracional.

Formalitzem: $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}\left(x \in \mathbb{Q} \text{ i } y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}\right)$

Siguin x, y qualssevol fixats i cal que demostrem $x \in \mathbb{Q}$ i $y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$. Farem una demostració per reducció a l'absurd, és a dir, suposarem cert $x \in \mathbb{Q}$ i $y \notin \mathbb{Q}$ i $x + y \in \mathbb{Q}$ i arribarem a una contradicció:

$x = \frac{a}{b}, x + y = \frac{c}{d}, y$ no es una fracció$\Rightarrow y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ =una fracció

en contradicció amb que no ho era. Per tant la suposició $x + y \in \mathbb{Q}$ és falsa, és a dir queda demostrat que $x + y \notin \mathbb{Q}$. I com que era per x, y qualssevol,llavors hem demostrat que $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}\left(x \in \mathbb{Q} \text{ i } y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}\right)$.

EX.: (31) Demostreu que si a, b, c són nombres enters i $a + b + c = 0$, com a mínim un d'ells és parell.

Formalitzem: $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z}\left(a+b+c=0 \Rightarrow 2|a \text{ o } 2|b \text{ o } 2|c\right)$. També podríem haver escrit que $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z}\left(a+b+c=0 \Rightarrow a \text{ és parell o } b \text{ és parell o } c \text{ és parell}\right)$ perquè no hi ha cap restricció a l'enunciat sobre la notació. Siguin $a, b, c \in \mathbb{Z}$ qualssevol i demostrem la implicació per reducció a l'absurd, és a dir, suposem que $a+b+c=0$ i que a senar i b senar i c senar. Per tant $a=2k+1$, $b=2k'+1$, $c=2k''+1$ per certs enters k, k', k'' llavors $a+b+c=2k+1+2k'+1+2k''+1$ per la qual cosa $0=2(k+k'+k''+1)+1$ fet que és contradictori perquè 0 no és senar. Aleshores no és possible que els tres nombres siguin senars, per tant un dels tres nombres ha de ser parell, tal com voliem demostrar.

EX.: (32) Demostreu que si p és primer llavors $\sqrt{p}$ és irracional (podeu usar que si a^2 és múltiple de
p llavors a és múltiple de p) .

Aquest exemple segueix el mateix fil conductor que l'exercici 16. Formalitzem: $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Suposem per un moment que fos mentida i arribem a una contradicció, és a dir:

$\sqrt{p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{a}{b}$ amb $\frac{a}{b}$ fracció irreduïble

llavors:

$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow a^2 =$ múltiple de $p \Rightarrow a =$ múltiple de $p \Rightarrow$

i per tant $a = pa'$ per cert enter a' i llavors

$(pa')^2 = pb^2 \Rightarrow p^2a'^2 = pb^2 \Rightarrow pa'^2 = b^2 \Rightarrow b^2 =$ múltiple de $p \Rightarrow b =$ múltiple de p

cosa contradictòria perquè estàvem suposant que la fracció era irreduïble. Per tant ha de ser falsa la suposició que havíem fet $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, i per tant queda demostrat que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Prova d'una disjunció

Es basa en: $q \vee r \equiv \neg q \to r$. Volem provar $B \vee C$ i per això fem $\neg B \Rightarrow \ldots \Rightarrow C$. També val quan hi ha més termes a la disjunció utilitzant l'equivalència: $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_{n-1}) \to p_n$. Volem provar $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$ i llavors fem $(\neg B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \ldots \wedge \neg B_{n-1}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n$.

EX.: (38) En el conjunt dels nombres enters demostreu que n és senar o n^2 és múltiple de 4.

Formalitzem: $\forall n \in \mathbb{Z}\left(n \text{ és senar o } n^2 \text{ és múltiple de } 4\right)$. Sigui n qualsevol enter i vull demostrar que n és senar o n^2 és múltiple de 4 . Suposem que n és parell i demostrem que n^2 és múltiple de 4. En efecte: si n és parell, llavors existeix un k enter tal que

$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2$ és múltiple de 4

Tal com volíem demostrar. En aquest exemple també podríem haver-lo plantejat suposant que n^2 no és múltiple de 4 i a continuació deduir que n és parell. Però aquesta opció és molt més complexa de treballar. En primer lloc perquè dir que "n^2 no és múltiple de 4 " és el mateix que dir que el resultat de la divisió n^2 per 4 no és exacte i això es formalitza d'aquesta manera: existeixen $q, r \in \mathbb{Z}$ tals que $n^2 = 4q + r,\ 0 < |r| < 4$ (algorisme de la divisió entera). A continuació tindríem que r podria ser $r = 1, 2, 3$ i s'haurien d'analitzar els tres casos...

EX.: (39) En el conjunt dels nombres reals demostreu que $a \leq \frac{a+b}{2}$ o $b \leq \frac{a+b}{2}$.

Formalitzem l'afirmació: $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}\left(a \leq \frac{a+b}{2} \text{ o } b \leq \frac{a+b}{2}\right)$.

Siguin dos nombres reals qualssevol. Suposem que $a > \frac{a+b}{2}$ i vull demostrar que $b \leq \frac{a+b}{2}$. Una de les maneres més simples de justificar una desigualtat és la següent: cal demostrar que

$b - \frac{a+b}{2} \leq 0$

Com que sé que $a > \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2a > a + b \Rightarrow a > b$. Ara la resta valdrà:

$b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} < 0$

per tant ja està justificat.

EX.: (40) En el conjunt dels nombres reals demostreu que $a \leq \frac{a+b+c}{3}$ o $b \leq \frac{a+b+c}{3}$ o $c \leq \frac{a+b+c}{3}$.