

Totes les respostes han d'acompanyar-se del seu raonament i els seus càlculs.

1 (2 punts)

a) Empreneu el polinomi de Taylor de grau 2 a l'origen de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1728+x}$ per tal d'obtenir un valor aproximat de $\sqrt[3]{1731}$.

b) Fiteu l'error comès en l'apartat anterior.

2 (2 punts)

a) Per a la funció $f(x) = e^{x^2-1}$, demostreu que $0 < f^{(4)}(x) \leq 76$ si $0 \leq x \leq 1$.

b) Fent ús del mètode de Simpson, calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les rectes $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ i la corba $y = e^{x^2-1}$, amb un error menor que 10^{-3} .

3 (2 punts)

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de la superfície $z = e^{y-x^2}$ corresponents als nivells $z = -1, \frac{1}{e}, 1, e, e^2$.

b) Trobeu la derivada direccional de $f(x, y) = e^{y-x^2}$ en el punt $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i en la direcció $\vec{v} = (3, 4)$.

c) Quina és la direcció en la qual $f(x, y) = e^{y-x^2}$ creix més ràpidament en el punt $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$? Trobeu el valor de la derivada direccional de $f(x, y)$ en aquesta direcció.

4 (4 punts) Considereu la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ i el conjunt

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

a) Representeu gràficament el conjunt \mathcal{K} .

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en \mathcal{K} .

c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en \mathcal{K} .

d) Trieu els punts on f assoleix el màxim i el mínim absoluts en \mathcal{K} i digueu quins són aquests valors.