

3. Funciones reales de una variable real.

Límites. Continuidad

Contenido

3.1 Introducción: conceptos generales

3.2 Límites

3.3 Asíntotas

3.4 Continuidad

3.5 Resolución aproximada de ecuaciones

Apéndice: las funciones elementales

(polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logartítmicas, hiperbólicas)

3.1 Introducción: conceptos generales

Una función real de variable real es una aplicación $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de \mathbb{R} denominado *dominio* de f . La función f hace corresponder a cada elemento $x \in D$ exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}$, el cual se denota por $y = f(x)$; en este caso, se dice que y es la *imagen* de x y que x es una *antiimagen* de y . El conjunto de imágenes se denota por $f(D)$ y se denomina *recorrido* o la *imagen* de f . El conjunto de puntos del plano $(x, f(x))$, con $x \in D$, se denomina *gráfica* de f .

Con frecuencia, una función se define mediante una expresión que permite calcular la imagen que corresponde a cada elemento, pero sin explicitar el dominio. En este caso, se sobreentiende que el dominio es el conjunto de números para los que la expresión dada tiene sentido, es decir, el conjunto de números para los que es posible calcular la imagen.

Una función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es *inyectiva* si cada par de elementos diferentes de D tienen imágenes diferentes; equivalentemente, si para cada $x_1, x_2 \in D$, la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. En este caso, existe una función f^{-1} de dominio $f(D)$ tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in D$. Esta función se denomina *inversa* de f , y su gráfica es simétrica de la de f respecto a la recta $y = x$.

Supongamos que $D \subseteq \mathbb{R}$ cumple que $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$. Una función f de dominio D es *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$ y es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas, y la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función f de dominio D es *periódica* de *periodo* $p \in \mathbb{R}$ si para cada $x \in D$ se cumple que $x + p \in D$ y $f(x + p) = f(x)$. Si se conoce la gráfica de una función f de periodo p en un intervalo $[a, a + p)$, entonces la gráfica de f se obtiene de la gráfica en el intervalo repitiéndola en cada intervalo $[a + kp, a + (k + 1)p)$, $k \in \mathbb{Z}$.

La *suma* $f + g$ y el *producto* fg de dos funciones f y g sólo están definidos si los dominios de f y de g tienen intersección no vacía. En este caso, se definen por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todo x en la intersección de los dominios de f y g .

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ y consideremos todas las funciones de dominio D . En este conjunto, la suma de funciones es asociativa y conmutativa; la función $e(x) = 0$ para todo $x \in D$ es el elemento neutro; toda función f tiene opuesta $-f$, definida mediante $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in D$. El producto también es asociativo y conmutativo, así como distributivo respecto a la suma; la función $f(x) = 1$ para todo $x \in D$ es el elemento neutro. Así, pues, el conjunto de las funciones de dominio D con la suma y el producto forman un anillo conmutativo. Nótese que sólo tienen inversa respecto al producto aquellas funciones f tales que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$; en este caso, la inversa está definida por $(1/f)(x) = 1/f(x)$ para todo $x \in D$.

Sea f una función de dominio D y g una función cuyo dominio contiene el recorrido $f(D)$ de f . La *composición* de f y g es la función $g \circ f$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in D$. Esta operación es asociativa en el sentido que si f, g y h son funciones tales que existe una de las funciones $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$, entonces existe la otra y son iguales. La composición no es conmutativa. Existe un elemento neutro, que es la función *identidad*, definida por $I(x) = x$ para todo x ; en efecto, para toda función f se cumple $f \circ I = I \circ f = f$. Las funciones inyectivas tienen inversa respecto a esta operación: la inversa de una función f es la función f^{-1} definida anteriormente, y se tiene $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$ para todo x . Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas entre sí respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Sea f una función de dominio D y $A \subseteq D$. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq k$ para todo $x \in A$, se dice que k es una *cota superior* de f en A , y que f está *acotada superiormente* en A ; en ese caso, la menor de las cotas superiores de A se denomina *supremo* de f en A . Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \leq f(x)$ para todo $x \in A$, se dice que k es una *cota inferior* de f en A y que f está *acotada inferiormente* en A ; en ese caso, la mayor de las cotas inferiores de A se denomina *ínfimo* de f en A . Si f está acotada superior e inferiormente en A , se dice que f está *acotada* en A . Si no se explicita el conjunto A , entonces se sobreentiende que es todo el dominio.

3.2 Límites

Sea f una función de dominio D y a un número real tal que todos los entornos de a tengan puntos de D distintos de a (se dice en este caso que a es un *punto de acumulación* de D).

El *límite* de f en a es el número real ℓ si para cada entorno $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ de ℓ existe un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ de a tal que todos los puntos $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, tienen la imagen en $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$. Equivalentemente, si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La notación

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

significa que el límite de f en a existe y que es ℓ .

El *límite* de f en a es $+\infty$, y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si para cada $K > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

El *límite* de f en a es $-\infty$, y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si para cada $K < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K.$$

Los *límites laterales* se definen como sigue:

Sea f una función de dominio D y a un número real tal que todos sus semientornos derechos (resp. izquierdos) tengan puntos de D . El *límite por la derecha* (resp. *izquierda*) de f en a es ℓ , y se escribe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$), si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ y } 0 < x - a < \delta \text{ (resp } 0 < a - x < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

De manera análoga se definen los cuatro límites $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Sea f una función tal que todo entorno de $+\infty$ tenga puntos de D . El límite de f en $+\infty$ es ℓ , y se denota $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $x \in D$ y $K < x$ implica $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Análogamente se definen los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Enunciaremos ahora propiedades de los límites, pero debemos hacer dos observaciones previas. La primera es que algunas de las propiedades involucran operaciones con dos límites. Si los dos límites son números reales, el significado de la operación es claro, pero si uno de ellos o los dos son $+\infty$ o $-\infty$, entonces debe entenderse lo siguiente (con las propiedades conmutativas de la suma y el producto sobreentendidas):

- $(+\infty) + \ell = +\infty$; $(-\infty) + \ell = -\infty$.
 $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- si $\ell > 0$, $(+\infty) \cdot \ell = +\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = -\infty$;
 si $\ell < 0$, $(+\infty) \cdot \ell = -\infty$ y $(-\infty) \cdot \ell = +\infty$;
 $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $(+\infty)(-\infty) = -\infty$; $(-\infty)(-\infty) = +\infty$.
- si $\ell > 0$, $(+\infty)^\ell = +\infty$;
 si $\ell < 0$, $(+\infty)^\ell = 0$;
 si $1 < \ell$, $\ell^{+\infty} = +\infty$ y $\ell^{-\infty} = 0$;
 si $0 < \ell < 1$, $\ell^{+\infty} = 0$ y $\ell^{-\infty} = +\infty$;
 $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

La segunda observación es que numerosas propiedades admiten múltiples versiones, dependiendo de donde se toman los límites y de los valores de estos límites. Por razón de brevedad, adoptaremos ciertos convenios de notación. Las letras a , ℓ , r y s representarán

números reales; Δ representará un elemento del conjunto $\{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$, es decir, uno de los valores en los que se toma el límite, y \square un elemento de $\{\ell, +\infty, -\infty\}$, es decir, uno de los valores que puede tener el límite.

El comportamiento de los límites respecto a las operaciones con funciones se describe en las siguientes propiedades:

- Si existe el límite de f en Δ , entonces este límite es único.
- Si existen los dos límites laterales de f en a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

- Si existen $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) + \lim_{x \rightarrow \Delta} g(x)$, con excepción de los casos $+\infty + (-\infty)$ y $-\infty + \infty$.
- Si existen $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \Delta} g(x)$, con excepción de los casos $0 \cdot (\pm\infty)$.
- Si existen $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \ell \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f/g)(x) = \frac{1}{\ell} \left(\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) \right)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \square$ y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \diamond$, y la función $h(x) = f(x)^{g(x)}$ está definida en un entorno de Δ , entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)^{g(x)} = \square^\diamond$, excepto en los casos $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \square$ y $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \diamond$, entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f(g(x))) = \diamond$.

Los casos en que los límites de f y g en Δ son conocidos pero esto no permite calcular directamente el límite de $f + g$, $f \cdot g$, f/g o f^g se denominan *casos de indeterminación*. Si una de las funciones, digamos f , tiene límite $+\infty$ y g tiene límite $-\infty$, ninguna de las propiedades anteriores permite determinar directamente el límite de $f + g$; esta indeterminación se suele representar $\infty - \infty$. Análogamente, tenemos las indeterminaciones $\infty \cdot 0$, ∞/∞ , $0/0$, 1^∞ , 0^0 y ∞^0 . El cálculo de límites consiste, esencialmente, en estudiar métodos que permitan decidir, cuando se presenta una de estas indeterminaciones, si el límite existe y calcularlo.

Otras propiedades de los límites, relacionadas con el valor absoluto, las desigualdades y las cotas, son las siguientes:

- $\lim_{x \rightarrow \Delta} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \Delta} (1/f(x)) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \Delta} |f(x)| = |\ell|$; $\lim_{x \rightarrow \Delta} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$.
- Si el límite de f en Δ es $\square \neq 0$, entonces existe un entorno de Δ en el que los valores de $f(x)$ tienen el mismo signo que \square .

- Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en un entorno de Δ , y $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = r$, entonces $\ell \leq r$.
- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x de un entorno de Δ , y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow \Delta} h(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \ell$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno de Δ , entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)g(x) = 0$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = +\infty$ y g es una función acotada inferiormente en un entorno de Δ , entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f+g)(x) = +\infty$. Análogamente, si $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = -\infty$ y g es una función acotada superiormente en un entorno de Δ , entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (f+g)(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \pm\infty$ y g tiene una cota inferior positiva en un entorno de Δ , entonces $\lim_{x \rightarrow \Delta} (fg)(x) = \pm\infty$.

Mencionemos finalmente la conexión con los límites de sucesiones:

- Sea $f(x)$ una función tal que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y definamos la sucesión (a_n) por $a_n = f(n)$. Entonces, la sucesión (a_n) tiene límite y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3.3 Asíntotas

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

La recta $y = b$ es una *asíntota horizontal por la izquierda* o en $-\infty$ de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, y es una *asíntota horizontal por la derecha* o en $+\infty$ de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

La recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, es una *asíntota oblicua por la izquierda* o en $-\infty$ de la curva $y = f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. En este caso,

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

Recíprocamente, si existen los dos límites anteriores y $a \neq 0$, la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua en $-\infty$.

Análogamente, la recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, es una *asíntota oblicua por la derecha* o en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ y, en este caso, se tiene

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Recíprocamente, si existen los dos límites anteriores y $a \neq 0$, la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua en $+\infty$.

3.4 Continuidad

Sea f una función de dominio D . El límite de f en un punto a es independiente del valor de f en a ; incluso puede existir el límite sin que a pertenezca a D . El límite de f en a sólo depende de los valores de $f(x)$ para los $x \in D$ cercanos a a y diferentes de a . La definición de continuidad es más restrictiva.

Una función f de dominio D es *continua* en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Nótese que esta condición equivale a las tres siguientes.

$$(i) \text{ existe } \ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y es un número real;} \quad (ii) a \in D; \quad (iii) \ell = f(a).$$

Si se cumple la condición (i), pero no la (ii) o la (iii), entonces se dice que f tiene una *discontinuidad evitable* en a . En este caso, se puede definir una nueva función F por $F(a) = \ell$ y $F(x) = f(x)$ para todo $x \in D$, $x \neq a$. La función F difiere de f sólo en el punto a , en el que F es continua y f no. Se dice que F es la *prolongación por continuidad* de f en a .

Si f no es continua en a y la discontinuidad no es evitable, se dice que f tiene una *discontinuidad esencial* en a . En este caso:

1. Si existen los dos límites laterales de f en a pero son números reales distintos, la discontinuidad se denomina *de salto* o *de primera especie*.
2. Si uno o ambos límites laterales no existen o son infinitos, la discontinuidad se denomina *de segunda especie*. Si uno o los dos límites laterales son infinitos, también se dice que la discontinuidad es *asintótica* (porque entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$.)

Se dice que f es *continua* en $A \subseteq \mathbb{R}$ si es continua en todo $a \in A$.

Algunas propiedades relevantes de la continuidad son las siguientes.

- Si f es continua en a , entonces $|f|$ también es continua en a .
- Si f es continua en a y $f(a) \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ en un entorno de a .
- Si f y g son continuas en a , entonces $f \pm g$ y fg también son continuas en a . Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a .
- Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a .
- Si f es continua e inyectiva en $[a, b]$, entonces f^{-1} es continua en $f([a, b])$.
- (**Teorema de Bolzano**) Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- (**Teorema de Weierstrass**) Si f es continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b])$ tiene un máximo M y un mínimo m , y el recorrido de f es $f([a, b]) = [m, M]$.

3.5 Resolución aproximada de ecuaciones

El teorema de Bolzano puede utilizarse para determinar aproximadamente soluciones de algunas ecuaciones mediante el llamado **método de la bisección**.

Dada la ecuación $f(x) = 0$, si conocemos a y b tales que $f(a)f(b) < 0$ y f es continua en $[a, b]$, entonces podemos afirmar que existe en este intervalo una solución de la ecuación. Tomemos ahora un punto $c \in (a, b)$ (por ejemplo, el punto medio). Si c no es solución, entonces se tiene $f(a)f(c) < 0$ o bien $f(c)f(b) < 0$. En el primer caso tendremos una solución en el intervalo (a, c) , mientras que en el segundo la tendremos en (c, b) . Procediendo sucesivamente de este modo podemos localizar una solución en un intervalo de longitud cada vez menor. Si se toma cada vez el punto medio, las longitudes de los sucesivos intervalos son $(b - a)/2^n$, donde n es el número de iteraciones. El proceso se detiene cuando $(b - a)/2^n$ es menor que la cota del error admisible.

Un método alternativo es el llamado **método de la secante**. Suponiendo $f(a)f(b) < 0$ y f continua en $[a, b]$, tomamos $x_0 = a$, $x_1 = b$, y

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Entonces la sucesión (x_n) se acerca a la solución buscada. En cada iteración, x_{n+1} es la abcisa del punto de intersección con el eje OX de la recta que pasa por $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. El proceso debe detenerse cuando $|x_{n+1} - x_n|$ y $|f(x_{n+1})|$ son ambos menores que la cota del error admisible.

Apéndice: Las funciones elementales

La forma más habitual de definir una función es mediante operaciones que involucran funciones bien conocidas. Las más utilizadas son las llamadas *funciones elementales*, que son las funciones polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales, logarítmicas, circulares y sus inversas, y las hiperbólicas y sus inversas. A continuación, definimos estas funciones y resumimos sus propiedades.

Polinomios

Sea $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ una función polinómica con coeficientes reales. Se cumplen las siguientes propiedades.

- El dominio de f es \mathbb{R} . La función f es la función constante a_0 , la gráfica de $y = f(x)$ es la recta horizontal $y = a_0$, y los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ son ambos a_0 .
- Si $n \geq 1$ es par

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0; \\ -\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

- Si n es impar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0; \\ +\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0; \\ -\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

Los polinomios de grado 1 son de la forma $f(x) = mx + n$ con $m \neq 0$. La gráfica de $f(x)$ es una recta oblicua; el número $m = f'(x)$ se denomina *pendiente* de la recta. La función f es estrictamente creciente en todo el dominio si $m > 0$ y estrictamente decreciente si $m < 0$. El número $n = f(0)$ se denomina *ordenada en el origen*. El polinomio $f(x) = mx + n$ tiene una única raíz, que es $x_0 = -n/m$.

Los polinomios de grado 2 son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Sus gráficas son parábolas de vértice $(-b/2a, c - (b^2/4a))$, el cual corresponde a un mínimo o a un máximo según que $a > 0$ o $a < 0$. El valor de a regula la abertura de la parábola, que es tanto más cerrada cuanto mayor es $|a|$. Los límites de $f(x)$ en $+\infty$ y $-\infty$ son ambos $+\infty$ si $a > 0$ y $-\infty$ si $a < 0$.

Una función polinómica de grado $n \geq 3$ tiene un máximo de $n - 1$ extremos relativos que separan un máximo de n intervalos de monotonía.

Funciones racionales

Una *función racional* es una función definida como cociente de dos polinomios,

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x], \quad b(x) \neq 0.$$

Supongamos que $a(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ es de grado m y que $b(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ es de grado n . Si $n = 0$, es decir, si $b(x)$ es constante, entonces $f(x)$ es un polinomio. Supondremos, pues, $n \geq 1$. La función racional $f(x) = a(x)/b(x)$ cumple las siguientes propiedades:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador $b(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$. En el caso $m > n$, de acuerdo con los límites de polinomios, este límite es $\pm\infty$; el signo del límite en $+\infty$ coincide con el signo de a_m/b_n , mientras que el signo del límite en $-\infty$ depende también de la paridad de $n - m$. Si $m < n$ el límite es 0, y si $m = n$ es a_m/b_n .

Funciones potenciales

Una *función potencial* es una función de la forma $f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$. Si a es un natural, entonces se trata de una función polinómica. Supondremos, pues, que a no es natural.

La función potencial $f(x) = x^a$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es $[0, +\infty)$ si $a > 0$ y $(0, +\infty)$ si $a < 0$.
- Si $a > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$.
- Si $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$.

Funciones circulares (o trigonométricas)

Los ángulos, salvo indicación contraria, se miden en *radianes*. La equivalencia con los grados sexagesimales es $180^0 = \pi \text{ rad}$, es decir, $1 \text{ rad} = (180/\pi) \cdot 1^0$ (aproximadamente, $1 \text{ rad} = 57,296^0 = 57^0 17' 45''$).

Sea x un número real. Sobre la circunferencia de centro el origen y radio 1, consideremos un arco de circunferencia de origen el punto $(1, 0)$ y longitud $|x|$ y en sentido antihorario si $x > 0$, y en sentido horario si $x < 0$. Sea $P = (c, s)$ el extremo de este arco. El ángulo que tiene el semieje positivo de abscisas como el primer lado y la recta OP como segundo mide, precisamente, x radianes. El seno y el coseno de x se definen por $\sin x = s$, $\cos x = c$.

El seno y el coseno de un ángulo se definen como el seno y el coseno de su medida en radianes.

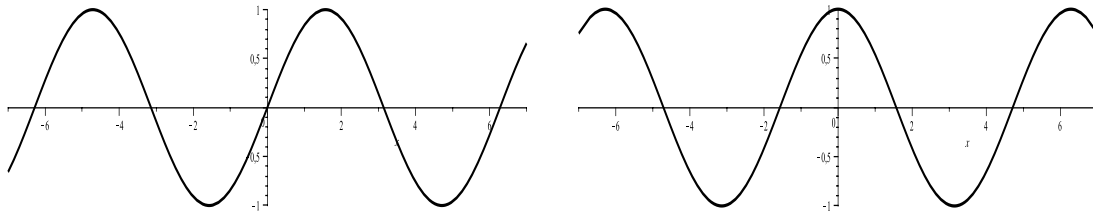
Si x es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, a y b son los catetos opuesto y contiguo, respectivamente, al ángulo x , y c es la hipotenusa, entonces $\sin x = c/a$ y $\cos x = b/a$.

Las funciones seno y coseno tienen las siguientes propiedades:

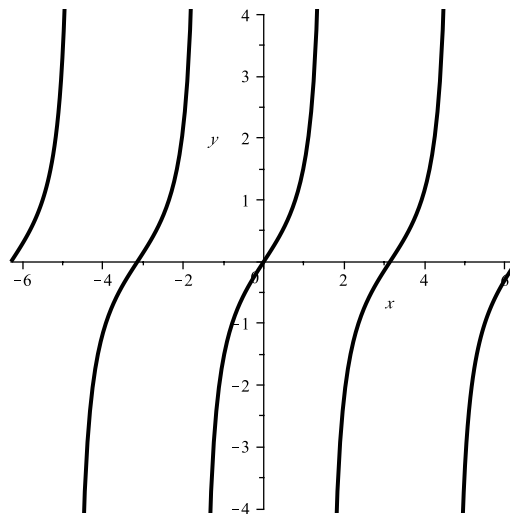
- Tienen dominio \mathbb{R} y recorrido el intervalo $[-1, 1]$.

- Son periódicas de periodo 2π .
- La función seno es impar y la función coseno es par.

En la figura siguiente se representan gráficamente las funciones seno (izquierda) y coseno (derecha).



Se define la función *tangente* por $\tan x = \sin x / \cos x$. La función tangente tiene las siguientes propiedades (ver figura).



- Su dominio es el conjunto de todos los números reales excepto los que tienen el coseno igual a cero, es decir, los números de la forma $x = (2n + 1)\pi/2$, con $n \in \mathbb{Z}$. El recorrido de la función tangente es \mathbb{R} , es decir, todo número real es la tangente de algún número.
- Es periódica de periodo π .
- Es impar.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- Si $a = (2n + 1)\pi/2$, con $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \tan x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \tan x = -\infty.$$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, las funciones seno, coseno y tangente cumplen las siguientes propiedades:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- (Fórmulas de adición)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$
- (Fórmulas del ángulo doble)

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$
- (Fórmulas del ángulo mitad)

$$\cos^2(x/2) = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos x}{2};$$
- (Fórmulas de transformación de sumas en productos)

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Los dos límites siguientes son destacables.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Otras funciones circulares son la *cotangente*, definida por $\cot x = 1/\tan x = \cos x/\sin x$; la *secante*, definida por $\sec x = 1/\cos x$; y la *cosecante*, definida por $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$.

Mencionemos también las funciones circulares *inversas*.

La función seno es inyectiva en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Por tanto, en este intervalo tiene inversa, denominada función *arco seno* y denotada \arcsen . La función $f(x) = \arcsen x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio es $[-1, 1]$ y su recorrido $[-\pi/2, \pi/2]$.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.

La función coseno es inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$. Por tanto, en este intervalo tiene inversa, llamada función *arco coseno* y denotada \arccos . La función $f(x) = \arccos x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio es $[-1, 1]$ y su recorrido $[0, \pi]$.
- Es estrictamente decreciente en todo su dominio.

La función tangente es inyectiva en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Por tanto, en este intervalo tiene inversa, denominada función *arco tangente* y denotada \arctan . La función $f(x) = \arctan x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es \mathbb{R} y su recorrido $(-\pi/2, \pi/2)$.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi/2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\pi/2$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. La función *exponencial de base a* es la función definida por $f(x) = a^x$.

La función $f(x) = a^x$ es inyectiva en \mathbb{R} y, por tanto, tiene inversa, que se llama *función logaritmo en base a* , y se denota \log_a . Tenemos:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Si se omite la base a , entonces se sobreentiende que es 10, es decir: $\log x = \log_{10} x$.

El límite

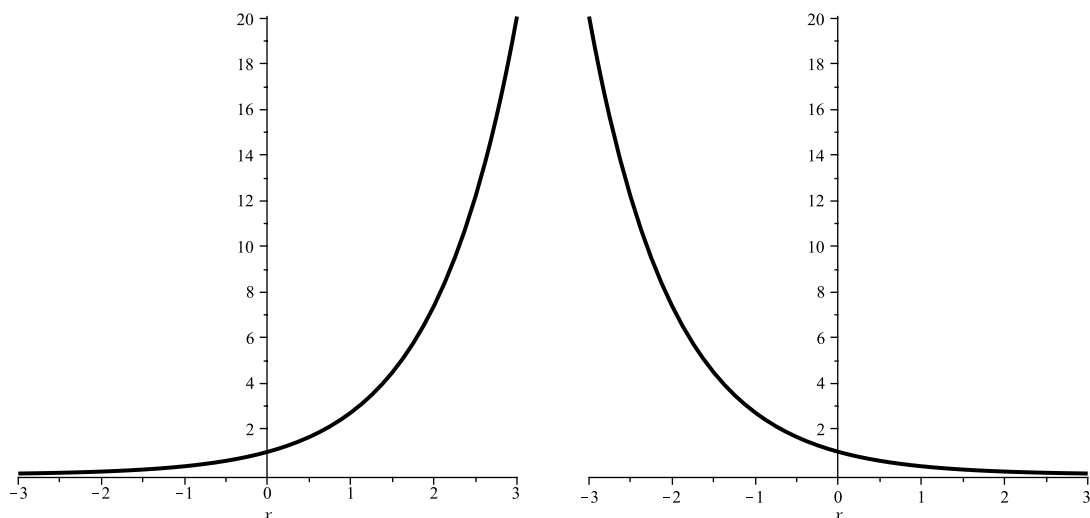
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

existe y es un número real e de valor aproximado $e = 2,7182818 \dots$. La función exponencial de base e es la más utilizada. La función logaritmo en base e se denomina función *logaritmo natural* o *neperiano* y se denota por \ln .

Consideremos la función exponencial de base a , es decir, la función $f(x) = a^x$.

- Su dominio es \mathbb{R} y su recorrido $(0, +\infty)$.
- Es estrictamente monótona en todo el dominio, creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$.
- Si $a > 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- Si $a < 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.
- $a^0 = 1$.
- $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = a^x / a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones e^x (izquierda) y $(1/e)^x$ (derecha).



Señalemos que dos funciones logarítmicas difieren solamente en un factor constante: si a y b son bases de logaritmos,

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x = (\log_a b) \log_b x.$$

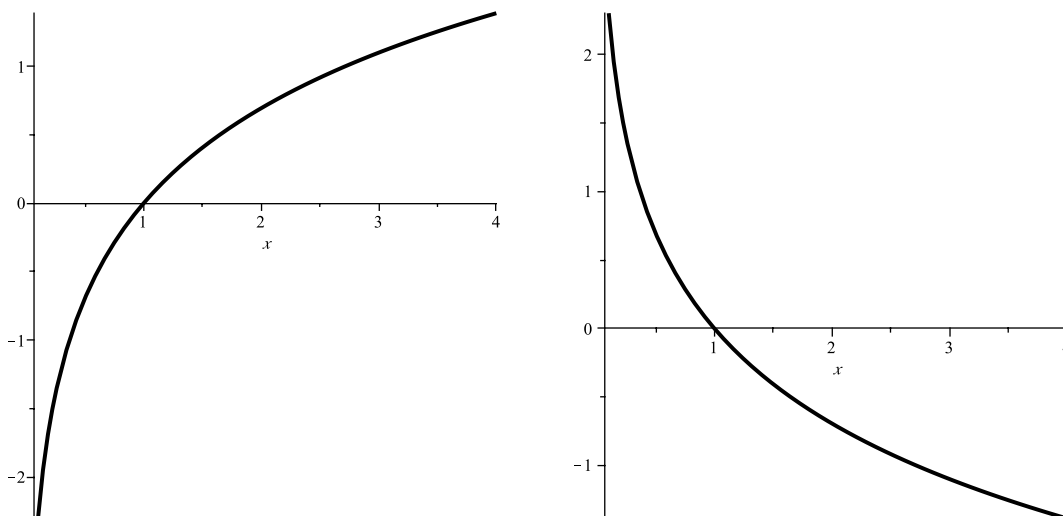
Consideremos una función logaritmo $f(x) = \log_a x$.

- Su dominio es $(0, +\infty)$ y su recorrido \mathbb{R} .
- Es estrictamente monótona en todo el dominio, creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$.
- Si $a > 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.
- Si $a < 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^r = r \log_a x$, para todos x, y reales positivos y todo real r .

El límite siguiente es destacable:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones logaritmo en base e (izquierda) y en base $1/e$ (derecha).



Funciones hiperbólicas

Las funciones *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica*, se definen, respectivamente, por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

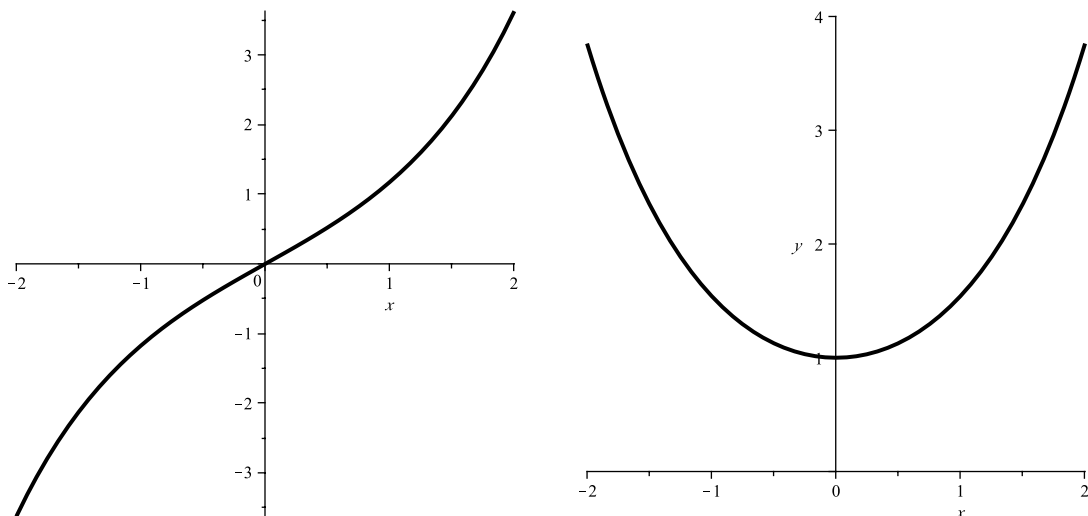
La función $f(x) = \sinh x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio y el recorrido son \mathbb{R} .
- Es una función impar.
- Es estrictamente creciente en todo el dominio.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$.

La función $f(x) = \cosh x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio es \mathbb{R} y el recorrido es $[1, +\infty)$.
- Es una función par.
- Es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$, estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, y tiene un mínimo en $(0, 1)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$.

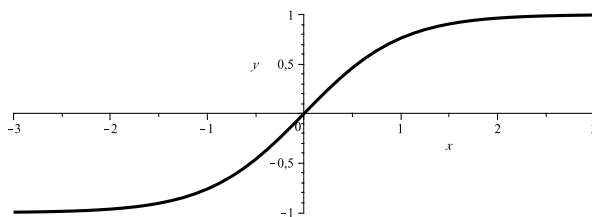
En la figura siguiente se muestran las gráficas de las funciones seno hiperbólico (izquierda) y coseno hiperbólico (derecha)



La función $f(x) = \tanh x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio es \mathbb{R} y el recorrido el intervalo $(-1, 1)$.
- Es una función impar.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$.

Su gráfica es la siguiente:



Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes fórmulas:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- (Fórmulas de adición)

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$
- (Fórmulas del argumento doble)

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$
- (Fórmulas del argumento mitad)

$$\cosh^2(x/2) = \frac{1 + \cosh x}{2}, \quad \sinh^2(x/2) = \frac{\cosh x - 1}{2}.$$

- (Fórmulas de transformación de sumas en productos)

$$\begin{aligned}\sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, & \cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}, \\ \sinh x - \sinh y &= 2 \sinh \frac{x-y}{2} \cosh \frac{x+y}{2}, & \cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

La función seno hiperbólico es inyectiva. Por tanto, tiene una función inversa, denominada *argumento seno hiperbólico* y denotada $\arg \sinh$. Tenemos $y = \arg \sinh x \Leftrightarrow x = \sinh y$. La función *argumento seno hiperbólico* admite también la siguiente expresión explícita :

$$\arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

La función $f(x) = \arg \sinh x$ tiene las siguientes propiedades:

- El dominio y el recorrido son \mathbb{R} .
- Es una función impar.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arg \sinh x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \sinh x = +\infty$.

La función coseno hiperbólico no es inyectiva, pero restringida a $[0, +\infty)$, sí lo es. En este intervalo tiene inversa, denominada función *argumento coseno hiperbólico* y denotada $\arg \cosh$. Tenemos $y = \arg \cosh x \Leftrightarrow \cosh y = x$. La función *argumento coseno hiperbólico* admite también la siguiente expresión explícita:

$$\arg \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

La función $f(x) = \arg \cosh x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es $[1, +\infty)$ y su recorrido $[0, +\infty)$.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \cosh x = +\infty$.

La función tangente hiperbólica es inyectiva. Por tanto, tiene inversa, denominada *argumento tangente hiperbólica* y denotada $\arg \tanh$. Tenemos $y = \arg \tanh x \Leftrightarrow \tanh y = x$. La función $f(x) = \arg \tanh x$ admite también la siguiente expresión explícita:

$$\arg \tanh x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

La función $f(x) = \arg \tanh x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es $(-1, 1)$ y su recorrido es \mathbb{R} .
- Es una función impar.
- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arg \tanh x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arg \tanh x = +\infty$.

Funciones potenciales-exponenciales

Las funciones del tipo $f(x) = u(x)^{v(x)}$, donde u y v son funciones, se denominan *potenciales-exponenciales*. Argumentos que involucran logaritmos permiten resolver ciertas indeterminaciones del tipo 1^∞ , ∞^0 y 0^0 .

■ Sea $\Delta \in \{a^+, a^-, a, +\infty, -\infty\}$. Supongamos que

1. $u(x) \neq 1$ para todo x en un entorno de Δ ;
2. $\lim_{x \rightarrow \Delta} u(x) = 1$;
3. $\lim_{x \rightarrow \Delta} |v(x)| = +\infty$;
4. existe $\lim_{x \rightarrow \Delta} v(x) (u(x) - 1) = \square \in \{\ell, +\infty, -\infty\}$.

Entonces, $\lim_{x \rightarrow \Delta} u(x)^{v(x)} = e^\square$.