1 Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(a) Construïu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$. Justifiqueu la resposta.

(b) Calculeu el residu de Taylor corresponent al polinomi de l'apartat anterior.

(c) Trobeu una cota superior de l'error en l'aproximació

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}\,,$$

per a tot real x tal que $|x| < \dfrac{1}{16}$

(d) Fent ús del polinomi obtingut en l'apartat **(a)** calculeu un valor aproximat de $1/\sqrt{0.979}$. Avalueu l'expressió del residu **(b)** en aquest cas i doneu una cota superior de l'error en l'aproximació.

Resolució: Tots els apartats la mateixa puntuació.

(a) *El Polinomi de Taylor de grau 1 és* $P_f(x,0) = f(0) + f'(0)x$. *En el nostre cas,* $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ *i* $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$, *en* $x = 0$ *s'obté* $f(0) = 1$ *i* $f'(0) = \frac{1}{2}$, *pertant*

$$P_f(x,0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

(b) *El terme complementari de l'error en el nostre cas és* $R_f(x,0) = \dfrac{f''(c)}{2!}x^2$ *on* c *és un real comprès entre* 0 *i* x. *La derivada segona és* $f''(x) = \dfrac{3}{4}(1-x)^{-5/2}$, *així l'expressió que es demana queda*

$$R_f(x,0) = \frac{3}{8(1-c)^{5/2}}x^2.$$

(c) *Per a* $|x| < \dfrac{1}{16}$ *i* c *entre* 0 *i* x *resulta que*

$$\frac{-1}{16} < c < \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{17}{16} > 1 - c > \frac{15}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{17}{16}\right)^{5/2} > (1-c)^{5/2} > \left(\frac{15}{16}\right)^{5/2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{17}\right)^{5/2} < \frac{1}{(1-c)^{5/2}} < \left(\frac{16}{15}\right)^{5/2}$$

[1] **NotaExamen = (2*NotaExercici1+ NotaExercici2)/3**

i en aquest cas el terme complementari compleix que

$$|R_f(x,0)| = \left|\frac{3}{8(1-c)^{5/2}}\right| \left|x^2\right| < \left|\frac{3}{8(1-c)^{5/2}}\right| \frac{1}{16^2} < \frac{3}{8}\frac{1}{16^2}\left(\frac{16}{15}\right)^{5/2} < 0.001725.$$

(d) *Cal substituir $x = 0.021$ en les expressions obtingudes en els apartats* **(a)** *i* **(b)**. *Pel residu s'obté*

$$|R_f(0.021,0)| = \left|\frac{3(0.021)^2}{8(1-c)^{5/2}}\right| = \left|\frac{0.000165375}{(1-c)^{5/2}}\right| < 0.0001740\,.$$

Pel polinomi s'obté $P_f(0.021) = 1 + 0.021/2 = 1.01050000\,.$
L'aproximació és

$$\frac{1}{\sqrt{0.979}} = 1.0105 \pm 0.0002$$

2 **(a)** Enunicieu el criteri del sandwich per a successions de números reals.

(b) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

(c) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\,\sin(n!+e^n)}{n!}$$

Resolució: Tots els apartats la mateixa puntuació.

(a) *Criteri del sandwich.*

Siguin (a_n), (b_n) i (c_n) tres successions de números reals que compleixen: $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \ge n_0$. Si les successions (a_n) i (c_n) són convergents i $\lim a_n = \lim c_n$, aleshores la successió (b_n) també és convergent i el seu límit coincideix amb el de les altres dues.

(b) *Fent ús del criteri del quocient s'obté* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0\,$. *El raonament és:*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0\,,$$

com que $L < 1$ *aleshores* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,$, *i pertant* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0\,.$

(c) *Fent ús del criteri del sandwich s'obté* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n \sin(n!+e^n)}{n!} = 0\,$. *El raonament és:*

Donat que $-1 \le \sin(n!+e^n) \le 1$, $\forall n \ge 0$, *es té:*

$$-\frac{2^n}{n!} \le \frac{2^n \sin(n!+e^n)}{n!} \le \frac{2^n}{n!}\,,$$

i del fet que les successions de terme general $a_n = -\dfrac{2^n}{n!}$ *i* $c_n = \dfrac{2^n}{n!}$ *són convergents i tenen limit zero, fent ús del criteri del sandwich, es pot concl0ure que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \sin(n!+e^n)}{n!} = 0$$