

1. (2.5 punts) Demostreu que el domini de la funció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2 + x - 2|} - x + 6}$$

és el conjunt de tots els nombres reals.

2. (2.5 punts) Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = -1 + \sqrt{1 + 2a_n}$, per $n \geq 1$.

- (a) Demostreu que tots els termes de la successió són positius.
- (b) Enuncieu del teorema de convergència monòtona.
- (c) Demostreu que la successió $\{a_n\}$ és convergent.
- (d) Calculeu el seu límit.

3. (2.5 punts)

- (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = \sqrt{x}$, centrat en el punt $a = 1$. Mitjançant aquest polinomi, calculeu el valor aproximat de $\sqrt{1/2}$, donant el resultat exacte que s'obté amb el polinomi.
- (b) Determineu l'expressió del residu de Lagrange associat al polinomi de Taylor obtingut a l'apartat anterior.
- (c) Fent servir el residu de l'apartat (b), determineu una fita superior de l'error absolut comés en el càlcul aproximat de $\sqrt{1/2}$.

4. (2.5 punts) Considereu l'equació $x = \cos(x)$.

- (a) Demostreu que admet solució a l'interval $[0, 1]$.
- (b) Demostreu que la solució és única a l'interval $[0, 1]$.
- (c) Utilitzeu el mètode de bisecció per determinar un interval de longitud 0.1, dintre de $[0, 1]$, on es trobi la solució de l'equació.
- (d) Prenent com a valor inicial un punt de l'interval determinat a l'apartat (c), calculeu la solució aproximada de l'equació i la seva precisió després de dues iteracions del mètode de la tangent.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES, INCLOSOS ELS CÀLCULS, ARRODONINT CORRECTAMENT ELS RESULTATS NUMÈRICS.