1 Calculeu la integral següent

$$I = \int_0^4 (1 - e^{\,x/4})\, dx\,.$$

Resolució:

(a) Fent ús de la regla de Barrow.

$$I = \int_0^4 (1 - e^{\,x/4})\, dx = \Big[x - 4e^{x/4}\Big]_0^4 = (4 - 4e) - (0 - 4e^0) = 8 - 4e = -2.87312731\ldots$$

(b) Fent ús de la fórmula dels trapezis amb una partició de 4 subintervals.

La fórmula dels trapezis per a 4 subintervals a l'interval $[0,4]$ *és*

$$T_f = \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \frac{1}{2}f(4).$$

Én el nostre cas $f(x) = 1 - e^{x/4}$*, calculant s'obté,*

$$T_f = \frac{7}{2} - e^{1/4} - e^{1/2} - e^{3/4} - e = -2.9088876\ldots$$

(c) Fent ús de la fórmula de Simpson amb una partició de 4 subintervals.

La fórmula de Simpson per a 4 subintervals a l'interval $[0,4]$ *és*

$$S_f = \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(2) + \frac{4}{3}f(3) + \frac{1}{3}f(4)$$

Én el nostre cas $f(x) = 1 - e^{\,x/4}$*, calculant s'obté,*

$$S_f = \frac{1}{3}\Big(10 - 4e^{1/4} - 2e^{1/2} - 4e^{3/4} - e\Big) = -2.8732752\ldots$$

(d) Avalueu l'error absolut en cas que fem ús dels resultats dels apartats **(b)** i **(c)** per aproximar el valor de la integral I. Comenteu els resultats obtinguts.

L'error absolut si fem ús de trapezis per avaluar I *és* $|I - T_f| = 0.03576\cdots < 0.05$ *resultat que ens assegura un decimal correcte en el valor aproximat* T_f.
L'error absolut si fem ús de Simpson per avaluar I *és* $|I - S_f| = 0.0001484\cdots < 0.0005$*, és a dir tres decimals correctes en el valor aproximat* S_f.

2 Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Resolució:

(a) Construïu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$. Justifiqueu la resposta.

El Polinomi de Taylor de grau 1 és $P_f(x,0) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0)$*. En el nostre cas,* $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ *i* $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$*, en* $x = 0$ *s'obté* $f(0) = 1$ *i* $f'(0) = \frac{1}{2}$*, pertant*

$$P_f(x,0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

(b) Escriviu el terme complementari de l'error que es comet en considerar el polinomi de Taylor de grau 1 obtingut enlloc de la funció irracional $f(x)$.

El terme complementari de l'error en el nostre cas és $R_f(x,0) = \dfrac{f^2(c)}{2!}x^2$ *on* c *és un real qualsevol comprès entre* 0 *i* x. *La derivada segona és* $f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}$, *així l'expressió que es demana queda*

$$R_f(x,0) = \frac{3}{8(1-c)^{5/2}}x^2.$$

(c) Trobeu una cota superior de l'error si $|x| < \dfrac{1}{16}$ en l'aproximació $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$.

Per a $|x| < \dfrac{1}{16}$ *i* c *entre* 0 *i* x *la funció* $\dfrac{3}{8(1-c)^{5/2}}$ *és creixent si* $c < 1$, *en aquest cas el terme complementari compleix que*

$$|R_f(x,0)| = \left|\frac{3}{8(1-c)^{5/2}}\right| |x^2| < \left|\frac{3}{8(1-c)^{5/2}}\right| \frac{1}{16^2} < \frac{3}{8}\frac{1}{16^2}\left(\frac{16}{15}\right)^{5/2} < 0.001725.$$

(d) En la teoria de la relativitat especial la massa m d'una partícula que es mou amb velocitat v es defineix

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

on m_0 és la massa en repòs de la partícula i c la velocitat de la llum. Fent ús dels apartats **(a)** i **(c)** justifiqueu que per a velocitats petites en comparació amb la velocitat de la llum

$$m \approx m_0\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Per a velocitats v *molt més petites que la velocitat de la llum, el quocient* v/c *pren un valor petitíssim llavors, dient* $x = (v/c)^2$ *fem ús de l'expressió obtiguda en l'apartat* **(c)** *a l'expressió de* m *en funció de* $(v/c)^2$ *i obtenim el resultat que ens demanen.*

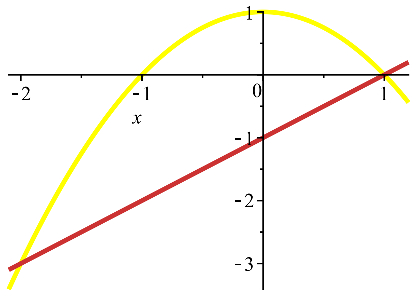

Figura 1: Conjunt $\mathcal{K}$.

3 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Resolució:

(a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini.

El domini de la funció és $\mathbb{R}^2$. *En aquest domini la funció presenta només un punt crític que és* $(0,0)$. *S'observa que* $f(0,0) = 0$ *i que en qualsevol altre punt la funció és positiva, llavors* $(0,0)$ *és un mínim relatiu.*

(b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \le 1 - x^2 \,, \quad y \ge x - 1\right\}.$$

Una representació gràfica de la paràbola $y = 1 - x^2$ *i de la recta* $y = x - 1$ *ens permet visualtizar el recinte* $\mathcal{K}$*, que consta dels punts del pla* $-2 \le x \le 1$ *i* $x - 1 \le y \le 1 - x^2$.

$\mathcal{K}$ *és un conjunt fitat. Comprovació, una bola de centre* $(0, 0)$ *i radi* 4 *(conjunt fitat) conté al conjunt.*

$\mathcal{K}$ *és un conjunt tancat, els punts de la frontera són al conjunt. Els punts* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *de la frontera satisfan* $x^2 + y = 1$ *amb* $-2 \le x \le 1$ *o bé* $y = x - 1$ *per a* $-2 \le x \le 1$.

La funció f *és, compossició de operacions aritmètiques, contínua en el conjunt* $\mathcal{K}$ *tancat i fitat, llavors la funció té màxim i mínim absoluts (T. de Weierstrass).*

(c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en el recinte $\mathcal{K}$. *Els candidats a màxim i mínim absolut, per aquest cas són:*

1. *Les punxes del recinte* $\mathcal{K}$ *de coordenades* $(-2\,, -3)$ *i* $(1\,, 0)$.
2. *Els extrems relatius a l'interior de* $\mathcal{K}$*, només el punt de coordenades* $(0\,, 0)$.
3. *Els extrems de* f *sobre la semirecta* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -2 < x < 1\,, \quad y = x - 1\right\}$. *S'obté el punt de coordenades* $\left(\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\right)$*, fent ús del mètode dels multiplicadors de Lagrange.*
4. *Els extrems de* f *sobre l'arc de la paràbola* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, -2 < x < 1\,, \quad x^2 + y = 1\right\}$. *Fent ús del mètode dels multiplicadors de Lagrange s'obtenen tres punts, les coordenades dels quals són* $(0\,, 1)\,,\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{1}{2}\right)$.

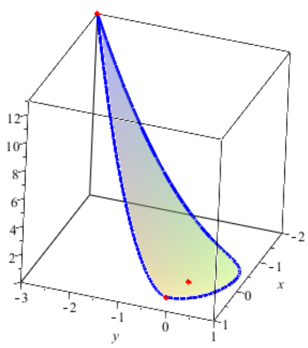

Figura 2: Superfície $z = f(x, y)$ amb $(x, y) \in \mathcal{K}$.

(d) Trieu els punts que són el màxim i el mínim absoluts de f i digueu quins són els valors màxim i mínim de f en $\mathcal{K}$.

Per a decidir, cal avaluar la funció en tots els candidats. Els valors són

$$f(0\,, 0) = 0\,, \qquad f(-2\,, -3) = 13\,, \qquad f(1\,, 0) = 1\,, \qquad f(0\,, 1) = 1\,,$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\,, \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\,, \qquad f\left(\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,,$$

El màxim absolut s'obté en el punt de coordenades $(0\,, 0)$ *i val* 0. *El mínim absolut s'obté en el punt de coordenades* $(-2\,, -3)$ *i val* 13.