1 *(2 punts)* Trobeu els nombres reals x tals que:

$$|2 - x^2| < 1\,.$$

Representeu sobre la recta real el conjunt de solucions i digueu si tal conjunt és fitat superiorment i/o inferiorment. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i/o l'ínfim.

Resolució:

Els càlculs són:

$|2 - x^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 - x^2 < 1 \Leftrightarrow -3 < -x^2 < -1 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 3 \Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt{3}$

és a dir,

$$x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}).$$

Una representació gràfica

El conjunt de solucions és fitat superiorment i inferiorment, el suprem és $\sqrt{3}$ i l'ínfim és $-\sqrt{3}$.

2 Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = 1/2$ i $a_{n+1} = (a_n)^2$ si $n \geq 1$.

a) *(1 punt)* Doneu la definició de successió fitada. Proveu que per a tot $n \geq 1$ es verifica $0 \leq a_n \leq 1/2$.

b) *(1 punt)* Doneu la definició de successió decreixent. Proveu que $\{a_n\}$ és decreixent.

c) *(1 punt)* Proveu que $\{a_n\}$ és convergent. Calculeu el seu límit.

Resolució:

a) *Una successió $\{a_n\}$ és fitada si i només si és fitada superiorment i inferiorment, és a dir, existeixen $h,\ k$ reals tals que $h \leq a_n \leq k$ per a tot $n \in N$.*

Demostrarem per inducció que $0 \leq a_n \leq 1/2$, per a tot $n \geq 1$.

i) Per a $n = 1$, es verifica que $0 \leq a_1 \leq 1/2$, ja que $a_1 = 1/2$.

ii) Cal demostrar que si $n \geq 1,\ 0 \leq a_n \leq 1/2 \implies 0 \leq a_{n+1} \leq 1/2$. El raonament és el següent: $0 \leq a_n \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq (a_n)^2 \leq 1/4 < 1/2 \Rightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 1/2$.

Per tant, és cert per a tot $n \geq 1$ que $0 \leq a_n \leq 1/2$.

b) *Una successió $\{a_n\}$ és decreixent si i només si $a_{n+1} \leq a_n$ per a tot $n \in N$.*

En el nostre cas, tenint en compte que el quadrat de tot nombre x de l'interval $[0, 1]$ és més petit o igual que x i l'apartat anterior:

$$0 \leq a_n \leq 1/2 \leq 1 \Rightarrow (a_n)^2 \leq a_n \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

per a tot $n \in N$, per tant la successió és decreixent .

c) *Els apartats (a) i (b) mostran que $\{a_n\}$ és monòtona decreixent i fitada inferiorment; segons el teorema de la convergencia monòtona la successió $\{a_n\}$ és convergent.*

Sigui $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$, llavors

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} \ \ i \ \ a_{n+1} = (a_n)^2 \ \Rightarrow\ L^2 = L \ \Rightarrow\ L = 0 \ \ o \ \ L = 1.$$

Però $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$ no pot ser 1 perquè tots els termes de la successió són menors o iguals que $1/2$. Per tant el límit de la successió és 0.

3 Considereu les corbes $y = \ln(x)$ i $y = (x-1)(x-3)$.

a) *(1 punt)* Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica.

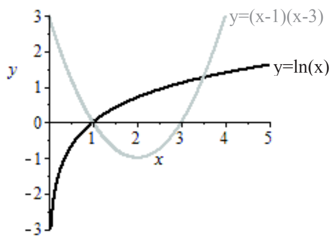
b) *(1 punt)* Fent ús del Teorema de Rolle justifiqueu que les corbes donades no es tallen en més de dos punts.

c) *(2 punts)* Trobeu els dos punts d'intersecció de les dues corbes, un d'ells de manera exacta i l'altre amb una precisió de 0.01 fent servir el mètode de la tangent (Newton-Raphson) amb $x_0 = 3$.

d) *(1 punt)* Doneu un exemple d'una funció no constant tal que el mètode de la tangent (Newton-Raphson) doni un zero de la funció en la primera iteració independentment del punt inicial.

Resolució:

a) *Representació gràfica:*



b) *Demostració per reducció a l'absurd: Sigui $f(x) = \ln(x) - (x-1)(x-3)$, f és contínua i derivable per a tot $x > 0$. Suposem que hi ha 3 punts $0 < x_1 < x_2 < x_3$ tals que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, pel Teorema de Rolle existirien $c_1 \in (x_1, x_2)$ i $c_2 \in (x_2, x_3)$ tals que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Però la derivada de f només té un zero en $(0, +\infty)$: $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} - 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0$, que només té una solució positiva ($x = (2+\sqrt{6})/2$), això contradiu el fet que $\exists c_1, c_2 < 0, c_1 \neq c_2, f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Per tant les corbes no es tallen en més de dos punts.*

c) *Una solució és $x = 1$, ja que per $x = 1$ es té $\ln(x) = 0$ i $(x-1)(x-3) = 0$.*

Per calcular l'altre, apliquem el mètode de Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ amb $x_0 = 3$, i s'obtenen els valors $x_1 = 3.6591\ldots$, $x_2 = 3.5095\ldots$, $x_3 = 3.5011\ldots$. Es verifica que $|x_3 - x_2| < 0.01$ i que $|f(x_3)| < 0.01$, per tant l'altra solució amb una precisió de 0.01 és $x \simeq 3.50$.

d) *$f(x) = mx + n$, per qualssevol nombres reals m, n. Per exemple $f(x) = 3x$.*