

4. Derivabilidad

Contenido

- 4.1 Definición y propiedades
- 4.2 Tabla de derivadas
- 4.3 Teoremas del valor medio
- 4.4 Monotonía
- 4.5 Extremos relativos
- 4.6 La regla de L'Hôpital
- 4.7 Convexidad
- 4.8 Extremos absolutos en intervalos cerrados
- 4.9 Resolución aproximada de ecuaciones

4.1 Definición y propiedades

Una función f es *derivable* en un punto a de su dominio si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

y es un número real. El número $f'(a)$ se denomina *derivada de f en a* .

Si f es derivable en a , entonces f es continua en a . El recíproco no es cierto: hay funciones continuas en un punto no derivables en ese punto.

Geométricamente, la derivabilidad de f en a significa la existencia de la *recta tangente* a la gráfica de la función f en el punto $(a, f(a))$; en este caso, la ecuación de la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Así pues, $f'(a)$ es la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. La función correspondiente a la tangente $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ es una función polinómica de primer grado que aproxima la función f cerca del punto a .

Las siguientes propiedades expresan el comportamiento de la derivación respecto a las operaciones.

- Si f y g son derivables en a , entonces $f + g$ es derivable en a y

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

- Si f y g son derivables en a , entonces fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces

$$(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))/g(a)^2.$$

- **(Regla de la cadena)** Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Sea f una función de dominio D y sea D' el conjunto de puntos de D en los que la función f es derivable. La función $f': D' \rightarrow \mathbb{R}$ que hace corresponder a cada punto $x \in D'$ el valor $f'(x)$ de la derivada de f en x se denomina *función derivada* o *derivada* de f . Si f' es también una función derivable, su derivada se denota por f'' y se denomina *segunda derivada* de f . Recurrentemente, la n -ésima derivada de f , denotada $f^{(n)}$, es la derivada de la función $f^{(n-1)}$.

4.2 Tabla de derivadas

Incluimos aquí una tabla con las derivadas de las funciones elementales. En ella, $f(x)$ es de la forma $f(x) = g(u(x))$ para ciertas funciones u y g . Implícitamente, se suponen las condiciones de existencia y derivabilidad de las funciones involucradas.

f	f'		f	f'
k	0	$(k \in \mathbb{R})$	$\arccos u$	$-u'/\sqrt{1-u^2}$
u^k	$ku^{k-1}u'$	$(0 \neq k \in \mathbb{R})$	$\arctan u$	$u'/(1+u^2)$
$\log_a u$	$u'/(u \ln a)$	$(a > 0)$	$\sinh u$	$u' \cosh u$
a^u	$u'a^u \ln a$	$(a > 0)$	$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\sin u$	$u' \cos u$		$\tanh u$	$u'/\cosh^2 u$
$\cos u$	$-u' \sin u$		$\arg \sinh u$	$u'/\sqrt{u^2+1}$
$\tan u$	$u'/\cos^2 u$		$\arg \cosh u$	$u'/\sqrt{u^2-1}$
$\arcsin u$	$u'/\sqrt{1-u^2}$		$\arg \tanh u$	$u'/(1-u^2)$

Funciones potenciales-exponenciales

Las funciones del tipo $f(x) = u(x)^{v(x)}$, donde u y v son funciones, se denominan *potenciales-exponenciales*.

Para calcular la derivada de $f(x) = u(x)^{v(x)}$ se utiliza la llamada *derivación logarítmica*. Supongamos que u y v son funciones derivables y que $f(x) = u(x)^{v(x)}$ toma valores positivos. Tomando logaritmos, obtenemos $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$. Derivando ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

de donde

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

4.3 Teoremas del valor medio

Los teoremas de Rolle, de Cauchy y del valor medio que enunciamos a continuación están entre los resultados teóricos más importantes relativos a funciones derivables.

Teorema de Rolle. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente, en las condiciones del teorema de Rolle, hay un punto de la curva $y = f(x)$ con tangente horizontal.

Teorema de Cauchy. Si f y g son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en el intervalo (a, b) , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Si $g(x) = x$, obtenemos el teorema del valor medio:

Teorema del valor medio. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geométricamente, esto significa que la curva $y = f(x)$ contiene por lo menos un punto $(c, f(c))$ en el que la tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

La derivada de una función constante es cero. Para funciones definidas en un intervalo abierto, el recíproco también es cierto:

Teorema fundamental. Si f es una función derivable en un intervalo abierto (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces la función f es constante en (a, b) .

4.4 Monotonía

Sea f una función e I un intervalo (de cualquier tipo) contenido en el dominio de f .

La función f es *creciente* (resp. *estrictamente creciente*) en I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$).

La función f es *decreciente* (resp. *estrictamente decreciente*) en I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Se dice que la función f es *monótona* en I si es creciente o decreciente en I , y *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en I .

Si f es derivable en I , la relación entre f' y la monotonía de f en I se deduce del teorema del valor medio y es la siguiente:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I .
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I .

- Si f es creciente en I , entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.
- Si f es decreciente en I , entonces $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

4.5 Extremos relativos

Sea f una función y a un punto de su dominio. La función f tiene un *máximo relativo* en a si existe un entorno U de a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in U$. La función f tiene un *mínimo relativo* en a si existe un entorno U de a tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U$. Un *extremo relativo* es un máximo o un mínimo relativo.

Ciertas condiciones de derivabilidad sobre f dan unas condiciones necesarias y otras suficientes de existencia de extremos relativos.

- Si f tiene un extremo relativo en a y existe $f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a .
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a .
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $a - \delta < x < a$ se cumple $f'(x) < 0$ y para todo x con $a < x < a + \delta$ se cumple $f'(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a .
- Si $f'(a) = 0$ y existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $a - \delta < x < a$ se cumple $f'(x) > 0$ y para todo x con $a < x < a + \delta$ se cumple $f'(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a .

4.6 La regla de L'Hôpital

Otra consecuencia del teorema del valor medio es la *Regla de L'Hôpital* para el cálculo de límites.

Regla de L'Hôpital. Sean $\Delta \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ y f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = \lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$. Si existe el límite $\lim_{x \rightarrow \Delta} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe el límite $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x)/g(x)$ y se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse cuando una de las funciones tiende a $+\infty$ y la otra a $-\infty$. Por ejemplo, supongamos que $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \Delta} g(x) = +\infty$.

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f(x)}{g(x)} = - \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{-f(x)}{g(x)} = - \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.7 Convexidad

Sea I un intervalo contenido en el dominio de una función f . La función f es *convexa*¹ en I si, para todo $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1)$$

Análogamente, la función f es *cóncava* en I si, para todo $a, x, b \in I$, con $a < x < b$, se cumple

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Las condiciones (1) y (2) pueden escribirse equivalentemente:

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En ambas desigualdades, el término de la derecha corresponde a una función cuya gráfica es la recta que pasa por los dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así pues, geométricamente, la función f es convexa o cóncava en I , según que la gráfica de la función en cada intervalo $[a, b] \subseteq I$ quede por debajo o por encima del segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En el caso de funciones derivables, la convexidad o concavidad se relacionan con las derivadas como sigue.

Sea f una función derivable en un intervalo I . Entonces:

- Si f es convexa en I , se cumple $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.
- Si f es cóncava en I , se cumple $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ para todo $a, x \in I$, $x \neq a$.

Geométricamente, las condiciones anteriores aseguran que si f es convexa (resp. cóncava), la tangente en todo punto de la gráfica queda por debajo (resp. por encima) de la función.

El criterio más usual de convexidad o concavidad es el siguiente. Sea f una función tal que existe f'' en un intervalo I .

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I .
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I .

Sean f una función y a un punto de su dominio tal que existe un entorno $(a - \delta, a + \delta)$ de a contenido en el dominio de f . Si f es convexa en $(a - \delta, a)$ y cóncava en $(a, a + \delta)$, o bien cóncava en $(a - \delta, a)$ y convexa en $(a, a + \delta)$, se dice que a es un *punto de inflexión* de la función. Tenemos la condición necesaria siguiente:

- Si a es un punto de inflexión de f y en un entorno de a existe f'' y es continua, entonces $f''(a) = 0$.

¹En algunos libros, se denomina función *cóncava* a la que aquí definimos como *convexa* y viceversa. La definición que hemos adoptado se corresponde con sus generalizaciones en múltiples contextos matemáticos.

4.8 Extremos absolutos en intervalos cerrados

Según el Teorema de Weierstrass, toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo, es decir, existen al menos dos puntos x_M y x_m en $[a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Los puntos x_m y x_M están entre los siguientes:

- Los extremos del intervalo, $x = a$ y $x = b$.
- Los puntos de (a, b) en que f no sea derivable.
- Los puntos de (a, b) en que la derivada de f es cero (los cuales se llaman *puntos críticos* de f).

4.9 Resolución aproximada de ecuaciones

El método de Newton-Raphson

(también llamado *método de la tangente*).

Sea f una función derivable definida en el intervalo $[a, b]$. Deseamos encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Empezamos con un valor inicial x_0 y definimos para cada número natural n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Geométricamente, x_{n+1} es la abcisa del punto de intersección de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abcisas.

El valor inicial x_0 debe tomarse razonablemente cerca de la solución buscada. La derivada de f no debe anularse durante el proceso iterativo. En estas condiciones, la sucesión (x_n) converge hacia una solución de la ecuación. El método puede fallar si esta solución es múltiple.

El proceso debe detenerse cuando $|x_{n+1} - x_n|$ y $|f(x_{n+1})|$ son ambos menores que la cota del error admisible.