MATEMÀTIQUES 2 — FIB-UPC

Examen Final — 17 de gener de 2013

---

1 a) Representeu gràficament la corba definida per l'equació $y = |x^2 - 5x|$.

b) Determineu si el conjunt $\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 5x| \leq 6\right\}$ és fitat superiorment (inferiorment) i en cas afirmatiu trobeu-ne el suprem (l'ínfim).

c) Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les gràfiques de $y = |x^2 - 5x|$ i $y = 6$ i tal que $-1 \leq x \leq 6$.

Resolució:

2 *punts* *a) Per una representació gràfica de la corba definida per l'equació $y = |x^2 - 5x|$ cal especificar que:*

$$|x^2 - 5x| = |x(x-5)| = \begin{cases} x(x-5)\,, & x \geq 5 \quad o \quad x \leq 0\,, \\ -x(x-5)\,, & 0 < x < 5\,. \end{cases}$$

LLavors, en cada interval és una paràbola, una representació gràfica vàlida és:

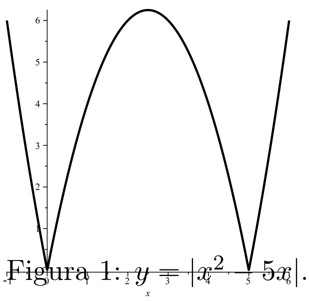

Figura 1: $y = |x^2 - 5x|$.

3 *punts* *b) Una representació gràfica de les corbes $y = |x^2 - 5x|$ i $y = 6$ és:*

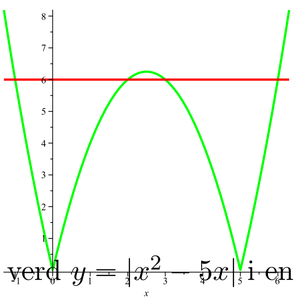

Figura 2: En verd $y = |x^2 - 5x|$ i en vermell $y = 6$.

Per determinar el conjunt $\mathcal{C}$ calculem els 4 punts d'intersecció de les dues corbes, els càlculs són

$$\begin{cases} x^2 - 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ \ o\ x = 6\,, \\ -(x^2 - 5x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \ o\ x = 3\,, \end{cases}$$

El conjunt $\mathcal{C}$ és el conjunt $[-1,2] \cup [3,6]$ reunió de dos intervals tancat i fitats. El conjunt és fitat superiorment i inferiorment, l'ínfim és -1 i el suprem 6.

5 *punts* *a) L'àrea es pot calcular per*

$$\int_{-1}^{2} \left(6 - |x^2 - 5x|\right)\, dx + \int_{2}^{3} \left(|x^2 - 5x| - 6\right)\, dx + \int_{3}^{6} \left(6 - |x^2 - 5x|\right)\, dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \left(6 - (x^2 - 5x)\right)\, dx + 2\int_{0}^{2} \left(6 + (x^2 - 5x)\right)\, dx + \int_{2}^{3} \left(-x^2 + 5x - 6\right)\, dx =$$

$$2\left(\frac{19}{6} + \frac{14}{3}\right) + \frac{1}{6} = \frac{95}{6}\,.$$

2 a) Enunucieu el teorema de Bolzano.

b) Demostreu que l'equació $2x^3 + ax = a$ té solució per $a > \frac{1}{2}$.
Doneu un interval de longitud a amb la solució.

c) Enunucieu el teorema de Rolle.

d) Demostreu que l'equació $2x^3 + ax = a$ té només una solució real per $a > \frac{1}{2}$.

Resolució:

2 *punts* *a) Teorema de Bolzano. Siguin $\alpha < \beta$ nombres reals, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ contínua en $[\alpha, \beta]$ tal que $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, aleshores existeix un nombre real ξ, amb $\alpha < \xi < \beta$ tal que $f(\xi) = 0$.*

3 *punts* *b) Sigui $f(x) = 2x^3 + ax - a$, l'equació s'escriu $f(x) = 0$. Una demostració vàlida s'obté fent servir del teorema de Bolzano i la funció $f(x)$.*
Calculem $f(0) = -a < 0$, i, per exemple, $f(a) = a(a+1)(2a-1) > 0$ per $a > \frac{1}{2}$.
Del fet que x^3 és contínua a tot $\mathbb{R}$, podem concloure que $f(x)$ és contínua en el conjunt $[0, a]$. És a dir $f(x)$ satisfà les hipotesis del teorema de Bolzano a l'interval $[0, a]$, conclusió, a l'interval $[0, a]$ hi ha una solució de l'equació.

2 *punts* *c) Teorema de Rolle. Siguin $\alpha < \beta$ nombres reals, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ contínua en $[\alpha, \beta]$ i derivable en (α, β), tal que $f(\alpha) = f(\beta)$, aleshores existeix un nombre real ξ, amb $\alpha < \xi < \beta$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

3 *punts* *d) Demostració per "reducció a l'absurd". La equació no pot tindre dues solucions, ja que de tenir-les la funció f de l'apartat* **b)** *verificaria totes les hipotesis del teorema de Rolle amb $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$, i existiria un nombre real ξ tal que $f'(\xi) = 0$ fet que no és cert. Comprovació, f és contínua i derivable per a qualsevol real, amb $f'(x) = 6x^2 + a$ però del fet que $a > 0$ resulta que $6x^2 + a > 0$; llavors podem concloure que $f'(x) \neq 0$ per a qualsevol real x.*

3 a) Escriviu l'equació del pla tangent a la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per l'equació $z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$ en el punt $P\,(0,\,1,\,0)$.

b) Calculeu el valor aproximat de $\ln\left(0.01^3 + 0.99^3\right)$ mitjançant un polinomi de Taylor de primer grau. Acoteu l'error d'aquesta aproximació fent ús de la fórmula del residu del polinomi de Taylor.

c) Sigui $a = 0 \pm 0.01$ i $b = 1 \pm 0.01$. Calculeu el valor aproximat de $\ln\left(a^3 + b^3\right)$ i una cota superior de l'error comès, fent servir la fórmula de propagació de l'error. Segons els teus càlculs, en quin apartat b) o c) el valor calculat té més decimals exactes? Per què?

Resolució:

3 punts *a) L'equació del pla tangent en el punt* $P\,(0,\,1,\,0)$ *és* $z = 3y - 3$.

4 punts *b) El polinomi de Taylor de primer grau de* $z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$ *en* $(0,\,1)$ *és* $P(x,y) = 3y - 3$. *Substituint* $x = 0.01$ *i* $y = 0.99$ *a* $P(x,y) = 3y - 3$ *obtenim un valor aproximat de la quantitat* $\ln\left(0.01^3 + 0.99^3\right)$ *pel polinomi de Taylor de primer grau de la funció* $f(x,y) = \ln\left(x^3 + y^3\right)$ *en* $(x,y) = (0,1)$. *El valor resultant és* -0.03, *llavors* $\ln\left(0.01^3 + 0.99^3\right) \approx -0.03$.

Una acotació del residu de Taylor per al polinomi de grau 1 *és*

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial z^2}{\partial^2 x}(\xi_1,\xi_2)\right| \cdot (0.01)^2 + 2\left|\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(\xi_1,\xi_2)\right| \cdot (0.01)^2 + \left|\frac{\partial z^2}{\partial^2 y}(\xi_1,\xi_2)\right| \cdot (0.01)^2\right) < 0.0008\,,$$

per a $0 < \xi_1 < 0.01\,,\quad 0.99 < \xi_2 < 1$. *El valor* 0.0008 *s'obté maximitzant les funcions a l'interval corresponent. Vegeu els càlculs de Maple al final d'aquest texte.*

3 punts *c) El valor aproximat de* $z = \ln\left(a^3 + b^3\right)$, *per* $a = 0 \pm 0.01$ *i* $b = 1 \pm 0.01$, *és* $\ln 1 = 0.0$. *L'acotació de l'error (fent ús de la fórmula de propagació de l'error) ens dona*

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)\right| \cdot 0.01 + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)\right| \cdot 0.01 = 0.03.$$

L'acotació de l'error en l'aproximació de l'apartat b) és 0.0008 *i l'acotació en l'apartat c) és* 0.03, *hi ha més decimals exactes en el càlcul de b) ja que la cota d'error és més petita.*

4 Trobeu la distància mínima des de l'origen de coordenades a l'el·lipse definida per

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 4\}.$$

Resolució: *És un problema d'extrems condicionats, la funció a optimitzar és*

$$z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i la condició $g(x,y) = 0$ *amb* $g(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4$.
El conjunt $\mathcal{E}$ *és un conjunt acotat i tancat ja que és una l'el·lipse.*
La funció $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *és contínua en tot punt de* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *La funció* f *és contínua en el conjunt* $\mathcal{K}$ *tancat i acotat, llavors la funció té màxim i mínim absoluts (T. de Weierstrass).*

El problema inicial és equivalent a mínimitzar la funció distància al quadrat, i per tant els candidats a màxim i mínim absolut, per aquest cas són els extrems de x^2+y^2 *sobre l'el·lipse* $\mathcal{E}$. *Fent ús del mètode dels multiplicadors de Lagrange amb funció*

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4)$$

s'obtenen quatre punts, les coordenades dels quals són $(1\,,1)\,,\ (-1,-1)\,,\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\,,$ *i* $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. *Per a decidir, cal avaluar la funció* $z(x,y)$ *en tots els candidats. Els valors són* $f\,(1\,,1) = f\,(-1,-1) = \sqrt{2}\,,$ *i* $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Una representació gràfica de les corbes de nivell de la funció $d(x,y)$ *juntament amb la condició és*

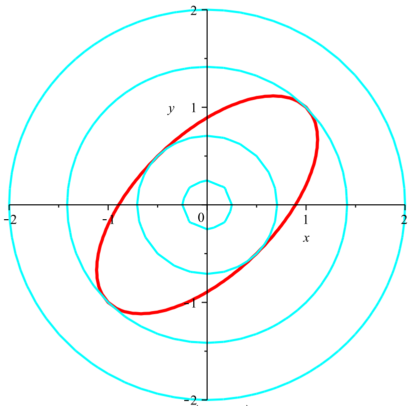

Figura 3: Corbes de nivell $d(x,y) = k$ i en vermell conjunt $\mathcal{E}$.

Els punts de coordenades $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ *i* $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *són els dos punts del pla on la distància de l'origen als punts de l'el·lipse és mínima i val* $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707107$.

Exercici 3

Calcular aproximadament

> $z := \log(x^3+y^3)$

$$z := \ln(x^3+y^3) \quad (3.1)$$

ACOTACIÓ DEL VALOR ABSOLUT de les derivades segones per a
***x* de l'interval (0,0.01) i *y* de l'interval (0.99, 1)**

> $diff(z, x\$2);$

$$\frac{6\,x}{x^3+y^3} - \frac{9\,x^4}{(x^3+y^3)^2} \quad (3.2)$$

> $p1 := subs\left(x=0, y=0.99, t=0.01, \frac{6\,t}{x^3+y^3}\right)$

$$p1 := 0.06183660912 \quad (3.3)$$

> $p2 := subs\left(x=0, y=0.99, t=0.01, \frac{9\,t^4}{(x^3+y^3)^2}\right)$

$$p2 := 9.559415574\ 10^{-8} \quad (3.4)$$

> $2 \cdot diff(diff(z, x), y)$

$$-\frac{18\,x^2\,y^2}{(x^3+y^3)^2} \quad (3.5)$$

> $p3 := subs\left(x=0, y=0.99, t=0.01, \frac{18 \cdot t^2}{(x^3+y^3)^2}\right)$

$$p3 := 0.001911883115 \quad (3.6)$$

> $diff(z, y\$2)$

$$\frac{6\,y}{x^3+y^3} - \frac{9\,y^4}{(x^3+y^3)^2} \quad (3.7)$$

> $p4 := subs\left(x=0, y=0.99, t=1, \frac{6\,t}{x^3+y^3}\right)$

$$p4 := 6.183660912 \quad (3.8)$$

> $p5 := subs\left(x=0, y=0.99, t=1, \frac{9\,t^4}{(x^3+y^3)^2}\right)$

$$p5 := 9.559415574 \quad (3.9)$$

> $cotaB3 := \frac{(p1+p2+p3+p4+p5)}{2} \cdot (0.01)^2$

$$cotaB3 := 0.0007903412537 \quad (3.10)$$