1 *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = \ln(x+1)$.

(a) Escriviu el seu polinomi de Taylor de grau n a l'origen.

(b) Escriviu el residu de Taylor en forma de Lagrange corresponent al polinomi de l'apartat (a).

(c) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ necessari per calcular $\ln(5/6)$ amb un error menor que $0.5 \cdot 10^{-3}$ i utilitzeu-lo per donar una aproximació de $\ln(5/6)$.

SOLUCIÓ:

(a) Les derivades de la funció $f(x)$ són $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}$. El polinomi de Taylor de grau n de $f(x)$ en el punt $x=0$ és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

(b) El residu de Taylor en forma de Lagrange corresponent al polinomi de l'apartat (a) és: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$, per a cert c entre 0 i x.

(c) Si aproximem $\ln(5/6) = \ln(-1/6+1) = f(-1/6)$ pel valor del polinomi de taylor d'ordre n: $f(-1/6) \approx P_n(-1/6)$, l'error és el valor absolut del residu: $error = |R_n(-1/6)|$ que és:

$$|R_n(-1/6)| = \frac{(1/6)^{n+1}}{(n+1)(c+1)^{n+1}}$$

per a cert c amb $-1/6 \leq c \leq 0$. Per ser $-1/6 \leq c$ i el valor absolut del residu una funció decreixent respecte de c, es té: $error = |R_n(-1/6)| \leq \dfrac{(1/6)^{n+1}}{(n+1)(5/6)^{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)5^{n+1}}$. La fracció $\dfrac{1}{(n+1)5^{n+1}}$ és major que $0.5 \cdot 10^{-3}$ per a $n=2$, i és menor que $0.5 \cdot 10^{-3}$ per a $n \geq 3$.

Per tant el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ necessari per calcular $\ln(5/6)$ amb un error menor que $0.5 \cdot 10^{-3}$ és com a mínim 3 i:

$$\ln(5/6) = f(-1/6) \approx P_3(-1/6) = (-1/6) - \frac{(-1/6)^2}{2} + \frac{(-1/6)^3}{3} \approx -0.1821.$$

2 *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = x^3 - x$.

(a) Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(-1, 0)$.

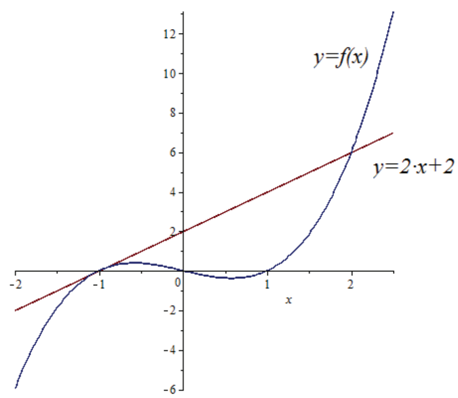
(b) Dibuixeu la corba $y = f(x)$ i la recta trobada a l'apartat (a) en una mateixa gràfica.

(c) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la corba $y = f(x)$ i la recta trobada a l'apartat (a).

SOLUCIÓ:

(a) El punt $(-1, 0)$ és de la corba $y = f(x)$ per ser $f(-1) = 0$, i la funció f és derivable a tota la recta real per ser polinòmica. Per tant l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $(-1, 0)$ és: $y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$, és a dir: $y = 2x + 2$.

(b) El dibuix de la corba $y = f(x)$ i la recta trobada a l'apartat (a) en una mateixa gràfica és:



(c) Els punts de tall la corba $y = f(x)$ i la recta trobada a l'apartat (a) són $x = -1$ i $x = 2$. Per tant l'àrea demanada és:

$$A = \int_{-1}^{2} (2x + 2 - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}.$$

3 *(4 punts)* Considereu la funció $F(x) = 1 - \int_0^x e^{t^2} dt$.

(a) Calculeu $F(0)$ i $F'(x)$.

(b) Demostreu que $F(1) < 0$.
(Indicació: podeu utilitzar que $e^{t^2} > 1$ per a tot $t \in]0, 1]$).

(c) Enunicieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

(d) Demostreu que l'equació $F(x) = 0$ té una única solució.

SOLUCIÓ:

(a) $F(0) = 1 - \int_0^0 e^{t^2} dt = 1$. La funció e^{t^2} és contínua a tota la recta real per ser composició d'una funció polinómica i una funció exponencial, ambdues contínues a tot $\mathbb{R}$, per tant, aplicant el Teorema Fonamental del Càlcul es té: $F'(x) = -e^{x^2}$.

(b) Donat que $e^{t^2} > 1$ per a tot $t \in]0, 1]$, es té:

$$F(1) = 1 - \int_0^1 e^{t^2} dt < 1 - \int_0^1 1 dt < 1 - 1 = 0.$$

(c) Teorema de Bolzano: Si f és una funció contínua en un interval $[a, b]$ i satisfà $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix un $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle:Si f és una funció contínua en un interval $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ i es satisfà $f(a) = f(b)$, aleshores existeix un $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

(d) Demostració de l'existència de la solució de $F(x) = 0$: La funció F és contínua en $[0, 1]$ pel Teorema fonamental del Càlcul, $F(0) = 1 > 0$ i $F(1) < 0$, per tant, pel Teorema de Bolzano: Existeix un $c \in]0, 1[$ tal que $F(c) = 0$.

Demostració de la unicitat de la solució de $F(x) = 0$: Demostració per reducció al absurd: Suposem que hi ha dues solucions $a, b \in \mathbb{R}$, amb $a < b$ i $F(a) = F(b) = 0$. La funció F és contínua en l'interval $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$ (ja que ho és a tot $\mathbb{R}$) i satisfaria $F(a) = F(b)$. Aleshores, pel Teorema de Rolle, existiria un $c \in]a, b[\subset \mathbb{R}$ tal que $F'(c) = 0$. Però $F'(x) = -e^{x^2}$, que és diferent de 0 per a tot $x \in \mathbb{R}$.