QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són les propietats de les classes d'equivalència i de conjunt quocient.

CLASSE D'AVUI 16/11/2020

Avui treballarem el que ens queda de les relacions d'equivalència (classes d'equivalència, conjunt quocient i particions). I a continuació comencem el tema de funcions.

EX.: (88') Sigui $A \subseteq \mathbb{Z}$, i a un enter fixat. Demostreu que la relació:

$$xRy \Leftrightarrow mcm(x,a) = mcm(y,a)$$

és una relació d'equivalència a A. Calculeu el conjunt quocient quan $A = \{1,2,\dots,11,12\}$ i $a = 8$.

Com sempre hem de veure que és reflexiva, simètrica i transitiva per demostrar que la relació R és d'equivalència:

Reflexiva: cal justificar que per a tot $x \in A$, $xR^{???}x$; i això és cert perquè: $mcm(x,a) = mcm(x,a)$.

Simètrica: cal veure que per a tot $x,y \in A$ si $xRy \Rightarrow yRx$; però això és cert simplement perquè: si xRy llavors $mcm(x,a) = mcm(y,a)$ i el que hem de demostrar és que yRx, és a dir, que $mcm(y,a) = mcm(x,a)$, trivialment cert.

Transitiva: cal demostrar que per a tot $x,y,z \in A$ si xRy i $yRz \Rightarrow xRz$; però això és cert ja que:

$$\left.\begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} mcm(x,a) = mcm(y,a) \\ mcm(y,a) = mcm(z,a) \end{array}\right\} \Rightarrow mcm(x,a) = mcm(z,a) \Rightarrow xRz$$

és a dir que és transitiva, tal com volíem demostrar.

Per $A = \{1,2,\dots,11,12\}$ i $a = 8$ calculem les classes d'equivalència:

$\overline{1} = \{x \in A \mid xR1\} = \{x \in A \mid mcm(x,8) = mcm(1,8)\} = \{x \in A \mid mcm(x,8) = 8\} =$
$= \{1,2,4,8\}$

$\overline{3} = \{x \in A \mid xR3\} = \{3,6,12\}$

$\overline{5} = \{x \in A \mid xR5\} = \{5,10\}$

$\overline{7} = \{x \in A \mid xR7\} = \{7\}$

$\overline{9} = \{x \in A \mid xR9\} = \{9\}$

$\overline{11} = \{x \in A \mid xR\} = \{11\}$

I el conjunt quocient és: $A/R = \{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7},\overline{9},\overline{11}\}$.

EX.: (89) Si R és una relació d'equivalència a A i $x,y \in A$, demostreu (usant només les definicions de relació d'equivalència i classe) que són equivalents:

a) $\bar{x} = \bar{y}$.

b) Existeix $z \in A$ tal que $\bar{z} \subseteq \bar{x} \cap \bar{y}$.

c) Per a tot $z \in A$, si $\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ llavors $\bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$.

Aquest exercici seria molt més fàcil si poguessim fer servir les propietats que ja hem demostrat. Seria un bon eercici fer-ho d'aquesta manera. Fem la demostració només (utilitzant les definicions i cap de les propietats) de les 3 implicacions:

a)$\Rightarrow$**b**) Suposem que és veritat que $\bar{x} = \bar{y}$ i haig de demostrar que existeix $z^{??} \in A$ tal que $\bar{z} \subseteq \bar{x} \cap \bar{y}$; de la hipòtesi

$\bar{x} = \bar{y}$ ara haig de demostrar que existeix $\bar{z} \subseteq \bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x}$; i tant que existeix: (per exemple) $z = x$ que verifica $\bar{z} = \bar{x} \subseteq \bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x}$.

b)$\Rightarrow$**c**) En aquesta implicació pot enganyar molt que les variables quantificades en les dues afirmacions tinguin el mateix nom, per la qual cosa canviaré un dels noms. Suposem que existeix $w \in A$ tal que $\overline{w} \subseteq \bar{x} \cap \bar{y}$ i a partir d'aquí hem de demostrar que per a tot $z \in A$, si $\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ llavors $\bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$. Sigui un $z \in A$ tal que $\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ i demostrem que llavors $\bar{y} \cap \bar{z}^{???} \neq \emptyset$. De la hipòtesi tenim un w tal que $w \in \bar{x} \cap \bar{y}$ o sigui que wRx i wRy. I ara a més suposem que $\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ llavors existeix un w' tal que $w' \in \bar{x} \cap \bar{z}$ o sigui que $w'Rx$ i $w'Rz$. Recapitulem: tenim w, w' tals que wRx, wRy, $w'Rx$ i $w'Rz$ i volem demostrar que $\bar{y} \cap \bar{z}^{???} \neq \emptyset$. Observant el que tenim de w i de w' veiem que és fàcil demostrar que $w' \in^{???} \bar{y} \cap \bar{z}$ (i ja estarà demostrat que és no buit) ja que $w' \in \bar{z}$ per ser $w'Rz$ i:

$wRx \Rightarrow xRw \Rightarrow_{\text{transi. amb } w'Rx} \quad w'Rw \Rightarrow_{\text{transi. amb } wRy} \quad w'Ry \Rightarrow w' \in \bar{y}$

per tant $w' \in \bar{y} \cap \bar{z}$.

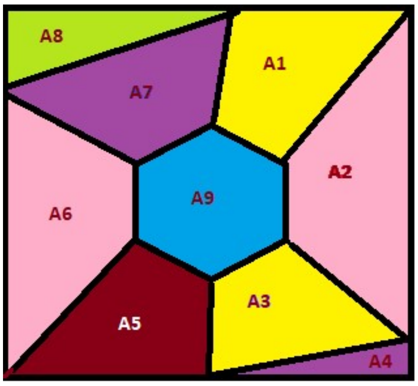
c)$\Rightarrow$**a**) Suposem que per a tot $z \in A$, si $\bar{x} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ llavors $\bar{y} \cap \bar{z} \neq \emptyset$ i a partir d'aquí demostrem que $\bar{x} =^{???} \bar{y}$. A partir de la hipòtesi amb $z = x$ obtenim que $\bar{x} \cap \bar{z} = \bar{x} \cap \bar{x} = \bar{x} \neq \emptyset$, per tant, $\bar{y} \cap \bar{x} \neq \emptyset$ llavors existeix un a tal que $a \in \bar{y} \cap \bar{x}$ o sigui que, aRy i aRx; ara per la simètrica tenim que xRa i aRy i mitjançant la transitiva obtenim que xRy. Ara per demostrar la igualtat de les dues classes d'equivalència provo les dues inclusions:

$\subseteq$: Sigui un $a \in \bar{x}$ llavors aRx i amb xRy tenim que $aRy \Leftrightarrow a \in \bar{y}$

$\supseteq$: Sigui un $a \in \bar{y}$ llavors aRy; amb xRy tenim que yRx; llavors $aRx \Leftrightarrow a \in \bar{x}$

Tot i que ja ho hem introduït, definim formalment què s'entén per una partició d'un conjunt, ja que resulta tan important pel fet que el conjunt quocient és una partició del conjunt de partida:

DEF.: Sigui un conjunt A, i $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una família de subconjunts $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Direm que $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ és una partició del conjunt A si i només si tots els $A_1, A_2, \ldots, A_n \neq \emptyset$, els $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són disjunts dos a dos i $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$.



También es pot definir una partició d'infinits subconjunts. A més es pot demostrar en general que tota partició és el conjunt quocient d'una relació d'equivalència. Veiem-ho amb un exemple:

EX.: Sigui $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i les dues famílies de subconjunts $P = \{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}$, $P' = \{\{1,2\},\{3,6\},\{1,5,6\}\}$. Raoneu que una és una partició del conjunt A i l'altra no. Definiu la relació d'equivalència que té per conjunt quocient la partició donada.

P sí que és una partició perquè són conjunts disjunts dos a dos, són no buits i a més la reunió de tots dona el conjunt original. P' no és una partició perquè l'element $4 \in A$ no està a cap de les parts (també es podrien dir d'altres raons).

La relació equivalència es pot definir per extensió en forma de parells ordenats:

$R = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,6),(6,2),(2,2),(6,6),(4,5),(5,4),(4,4),(5,5)\}$

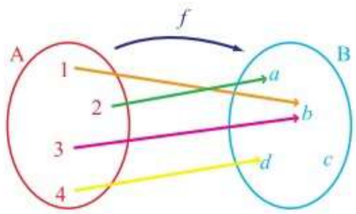
i tal com està construïda és d'equivalència i les classes seran $\overline{1} = \{1,3\}, \overline{2} = \{2,6\}, \overline{4} = \{4,5\}$ i el conjunt quocient $A/R = \{\overline{1},\overline{2},\overline{4}\} = P$.

4.-FUNCIONS

Tot i que esteu molt acostumats a utilitzar funcions, avaluar-les en un punt, derivar-les, etc., les estudiarem des del començament. La idea d'una funció és la mateixa que la d'una rutina en programació: és un procediment en el qual li entra un input d'un cert conjunt A i que després d'unes operacions treu una sortida (output) d'un conjunt B. A la funció se l'anomena amb les lletres $f, g, h, \ldots$ i es diu que va del conjunt A en el conjunt B i s'escriu d'aquesta manera:

$$f : A \to B$$

(si es diu, per exemple, f). També les anomenarem aplicacions. De vegades va bé representar-les gràficament amb un diagrama de Venn:



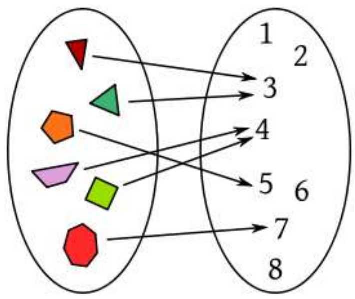
Si $x \in A$ la seva imatge s'escriu com a $f(x) \in B$ i es diu que x té assignat $f(x)$ per la funció f. També diem que x és l'original i que $f(x)$ és la seva imatge. Molt sovint ho escriurem simbòlicament com:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

La principal propietat de les aplicacions o funcions és que cada $x \in A$ té una imatge $f(x) \in B$ i només una. A aquestes dues condicions (té una imatge i només una) es diu que l'aplicació està ben definida. El conjunt A se l'anomena domini (usualment s'escriu $dom(f)$) i al conjunt B se l'anomena conjunt d'arribada (o codomini). També podem fer imatges d'un subonjunt:

DEF.: Donada l'aplicació $f : A \rightarrow B$ i el subconjunt $X \subseteq A$ s'anomena $f[X]$ al conjunt de les imatges dels elements del subconjunt X, és a dir, $f[X] = \{f(x) | x \in X\} \subseteq B$. En el cas particular que $X = A$ se l'anomena conjunt imatge (conjunt de totes les imatges) i s'escriu $\operatorname{Im} f = f[A] = \{f(x) \in B \mid x \in A\} \subseteq B$.

EX.: Sigui la funció $f : A \rightarrow B$ definida pel següent diagrama de Venn:



Doneu: a)$f(triangle\_vermell)$; b)$f(quadrat\_vert)$; c)$f[X]$ amb $X = \{triangle\_vermell, triangle\_vert\}$; d)De qui és imatge el nombre 3?; e)De qui és imatge el nombre 6?; d)Digues $dom(f)$, $\operatorname{Im} f$, conjunt d'arribada.

a)$f(triangle\_vermell) = 3$

b)$f(quadrat\_vert) = 4$

c)$f[X] = \{3\}$

d)De qui és imatge el nombre 3? del $triangle\_vermell$ i del $triangle\_vert$.

e)De qui és imatge el nombre 6? de cap element

d)$dom(f) = A$, $\operatorname{Im} f = \{3, 4, 5, 7\}$, conjunt d'arribada= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Molt sovint expressarem com trobar les imatges mitjançant una regla o fórmula de la forma $y = f(x)$ i definirem la funció simplement donant la fórmula, el domini i el conjunt d'arribada. Fins i tot de vegades s'obvia el conjunt de sortida i d'arribada si s'entén pel context qui són (per exemple si estem treballant el tema de derivades i ens diuen "sigui la funció $f(x) = \frac{13}{x-4}$" llavors s'entén que $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$).

EX.: Sigui la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2 - 4$. Doneu: a)$f(5)$; b)$f(-\frac{1}{2})$; c)$f[X]$ amb $X = \{-1, 0, 1\}$; d)De qui és imatge el nombre -3?; e)De qui és imatge el nombre 0?; d)Digueu $dom(f)$, $\mathrm{Im}\, f$, conjunt d'arribada.

a)$f(5) = 21$
b)$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$
c)$f[X] = \{-3, -4\}$
d)Busco x tal que $x^2 - 4 = -3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ del -1 i del 1;
e)Busco x tal que $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ del -2 i del 2;
d)$dom(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\, f = [-4, +\infty)$, conjunt d'arribada$= \mathbb{R}$.

Un concepte molt bàsic també és quan dues funcions es consideren iguals:

DEF.: Dues funcions $f, g : A \to B$ són iguals i escriurem $f = g$ quan per a tot $x \in A$ tenim que $f(x) = g(x)$, és a dir, quan tenen el mateix domini i conjunt d'arribada a més de tenir les mateixes imatges pels mateixos originals.

EX.: Siguin les funcions

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x + 1$
- $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ donada per $g(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$
- $h : \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ donada per $h(x) = x^3 + 1$
- $i : \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ donada per $i(x) = x^3 + x^2 - 3x + 3$

Quines funcions es poden dir que són iguals i quines diferents?

Tenim que $f \neq g, f \neq h, f \neq i, g \neq h, g \neq i$ perquè tenen domini diferent. Però $h = i$ ja que comparteixen domini i conjunt d'arribada i a més tenen les mateixes imatges:
$h(1) = 2, i(1) = 2$
$h(2) = 9, i(2) = 9$

La pregunta "de qui és imatge el nombre $b \in B$?" es pot generalitzar a més d'un element i es diu "trobar antiimatges":

DEF.: Donada l'aplicació $f : A \to B$ i un element del conjunt d'arribada $b \in B$ s'anomena antiimatge de l'element b i l'escriurem com a $f^{-1}[b]$ al subconjunt dels elements que tenen per imatge b, o sigui, $f^{-1}[b] = \{x \in A \mid f(x) = b\} \subseteq A$. També es pot definir el conjunt de les antiimatges d'un subconjunt $Y \subseteq B$ que s'escriu $f^{-1}[Y]$ i es defineix com a $f^{-1}[Y] = \{x \in A | f(x) \in Y\} \subseteq A$. Escriurem indiferentment $f^{-1}[b]$ o $f^{-1}[\{b\}]$.

EX.: Per la funció de l'exemple anterior

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array}$$

Determineu $f^{-1}[\{-4,-3,-10\}]$. Digueu quins elements del conjunt d'arribada no tenen cap antiimatge, quins tenen una antiimatge, quins en tenen dues, etc.

- $f^{-1}[\{-4,-3,-10\}]$: hem de trobar x tal que $x^2-4=-4 \Leftrightarrow x=0$, també hem de trobar x tal que $x^2-4=-3 \Leftrightarrow x=\pm 1$, i finalment hem de trobar x tal que $x^2-4=-10 \Leftrightarrow x^2=-6$, cosa impossible, per tant
  $f^{-1}[\{-4,-3,-10\}]=\{0,-1,1\}$.
- Sigui $b \in \mathbb{R}$ i busco els x tal que $x^2-4=b \Leftrightarrow x^2=b+4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{b+4}$; per $b=-4$ només hi ha una antiimatge $f^{-1}[-4]=\{0\}$; per $b>-4$ hi ha dues antiimatges $f^{-1}[b]=\left\{\sqrt{b+4},-\sqrt{b+4}\right\}$; per $b<-4$ no hi ha cap antiimatge,o sigui $f^{-1}[b]=\varnothing$.

EX.: Sigui la funció $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donada per $f(x)=x^2+x+1$. Per un nombre $b\in\mathbb{R}$ determineu les seves antiimatges.

Busco x tals que $x^2+x+1=b$:

$$x^2+x+1=b \Leftrightarrow x^2+x+(1-b)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-b)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3+4b}}{2}$$

Per tant:

- $f^{-1}[b]=\left\{\frac{-1+\sqrt{-3+4b}}{2},\frac{-1-\sqrt{-3+4b}}{2}\right\}$ si $-3+4b>0 \Leftrightarrow b>3/4$
- $f^{-1}[b]=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ si $-3+4b=0 \Leftrightarrow b=3/4$
- $f^{-1}[b]=\varnothing$ si $-3+4b<0 \Leftrightarrow b<3/4$

Les funcions reben un nom o un altre en funció del número d'antiimatges que tenen els elements del conjunt d'arribada:

DEF.: Donada la funció $f:A\to B$ direm que

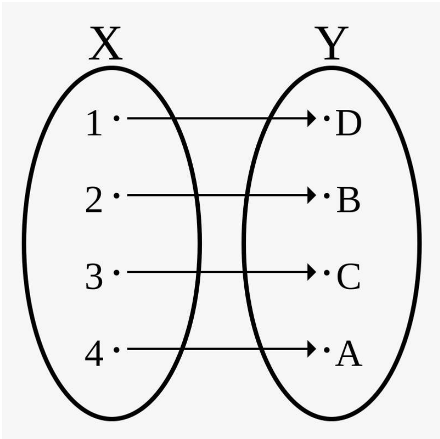
- f és injectiva quan tots els elements del conjunt d'arribada tenen una antiimatge o cap
- f és exhaustiva quan tots els elements del conjunt d'arribada tenen una antiimatge o més
- f és bijectiva quan tots els elements del conjunt d'arribada tenen exactament una antiimatge (o el que és el mateix, quan és injectiva i exhaustiva a la vegada)

També hi ha aplicacions que no són ni injectives, ni exhaustives, ni bijectives. Classificar una aplicació és dir si és una d'aquest tipus o cap d'ells.

EX.: Classifiqueu la funció del darrer exemple.

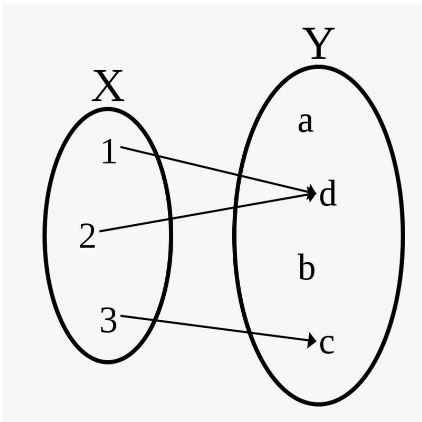
No és injectiva perquè, per exemple, $b=1$ té dues antiimatges. No és exhaustiva perquè, per exemple, $b=0$ no té cap antiimatge. No és bijectiva perquè no és injectiva.

EX.: Classifiqueu les funcions següents definides pel diagrama de Venn:



Aquesta funció és bijectiva perquè tots els elements del conjunt d'arribada tenen exactament una antiimatge: $f^{-1}[A] = \{4\}, f^{-1}[B] = \{2\}, f^{-1}[C] = \{3\}, f^{-1}[D] = \{1\}$. En particular també és injectiva i exhaustiva.

EX.: Idem:



Aquesta aplicació no és injectiva perquè l'element d té dues antiimatges (el 1 i el 2), o sigui $f^{-1}[d] = \{1,2\}$. Tampoc és exhaustiva perquè l'element a no té cap antiimatge, és a dir, $f^{-1}[a] = \varnothing$. Per tant no és bijectiva perquè no és exhaustiva.

EX.: Sigui la funció de $\mathbb{R} - \{5\}$ en $\mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{x+1}{2x-10}$. Classifiqueu-la.

Donat $y \in \mathbb{R}$ busco x tal que: $\frac{x+1}{2x-10} = y$:

$$\frac{x+1}{2x-10} = y \Leftrightarrow x + 1 = 2yx - 10y \Leftrightarrow (1-2y)x = -1 - 10y \Leftrightarrow x = \frac{-1-10y}{1-2y}$$

S'observa que per a tot $y \in \mathbb{R}$ tenim $f^{-1}[y] = \left\{\frac{-1-10y}{1-2y}\right\}$ si $y \neq \frac{1}{2}$ i per $y = \frac{1}{2}$ tenim $f^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] = \varnothing$. Ara podem dir que l'aplicació és injectiva ja que tot $y \in \mathbb{R}$ llevat $y = \frac{1}{2}$ tenen una antiimatge i $y = \frac{1}{2}$ no en té cap. L'aplicació no és exhaustiva perquè $y = \frac{1}{2}$ no té cap antiimatge. I com que no és exhaustiva no és bijectiva.

De vegades la injectivitat s'escriu de la manera següent: f és injectiva si i només si per a tot $x, x' \in A$ si $f(x) = f(x')$ aleshores $x = x'$.

Si una aplicació és bijectiva llavors les fletxes es poden girar obtenint una nova aplicació anomenada aplicació inversa:

DEF.: Donada una funció bijectiva $f : A \to B$ anomenem funció inversa $f^{-1} : B \to A$ definida per $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

EX.: Raoneu que la funció $g : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ definida per $g(x) = \frac{x+1}{2x-10}$ és bijectiva (fixeu-vos en el darrer exemple). Doneu l'aplicació inversa.

Pel que hem raonat abans per f, ara aquesta aplicació g és bijectiva i sabem que

$g\left(\frac{-1-10y}{1-2y}\right) = y$ i per tant la inversa:

$$g\left(\frac{-1-10y}{1-2y}\right) = y \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{-1-10y}{1-2y}$$

o sigui $g^{-1}(x) = \frac{-1-10x}{1-2x}$.

Si us fixeu en el raonament que hem fet en els darrers exemples i la definició d'inversa s'obté la recepta per trobar la fórmula de la inversa que diu que en $y = f(x)$ s'intercanvien x per y i s'ailla y.