CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.

1. *(1.5 punts)* Considereu la funció:

$$f(x) = 7\,\sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} - 1.$$

a) Proveu que l'equació $f(x) = 0$ té una solució a l'interval $(0, 0.4)$.

b) Calculeu una aproximació d'aquesta solució utilitzant el mètode de Newton-Raphson amb valor inicial $x_0 = 0.2$, amb un error més petit que $0.5 \cdot 10^{-5}$.

2. *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu el seu polinomi de Taylor de grau 5 centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Fent ús del polinomi i l'expressió del residu de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $\sin(0.5)$ i acoteu l'error d'aquest valor aproximat.

c) Esbrineu per a quins valors d'x l'error en l'aproximació $\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ és menor que 10^{-4}.

3. *(1.5 punts)* Donada la funció:

$$F(x,y) = \int_{x-1}^{x+y+xy} e^{t^2}\,dt$$

Escriure les equacions del pla tangent i la recta normal a la superfície $z = F(x,y)$ en el punt $\left(1, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

4. *(4 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = x^2 y$$

a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f.

c) Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq -1\}$ i justifiqueu que és compacte.

d) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D y trobeu-los.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.

1. *(1.5 punts)* Considereu la funció:

$$f(x) = 7\,\sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} - 1.$$

a) Proveu que l'equació $f(x) = 0$ té una solució a l'interval $(0, 0.4)$.

b) Calculeu una aproximació d'aquesta solució utilitzant el mètode de Newton-Raphson amb valor inicial $x_0 = 0.2$, amb un error més petit que $0.5 \cdot 10^{-5}$.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és contínua en tot $\mathbb{R}$ donat que $\sin(x)$ és contínua en tot $\mathbb{R}$, la funció $e^{-\frac{x}{2}}$ també ho és al ser composició de funcions contínues, i el producte i la suma de funcions contínues són contínues. Les imatges dels extrems de l'interval són: $f(0) = -1 < 0$ i $f(0.4) \simeq 1.2318 > 0$. En aquestes condicions, i per ser f contínua en l'interval $[0, 0.4]$, el Teorema de Bolzano ens assegura que l'equació $f(x) = 0$ té una solució a l'interval $(0, 0.4)$.

b) La funció f i la seva derivada són:

$$f(x) = 7\,\sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} - 1, \quad f'(x) = 7\,e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos(x) - \frac{\sin(x)}{2}\right).$$

Aleshores, utilitzant el mètode de Newton-Raphson, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, amb valor inicial $x_0 = 0.2$, obtenim:

$x_1 = 0.1536887781,\ x_2 = 0.1549866730,\ x_3 = 0.1549876937.$

Donat que x_3 és la primera iteració que satisfà el criteri d'aturada del mètode:

$|x_3 - x_2| < 0.5 \cdot 10^{-5}$ i $|f(x_3)| < 0.5 \cdot 10^{-5}$,

Una aproximació d'una solució a l'interval $(0, 0.4)$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-5}$ és $x \simeq x_3 = 0.154988$.

2. *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu el seu polinomi de Taylor de grau 5 centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Fent ús del polinomi i l'expressió del residu de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $\sin(0.5)$ i acoteu l'error d'aquest valor aproximat.

c) Esbrineu per a quins valors d'x l'error en l'aproximació $\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ és menor que 10^{-4}.

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 5 centrat a l'origen de la funció $f(x)$ és:
$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$. Calculem derivades de $f(x)$: $f'(x) = f^{(5)}(x) = \cos(x)$, $f''(x) = f^{(6)}(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$.
Aleshores: $f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$, $f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, i el polinomi demanat és:
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$
L'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és: $R_5(x) = \dfrac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6$, per a cert c entre 0 i x, és a dir:
$$R_5(x) = \frac{-\sin(c)}{6!}x^6,$$
per a cert c entre 0 i x.(*)

b) Fent ús del polinomi i l'expressió del residu de l'apartat anterior, obtenim el valor aproximat de $\sin(0.5)$:
$\sin(0.5) \simeq P_5(0.5) = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} + \frac{(0.5)^5}{120} = 0.47942708344$
La cota de l'error d'aquest valor aproximat (utilitzant que $|\sin(c)| \leq 1$ per a tot c) és: $|R_5(0.5)| = \dfrac{|\sin(c)|}{6!}(0.5)^6 \leq \dfrac{(0.5)^6}{6!} \simeq 0.00002170138889 \leq 0.00003$.(*)
Per tant $\sin(0.5) = 0.47943 \pm 0.00003$.(*)

c) Donat que $|\sin(c)| \leq 1$ per a tot c, l'error en l'aproximació és: $|R_5(x)| = \dfrac{|\sin(c)|}{6!}|x|^6 \leq \dfrac{|x|^6}{6!}$.(*)
Els valors d'x per als que l'error en l'aproximació $\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ és menor que 10^{-4} són els valors tals que: $\dfrac{|x|^6}{6!} < 10^{-4} \iff |x|^6 < 6! \cdot 10^{-4} \iff |x| < \sqrt[6]{6! \cdot 10^{-4}} \simeq 0.64450$.(*)

(*) Donat que per a aquesta funció $P_5(x) = P_6(x)$, també s'acceptaran com a correctes l'expressió i els càlculs fets amb el residu $R_6(x)$.

3. *(1.5 punts)* Donada la funció:

$$F(x,y)=\int_{x-1}^{x+y+xy} e^{t^2}\,dt$$

Escriure les equacions del pla tangent i la recta normal a la superfície $z=F(x,y)$ en el punt $\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$.

SOLUCIÓ:

La funció e^{t^2} és composició d'una funció polinòmica i una exponencial i per tant és contínua per a tot $t\in\mathbb{R}$; les fucions $x+y+xy$ i $x-1$ són polinòmiques i per tant derivables per a tot $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Per tant, pel Teorema fonamental del càlcul i la regla de la cadena, la funció $F(x,y)$ és derivable en tot $\mathbb{R}^2$ i les seves derivades parcials són:

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=(1+y)e^{(x+y+xy)^2}-e^{(x-1)^2}$,

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=(1+x)e^{(x+y+xy)^2}$.

que són contínues en tot $\mathbb{R}^2$ per ser-ho les funcions polinòmiques i les exponencials.

Donat que $F\left(1,-\frac{1}{2}\right)=0$, l'equació del pla tangent a la superfície $z=F(x,y)$ en el punt $\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$ és:

$z=F\left(1,-\frac{1}{2}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(1,-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)+\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(1,-\frac{1}{2}\right)\cdot(y+\frac{1}{2})$.

Substituint: $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(1,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(1,-\frac{1}{2}\right)=2$, tenim l'equació del pla tangent:

$$z=-\frac{1}{2}x+2y+\frac{3}{2},$$

o, equivalentment, $x-4y+2z-3=0$.

L'equació contínua de la recta normal a la superfície $z=F(x,y)$ en el punt $\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$ és:

$\dfrac{x-1}{\frac{\partial F}{\partial x}\left(1,-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(1,-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{z}{-1}$, que és: $\dfrac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{z}{-1}$, o, equivalentment:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{4}=\frac{z}{-2}$$

4. *(4 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x, y) = x^2 y$$

a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f.

c) Dibuixeu el conjunt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq -1\}$ i justifiqueu que és compacte.

d) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D y trobeu-los.

SOLUCIÓ:

a) Les corbes de nivell de f corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$ són:

Corba de nivell $z = -2$: $x^2 y = -2$, que és: $y = -\dfrac{2}{x^2}$,

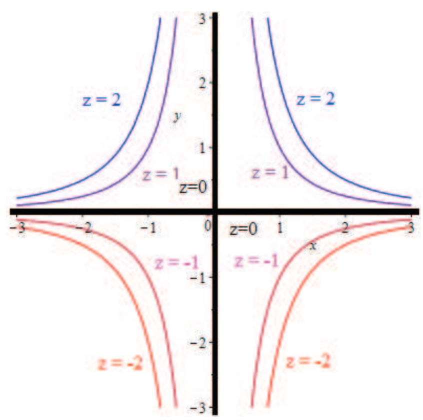
Corba de nivell $z = -1$: $y = -\dfrac{1}{x^2}$,

Corba de nivell $z = 0$: $x^2 y = 0$, que és el parell de rectes format per $x = 0$ i $y = 0$,

Corba de nivell $z = 1$: $y = \dfrac{1}{x^2}$,

Corba de nivell $z = 2$: $y = \dfrac{2}{x^2}$.

El dibuix:



b) La funció f és una funció polinòmica, per tant f és de classe C^2 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

De la segona equació s'obté $x = 0$, que satisfà també la primera equació. Per tant els punts crítics de f són els punts de la forma $(0, y)$ per a tot $y \in \mathbb{R}$. La matriu Hessiana de f en un punt qualsevol $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

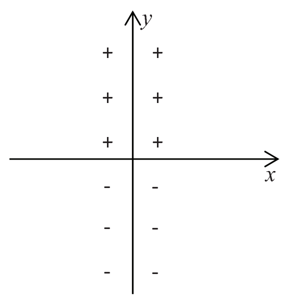
Per tant, la matriu Hessiana de f en els punts crítics $(0,y)$ és:

$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no decideix, per classificar els punts crítics $(0,y)$ per a tot $y \in \mathbb{R}$, que satisfan $f(0,y) = 0$, fem un estudi del signe de $f(x,y)$ entorn als punts crítics:

$$f(x,y) = x^2 y = \begin{cases} > 0, & \text{si } x \neq 0 \wedge y > 0, \\ < 0, & \text{si } x \neq 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

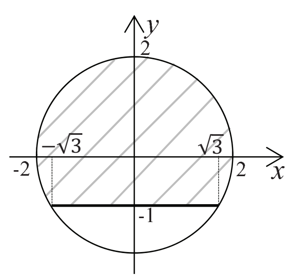
Així el signe de la funció entorn als punts crítics és:



y per tant els punts crítics són:

$$(0,y) \text{ és } \begin{cases} \text{un mínim}, & \text{si } y > 0, \\ \text{un punt de sella}, & \text{si } y = 0, \\ \text{un màxim}, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

c) El dibuix del conjunt D és:



D és un conjunt compacte per ser tancat (donat que conté tots els seus punts frontera, que són els punts dels segment $\{(x,y)|\ y = -1, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$ i del segment circular $\{(x,y)|\ x^2 + y^2 = 4, y \geq -1\}$) i acotat (donat que $D \subset B((0,0);3)$.

d) Atès que f és contínua en D i el conjunt D és un compacte, pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en D.

Els punts crítics de f a l'interior del compacte D són els punts $(0,y)$ per a tot $y \in (-1,2)$.

Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte D:

(i) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x, y)|\ y = -1, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$: fent $y = -1$ tenim $f(x, -1) = -x^2$, que és una funció d'una variable $\varphi_1(x) = -x^2$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_1'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Així s'obté el punt crític $(0, -1)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment circular $\{(x, y)|\ x^2 + y^2 - 4 = 0, y \geq -1\}$, es fa pel mètode de Lagrange: La funció de Lagrange és:

$$L(x, y, \lambda) = x^2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2\lambda x = 0 \\ x^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

De la primera equació s'obté $2x(y - \lambda) = 0$. Per tant $x = 0$ o $\lambda = y$.

Si $x = 0$, de la tercera equació obtenim $y^2 - 4 = 0$, d'on $y = \pm 2$, i al imposar que $y \geq -1$, tenim el punt crític $(0, 2)$.

Si $\lambda = y$, de la segona equació obtenim $x^2 = 2y^2$, i aleshores de la tercera equació: $3y^2 = 4$. D'on, al imposar que $y \geq -1$, tenim el punts crítics $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(iii) Els vèrtexs del compacte D són els punts: $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ i $\left(\sqrt{3}, -1\right)$.

Les imatges per f dels punts trobats són:

$f(0, y) = 0$, $f\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$, $f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$,

$f\left(-\sqrt{3}, -1\right) = -3$, $f\left(\sqrt{3}, -1\right) = -3$.

Per tant, el valor màxim absolut de f en D és $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ i l'assoleix als punts $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ i $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, el valor mínim absolut de f en D és -3 i l'assoleix als punts $(-\sqrt{3}, -1)$ i $(\sqrt{3}, -1)$.