

1. (2.5 punts) La fórmula recurrent $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, amb $a_1 = 1$, defineix una successió de nombres reals $\{a_n\}$.

- a) Demostreu que $1 \leq a_n \leq 3$, $\forall n \geq 1$
- b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.
- c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent.
- d) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. (2.5 punts) Considereu la integral següent:

$$I = \int_{1.2}^{1.6} \frac{e^x}{x} dx.$$

- a) Sabent que la funció $f(x) = \frac{e^x}{x}$ satisfà $0 < f^{(4)}(x) < 11$, $\forall x \in [1.2, 1.6]$, calculeu el nombre de subintervalls necessaris per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de quatre decimals correctes fent ús del mètode de Simpson ($error < 0.5 \cdot 10^{-4}$).
 - b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb la precisió demanada a l'apartat a).
3. (2.5 punts) Considereu la funció $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.
- a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (1, 1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (2, 1)$.
 - b) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P = (1, 1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.
 - c) Escriure les equacions del pla tangent i de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $M = (1, 1, 16)$.

4. (2.5 punts) Considereu la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$.

- a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f .
- b) Trobeu els extrems absoluts de f en el recinte:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}.$$