12 $\varphi \oplus \psi \equiv \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$

a) $\varphi \oplus (\psi \oplus \theta) \overset{?}{\equiv} (\varphi \oplus \psi) \oplus \theta$

$\varphi \oplus (\psi \oplus \theta)$ $\equiv$ def

$$\neg[\varphi \leftrightarrow \psi \oplus \theta] \equiv \neg[\varphi \leftrightarrow \neg(\psi \leftrightarrow \theta)] \equiv$$

order: $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \leftrightarrow \alpha$ $\qquad$ $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \leftrightarrow \beta$

$$\equiv \neg[(\neg(\psi \leftrightarrow \theta)) \leftrightarrow \varphi] \equiv \neg[(\neg\psi \leftrightarrow \theta) \leftrightarrow \varphi] \equiv$$

associative: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma \equiv \alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$

$$\equiv \neg[\neg\psi \leftrightarrow (\theta \leftrightarrow \varphi)] \equiv \neg[(\theta \leftrightarrow \varphi) \leftrightarrow \neg\psi] \equiv$$

$$\equiv \neg[\theta \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)] \equiv \neg[(\varphi \leftrightarrow \neg\psi) \leftrightarrow \theta] \equiv$$

$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$$\equiv \neg[(\varphi \oplus \psi) \leftrightarrow \theta] \equiv (\varphi \oplus \psi) \oplus \theta$$

qed

12

6) $\varphi \wedge (\psi \oplus \theta) \overset{?}{\equiv} (\varphi \wedge \psi) \oplus (\varphi \wedge \theta)$

$\varphi \wedge \neg(\psi \leftrightarrow \theta)$

#6 : $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

$$\neg\left[\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi \wedge \theta\right] \equiv \left[(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)\right] \wedge \left[\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \neg(\varphi \wedge \theta)\right]$$

$\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$

$\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \neg\varphi \vee \neg\theta$

$\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \neg\theta$

$$\equiv \varphi \wedge (\psi \vee \theta) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \neg\theta) \equiv$$

distributiva

$$\equiv \left[\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \wedge \neg\varphi\right] \vee \left[\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \wedge \neg\psi\right] \vee \left[\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \wedge \neg\theta\right]$$

0

$\varphi \wedge \neg\psi \wedge \psi \vee \varphi \wedge \theta \wedge \neg\psi$

$\varphi \wedge \neg\theta \wedge \psi \vee \varphi \wedge \theta \wedge \neg\theta$

0

0

(12-6 – continuació)

$$\equiv 0 \vee 0 \vee \varphi \wedge \theta \wedge \neg\psi \vee \varphi \wedge \neg\theta \wedge \psi \vee 0 \equiv$$

$$\equiv \varphi \wedge [\theta \wedge \neg\psi \vee \neg\theta \wedge \psi] \equiv \quad \text{doble negació } p \equiv \neg(\neg p)$$

$$\equiv \varphi \wedge \neg [\neg(\neg\psi \wedge \theta) \wedge \neg(\neg\theta \wedge \psi)] \equiv$$

$$\equiv \varphi \wedge \neg [(\psi \vee \neg\theta) \wedge (\theta \vee \neg\psi)] \equiv \varphi \wedge (\psi \oplus \theta)$$

$\theta \to \psi$ $\quad$ $\psi \to \theta$

$\theta \leftrightarrow \psi$

qed.

12 c) $\varphi \oplus 1 \overset{?}{\equiv} \neg\varphi$

$\varphi \oplus 1 \equiv \neg[\varphi \leftrightarrow 1] \equiv \neg\varphi \leftrightarrow 1 \equiv$

$\equiv (\neg\varphi \to 1 \wedge 1 \to \neg\varphi) \equiv [\underbrace{(\varphi \vee 1)}_{1} \wedge \underbrace{(0 \vee \neg\varphi)}_{\neg\varphi}] \equiv$

$\equiv \neg\varphi$ qed

$\varphi \oplus 0 \overset{?}{\equiv} \varphi$

$\neg[\varphi \leftrightarrow 0] \equiv \neg\varphi \leftrightarrow 0 \equiv [(\neg\varphi \to 0) \wedge (0 \to \neg\varphi)] \equiv$

$\equiv [\underbrace{(\varphi \vee 0)}_{\varphi} \wedge \underbrace{(1 \vee \neg\varphi)}_{1}] \equiv \varphi$ qed

12

d) $\varphi \oplus \neg\varphi \overset{?}{\equiv} 1$

$\neg[\varphi \leftrightarrow \neg\varphi] \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \equiv 1$ qed

e) $\varphi \oplus \varphi \overset{?}{\equiv} 0$

$\neg[\varphi \leftrightarrow \varphi] \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \varphi \equiv 0$ qed