QUÈ HEM FET FINS ARA?

El darrer que hem treballat són els principals conceptes sobre funcions inclós antiimatges, classificació d'una funció i funció inversa.

CLASSE D'AVUI 20/11/2020

Avui treballarem el que ens queda del tema de funcions i farem diversos exemples per fixar idees.

EX.: (1) Estudieu la injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat de les funcions definides per $f(x) = |x|$, segons f va de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$ (hi ha 4 funcions diferents).

Anomenem aquestes funcions f, g, h, i.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ amb $f(x) = |x| = x$: l'antiimatge de y és y; això és perquè ens plantegem per $y \in \mathbb{N}$ donat, buscar $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = |x| = x = y \Leftrightarrow x = y$; és a dir que tots tenen una antiimatge i només una, per tant és bijectiva perquè tot element de $\mathbb{N}$ té una única antiimatge (l'antiimatge d'un nombre y és el propi nombre y); per tant és exahustiva i injectiva també.

2. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ amb $g(x) = |x| = x$ l'antiimatge de de y és y per $y \geq 0$ i per $y < 0$ no hi ha cap antiimatge; g és injectiva ja que tot $y \geq 0$ té $g^{-1}[y] = \{y\}$ i per $y < 0$, $g^{-1}[y] = \varnothing$; no és exhaustiva (per exemple el -13 no té antiimatge); i no és bijectiva (perquè no és exahustiva).

3. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ amb $h(x) = |x|$ les antiimatges de $y \in \mathbb{N}$ són $\pm y$ si $y \neq 0$, i l'antiimatge de 0 és només una, el mateix 0; h no és injectiva perquè per exemple 27 té dues antiimatges ± 27; sí que és exhaustiva (tot y té dues antiimatges, $\pm y$, llevat del 0 que només en té una, 0); i no és bijectiva (ja que no és injectiva).

4. $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ amb $h(x) = |x|$ les antiimatges de y són $\pm y$ per $y \geq 0$ i per $y < 0$ no hi ha cap antiimatge; h no és injectiva (per exemple 13 té dues antiimatges ± 13); no és exhaustiva (per exemple el -27 no té cap antiimatge); i per tant no és bijectiva (no és exahustiva).

EX.: (12) Demostreu que estan ben definides, són bijectives i calculeu la inversa de: $f : [5/3, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida per $f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{4}}$.

Està ben definida perquè les operacions que s'han de fer per trobar una imatge amb la fórmula $f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{4}}$ es poden fer sempre i tenen només un resultat, a més de que l'arrel es pot fer sempre perquè:

$\frac{3x-5}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5/3$

Ara trobem l'antiimatge de $y \in [0, +\infty)$ és a dir busco $x \in [5/3, +\infty)$ tal que $\sqrt{\frac{3x-5}{4}} = y$:

$\sqrt{\frac{3x-5}{4}} = y \Rightarrow \frac{3x-5}{4} = y^2 \Rightarrow 3x - 5 = 4y^2 \Rightarrow x = \frac{4y^2+5}{3}$

El nombre $\frac{4y^2+5}{3} \in [5/3, +\infty)$, sigui quin sigui el valor y. Com que hem elevat al quadrat els dos costats de l'equació (és una equació irracional) s'han de comprovar les solucions:

$$\sqrt{\frac{3\frac{4y^2+5}{3}-5}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2+5-5}{4}} = \sqrt{\frac{4y^2}{4}} = \sqrt{y^2} = |y| = y \text{ perquè } y \in [0, +\infty)$$

i com es pot veure és clau que $y \in [0, +\infty)$ per poder afirmar que $|y| = y$. Per tant tenim que $f^{-1}[y] = \left\{\frac{4y^2+5}{3}\right\}$. Llavors és una aplicació bijectiva perquè només tenim una antiimatge per a cada nombre i només una, i en particular serà injectiva i exhaustiva. I la inversa:

$$f\left(\frac{4y^2+5}{3}\right) = y \Leftrightarrow \frac{4y^2+5}{3} \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{f^{-1}} \frac{4y^2+5}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{4y^2+5}{3}$$

si canviem les lletres: $f^{-1}(x) = \frac{4x^2+5}{3}$.

EX.: (13) Idem amb $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida per $f(x) = \frac{1}{x}$.

Amb aquesta funció és molt fàcil veure que és bijectiva perquè donat $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ i busco x tal que $\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$ que és un element de $\mathbb{R} - \{0\}$, per tant cada element té una antiimatge i només una $f^{-1}[y] = \{\frac{1}{y}\}$. I això justifica que és bijectiva i en particular injectiva i exhaustiva. Per la inversa com abans:

$$f(\tfrac{1}{y}) = y \Leftrightarrow \tfrac{1}{y} \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{f^{-1}} \tfrac{1}{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \tfrac{1}{y}$$

si canviem les lletres: $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

De vegades la injectivitat s'escriu de la manera següent: f és injectiva si i només si per a tot $x, x' \in A$ si $f(x) = f(x')$ aleshores $x = x'$.

EX.: Demostreu que és injectiva l'aplicació $g : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ definida per $g(x) = \frac{x+1}{2x-10}$ sense fer servir antiimatges.

Sigui x i x' tals que $g(x) = g(x')$ i vull deduir que $x \overset{???}{=} x'$:

$$g(x) = g(x') \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x-10} = \frac{x'+1}{2x'-10} \Leftrightarrow (x+1)(2x'-10) = (x'+1)(2x-10) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x' - 10x + 2xx' - 10 = 2x - 10x' + 2xx' - 10 \Leftrightarrow 2x' - 10x = 2x - 10x' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x' + 10x' = 2x + 10x \Leftrightarrow 12x' = 12x \Leftrightarrow x' = x$$

per tant és injectiva.

EX.: (22) Demostreu que $f^{-1}[B] = A$.

Indicació: utilitzeu la definició d'antiimatge amb la doble inclusió.

EX.: (23) Sigui $f : A \to B$ i siguin $X_1, X_2 \subseteq A$. Demostreu que $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$.

Per veure que és certa aquesta igualtat procedim de la manera següent:

$x \in f[X_1 \cup X_2] \Leftrightarrow$ existeix un $a \in X_1 \cup X_2$ tal que $f(a) = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ existeix un $a \in X_1$ o $a \in X_2$ tal que $f(a) = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$(existeix un $a \in X_1$ tal que $f(a) = x$) o (existeix un $a \in X_2$ tal que $f(a) = x$)$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f[X_1]$ o $x \in f[X_2] \Leftrightarrow x \in f[X_1] \cup f[X_2]$.

EX.: (24) Sigui $f : A \to B$. Demostreu que f és injectiva $\Leftrightarrow f^{-1}(f(X)) = X$ per a tot $X \subseteq A$.

Indicació: utilitzeu la definició d'antiimatge amb la doble inclusió.

EX.: (25) Sigui $f : A \to B$. Demostreu que són equivalents:

a. f és injectiva.

b. per tot $X_1, X_2 \subseteq A$, es compleix que $f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2]$.

c. per tot $X_1, X_2 \subseteq A$, si $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ llavors $f[X_1] \cap f[X_2] = \varnothing$.

Demostrem les tres implicacions següents:

a.$\Rightarrow$**b.** Suposem que f és injectiva i volem demostrar que donats $X_1, X_2 \subseteq A$ tenim que $f(X_1 \cap X_2) \overset{???}{=} f(X_1) \cap f(X_2)$. Veiem la doble inclusió:

- si $x \in f(X_1 \cap X_2) \Leftrightarrow x = f(a)$ per cert $a \in X_1 \cap X_2 \Leftrightarrow x = f(a)$ per cert $a \in X_1$ i $a \in X_2$
- si $x \in f(X_1) \cap f(X_2) \Leftrightarrow x \in f(X_1)$ i $x \in f(X_2) \Leftrightarrow x = f(a)$ per cert $a \in X_1$ i $x = f(b)$ per cert $b \in X_2$

La primera afirmació implica la segona (simplement agafant com a b l'element a). Per veure que la segona afirmació implica la primera hem d'utilitzar que l'aplicació és injectiva i tenim que en aquesta expressió $x = f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ i per tant surtiria la primera afirmació com volíem demostrar.

b.$\Rightarrow$**c.** Ara sabem que per tot $X_1, X_2 \subseteq A$, es compleix que $f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2]$ i volem provar que donats $X_1, X_2 \subseteq A$ dos subconjunts disjunts aleshores $f[X_1] \cap f[X_2] \overset{???}{=} \varnothing$. En efecte:

$$f[X_1] \cap f[X_2] = f[X_1 \cap X_2] = f[\varnothing] = \varnothing.$$

c.$\Rightarrow$**a.** La suposició ara és que per tot $X_1, X_2 \subseteq A$, si $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ llavors $f[X_1] \cap f[X_2] = \varnothing$ i volem demostrar que l'aplicació és injectiva. En efecte: per demostrar que és injectiva suposem que tenim dos elements $x, x' \in A$ amb $f(x) = f(x')$ i volem demostrar que $x \overset{???}{=} x'$, cosa que és fàcil perquè raonant per reducció a l'absurd (és a dir suposant que $x \neq x'$) podem pensar en els conjunts disjunts $\{x\}, \{x'\}$ i llavors

$$\{x\} \cap \{x'\} = \varnothing \Rightarrow f[\{x\}] \cap f[\{x'\}] = \varnothing \Rightarrow \{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \varnothing \Rightarrow \{f(x)\} = \varnothing$$

cosa impossible perquè aquest conjunt no pot tenir un element.

EX.: (26) Siguin A, B conjunts i $f : A \to C$, $g : B \to C$. Definim una funció $h : A \cup B \to C$ així: $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

a. Demostreu que si $A \cap B = \varnothing$ llavors h està ben definida.

b. Suposem ara que $A \cap B = \varnothing$. Demostreu que són equivalents:

(i). h és injectiva.

(ii). f i g són injectives i $f(A) \cap g(B) = \varnothing$.

Es van aplicant les definicions i amb paciència surt el que es demana.

Amb les funcions és molt important poder fer operacions amb elles: una de les més important és la composició.

DEF.: Donades dues funcions $f : A \to B, g : B \to C$ es defineix la funció composició de f amb g com a $g \circ f : A \to C$ definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Les propietats de la composició les veurem el proper dia però feu una ullada als apunts oficials de l'assignatura.

EXERCICI PER REPASSAR TEORIA DE CONJUNTS

EX.: (60) Demostreu que per a qualssevol conjunts A, B, C tenim que

$$(A \times A) - (B \times B) = A \times (A - B) \cup (A - B) \times (B \cap A).$$

Veiem per separat què vol dir que un element és de cadascun d'aquests dos conjunts que hem de demostrar que són iguals:

- $(x,y) \in (A \times A) - (B \times B) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times A)$ i $(x,y) \notin (B \times B) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x \in A$ i $y \in A$ i no$\big(x \in B$ i $y \in B\big) \Leftrightarrow x \in A$ i $y \in A$ i $\big(x \notin B$ o $y \notin B\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A$ i $y \in A$ i $x \notin B)$ o $(x \in A$ i $y \in A$ i $y \notin B) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A$ i $y \in A$ i $x \notin B)$ o $(x \in A$ i $y \in A$ i $y \notin B) \Leftrightarrow$
- $(x,y) \in A \times (A - B) \cup (A - B) \times (B \cap A) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x,y) \in A \times (A - B)$ o $(x,y) \in (A - B) \times (B \cap A) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A - B\big)$ o $\big(x \in A - B$ i $y \in B \cap A\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A$ i $y \notin B\big)$ o $\big(x \in A$ i $x \notin B$ i $y \in A$ i $y \in B\big)$

Si veiem que les dues expressions són equivalents tindrem demostrada la igualtat de conjunts. En totes dues expressions es pot treure factor comú $x \in A$ i $y \in A$, fem-ho i llavors:

- $\ldots \Leftrightarrow (x \in A$ i $y \in A$ i $x \notin B)$ o $(x \in A$ i $y \in A$ i $y \notin B) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A$ i $y \in A)$ i $(x \notin B$ o $y \notin B)$
- $\ldots \Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A$ i $y \notin B\big)$ o $\big(x \in A$ i $x \notin B$ i $y \in A$ i $y \in B\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A\big)$ i $\big(y \notin B$ o $\big(x \notin B$ i $y \in B\big)\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A\big)$ i $\big(\big(y \notin B$ o $x \notin B\big)$ i $\big(y \notin B$ o $y \in B\big)\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A\big)$ i $\big(\big(y \notin B$ o $x \notin B\big)$ i $veritat\big) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \big(x \in A$ i $y \in A\big)$ i $\big(y \notin B$ o $x \notin B\big)$