1. *(2.5 punts)* Demostreu que el domini de la funció

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2 + x - 2| - x + 6}}$$

és el conjunt de tots els nombres reals.

Solución. Puesto que la función tiene una constante en el numerador y una raíz cuadrada en el denominador, su dominio estará formado por los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que la expresión dentro de la raíz es estrictamente positiva, es decir, que cumplen la condición

$$|x^2 + x - 2| - x + 6 > 0$$

Por tanto, para demostrar que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$ tenemos que resolver la inecuación anterior y comprobar que admite solución para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ se deduce que

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \text{ si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq -2; \qquad x^2 + x - 2 < 0 \text{ si } x \in (-2, 1)$$

Por lo tanto consideramos 2 casos para resolver la inecuación.

Caso 1: $x \geq 1$ $x \leq -2$.

$$|x^2 + x - 2| - x + 6 = x^2 + x - 2 - x + 6 = x^2 + 4 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto en este caso todos los valores de x son solución.

Caso 2: $x \in (-2, 1)$.

$$|x^2 + x - 2| - x + 6 = -x^2 - x + 2 - x + 6 = -x^2 - 2x + 8 = -(x-2)(x+4)$$

La expresión anterior será positiva si $(x-2)(x+4) < 0$, lo cual sucede cuando $x \in (-4, 2)$. Pero el intervalo $(-2, 1)$ está claramente contenido en $(-4, 2)$ y por tanto en este caso también hay solución para todo valor de x.

Por tanto se ha demostrado que la inecuación $|x^2 + x - 2| - x + 6 > 0$ tiene solución para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. *(2.5 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = -1 + \sqrt{1 + 2a_n}$, per $n \geq 1$.

(a) Demostreu que tots els termes de la successió són positius.

(b) Enuncieu del teorema de convergència monòtona.

(c) Demostreu que la successió $\{a_n\}$ és convergent.

(d) Calculeu el seu límit.

Solución.

(a) Se trata de demostrar que $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$, así que utilizamos el principio de inducción. Claramente $a_1 = 1 > 0$ así que hacemos la hipótesis de inducción y suponemos que $a_n > 0$ para un $n \geq 1$ dado. Entonces, aplicando las propiedades de la desigualdad respecto a la suma y el producto, y teniendo en cuenta que la raíz cuadrada es una función creciente, se deduce que

$$2a_n > 0 \Rightarrow 1 + 2a_n > 1 \Rightarrow \sqrt{1+2a_n} > \sqrt{1} = 1 \Rightarrow -1 + \sqrt{1+2a_n} = a_{n+1} > 0$$

Por tanto la proposición es cierta para $n+1$ y por el principio de inducción será cierta $\forall n \geq 1$.

(b) Enunciado del teorema de convergencia monótona: si una sucesión es monótona y acotada entonces es convergente.

(c) De acuerdo con el teorema anterior, tenemos que demostrar que la sucesión es monótona y acotada. Para ver que es monótona, primero examinamos los primeros términos:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732, \quad a_3 = -1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 1} \approx 0.57$$

Esto parece indicar que la sucesión es monótona decreciente. Por tanto, plantearemos demostrar por inducción que $a_{n+1} < a_n$ $\forall n \geq 1$. El caso inicial $a_2 < a_1$ ya se ha demostrado con los cálculos anteriores, por tanto pasamos al paso inductivo. Formulamos la hipótesis de inducción: $a_{n+1} < a_n$ para un $n \geq 1$ dado. Ahora tenemos que demostrar a partir de dicha hipótesis que $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Usando las mismas propiedades que en el paso inductivo del apartado (a) se tiene que

$$a_{n+1} < a_n \Rightarrow 1 + 2a_{n+1} < 1 + 2a_n \Rightarrow \sqrt{1+2a_{n+1}} < \sqrt{1+2a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + \sqrt{1+2a_{n+1}} < -1 + \sqrt{1+2a_n} \Rightarrow a_{n+2} < a_{n+1}$$

tal y como se quería demostrar. Luego por el principio de inducción la sucesión es monótona decreciente.

Para poder aplicar el teorema de convergencia monótona, falta justificar que la sucesión es acotada, es decir, que tiene cota superior e inferior. La existencia de cota inferior se ha demostrado en el apartado (a), y puesto que la sucesión es monótona decreciente, el primer término es una cota superior, es decir,

$$0 < a_n \leq a_1 = 1\,, \quad \forall n \geq 1$$

Con esto ya se puede aplicar el teorema, y se deduce que la sucesión es convergente.

(d) Puesto que la sucesión es convergente: $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$. De manera que aplicando la fórmula recurrente que define la sucesión, obtendremos una ecuación para el valor de L:

$$\lim a_{n+1} = L = -1 + \sqrt{1+2L} \Leftrightarrow (L+1)^2 = L^2 + 2L + 1 = 2L + 1 \Leftrightarrow L^2 = 0$$

De donde se deduce que el límite de la sucesión ha de ser igual a cero.

3. *(2.5 punts)*

(a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = \sqrt{x}$, centrat en el punt $a = 1$. Mitjançant aquest polinomi, calculeu el valor aproximat de $\sqrt{1/2}$, donant el resultat exacte que s'obté amb el polinomi.

(b) Determineu l'expressió del residu de Lagrange associat al polinomi de Taylor obtingut a l'apartat anterior.

(c) Fent servir el residu de l'apartat (b), determineu una fita superior de l'error absolut comés en el càlcul aproximat de $\sqrt{1/2}$.

Solución.

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua y derivable 3+1 veces en el intervalo (0,2). En estas condiciones podemos utilizar la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4$$

siendo c un punto intermedio entre x y 1.

Las derivadas de la función f son:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & \text{f(1)=1} \\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & f'(1) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & f''(1) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} & f'''(1) = \frac{3}{8} \\ f^4(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} & f^{(4)}(c) = -\frac{15}{16}c^{-\frac{7}{2}} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}\frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}(x-1)^4,$$

El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{x}$, centrado en el punto $a = 1$ es:

$$P_3(\sqrt{x}, 1, x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3,$$

y el resto de Lagrange asociado es:

$$R_3(\sqrt{x}, 1, x) = -\frac{5}{128}\frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}(x-1)^4.$$

El valor aproximado de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ usando el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el punto $a = 1$ es:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3 = \frac{91}{128} = 0.7109375.$$

El error cometido es:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-P_3\left(f,1,\frac{1}{2}\right)\right|=\left|R_3\left(f,1,\frac{1}{2}\right)\right|=\left|-\frac{5}{128}\frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{1}{2}-1\right)^4\right|$$

siendo c un punto intermedio entre $\frac{1}{2}$ y 1.

Como $\dfrac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$ es una función decreciente en $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ podemos acotar $\dfrac{1}{c^{\frac{7}{2}}}$ por $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}$. Por lo tanto:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-P_3\left(f,1,\frac{1}{2}\right)\right|\leq\left|\frac{5}{128}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right|=\frac{5}{128}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por último como $\sqrt{2}>\sqrt{1.96}=1.4$, podemos ajustar la cota del error a:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-P_3\left(f,1,\frac{1}{2}\right)\right|\leq\frac{5}{128}\frac{1}{1.4}=\frac{25}{896}\leq 0.028$$

4. *(2.5 punts)* Considereu l'equació $x=\cos(x)$.

(a) Demostreu que admet solució a l'interval $[0,1]$.

(b) Demostreu que la solució és única a l'interval $[0,1]$.

(c) Utilitzeu el mètode de bisecció per determinar un interval de longitud 0.1, dintre de $[0,1]$, on es trobi la solució de l'equació.

(d) Prenent com a valor inicial un punt de l'interval determinat a l'apartat (c), calculeu la solució aproximada de l'equació i la seva precissió després de dues iteracions del mètode de la tangent.

Solución. Si definimos la función $f(x)=x-\cos(x)$ hallar una solución de $x=\cos(x)$ es equivalente a hallar un cero de la función f.

(a) La función f es continua en $[0,1]$ por ser la suma de dos funciones continuas en $[0,1]$, $f(0)=-1$ y $f(1)=1-\cos(1)>0$ ya que $\cos(1)<1$. El teorema de Bolzano nos permite afirmar que existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=0$.

(b) Supongamos que existen $c_1,c_2\in[0,1]$ tales que $c_1\neq c_2$ y $f(c_1)=f(c_2)=0$. Como la función f es derivable en $(0,1)$, por el teorema de Rolle debería existir un punto $\xi\in(0,1)$ tal que $f'(\xi)=0$.

Como $f'(x)=1+\sin(x)$, en el punto ξ se debería cumplir que $\sin(\xi)=-1$. Pero no hay ningún punto del intervalo $(0,1)$ en el que el seno tome el valor -1.

Por lo tanto, no existen $c_1,c_2\in[0,1]$ tales que $c_1\neq c_2$ y $f(c_1)=f(c_2)=0$, y la solución es única en el intervalo $[0,1]$.

(c) El intervalo inicial es $[0,1]$ y $f(0)<0$, $f(1)>0$.

Intervalo $[a,b]$	Punto medio $x_M = \frac{a+b}{2}$	$f(x_M)$
$[0,1]$	$\dfrac{1}{2}$	-0.4
$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$	$\dfrac{3}{4}$	0.02
$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$	$\dfrac{5}{8}$	-0.2
$\left[\dfrac{5}{8},\dfrac{3}{4}\right]$	$\dfrac{11}{16}$	-0.09
$\left[\dfrac{11}{16},\dfrac{3}{4}\right]$	$\dfrac{23}{32}$	

Como $11/16 = 0.6875$ y $3/4 = 0.75$, un intervalo de longitud 0.1 que contenga la solución podría ser $(0.65, 0.75)$.

(d) Tomaremos como punto inicial $x_0 = \dfrac{23}{32} = 0.71875 \in (0.65, 0.75)$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 0.739178404123704$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.739085135135861$$

$$|x_2 - x_1| < 0.000094\,, \quad |f(x_2)| < 10^{-9}$$

Por tanto podemos escribir la solución aproximada de la forma 0.739085 ± 0.000094