3. *(2 puntos)* Sea la integral $I = \int_0^1 \sin^3(x)dx$.

(a) Sabiendo que si $g(x) = \sin^3(x)$, entonces $g^{(4)}(x) = -60\sin(x) + 81\sin^3(x)$, justificar que $\max_{x\in[0,1]} |g^{(4)}(x)| \leq 21$.

(b) Calcular I con error menor que $2 \cdot 10^{-4}$.

Solución.

(a) De manera general los valores de $\sin(x)$ pertenecen al intervalo $[-1, 1]$, y por tanto lo mismo sucede con los valores de $\sin^3(x)$. Tomando $z = \sin(x)$, se tiene que z pertenece al intervalo $[-1, 1]$. En este intervalo, los extremos absolutos de la función $E(z) = -60z + 81z^3$ se alcanzan en $z = 1$ (máximo absoluto, siendo $E(1) = -60 + 81 = 21$), y en $z = -1$ (mínimo absoluto, siendo $E(-1) = -21$). Por lo tanto se deduce que $|E(z)| \leq 21$ para todo z perteneciente a $[-1, 1]$. De esto podemos deducir que

$$\max_{x\in[0,1]} |g^{(4)}(x)| \leq \max_{z\in[0,1]} |E(z)| \leq 21\,.$$

(b) Puesto que el apartado anterior nos da una cota superior de $g^{(4)}(x)$ en el intervalo de integración, podemos utilizar el método de Simpson para calcular I con la precisión del enunciado. De acuerdo con este método, el número de sub-intervalos que hay que utilizar debe satisfacer la desigualdad

$$\frac{(1-0)^5}{180n^4} \max_{x\in[0,1]} |g^{(4)}(x)| < 2 \cdot 10^{-4}$$

que se cumple si $\dfrac{7}{120n^4} < 10^{-4}$. El mínimo valor par de n que verifica esta condición es $n = 6$.

Por tanto, calcularemos I con la fórmula de Simpson para $n = 6$, $h = 1/6$ y los puntos donde hay que evaluar la función $g(x)$ serán $0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6$ y 1. Usamos por tanto la expresión:

$$I \approx \frac{1}{18}\,[g(0) + 4[g(1/6) + g(1/2) + g(5/6)] + 2[g(1/3) + g(2/3)] + g(1)]$$

Obtenemos, de acuerdo con el error redondeando a la cuarta cifra decimal,

$$I = 0.1789 \pm 2 \cdot 10^{-4}$$

4. *(2 puntos)* Considerar la función $f(x,y) = 2x - 3y + \ln(xy)$.

(a) Hallar el dominio de la función y su frontera. Clasificar el dominio (abierto, cerrado, acotado...) y representarlo gráficamente.

(b) Determinar y clasificar los puntos críticos de la función.

(c) Calcular la dirección de máximo decrecimiento de la función en el punto $(1,1)$ y el valor de la derivada en dicha dirección.

Solución.

(a) La función f es la suma de funciones $f_1(x,y) = 2x - 3y$ y $f_2(x,y) = \ln(xy)$.
$Dom\, f_1 = \mathbb{R}^2$ y
$Dom\, f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$
$\Longrightarrow D = Dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$.
La frontera del dominio de f es $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ o } y = 0\}$.
D es abierto ya que $\forall (x,y) \in D \Longrightarrow (x,y)$ es interior de $D\,(\,(x,y) \notin \partial D)$.
D es no acotado ya que $\nexists B_r(x_0,y_0) \supset D$.
En el dibujo

se presentan de color amarillo el conjunto D y de color rojo su frontera ∂D.

(b) La función f es derivable en todo su dominio, por lo tanto, sus puntos críticos, si existen, son los puntos donde

$$\left\{ \begin{array}{lll} f'_x(x,y) = \ \ 2 + \dfrac{1}{xy}y & = \ \ 2 + \dfrac{1}{x} & = 0 \\ f'_y(x,y) = -3 + \dfrac{1}{xy}x & = -3 + \dfrac{1}{y} & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Entonces $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ es la única solución de este sistema.
El punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \notin Dom\, f \Longrightarrow \nexists$ puntos críticos de f.

(c) La dirección de máximo decrecimiento de la función en el punto $(1,1)$ es la dirección en la cual la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ és mínima y es la dirección contraria al vector gradiente de f en este punto, es decir,
$-\nabla f(1,1) = -(f'_x(1,1),\, f'_y(1,1)) = -(3,-2) = (-3,2)$.
La derivada en esta dirección es
$D_{-\nabla f(1,1)} f(1,1) = -||\nabla f(2,3)|| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = -\sqrt{13}$.

5. *(2 puntos)* Considerar la función $f(x,y)=4x^2+4y^2-2x+2y$, y la región del plano

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \quad x^2+(y-1)^2\leq 4\,, \quad y\leq 1\}\,.$$

(a) Dibujar la región A i demostrar que f admite extremos absolutos en A.

(b) Determinar el máximo y el mínimo absolutos de f en la región A.

Solución.

(a) A es un conjunto cerrado y acotado: contiene a todos sus puntos frontera por estar definido por desigualdades no estrictas y está contenido en la bola centrada en (0,0) y radio 10; por lo tanto, es compacto.

f es polinómica en las variables x, y, por tanto es una función continua.

Por el teorema de Weierstrass, f admite extremos absolutos en A.

(b) Candidatos a extremos absolutos:

(i) En $\overset{\circ}{A}$:
$\vec{\nabla} f=0$

$$\begin{aligned} 8x-2&=0\\ 8y+2&=0 \end{aligned}$$

Tenemos el candidado $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$.

(ii) En $x^2+(y-1)^2=4$, $-1<y<1$. Si $F(x,y)=f(x,y)+\lambda(x^2+(y-1)^2-4)$, los candidatos satisfacen $\vec{\nabla}F=0$ y $x^2+(y-1)^2-4=0$:

$$8x-2+2\lambda x=0 \qquad (1)$$
$$8y+2+2\lambda(y-1)=0 \qquad (2)$$
$$x^2+(y-1)^2-4=0 \qquad (3)$$

De (1) y (2) tenemos $\dfrac{8x-2}{8y+2}=\dfrac{x}{y-1}$ de donde tenemos $y-1=-5x$. Substituyendo en (3) queda $26x^2=4$. Por lo tanto tenemos el candidato $(\sqrt{\frac{2}{13}},-5\sqrt{\frac{2}{13}}+1)$ (La otra solución $(-\sqrt{\frac{2}{13}},5\sqrt{\frac{2}{13}}+1)$ no lo es porque no se encuentra en el dominio.)

(iii) En $y=1$, $-2<x<2$. Si $F(x,y)=f(x,y)+\lambda(y-1)$, los candidatos satisfacen $\vec{\nabla}F=0$ y $y-1=0$:

$$\begin{aligned} 8x-2&=0\\ 8y+2+2\lambda&=0\\ (y-1)&=0 \end{aligned}$$

Tenemos el candidato $(\frac{1}{4},1)$.

(iv) Los puntos (-2,1) y (2,1).

Resumiendo, los candidatos a extremos absolutos son:
$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$, $(\sqrt{\frac{2}{13}},-5\sqrt{\frac{2}{13}}+1)$, $(\frac{1}{4},1)$, (-2,1) y (2,1).

Evaluando la función en los candidatos resulta que el mínimo absoluto es $-\frac{1}{2}$, y se alcanza en $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$, y el máximo absoluto es 26, y se alcanza en (-2,1).