1. *(2.5 punts)* Sigui $F(x) = \int_1^{x^2+2} \frac{e^t}{t} dt.$

a) Comproveu que $x = 0$ és un punt crític de F.

b) Calculeu el valor aproximat de $F(0)$ utilitzant el mètode de Simpson amb 4 subintervals.

c) Sabent que per $f(x) = \frac{e^x}{x}$ es té $|f^{(4)}(x)| < 25$, $\forall x \in [1, 2]$, calculeu la cota superior de l'error comès.

Solución.

a) $f(t) = e^t/t$ es una función continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces f es continua en $[1, x^2 + 2]$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Además, la función $u(x) = x^2 + 2$ es derivable en toda la recta real. Entonces, por el Teorema fundamental del Cálculo F es derivable y

$$F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{e^{x^2+2}}{x^2 + 2} \cdot 2x.$$

Entonces, $F'(0) = 0$, y esto significa que $x = 0$ es un punto crítico de F.

b)

$$F(0) = \int_1^2 \frac{e^t}{t} dt.$$

Podemos utilizar la fórmula de Simpson para aproximar la integral $F(0)$ porque $f(t)$ es derivable infinitas veces en el intervalo $(1, 2)$. Tenemos que dividir $[1, 2]$ en 4 subintervalos:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ [x_3, x_4],$$

donde $x_i = x_0 + i\,h$ y $h = \frac{2-1}{4} = 1/4$. Entonces, $x_0 = 1$; $x_1 = 1.25$; $x_2 = 1.5$; $x_3 = 1.75$; $x_4 = 2$. Por la fórmula de Simpson, el valor aproximado de $F(0)$ que buscamos es

$$F(0) \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) =$$

$$= \frac{1}{12}(e + \frac{4e^{1.25}}{1.25} + \frac{2e^{1.5}}{1.5} + \frac{4e^{1.75}}{1.75} + \frac{e^2}{2}) \simeq 3.05924..$$

b) Por la fórmula del error del método de Simpson sabemos que el error ϵ que cometimos en considerar la aproximación del apartado b) es

$$\epsilon < \frac{(2-1)^5 \cdot M}{180 \cdot 4^4}$$

donde $M = \max_{t\in[1,2]} |f^{(4)}(t)|$. Por otro lado, sabemos que $M < 25$. Entonces una cota superior del error es

$$\frac{25}{180 \cdot 4^4} \simeq 0.00054.. < 6 \cdot 10^{-4}.$$

2. *(2.5 punts)* Es considera la funció $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.

a) Dibuixeu les curbes de nivell de f corresponents als nivells 4, 8, 9, 10.

b) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $(1, 2)$ en la direcció del vector $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

c) Determineu un vector unitari v tal que $D_v f(1, 2) = 0$.

d) Determineu la direcció del màxim creixement de f en el punt $(1, 2)$ i calculeu la derivada en aquesta direcció.

Solución.

a) [2,5 punts] Si c és una constant, la corba de nivell c és

$$9 - x^2 - y^2 = c, \quad \text{és a dir,} \quad x^2 + y^2 = 9 - c.$$

Si $c = 10$, la corba no té punts. Si $c = 9$, la corba només té el punt $(0, 0)$. Si $c = 8$, és tracta d'una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 1. Finalment, si $c = 4$, tenim una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi $\sqrt{5}$.

b) [2,75 punts] El vector $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ té norma $\sqrt{2+2} = 2$ i, per tant, el vector normalitzat és

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Les derivades parcials de f són $f'_x(x, y) = -2x$, $f'_y(x, y) = -2y$ i el gradient en el punt $(1, 2)$ és $\bigtriangledown f(1, 2) = (-2, -4)$. Per tant, la derivada direccional és

$$D_v f(1, 2) = \bigtriangledown f(1, 2) \cdot v = (-2, -4) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$

c) [2,25 punts] Com que, si v és un vector unitari qualsevol, la derivada direccional és

$$D_v f(1, 2) = \bigtriangledown f(1, 2) \cdot v = (-2, -4) \cdot v$$

Per tant, per a que sigui nul.la, el vector v ha de tenir la direcció perpendicular al gradient, és a dir, la direcció $(4, -2)$ o $(-4, 2)$. Aquests vectors tenen norma $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Així doncs, els vectors unitaris que volem són

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ o } \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

d) [2,5 punts] La direcció de màxim creixement és la del gradient, és a dir, $(-2,-4)$, que normalitzat és

$$v = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

En aquesta direcció, el valor de la derivada direccional és la norma del gradient. Per tant,

$$D_v f(1,2) = || \bigtriangledown f(1,2)|| = \sqrt{20}$$

3. *(2.5 punts)* Sigui la funció $f(x,y) = \alpha(x-1)^2 + y^2 - x - y + \beta \ln(x+y)$.

a) Determineu el valor del paràmetre β sabent que $(1,0)$ ès un punt crític de f.

b) Prenent $\beta = 1$ escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f en el punt $(1,0)$.

c) Determineu el valor del paràmetre α sabent que el valor del polinomi de Taylor de l'apartat b) és igual a 5 en el punt $(3,0)$.

d) Prenent $\alpha = 2$, $\beta = 1$ classifiqueu el punt crìtic $(1,0)$.

Solución.

a) Les derivades parcials de f són

$$f'_x(x,y) = 2\,\alpha\,(x-1) - 1 + \frac{\beta}{x+y} \qquad f'_y(x,y) = 2\,y - 1 + \frac{\beta}{x+y}$$

i avaluant en el punt $(1,0)$ obtenim

$$f'_x(1,0) = -1 + \beta \qquad f'_y(1,0) = -1 + \beta$$

El punt $(1,0)$ és punt crític de f si, i només si, les dues derivades parcials s'anul.len en el punt. És a dir, $(1,0)$ punt crític $\iff \beta = 1$.

b) Si $\beta = 1$, com que tenim un punt crític, el gradient és $\bigtriangledown f(1,0) = (0,0)$. Calculem les derivades segones i avaluem en el punt $(1,0)$:

$$f''_{xx}(x,y) = 2\,\alpha - \frac{1}{(x+y)^2} \qquad f''_{xx}(1,0) = 2\,\alpha - 1$$

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \qquad f''_{xy}(1,0) = -1$$

$$f''_{yy}(x,y) = 2 - \frac{1}{(x+y)^2} \qquad f''_{yy}(1,0) = 1$$

El polinomi de Taylor de grau 2 de f en el punt $(1,0)$ és

$$p(x,y) = f(1,0) + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(1,0) + 2f''_{xy}(1,0) + f''_{yy}(1,0)\right) = -1 + \frac{(2\,\alpha - 1)}{2}(x-1)^2 - (x-1)y + \frac{1}{2}y^2$$

c) Avaluem el polinomi anterior en el punt $(3, 0)$:

$$p(3,0) = -1 + \frac{(2\,\alpha - 1)}{2} \cdot 4 = -1 + 4\alpha - 2 = 4\alpha - 3$$

Per tant: $p(3, 0) = 5 \iff 4\alpha - 3 = 5 \iff 4\alpha = 8 \iff \alpha = 2.$

d) Si $\beta = 1$, el punt $(1, 0)$ és punt crític de f. Si $\alpha = 2$, la matriu hessiana de f en el punt $(1, 0)$ és

$$H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenim $\det(H) = 2 > 0$ i $h_{11} = f''_{xx}(1, 0) = 3 > 0$, de manera que el punt $(1, 0)$ és un mínim relatiu de f.

4. *(2.5 punts)* Sigui la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ i la regió del pla

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

a) Dibuixeu D i justifiqueu que f té extrems absoluts en D.

b) Determineu el màxim i mínim absoluts de f en la regió D.

Solución.

a) Al dibujar D vemos que es el semidisco superior (conteniendo el borde) del disco de radio 1 y centrado en $(1, 0)$.

D es acotado ya que $\exists B_2\big((1, 0)\big) \supset D$. Además es cerrado pues contiene el borde $\partial D = \partial_1 \cup \partial_2$ donde $\partial_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x - 1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ y $\partial_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\, x \in [0, 2]\}$ (esto se puede justificar diciendo que todas las desigualdades que definen D no son estrictas).

Así D es compacto. Como f es una función polinomial entonces es continua en todo el plano, en particular en D. La existencia de extremos absolutos en D se deduce del teorema de Weierstrass pues f es continua en D y D es compacto.

b) Ahora buscamos los candidatos a máximos y mínimos absolutos en el interior y el borde:

- En el interior el punto debe ser crítico. Como $f'_x(x, y) = 2x - 1$ y $f'_y(x, y) = 2y - 1$ deducimos que el único punto crítico de f es el $(1/2, 1/2)$ que pertenece a D.
- En ∂_1 la función f toma la forma $f(x, 0) = x^2 - x \equiv F(x) \implies F'(x) = 2x - 1 = 0 \implies x = 1/2$ es el punto crítico de F. Así obtenemos un candidato: $(1/2, 0) \in \partial_1$.
- En ∂_2 aplicaremos el método de multiplicadores de Lagrange. Introducimos una nueva variable λ y consideramos

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x - y - \lambda((x - 1)^2 + y^2 - 1).$$

Ahora buscamos los puntos críticos de $\mathcal{L}$, lo que significa resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 1 - \lambda(2(x - 1)) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 1 - \lambda(2y) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -((x-1)^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Desde la primera y segunda ecuaciones obtenemos que

$$\lambda \neq 1, \quad x - 1 = \frac{1}{2(\lambda - 1)}, \quad y = -\frac{1}{2(\lambda - 1)}.$$

Introduciendo estas igualdades en la ultima ecuación obtenemos

$$\left(\frac{1}{2(\lambda-1)}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2(\lambda-1)}\right)^2 = 1$$

lo que implica que $\lambda = 1 \pm 1/\sqrt{2}$. Así los puntos críticos de $\mathcal{L}$ son

$$(1 + 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}), \quad (1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}).$$

Eliminando la coordenada λ y recordando que el punto debe estar en D deducimos que el único posible candidato es $(1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

– Los puntos de $\partial_1 \cap \partial_2$ son también candidatos. Estos puntos son $(0,0)$, $(2,0)$.

Así los candidatos a máximos y mínimos absolutos de f en D son

$$(1/2, 1/2),\ (0,0),\ (1/2, 0),\ (2,0),\ (1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

.

Evaluando en f deducimos que en el punto $(2,0)$ la función f tiene el máximo absoluto en D y en el punto $(1/2, 1/2)$ el mínimo absoluto en D.