1. *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que:

$$a_1 = \frac{1}{2} \ \text{ i } \ a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{(a_n)^2}{2} \quad \text{per a tot } \ n > 1.$$

a) Proveu que $0 \leq a_n \leq 1$, per a tot $n \geq 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

SOLUCIÓ:

a) Demostració per inducció sobre n:

(i) És cert per a $n = 1$: $0 \leq a_1 \leq 1$, ja que $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

(ii) Suposem que per a cert $n \geq 1$ se satisfà: $0 \leq a_n \leq 1$ (Hipòtesi d'inducció), i demostrarem que aleshores se satisfà $0 \leq a_{n+1} \leq 1$:

A partir de la hipòtesi d'inducció, $0 \leq a_n \leq 1$, elevant al quadrat, dividint per 2, i sumant $\dfrac{1}{2}$, s'obté: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{(a_n)^2}{2} \leq 1$. Aleshores: $\dfrac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$, i per tant $0 \leq a_{n+1} \leq 1$, com volíem demostrar.

b) Demostrem per inducció sobre n que $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 1$:

(i) Per a $n = 1$ es satisfà: $a_1 \leq a_2$, ja que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ i $a_2 = \dfrac{5}{8}$.

(ii) Suposem que per a cert $n \geq 1$ se satisfà $a_n \leq a_{n+1}$ (Hipòtesi d'inducció) i demostrarem que aleshores se satisfà: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$:

A partir de la hipòtesi d'inducció, $a_n \leq a_{n+1}$, elevant al quadrat, dividint per 2, i sumant $\dfrac{1}{2}$, s'obté: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(a_n)^2}{2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{(a_{n+1})^2}{2}$, és a dir $a_{n+1} \leq a_{n+2}$, com volíem demostrar.

c) La successió $\{a_n\}$ és fitada per l'apartat a) i monòtona per l'apartat b), llavors verifica les hipòtesis de teorema de la convergència monòtona. Per tant la successió $\{a_n\}$ és convergent.

Sigui $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; aleshores $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$. A partir de la fórmula de recurrència $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(a_n)^2}{2}$, s'obté:

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (a_n)^2}{2} = \frac{1 + l^2}{2} \ \Rightarrow \ l^2 - 2l + 1 = 0 \ \Rightarrow \ l = 1.$$

Per tant $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. *(2 punts)* Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció que pren els valors:

$$f(0) = 5, f(0.5) = 4.625, f(1) = 4, f(1.5) = 3.375.$$

a) Calculeu una aproximació del valor de la integral $\displaystyle\int_0^{1.5} f(x)\,dx$ utilitzant la regla dels trapezis amb 3 trapezis.

b) Sabent que $|f''(x)| \leq 2$ per a tot $x \in [0, 1.5]$, doneu una cota de l'error de l'aproximació de l'apartat anterior.

SOLUCIÓ:

a) La fórmula dels trapezis amb 3 trapezis és:

$$T(3) = \frac{b-a}{3}\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \frac{f(x_3)}{2}\right)$$

amb $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{3}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

En aquest exercici $a = 0$ i $b = 1.5$. Aleshores $\dfrac{b-a}{3} = 0.5$. Per tant $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ i:

$$\int_0^{1.5} f(x)\,dx \simeq T(3) = 0.5\left(\frac{f(0)}{2} + f(0.5) + f(1) + \frac{f(1.5)}{2}\right) = 6.40625.$$

b) La fórmula de la cota de l'error de l'aproximació de l'apartat anterior és:

$$\left|\int_0^{1.5} f(x)\,dx - T(3)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2,$$

on M_2 és una cota superior de $|f''(x)|$ en l'interval $[a, b]$.

Per tant:

$$\left|\int_0^{1.5} f(x)\,dx - T(3)\right| \leq \frac{(1.5)^3}{12 \cdot 9} \cdot 2 = 0.0625.$$

3. *(2 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$ tal que l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $(1, 2, f(1, 2))$ és:

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0.$$

a) Calculeu els valors de la funció f i de les seves derivades parcials de primer ordre al punt $(1, 2)$. Quina és la direcció en la que la derivada direccional de f en el punt $(1, 2)$ és màxima? Calculeu el valor de la derivada direccional màxima de f en el punt $(1, 2)$.

b) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $(1, 2)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{PQ}$, per a $P = (1, 2)$ i $Q = (3, 4)$.

SOLUCIÓ:

a) Donat que f és de classe C^1, l'equació del pla tangent a la superficie $z = f(x, y)$ en el punt $(1, 2, f(1, 2))$ és:

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot (y-2).$$

L'equació $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ equival a $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}$.
S'ha de complir:

$$f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot (y-2) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}.$$

Per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{3}{4},\ f(1,2) = -\frac{7}{4}.$$

Donat que f és de classe C^1, la direcció en la que la derivada direccional de f en el punt $(1, 2)$ és màxima és la del vector gradient de f en el punt $(1, 2)$, que és $\vec{\nabla} f(1,2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.
El valor de la derivada direccional màxima de f en el punt $(1, 2)$ és el mòdul del vector gradient de $f$en el punt $(1, 2)$, que és $||\vec{\nabla} f(1,2)|| = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

b) El mòdul del vector $\overrightarrow{PQ}$ és $||\overrightarrow{PQ}|| = ||(2,2)|| = 2\sqrt{2}$. Per tant el vector unitari en la direcció i sentit del vector $\overrightarrow{PQ}$ és $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Donat que f és de classe C^1, la devivada direccional demanada és:

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

4. *(4 punts)* Considerem el paraboloide el.líptic $z = 1 + x^2 + 5y^2$

a) Per a quins valors de z no hi ha punts a les corbes de nivell? Demostreu que la corba de nivell $z = 11$ és l'el.lipse $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 2$.

b) Trobeu el pla tangent i la recta normal al paraboloide en el punt $(2, 1, 10)$.

c) Calculeu la distància mínima entre els punts del paraboloide i els punts del pla $z = 4x + 10y$.

(Fórmula de la distància d'un punt (x, y, z) al pla d'equació $ax+by+cz+d = 0$: $\dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$)

SOLUCIÓ:

a) Donat $k \in \mathbb{R}$, la corba de nivell $z = k$ té equació $x^2 + 5y^2 + 1 = k$, que és $x^2+5y^2 = k-1$. Per tant, no hi ha punts a les corbes de nivell per a $z = k < 1$.
Per a $z = 11$ tindrem $x^2 + 5y^2 = 10$, que és $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 2$.

b) L'equació del pla tangent a la superfície $z = \varphi(x, y)$ en el punt $(a, b, \varphi(a, b))$ és:

$$z = \varphi(a, b) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

L'equació contínua de la recta normal a la superfície $z = \varphi(x, y)$ en el punt $(a, b, \varphi(a, b))$ és:

$$\frac{x - a}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)} = \frac{y - b}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)} = \frac{z - \varphi(a, b)}{-1}$$

Calculant les derivades parcials de $\varphi(x, y) = 1+x^2+5y^2$ en el punt $(2, 1, \varphi(2, 1)) = (2, 1, 10)$, tenim que:
L'equació del pla tangent demanat és: $z = 10 + 4(x - 2) + 10(y - 1)$, que és $z = 4x + 10y - 8$.
L'equació contínua de la recta normal demanada és:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{10} = \frac{z - 10}{-1}$$

c) És un problema d'extrems condicionats. La condició és $z = 1 + x^2 + 5y^2$.
La funció a optimitzar és la distància d'un punt (x, y, z) al pla $z = 4x + 10y$, que és $d(x, y, z) = \left|\dfrac{4x + 10y - z}{\sqrt{117}}\right|$ o, equivalentment, el quadrat d'aquesta distància $d^2(x, y, z) = \dfrac{(4x + 10y - z)^2}{117}$, o, més senzill, la funció $f(x, y, z) = (4x + 10y - z)^2$. Substituint $z = 1 + x^2 + 5y^2$, s'obté la funció de 2 variables:

$$g(x, y) = f(x, y, 1 + x^2 + 5y^2) = (4x + 10y - 1 - x^2 - 5y^2)^2$$

que és una funció polinòmica i per tant de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^2$. Igualant les seves derivades parcials a zero s'obté el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4x + 10y - 1 - x^2 - 5y^2)(4 - 2x) = 0 \\ \\ 2(4x + 10y - 1 - x^2 - 5y^2)(10 - 10y) = 0 \end{cases}$$

Les solucions d'aquest sistema són els punts $\{(x, y)|4x + 10y - 1 - x^2 - 5y^2 = 0\} = \{(x, y)|(x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 8\}$ i el punt $(2, 1)$.

Per a tot (x, y) tal que $4x + 10y - 1 - x^2 - 5y^2 = 0$, es té $g(x, y) = 0$, que és el valor mínim que pot prendre $g(x, y)$.

Per tant la distància mínima entre els punts del paraboloide $z = 1 + x^2 + 5y^2$ i els punts del pla $z = 4x + 10y$ és 0.

(La distància mínima és 0, donat que el pla i el paraboloide es tallen; el conjunt d'intersecció és l'el·lipse $\{(x, y, z)|z = 4x + 10y, (x - 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 8\}$.)