1. *(5 punts)* Considereu les funcions $f(x) = \dfrac{1}{e-1}(x-1)$ i $g(x) = \ln x$.

a) Doneu el domini de les dues funcions i representeu les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en una mateixa gràfica.

b) Demostreu que l'equació $f(x) - g(x) = 0$ té exactament dues solucions.

c) Calculeu els dos límits següents:

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}.$$

2. *(5 punts)* Sigui $f(x) = e^x$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ a l'origen i el terme complementari corresponent.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ a l'origen per calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ amb una precisió de tres decimals correctes ($error \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$).

c) Calculeu el valor aproximat de $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ utilitzant el polinomi de Taylor del grau determinat en l'apartat anterior.

d) Doneu una cota superior de l'error més ajustada que la precisió demanada utilitzant el terme complementari.

1. *(5 punts)* Considereu les funcions $f(x) = \dfrac{1}{e-1}(x-1)$ i $g(x) = \ln x$.

a) Doneu el domini de les dues funcions i representeu les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en una mateixa gràfica.

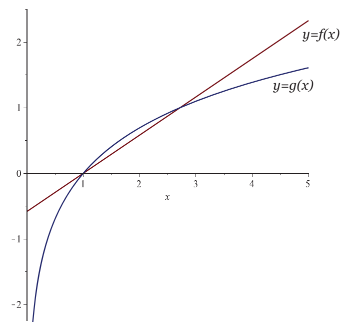
b) Demostreu que l'equació $f(x) - g(x) = 0$ té exactament dues solucions.

c) Calculeu els dos límits següents:

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}.$$

SOLUCIÓ:

a) Dom $f = \mathbb{R}$, Dom $g = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.



b) Sigui $h(x) = f(x) - g(x)$.
Existència de les dues solucions: h és una funció contínua en $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ per ser resta de funcions contínues. Amb la calculadora s'obté $h(0.5) > 0$, $h(1.5) < 0$, $h(3) > 0$. Per tant, aplicant el Teorema de Bolzano, queda demostrat que $\exists c_1 \in (0.5, 1.5)$ tal que $h(c_1) = 0$ i $\exists c_2 \in (1.5, 3)$ tal que $h(c_2) = 0$.
Només hi ha dues solucions: Per reducció al absurd, si hi haguessin tres solucions diferents $a, b, c \in (0, +\infty)$, amb $a < b < c$, es tindria $h(a) = h(b) = h(c) = 0$. Llavors, per ser h una funció contínua i derivable en $(0, +\infty)$, el teorema de Rolle assegura que existirien dos nombres $\alpha_1 \in (a, b)$ i $\alpha_2 \in (b, c)$ diferents amb $h'(\alpha_1) = h'(\alpha_2) = 0$, però $h'(x) = \dfrac{1}{e-1} - \dfrac{1}{x}$ que s'anul·la en un únic punt $(x = e - 1)$.

c) Aplicant la Regla de L'Hôpital, que es pot aplicar donat que les dues funcions són derivables en $(0, +\infty)$, s'obté:

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(e-1)\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e-1}{x} = e - 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e-1)\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e-1}{x} = 0.$$

2. *(5 punts)* Sigui $f(x) = e^x$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ a l'origen i el terme complementari corresponent.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ a l'origen per calcular $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ amb una precisió de tres decimals correctes ($error \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$).

c) Calculeu el valor aproximat de $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ utilitzant el polinomi de Taylor del grau determinat en l'apartat anterior.

d) Doneu una cota superior de l'error més ajustada que la precisió demanada utilitzant el terme complementari.

SOLUCIÓ:

a) La funció exponencial té derivades de tots els ordres a tota la recta real. El polinomi de Taylor d'ordre n a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. En el cas $f(x) = e^x$ i donat que totes les derivades de $f(x)$ coincideixen amb $f(x)$ i per tant $f^{(k)}(0) = 1\ \forall k$, el polinomi és:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

El reste o terme complementari del polinomi de Taylor d'ordre n a l'origen d'una funció $f(x)$ és: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, per a cert c entre 0 i x. En el cas $f(x) = e^x$, el terme complementari del polinomi és:

$$R_n = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{per a cert } c \text{ entre } 0 \text{ i } x.$$

b) L'error absolut de l'aproximació de $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = f(-0.25)$ per $P_n(-0.25)$, és:

$$\varepsilon = |R_n(-0.25)| = |\frac{e^c}{(n+1)!}(-0.25)^{n+1}| = \frac{e^c}{(n+1)!}(0.25)^{n+1},$$

amb $-0.25 \leq c \leq 0$. Per ser la funció exponencial creixent: $-0.25 \leq c \leq 0 \Rightarrow e^c \leq e^0 = 1$, i per tant: $\varepsilon \leq \frac{(0.25)^{n+1}}{(n+1)!}$, i el primer número natural que compleix $\frac{(0.25)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0.0005$ és $n = 3$. Per tant, el grau del polinomi de Taylor a l'origen de la funció $y = e^x$ necessari per calcular $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ amb la precisió demanada és $n \geq 3$.

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq P_3(-0.25) = 1 + (-0.25) + \frac{(-0.25)^2}{2!} + \frac{(-0.25)^3}{3!} = 0.77864583 \simeq 0.7786$

d) L'error és: $|R_3(-0.25)| = |\frac{e^c}{(4)!}(-0.25)^4|$ amb $-0.25 \leq c \leq 0$. Per tant una cota superior de l'error més ajustada que la precisió demanada és $\frac{(0.25)^4}{(4)!} \simeq 0.00016 < 0.0005$