1. *(3 punts)*

a) Demostreu que la fórmula d'iteració del mètode de la tangent (Newton-Raphson) per al càlcul aproximat de zeros de funcions per a la funció $f(x) = x^k - a$ es pot escriure de la manera següent:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left(\frac{a}{(x_n)^{k-1}} + (k-1)x_n\right)$$

b) Per al cas particular de $f(x) = x^3 - 2$ i $x_1 = 4/3$:

b.1) Sabent que $x_n > \sqrt[3]{2}$, $\forall n \geq 1$, demostreu que $x_{n+1} - x_n < 0$, $\forall n \geq 1$.

b.2) Sabent que $x_n > \sqrt[3]{2}$, $\forall n \geq 1$, demostreu que la successió $(x_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

b.3) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial $x_1 = 4/3$ per a calcular $\sqrt[3]{2}$ amb error més petit que 10^{-2}.

2. *(2 punts)*

a) Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul.

b) Calculeu el límit següent:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{x^3}$$

c) Considereu la funció:

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt$$

Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de f a l'origen.

3. *(5 punts)* Considereu la funció $f(x, y) = (2x - y + 1)^2$.

a) Calculeu la derivada direccional de f en el punt $P = (0, 0)$ en la direcció del vector $\overrightarrow{v} = (4, 3)$.

b) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P = (0, 0)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

c) Trobeu els extrems relatius de f.

d) Dibuixeu el conjunt $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2+(y-3)^2 \leq 1, y \leq x+3\}$ i demostreu que és compacte.

e) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

f) Trobeu els extrems absoluts de f en K.