1. *(2 punts)* Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$x^2 - 3 \leq 2x.$$

Representeu el conjunt de solucions sobre la recta real y digueu si tal conjunt és fitat. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i l'ínfim. Digueu si tal conjunt té màxim o mínim. Quins són?

Solución.

$$x^2 - 3 \leq 2x \iff x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x+1)(x-3) \leq 0$$

Esta desigualdad es equivalente a dos sistemas siguientes

a) $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$ (Incompatible)

b) $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Longrightarrow -1 \leq x \leq 3.$

Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo $A = [-1, 3]$.

A es acotado superiormente ya que $\exists\, K \in \mathbb{R} : K \geq a,\ \forall\, a \in A$, por ejemplo, K=4.

A es acotado inferiormente $\exists\, k \in \mathbb{R} :\ k \leq a,\ \forall\, a \in A$, por ejemplo, k=-2.

A es acotado ya que A es acotado superiormente e inferiormente.

$\exists \sup A = 3 \in A \Longrightarrow \exists \max A = 3$ y $\exists \inf A = -1 \in A \Longrightarrow \exists \min A = -1$.

2. *(2 punts)* Enuncieu el criteri de l'arrel-quocient per a successions de nombres reals i calculeu

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{n!}$$

Solución. Criterio de la raíz-cociente:

Si $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,\ (a_n \neq 0,\ \forall\, n \geq n_0)$.

El límite requerido se puede representar de la forma siguiente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \text{ donde } |a_n| = \frac{n!}{(n+1)^n},$$

para calcularlo utilizaremos el criterio de la raíz-cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)(n+1)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-(n+1)}{n+2}} = e^{-1}.$$

Este límite existe y es igual a e^{-1}, entonces el límite requerido tambien existe y es igual a e^{-1}.

3. *(3 punts)* Considerem l'equació

$$x\,e^{-x} - \frac{1}{4} = 0$$

a) Demostreu que aquesta equació té dues solucions a l'interval $[0,3]$.

b) Demostreu que aquesta equació només té dues solucions reals.

c) Usant el mètode de la bisecció calculeu la menor de las dues solucions amb un error absolut menor que 0.1 i el nombre d'iteracions necessàries.

Solución.

a) La función que define la ecuación es un producto de un polinomio por una exponencial más una constante. Todas las funciones involucradas son continuas y derivables en toda la recta real. Por tanto la función $f(x) = xe^{-x} - 1/4$ también lo es.

Por lo tanto, si aplicamos el teorema de Bolzano, basta con detectar un cambio de signo de $f(x)$ dentro del intervalo $[0,3]$ para poder justificar que existe una solución de la ecuación planteada.

Calculando, por ejemplo, valores de la función para x enteros en el intervalo considerado vemos que: $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f(2) > 0$ y $f(3) < 0$. Por tanto la ecuación tiene al menos dos soluciones una en el intervalo $(0,1)$ y otra en el intervalo $(2,3)$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}([0,\,1]) \\ f(0)\cdot f(1) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\; c_1 \in\ (0,1) :\ f(c_1) = 0$$

y

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}([2,\,3]) \\ f(2)\cdot f(3) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\; c_2 \in\ (2,3) :\ f(c_2) = 0.$$

b) Como ya se ha justificado antes que la función es continua y derivable en toda la recta real, podemos aplicar el teorema de Rolle para demostrar lo que nos piden. Aplicamos un argumento de reducción al absurdo. Sabemos que hay al menos 2 soluciones, y suponemos que haya más de 2. Por tanto tendríamos 3 soluciones, que podemos denotar como α, β, γ, tales que $\alpha < \beta < \gamma$ y en las cuales el valor de $f(x)$ es cero. Entonces por el teorema de Rolle tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}([\alpha,\,\beta]) \\ f \text{ derivable en } (\alpha,\beta) \\ f(\alpha) = f(\beta) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\; p_1 \in\ (\alpha,\beta) :\ f'(p_1) = 0$$

y

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}\left([\beta, \gamma]\right) \\ f \text{ derivable en } (\beta,\gamma) \\ f(\beta) = f(\gamma) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, p_2 \in (\beta,\gamma) : f'(p_2) = 0$$

eso implica que la derivada de $f(x)$ se tiene que anular en al menos dos puntos distintos p_1 y p_2.

Pero si hacemos la derivada obtenemos: $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ que solo es igual a cero en $x = 1$ ya que la exponencial siempre toma valores positivos. Por tanto tenemos una contradicción y se deduce que la hipótesis de que hay más de 2 soluciones ha de ser falsa. Puesto que en el apartado (a) ya se justificó que había dos soluciones, se deduce que la ecuación solamente admite esas dos soluciones en toda la recta real.

c) La menor de las soluciones es la que está en el intervalo $(0,1)$. Evidentemente, el número de iteraciones que se necesitan con el método de bisección para obtener la solución con error menor que 0.1 dependerá de la longitud del intervalo inicial en el que acotemos la solución. Si usamos el intervalo de longitud 1 que se ha indicado antes y la precisión predeterminada de aproximación $\eta = 0.1$ entonces el número n de pasos que garantiza esta precisión se calcula resolviendo respecto a n la desigualdad siguiente

$$\frac{b-a}{2^n} < \eta \Longrightarrow 2^n > \frac{b-a}{\eta} \Longrightarrow 2^n > \frac{1-0}{0.1} \Longrightarrow 2^n > 10 \Longrightarrow n \geq 4.$$

Entonces n, como mínimo, es 4.

Si tomamos 0 y 1 como valores iniciales para aplicar el método de bisección, teniendo en cuenta que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, obtenemos que:

Primera iteración: $c_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$, $f(0.5) > 0$, solución en $(0, 0.5)$.

Segunda iteración: $c_2 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$, $f(0.25) < 0$ solución en $(0.25, 0.5)$.

Tercera iteración: $c_3 = \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375$, $f(0.375) > 0$ solución en $(0.25, 0.375)$.

Cuarta iteración: $c_4 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.3125$

La solución aproximada es $0.3125 \in (0.25, 0.375)$ obtenida en la última iteración y el error absoluto ε de esta aproximación realmente cumple la condición, es decir, $\varepsilon < |0.3125 - 0.25| = |0.3125 - 0.375| = 0.0625 < 0.1$.

4. *(3 punts)*

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f en el punt x_0 i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Determineu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $\sqrt[3]{x}$ en el punt $x_0 = 1$.

c) Determineu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

d) Calculeu el valor aproximat de $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ utilitzant el polinomi de l'apartat b). Doneu una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació utilitzant el residu de l'apartat c).

Solución.

a) Polinomio de Taylor:

$$P_2(f,x_0,x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Resto de Taylor:

$$R_2(f,x_0,x) = \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!}(x-x_0)^3 \quad \text{donde } \alpha \text{ está entre } x_0 \text{ y } x.$$

b-c) Como $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad f'''(x) = \dfrac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$

y $\quad f(1) = 1, \quad f'(1) = \dfrac{1}{3}. \quad f''(1) = -\dfrac{2}{9}, \quad f'''(\alpha) = \dfrac{10}{27\alpha^{\frac{8}{3}}}$

resulta que

$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2, \quad R_2(x) = \frac{5}{81\alpha^{\frac{8}{3}}}(x-1) \quad$ donde $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = f(\frac{3}{2}) \approx P_2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{3}(\frac{3}{2}-1) - \frac{1}{9}(\frac{3}{2}-1)^2 = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{41}{36} \approx 1.1389$

Cáclulo de la cota superior del error absoluto de la aproximación anterior:

$$\varepsilon = |\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{41}{36}| = |f(\tfrac{3}{2}) - P_2\left(\tfrac{3}{2}\right)| = |R_2\left(\tfrac{3}{2}\right)| = \left|\frac{5}{81\alpha^{\frac{8}{3}}}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3\right| = \left|\frac{5}{2^3 81\alpha^{\frac{8}{3}}}\right| <$$

$$< \frac{5}{2^3 81} = \frac{5}{648} \approx 0.0077 \quad \text{ya que } 1 < \alpha < \tfrac{3}{2}.$$