1. Considereu la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}$$

a) *(4 punts)* Trobeu el seu polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) *(4 punts)* Fent ús del polinomi i de l'expressió del residu trobats a l'apartat anterior i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de $\dfrac{1}{\sqrt{(1.05)^5}}$ i acoteu l'error.

c) *(2 punts)* Fent ús de Maple s'obté: $evalf\left(\dfrac{1}{\sqrt{(1.05)^5}}\right) = 0.8851701342$. Prenent aquest valor com a valor correcte, evalueu l'error de l'aproximació trobada a l'apartat b) i comproveu que és consistent amb el valor de la cota de l'error trobat a l'apartat b).

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 2 d'una funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és: $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és: $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$ per a cert c entre 0 i x.
Les derivades primera, segona i tercera de f són:

$$f'(x) = \frac{5}{2(1-x)^{\frac{7}{2}}}, \quad f''(x) = \frac{35}{4(1-x)^{\frac{9}{2}}} \quad \text{i} \quad f'''(x) = \frac{315}{8(1-x)^{\frac{11}{2}}}.$$

Substituïnt x per 0 s'obté $f'(0) = \frac{5}{2}$ i $f''(0) = \frac{35}{4}$, llavors el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_2(x) = 1 + \frac{5}{2}x + \frac{35}{8}x^2.$$

I l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_2(x) = \frac{105}{16(1-c)^{\frac{11}{2}}}x^3$$

per a cert c entre 0 i x.

b) Fent ús del polinomi trobat el valor aproximat de $\dfrac{1}{\sqrt{(1.05)^5}}$ és:

$$\frac{1}{\sqrt{(1.05)^5}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(-0.05))^5}} = f(-0.05) \simeq P_2(-0.05) = 0.8859375000.$$

L'error de l'aproximació $\dfrac{1}{\sqrt{(1.05)^5}} \simeq P_2(-0.05)$ és el valor absolut del residu: $|R_2(-0.05)|$. Fent $x = -0.05$ en l'expressió del residu de l'apartat a) s'obté:

$$|R_2(-0.05)| = \frac{105}{16(1-c)^{\frac{11}{2}}}(0.05)^3, \text{ per a cert c tal que} - 0.05 < c < 0.$$

Aquesta expressió és creixent en c, per tant, en ser $-0.05 < c < 0$, es té:

$$|R_2(-0.05)| = \frac{105}{16(1-c)^{\frac{11}{2}}}(0.05)^3 < \frac{105}{16}(0.05)^3 \simeq 0.00082032.$$

Així, una cota superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat anterior és $cota_{error} = 0.00082032$.

c) Prenent el valor 0.8851701342 com a valor correcte de $\dfrac{1}{\sqrt{(1.05)^5}}$, l'error de l'aproximació trobada a l'apartat b) és:

$$|0.8851701342 - 0.8859375000| = 0.0007673658$$

Donat que $0.0007673658 < cota_{error} = 0.00082032$, queda comprovat que és consistent amb el valor de la cota de l'error trobat a l'apartat b).

2. Donades les funcions $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ i $g(x) = |1 - x|$.

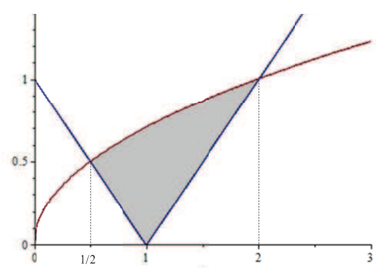
a) *(2 punts)* Representeu en una mateixa gràfica les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

b) *(4 punts)* Calculeu l'àrea del recinte del pla limitat per les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

c) *(4 punts)* Considereu les funcions $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ i $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} g(t)\,dt$. Justifiqueu l'existència de les seves derivades $F'(x)$ i $G'(x)$ per a $x > 1$ i calculeu-les.

SOLUCIÓ:

a) La figura següent mostra la gràfica de les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i el recinte del pla limitat per les dues corbes:



b) Atès que $g(x) = 1 - x$ si $x \leq 1$ i $g(x) = x - 1$ si $x \geq 1$, l'àrea del recinte es pot calcular fent:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x) \right) dx + \int_{1}^{2} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1) \right) dx = \frac{13}{24}$$

c) La funció f és contínua per a tot $x > 1$, per tant el Teorema Fonamental de Càlcul ens assegura que la funció F és derivable per a tot $x > 1$ i que $F'(x) = f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

La funció g és contínua per a tot $x > 1$ i tant x com x^2 són derivables per a tot $x > 1$, per tant el Teorema Fonamental de Càlcul i la Regla de la cadena ens permeten afirmar que la funció G és derivable per a tot $x > 1$ i que $G'(x) = g(x^2) \cdot 2x - g(x) = (x^2 - 1) \cdot 2x - (x - 1) = 2x^3 - 3x + 1$.

3. Considereu la funció $f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 - 2y$.

a) *(3 punts)* Calculeu la derivada direccional de f en el punt $(1,2)$ en la direcció del vector que forma un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ amb el sentit positiu de l'eix d'abcisses.

b) *(3 punts)* Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte $K \subset \mathbb{R}^2$ definit per:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

c) *(4 punts)* Trobeu els extrems absoluts de f en K.

SOLUCIÓ:

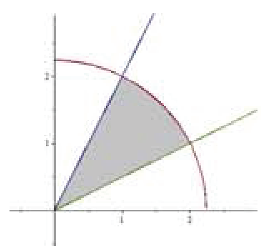
a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$. Les seves derivades parcials són: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$, per tant $\vec{\nabla} f(1,2) = (-1,2)$.

El vector unitari que forma un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ amb el sentit positiu de l'eix d'abcisses és el vector $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Per tant la devivada direccional demanada és:

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \vec{v} = (-1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Un esquema de la representació gràfica del recinte K és:



Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte K és un compacte (és tancat ja que conté a tots els seus punts frontera ($Fr(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 5,\ 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \frac{x}{2},\ 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 2x,\ 0 \leq x \leq 1\}$), i és acotat ja que $K \subset B((0,0);3)$), pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en K.

c) Els punts crítics de f són les solucions del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Per tant la funció f té un únic punt crític que és el punt $\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$. Aquest punt crític pertany a l'interior de K, per tant hi ha un punt crític de f a l'interior de K: el $\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$.

Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera de K:
(i) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = \frac{x}{2}, \ 0 \leq x \leq 2\}$: fent $y = \frac{x}{2}$ tenim $f(x, \frac{x}{2}) = \frac{5}{4}x^2 - 4x$, que és una funció d'una variable $\varphi(x) = \frac{5}{4}x^2 - 4x$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x) = \frac{5}{x}x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$. Així s'obté el punt crític $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y = 2x, \ 0 \leq x \leq 1\}$: fent $y = 2x$ tenim $f(x, 2x) = 5x^2 - 7x$, que és una funció d'una variable $\psi(x) = 5x^2 - 7x$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\psi'(x) = 10x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{10}$. Així s'obté el punt crític $\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{5}\right)$.
(iii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment circular $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 - 5 = 0, \, 1 \leq x \leq 2\}$: aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - 3x + y^2 - 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_x = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Per la primera equació x no pot ser igual a 0 i per la segona y tampoc. Multiplicant la primera equació per y, la segona equacio per x i restant les equacions resultants tenim: $-3y + 2x = 0$ i per tant $y = \frac{2}{3}x$. Fent $y = \frac{2}{3}x$ en la tercera equació, s'obté: $\frac{13}{9}x^2 - 5 = 0$, i per tant $x^2 = \frac{45}{13}$, d'on la solució positiva és: $x = \frac{3\sqrt{65}}{13}$ i s'obté el punt crític $\left(\frac{3\sqrt{65}}{13}, \frac{2\sqrt{65}}{13}\right)$.
(iv) Vèrtexs de K: $(0,0)$, $(1,2)$ i $(2,1)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:
$f\left(\frac{3}{2}, 1\right) = -\frac{13}{4}$, $f\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{5}$, $f\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{5}\right) = -\frac{49}{20}$,
$f\left(\frac{3\sqrt{65}}{13}, \frac{2\sqrt{65}}{13}\right) = 5 - \sqrt{65}$, $f(0,0) = 0$, $f(1,2) = -2$, $f(2,1) = -1$,
Per tant, el valor màxim absolut de f en K és 0 i l'assoleix al punt $(0,0)$ i i el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{13}{4}$ i l'assoleix al punt $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.