RESOLUCIÓ

1 **a)** Enuncieu el criteri del sandvitx aplicat a successions que acompleixen:

$$a_n \leq b_n \leq c_n\,, \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}\,.$$

b) Feu servir aquest criteri per trobar, si és possible, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ on el terme general de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Resolució: (3 punts)

a) *Criteri del sandvitx. Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tres successions de nombres reals tals que:*

$$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n \leq c_n\,, \\ \triangleright\ a_n \text{ convergent i } \ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n\,, \\ \triangleright\ c_n \text{ convergent i } \ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n\,, \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textbf{si } \textit{la successió } b_n \textit{ és convergent} \\ \textit{el seu límit compleix} \\ \ell_1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \ell_2\,. \end{array}\right.$$

En particular, si $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, resulta que b_n és convergent i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

b) *Dels sumands del terme general de la successió $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el més petit és $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ i el més gran $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (es corresponen al denominador més gran i més petit respectivament). Com que el terme general b_n té n sumands, prenem $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ i $c_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ successions que compleixen $a_n \leq b_n \leq c_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$ Calculem el límit de a_n i c_n,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n^2}} = 1.$$

El límit de les dues successions és 1, aleshores es compleixen les hipotesis del criteri del sandvitx, i per tant podem conclure que b_n és convergent i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

2 Trobeu les equacions de la recta i la paràbola tangents a la funció $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{8+\sin t}\, dt$, en el punt d'abscissa $x = 0$.

Resolució: (3 punts)

Les equacions s'obtenen del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ en $x = 0$ de grau 1 i 2 respectivament. Ens cal doncs calcular $F(0)$, $F'(0)$ i $F''(0)$ si existeixen.

Per a les dues primeres, fem ús del Teorema Fonamental del Càlcul Integral, sigui $f(t) = \sqrt[3]{8+\sin t}$ definida i contínua per a tot real t, llavors la funció $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ està ben definida, compleix que $F(0) = 0$, és derivable i $F'(x) = \sqrt[3]{8+\sin x}$ per a qualsevol x; en particulat $F'(0) = \sqrt[3]{8} = 2$.

Per calcular $F''(0)$ s'observa que la funció definida per $F'(x) = \sqrt[3]{8+\sin x}$ és una funció derivable per a tot real x, la seva funció derivada és $F''(x) = \frac{1}{3}\cos x(\sqrt[3]{8+\sin x})^{-2}$, llavors $F''(0) = 1/12$.

Amb tots els càlculs fets, el polinomi de Taylor $F(0)+F'(0)x$ és $2x$, llavors l'equació de la recta tangent és $y = 2x$.
El polinomi de Taylor $F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2$ és $2x + \frac{x^2}{24}$, llavors l'equació de la paràbola tangent és $y = 2x + \frac{x^2}{24}$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

3 Sigui la integral següent:

$$I = \int_{0.6}^{1.0} \big(\sin(x)\cos(x)\big)^{4/3}\, dx\,.$$

a) Sabent que $0 < f^{(4)}(x) < 20$, $\forall x \in [0.6, 1.0]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes $(0.5 \cdot 10^{-4})$.

b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat **a)**.

c) Calculeu una cota superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat **b)**.

Resolució: (4 punts)

a) *La fórmula de l'error del mètode de Simpson és:*

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(h) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)\,, \text{ amb } c \in (a,b).$$

En el nostre cas, $a = 0.6$*,* $b = 1.0$*,* $0 < f^{(4)}(x) < 20$ *i una precisió de quatre decimals correctes, substituïnt en l'expressió anterior, el nombre de subintervals necessaris ha de verificar que*

$$\left| -\frac{(0.4)^5}{180n^4} 20 \right| < 0.5 \cdot 10^{-4}\,,$$

equival a $n > 2.18409$*. Aleshores cal pendre* $\mathbf{n = 4}$ *subintervals per obtenir el valor de la integral pel mètode de Simpson amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes.*

b) *Subtituïm* $a = 0.6$*,* $b = 1.0$*,* $n = 4$ *i* $h = (b-a)/n$ *a la fórmula de Simpson, el resultat és*

$$\frac{1}{30}\left[f(0.6) + 4f(0.7) + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1.0)\right]$$

que per $f(x) = \big(\sin(x)\cos(x)\big)^{4/3}$ *s'obté el valor de* 0.1531040397*. El valor de la integral amb l'exactitud demanada és* $I = 0.15310 \pm 0.00005$*.*

c) *Per a* $n = 4$ *l'expressió de la cota d'error* $\left| -\frac{(0.4)^5}{180n^4} 20 \right|$ *pren el valor de* 0.000004*, s'han obtingut en realitat cinc decimals correctes, s'escriu* $I = 0.15310 \pm 0.000004$*.*

◇◇◇◇◇

RESOLUCIÓ

1 Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió tal que $a_1 = 1$ i $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$ si $n \geq 1$.

a) Demostreu que $0 < a_n < 2, \quad \forall n \geq 1$.

b) Demostreu que $\{a_n\}$ és creixent.

c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

Resolució: (4 punts)

a) *La demostració és pel principi d'inducció.*

$\triangleright$ *Verifiquem que el primer ho compleix; com* $a_1 = 1$ *i* $0 < 1 < 2$ *queda provat que* $0 < a_1 < 2$.

$\triangleright$ *Suposem que* $0 < a_n < 2$ *i deduïm que llavors* $0 < a_{n+1} < 2$.

En efecte, de $0 < a_n < 2$ *sumant 1 s'obté* $1 < 1 + a_n < 3$*; com que la funció* $\sqrt{\square}$ *és creixent, podem escriure* $1 < \sqrt{1+a_n} < \sqrt{3}$ *i com que* $\sqrt{3} < 2$ *i* $1 > 0$ *podem afirmar* $0 < a_{n+1} < 2$.

b) *Cal provar que* $a_n < a_{n+1}, \ \forall n \geq 1$. *La demostració és pel principi d'inducció.*

$\triangleright$ *Verifiquem que pel primer la propietat és certa;* $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$ *i* $1 < \sqrt{2}$, *llavors* $a_1 < a_2$.

$\triangleright$ *Suposem que* $a_{n-1} < a_n$ *i deduïm que llavors* $a_n < a_{n+1}$.

En efecte, de $a_{n-1} < a_n$ *sumant 1 s'obté* $1 + a_{n-1} < 1 + a_n$*; com que la funció* $\sqrt{\square}$ *és creixent, podem escriure* $\sqrt{1+a_{n-1}} < \sqrt{1+a_n}$ *per tant podem afirmar* $a_n < a_{n+1}$.

c) *La successió* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és convergent ja que es verifiquen les hipotesis del teorema de la convergència monòtona.*

El límit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ *ha de complir* $\ell = \sqrt{1+\ell}$, *elevant al quadrat és* $\ell^2 = 1 + \ell$. *Aquesta equació de segon grau té dues solucions,* $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. *Dels dos valors obtinguts, ens quedem amb* $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, *ja que l'altre és 0.61804 però la nostra successió és creixent i* $a_1 = 1$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

2 Sigui $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Obteniu el desenvolupament de Taylor de grau dos de la funció $f(x)$ en $x = 0$.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat **a)** calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1.02}$.

c) Doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat **b)**.

Resolució: (3 punts)

a) *El polinomi de Taylor de grau 2 en $x = 0$ per a la funció $f(x)$ és*

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

Ens cal doncs calcular $f(0)$, $f'(0)$ i $f''(0)$ si existeixen.

Sigui $f(x) = \sqrt{1+x}$ definida, contínua tal que $f(0) = 1$.
La funció $f(x)$ és derivable i la funció derivada és $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ que en $x = 0$ dóna $f'(0) = 1/2$.
La funció $f'(x)$ és derivable, la funció derivada és $f''(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ que substituint dóna $f''(0) = -1/4$.

Amb tots els càlculs fets, el polinomi de Taylor és $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$.

b) *Cal substituix $x = 0.02$ en el polinomi de Taylor obtingut, el resultat és* 1.009950000.

c) *L'expressió del residu és $f(0.02) - P_n(0.02) = \dfrac{f'''(c)}{3!}(0.02)^3$, amb $c \in (0, 0.02)$. Per tal de donar una fita superior de l'error comès calcularem i acotarem $f'''(c)$ per a $c \in (0, 0.02)$.*
La funció $f''(x)$ és derivable, la seva funció derivada és $f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$ que té el valor màxim a l'interval en $(0, 0.02)$ en 0; dit altrament, $|f'''(c)| \leq f'''(0) = 3/8$, $\forall c \in (0, 0.02)$.
Així, $0.5 \cdot 10^{-3}$ és una fita superior de l'error comès, ja que

$$\left| \frac{f'''(c)}{3!}(0.02)^3 \right| \leq \frac{3}{8 \cdot 3!}(0.02)^3 = 0.0005\,.$$

◇◇◇◇◇

3 **a)** Enuncieu el Teorema Fonamental del Càlcul Integral.

b) Feu servir aquest teorema per calcular, si és possible, el límit següent

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3}.$$

Resolució: (3 punts)

a) *Teorema Fonamental del Càlcul Integral. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és contínua en $[a,b]$, llavors la funció $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida per*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

és una funció **derivable**, *la funció derivada és $F'(x) = f(x)$ per a tot x de $[a,b]$.*

En particular, si $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ fent ús de la regla de la cadena i el teorema fonamental és té $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ per a tot x de $[a,b]$.

b) *En un primer pas, s'obté indeterminació: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} = \frac{0}{0}$. Les funcions del numerador ($\displaystyle\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt$) i el denominador ($x^3$) són contínues i derivables en un tot domini de reals positius; llavors satisfan les hipòtesis de la Regla de L'Hôpital.*

Sigui $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt$, la funció $\sin\sqrt{t}$ és contínua per a tot real $t > 0$, llavors pel teorema del fonamental del càlcul, la funció $F(x)$ és derivable i la seva derivada és $F'(x) = 2x\sin\sqrt{x^2} = 2x\sin x$ per a $x > 0$. La funció $G(x) = x^3$ és derivable i $G'(x) = 3x^2$. Finalment, del fet que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

es dedueix que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} = \frac{2}{3}.$$

.

◇◇◇◇◇