1. *(2 punts)* Calculeu els límits següents:

$$a)\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\,\sin n!}{n+1},\qquad\qquad b)\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}\ \text{ per a } b>a>0.$$

Indiqueu els criteris que feu servir i justifiqueu tots els passos.

Solució. a) El límit es pot calcular aplicant el criteri del sandwich. En efecte, per a tot n natural, donat que $-1\le\sin n!\le 1$, es té:

$$\frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

A més, donat que els exponents d'n en el numerador i en el denominador satisfan $2/3<1$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

b) Treient factor comú el terme dominant:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b^n\cdot\left(\frac{a^n}{b^n}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}b\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=b.$$

Per tant, si $b>a>0$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$.

2. *(2 punts)* Sigui f una funció contínua en l'interval $[0,1]$ tal que $0<f(x)<1$. Demostreu que la funció $F(x)=2x-1-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ té un únic zero en $[0,1]$.

Solució. Para demostrar la existencia de solución de $F(x)=0$ utilizaremos el teorema de Bolzano, que require que la función sea continua. Para justificar que la solución es única nos basaremos en el teorema de Rolle que requiere además que la función sea derivable.

La función $F(x)$ es suma de una función polinómica, que es continua y derivable en todos los reales, y una función integral $G(x)=\int_0^x f(t)dt$. Puesto que f es continua será integrable en $[0,1]$ y por el teorema fundamental del cálculo la función $G(x)$ es también continua y derivable en $[0,1]$, siendo $G'(x)=f(x)$ para todo $x\in[0,1]$. Por tanto $F(x)$ es continua y derivable en $[0,1]$ al ser igual a la suma de dos funciones continuas y derivables en ese mismo intervalo.

Por el teorema de Bolzano, al ser $F(x)$ continua en $[0,1]$, si cambia de signo en dicho intervalo entonces tendrá un cero. Evaluamos F en los extremos del intervalo y obtenemos:

$$F(0) = -1 - \int_0^0 f(t)dt = -1 < 0$$

Pues al ser iguales el límite superior e inferior de la integral, su valor es cero.

$$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)dt > 0$$

Puesto que al ser f positiva y menor que 1, la integral será igual a un área inferior a la de un cuadrado de lado unidad, es decir, que al ser $f(x) < 1$ para todo $x \in [0,1]$ entonces

$$\int_0^1 f(t)dt < \int_0^1 1\,dt = 1$$

Por lo tanto $F(0) \cdot F(1) < 0$ se deduce que existe un cero de $F(x)$ en $(0,1)$.

Para demostrar que el cero es único en el intervalo, utilizamos el argumento de reducción al absurdo basado en el teorema de Rolle. Supongamos que existe más de un cero de $F(x)$ en el intervalo $(0,1)$, puesto que F es continua y derivable en dicho intervalo, por el teorema de Rolle debe existir al menos un punto en el intervalo en el cual se anule la derivada de $F(x)$.

Sin embargo, al derivar la función F obtenemos:

$$F'(x) = 2 - f(x)$$

que nunca se anula en $(0,1)$ ya que en ese intervalo los valores de f están comprendidos entre cero y uno. Esto contradice la premisa inicial y por tanto se reduce que $F(x)$ no puede tener más de un zero en el intervalo.

3. *(2 punts)* Sigui la funció $f(x) = e^{-2x^2}$ i la paràbola $y = Ax^2$, $A \in \mathbb{R}$.

a) Determineu el valor del paràmetre A perquè la paràbola talli la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = \frac{1}{2}$.

b) Per al valor de A obtingut en l'apartat a) feu un croquis de la regió D situada al primer quadrant i limitada per l'eix y, la paràbola i la gràfica de f.

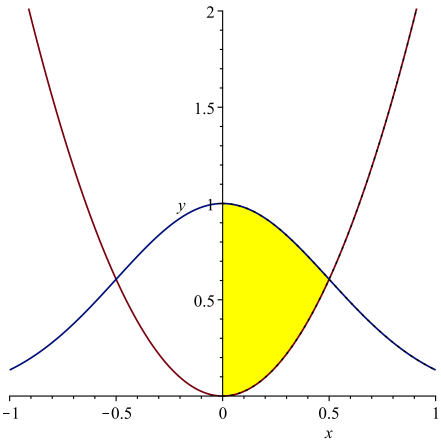
c) Calculeu el nombre n de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ amb la fórmula dels trapezis amb un error menor que $2 \cdot 10^{-3}$. Doneu el valor aproximat de la integral per a aquest n.

d) Calculeu aproximadament l'àrea de D usant l'aproximació obtinguda en c).

Solució. a) Igualamos $e^{-2x^2} = Ax^2$, hacemos $x = \frac{1}{2}$ y aislamos A:

$$e^{-\frac{1}{2}} = A \cdot \frac{1}{4} \Longrightarrow A = 4e^{-\frac{1}{2}}.$$

b)



c) La cota superior del error absoluto ϵ del método de los trapecios es:

$$\epsilon \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M \quad \text{donde} \quad M = \max_{[0,\frac{1}{2}]} |f''(x)| = \max_{[0,\frac{1}{2}]} \left| \frac{16x^2-4}{e^{2x^2}} \right|.$$

Los puntos donde f'' puede tener el máximo absoluto en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ son los extremos de este intervalo, es decir, $x = 0,\ x = 1/2$ y los puntos críticos de f'', es decir, donde

$$f'''(x) = \frac{-64x^3 + 48x}{e^{2x^2}} = 0.$$

$f'''(x) = 0 \iff -64x^3 + 48x = 0 \iff x = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Solamente $x = 0$ pertenece al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, por lo tanto, los puntos donde f'' puede tener el máximo absoluto son $x = 0$ y $x = 1/2$. Como $|f''(0)| = 4$ y $|f''(1/2)| = 0$ tenemos que $|f''(x)| \leq |f''(0)| = 4,\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ con lo cual $M = 4$ y

$$\frac{(\frac{1}{2})^3}{12n^2} \cdot 4 < 2 \cdot 10^{-3} \implies n \geq 5.$$

Finalmente, si aplicamos la fórmula de los trapecios para $n = 5$ tenemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x^2} dx \approx 0,426799.$$

d)

$$D = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-2x^2} - 4e^{-\frac{1}{2}} x^2) dx \approx$$

$$\approx 0,426799 - 4e^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 0,426799 - 4e^{-\frac{1}{2}} \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,32570.$$

4. *(2 punts)* La temperatura d'una placa ve donada per la fórmula $T(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x^2+y^2}$.

a) En quina direcció hauríem de moure'ns des del punt $(1,1)$ perquè la temperatura decreixi el més ràpid possible?

b) En quina direcció des del mateix punt la variació de la temperatura és $\frac{1}{4}$?

Solución. a) La dirección de máximo crecimiento en un punto P cuando la función es diferenciable en un entorno de dicho punto es la dirección del vector gradiente en P. Por tanto la dirección en que debemos movernos desde el punto $(1,1)$ para que la temperatura decrezca lo más rápido posible es la dirección opuesta al gradiente en dicho punto, es decir, la dirección dada por el vector $-\nabla T(1,1)$.

Para obtener el gradiente de la función $T(x,y)$ calculamos las derivadas parciales de dicha función:

$$T'_x(x,y) = -\frac{2x(1-y)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$T'_y(x,y) = -\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{2y(1-y)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Observamos que tanto $T(x,y)$ como sus derivadas parciales son un cociente de funciones polinómicas continuas y con parciales de cualquier orden continuas en todo el plano. Puesto que la expresión de los denominadores $1+x^2+y^2$ es siempre positiva en cualquier punto del plano, los denominadores no se anulan nunca. Esto implica que $T(x,y)$ es de clase C^1 en todo el plano y por tanto diferenciable. Substituyendo $(x,y) = (1,1)$ en las derivadas parciales obtenemos el vector gradiente:

$$\nabla T(1,1) = (0, -1/3)$$

La dirección que nos piden en el enunciado es la que viene dada por del vector $(0, 1/3)$ o cualquier vector proporcional a este.

b) Se trata de determinar la dirección en la cual la derivada direccional de $T(x,y)$ es igual a $1/4$ en el punto $(1,1)$. Puesto que ya se ha justificado que la función es diferenciable la derivada direccional se obtiene del producto escalar del vector gradiente en el punto, calculado en el apartado anterior, y el vector unitario $v = (v_1, v_2)$ en la dirección que debemos determinar. Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones para las componentes de v:

$$\nabla T(1,1) \cdot v = -\frac{v_2}{3} = \frac{1}{4}, \qquad v_1^2 + v_2^2 = 1$$

Resolviendo se obtiene $v_2 = -3/4$ y $v_1 = \pm\sqrt{7}/4$. Por tanto la dirección que nos pide el enunciado es la de los vectores $(\sqrt{7}/4, -3/4)$ y $(-\sqrt{7}/4, -3/4)$.

5. *(2 punts)* Donada la funció $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$.

a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells 1, 2, 3, 6.

b) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f en $\mathbb{R}^2$.

c) Justifiqueu l'existència dels extrems absoluts de la funció f en el conjunt

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

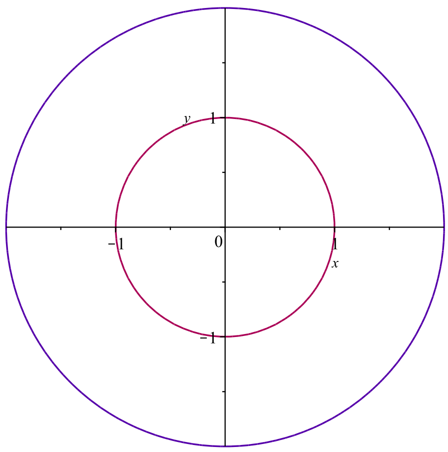
d) Determineu tots els punts on f pot tenir extrems absoluts a la frontera de K fent servir el mètode de multiplicadors de Lagrange.

e) Calculeu el màxim i mínim absoluts de f en la regió K.

Solució. a) Si c és una constant, la corba de nivell c és $2 + x^2 + y^2 = c$ és a dir, $x^2 + y^2 = c - 2$. Si $c < 2$, la corba no té punts. És el que passa per a $c = 1$.

Si $c = 2$, la corba només té el punt $(0, 0)$.

Si $c > 2$, és tracta d'una circumferéncia de centre $(0, 0)$ i radi $\sqrt{c-2}$. Així doncs, per a $c = 3$ el radi és 1 i per a $c = 6$ el radi és 2.



b) Si $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$, les seves derivades parcials són

$$f'_x(x, y) = 2x, \quad f'_y(x, y) = 2y$$

i l'únic punt crític és $(0, 0)$. Calculem les derivades segones

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \;\; f''_{yy}(x, y) = 2, \;\; f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0,$$

per obtenir la matriu hessiana

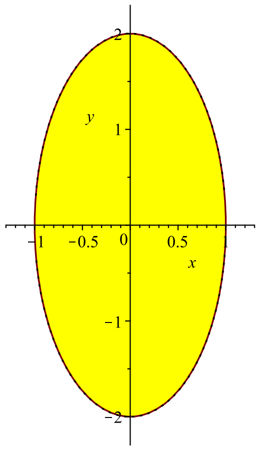
$$H = Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenim $\det(H) = 4 > 0$ i $h_{11} = f''_{xx}(0, 0) = 2 > 0$. Per tant, el punt $(0, 0)$ és un mínim relatiu.

Alternativament, també podem dir que $f(0, 0) = 2$ i que per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 \geq 0 \implies 2 + x^2 + y^2 \geq 2 \implies f(x, y) \geq f(0, 0)$$

de manera que el punt $(0, 0)$ és un mínim absolut de f.



c) La corba $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ és una el.lipse de semieixos 1 i 2. El conjunt K és

És un conjunt tancat perqué conté la seva frontera

$$\partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$$

és un conjunt fitat: està contingut, per exemple, al cercle de centre $(0, 0)$ i radi 2. Per tant, el conjunt K és compacte.

La funció f és una funció polinómica i, per tant, contínua a tot $\mathbb{R}^2$.

Atès que estem considerant una funció contínua f sobre un conjunt compacte K, el teorema de Weierstrass ens assegura que existeixen máxim i mínim absoluts de f en K.

d) Hem de trobar els punts (x, y) de la frontera de K i tals que (x, y, λ) és punt crític de la funció de Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)$. Plantegem el sistema de punts crítics:

$$\begin{aligned} L'_x(x, y, \lambda) &= 2x + \lambda \cdot 2x = 2x(1 + \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) &= 2y + \lambda \cdot \tfrac{y}{2} = y(2 + \frac{\lambda}{2}) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + \tfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Considerem la primera equació i veiem que o bé $x = 0$ o bé $\lambda = -1$.

- Si $x = 0$, la segona equació queda $y(2 + \frac{\lambda}{2}) = 0$ i la tercera $y^2 = 4$. D'aquesta darrera obtenim $y = \pm 2$ i llavors de la segona obtenim $\lambda = -4$.
- Si $\lambda = -1$, de la segona equació obtenim $y = 0$ i llavors de la tercera $x^2 = 1$, per tant, $x = \pm 1$.

La funció L té quatre punts crítics: $(0, \pm 2, -4)$ i $(\pm 1, 0, -1)$.

Els punts de la frontera de K on f pot tenir extrems absoluts són $(0, \pm 2)$ i $(\pm 1, 0)$.

d) Com que el domini no té vèrtexs, els candidats són els punts crítics de f a l'interior de K i els punts (x, y) de la frontera de K que hem trobat a l'apartat anterior.

Al segon apartat hem vist que $(0, 0)$ és l'únic punt crític de f a tot $\mathbb{R}^2$. Com que és un punt interior de K, l'hem de considerar com a candidat.

$(0,0)$	$f(0,0)=2$	mínim absolut de f en K
$(0,2)$	$f(0,0)=6$	máxim absolut de f en K
$(0,-2)$	$f(0,0)=6$	máxim absolut de f en K
$(1,0)$	$f(0,0)=3$	
$(-1,0)$	$f(0,0)=3$	

El valor mínim de la funció en K és 2 i s'assoleix en el punt $(0,0)$. El valor máxim de la funció en K és 6 i s'assoleix en els punts $(0,\pm 2)$.