1 Calculeu la integral següent

$$I = \int_0^4 (1 - e^{\,x/4})\; dx\,.$$

(a) Fent ús de la regla de Barrow. (2.5 punts)

(b) Fent ús de la fórmula dels trapezis amb una partició de 4 subintervals. (2.5 punts)

(c) Fent ús de la fórmula de Simpson amb una partició de 4 subintervals. (2.5 punts)

(d) Avalueu l'error absolut en cas que fem ús dels resultats dels apartats **(b)** i **(c)** per aproximar el valor de la integral I. Comenteu els resultats obtinguts. (2.5 punts)

2 Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(a) Construïu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $f(x)$ a l'entorn del punt $x_0 = 0$. Justifiqueu la resposta. (2.5 punts)

(b) Escriviu el terme complementari de l'error que es comet en considerar el polinomi de Taylor de grau 1 obtingut enlloc de la funció irracional $f(x)$. (2.5 punts)

(c) Trobeu una cota superior de l'error si $|x| < \dfrac{1}{16}$ en l'aproximació següent: (2.5 punts)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}.$$

(d) En la teoria de la relativitat especial la massa m d'una partícula que es mou amb velocitat v es defineix

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,$$

on m_0 és la massa en repòs de la partícula i c la velocitat de la llum. Fent ús dels apartats **(a)** i **(c)** justifiqueu que per a velocitats petites en comparació amb la velocitat de la llum (2.5 punts)

$$m \approx m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

3 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^2 + y^2$,

(a) Calculeu i classifiqueu els extrems relatius de f en el seu domini. (2.5 punts)

(b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt (2.5 punts)

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \le 1 - x^2\,, \quad y \ge x - 1\right\}.$$

(c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en el recinte $\mathcal{K}$. (2.5 punts)

(d) Trieu els punts que són el màxim i el mínim absoluts de f i digueu quins són els valors màxim i mínim de f en $\mathcal{K}$. (2.5 punts)