CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.

1. *(1.5 punts)* Considereu la funció:

$$f(x) = 7\,\sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} - 1.$$

a) Proveu que l'equació $f(x) = 0$ té una solució a l'interval $(0, 0.4)$.

b) Calculeu una aproximació d'aquesta solució utilitzant el mètode de Newton-Raphson amb valor inicial $x_0 = 0.2$, amb un error més petit que $0.5 \cdot 10^{-5}$.

2. *(3 punts)* Considereu la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu el seu polinomi de Taylor de grau 5 centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Fent ús del polinomi i l'expressió del residu de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $\sin(0.5)$ i acoteu l'error d'aquest valor aproximat.

c) Esbrineu per a quins valors d'x l'error en l'aproximació $\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ és menor que 10^{-4}.

3. *(1.5 punts)* Donada la funció:

$$F(x,y) = \int_{x-1}^{x+y+xy} e^{t^2}\,dt$$

Escriure les equacions del pla tangent i la recta normal a la superfície $z = F(x,y)$ en el punt $\left(1, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

4. *(4 punts)* Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = x^2 y$$

a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f.

c) Dibuixeu el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\quad x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq -1\}$ i justifiqueu que és compacte.

d) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D y trobeu-los.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.