1. Per a cada nombre natural $n \in \mathbb{N}$ es considera l'equació:

$$\left| n^6 x^2 - \frac{13}{2} \right| = \frac{5}{2} \tag{1}$$

a) Resoleu l'equació (1) en funció de n.

b) Per a cada nombre natural $n \in \mathbb{N}$ es defineix a_n com la suma de les dues solucions positives de l'equació (1). Calculeu a_n.

c) Sigui $A = \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$, digueu si el conjunt A és acotat. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i l'ínfim.

d) Calculeu els límits següents:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-a_n} - \sqrt{1+a_n}}{\sqrt{a_n}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n a_n}{n!}, \qquad \lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{2n^3-3}$$

SOLUCIÓ:

a) L'equació (1) es pot descomposar en dues:

$$\left| n^6 x^2 - \frac{13}{2} \right| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(n^6 x^2 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \right) \vee \left(n^6 x^2 - \frac{13}{2} = -\frac{5}{2} \right);$$

Resolem la primera:
$n^6x^2 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow n^6x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{n^6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{n^3}$.
Resolem la segona:
$n^6x^2 - \frac{13}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow n^6x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{n^6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{n^3}$.
Per tant les solucions de l'equació (1) són:

$$\frac{3}{n^3},\ -\frac{3}{n^3},\ \frac{2}{n^3} \text{ i } -\frac{2}{n^3}$$

b) Per a cada nombre natural $n \in \mathbb{N}$, a_n és la suma de les dues solucions positives de l'equació (1):

$$a_n = \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^3} = \frac{5}{n^3}$$

c) El conjunt A és:

$$A = \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \frac{5}{n^3} |\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

El conjunt A és acotat, $\sup(A) = 5$ (que és el màxim del conjunt A) i $\inf(A) = 0$.

d) Els tres límits són:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-a_n} - \sqrt{1+a_n}}{\sqrt{a_n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n a_n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{2n^3-3} = e^{10} :$$

En efecte, el primer:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-a_n} - \sqrt{1+a_n}}{\sqrt{a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{5}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{5}{n^3}}}{\sqrt{\frac{5}{n^3}}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-5} - \sqrt{n^3+5}}{\sqrt{5}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3-5} - \sqrt{n^3+5}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to+\infty} \frac{-10}{\sqrt{n^3-5} + \sqrt{n^3+5}} = 0$$

El segon: $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n a_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5e^n}{n^3 n!}$ és igual a 0 pel criteri del qüocient:

Sigui $b_n = \frac{5e^n}{n^3 n!}$, aleshores $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e(n-1)^3}{n^4} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n a_n}{n!} = 0$$

El tercer és de la forma (1^∞):

$$\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{2n^3-3} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{5(2n^3-3)}{n^3}} = e^{10}$$

2. Considereu l'equació

$$e^x = -3x^2 + 3 \tag{2}$$

a) Proveu que l'equació (2) té una solució positiva i una negativa a l'interval $[-1, 1]$.

b) Demostreu que l'equació (2) només té dues solucions reals.

c) Determineu el mínim nombre d'iteracions necessàries per calcular la solució negativa pel mètode de la bisecció amb una precisió de $0.5 \cdot 10^{-3}$.

d) Calculeu l'aproximació de la solució negativa amb una precisió de $0.5 \cdot 10^{-3}$ pel mètode de Newton-Raphson amb valor inicial $x_0 = -1$.

SOLUCIÓ:

a) L'equació (2) és equivalent a $e^x + 3x^2 - 3 = 0$. Considerem la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$, la funció f és la suma d'una funció exponencial i una polinòmica i per tant és contínua en tota la recta real.

   Donat que la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$ és contínua en $[-1, 0]$ i $f(-1) \cdot f(0) < 0$, el Teorema de Bolzano garanteix l'existència d'una solució de l'equació (2) en l'interval $(-1, 0)$ (solució negativa).

   Donat que la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$ és contínua en $[0, 1]$ i $f(0) \cdot f(1) < 0$, el Teorema de Bolzano garanteix l'existència d'una solució de l'equació (2) en l'interval $(0, 1)$ (solució positiva).

b) Ho demostrarem per reducció a l'absurd utilitzant el Teorema de Rolle.

   La funció f és la suma d'una funció exponencial i una polinòmica i per tant és contínua i derivable en tota la recta real.

   Suposem que l'equació (2) té 3 solucions $a, b, c \in \mathbb{R}$ amb $a < b < c$ amb $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

   Donat que la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$ és contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) i que $f(a) = f(b)$, el Teorema de Rolle asseguraria l'existència d'una solució de l'equació $f'(x) = 0$ en l'interval (a, b).

   Donat que la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$ és contínua en $[b, c]$ i derivable en (b, c) i que $f(b) = f(c)$, el Teorema de Rolle asseguraria l'existència d'una solució de l'equació $f'(x) = 0$ en l'interval (b, c).

   Per tant l'equació $f'(x) = 0$ tindria dues solucions diferents.

   Però $f'(x) = 0 \Longrightarrow e^x + 6x = 0$, que té una única solució real (si tingués dues, pel Teorema de Rolle hi hauria un punt intermig en el que $f''(x) = 0 \Longrightarrow e^x + 6 = 0$, que és fals per a tot $x \in \mathbb{R}$).

Per tant l'equació (2) només té dues solucions reals.

c) El mínim nombre d'iteracions n necessàries per calcular la solució negativa pel mètode de la bisecció amb una precisió de $0.5 \cdot 10^{-3}$ és $n = 11$, ja que:

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{0+1}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow n \geq 10.97 \Rightarrow n \geq 11.$$

d) Apliquem el mètode de Newton-Raphson a la funció $f(x) = e^x + 3x^2 - 3$ amb valor inicial $x_0 = -1$.

La fórmula del mètode és: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, prenent $x_0 = -1$ i $f'(x) = e^x + 6x$ s'obté: $x_1 = -0.9346818952$, $x_2 = -0.9320739350$, $x_3 = -0.9320697530$.

Per x_3 ja es satisfan les dues condicions d'aturada: $|x_3 - x_2| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i $|f(x_3)| < 0.5 \cdot 10^{-3}$, per tant x_3 és l'aproximació demanada:

$$x \simeq -0.9321.$$