1. *(2.5 punts)* Volem calcular amb el mètode dels trapezis el valor aproximat de la integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

amb un error més petit que 0,05.

(a) Determineu el nombre mínim de divisions n de l'interval d'integració necessaris per fer-ho.

(b) Determineu els punts de la partició de l'interval per a aquest valor de n.

(c) Calculeu el valor aproximat de la integral.

(d) Utilitzant el mateix valor de n escriviu la fórmula per calcular el valor aproximat de la integral amb el mètode de Simpson.

Solucion.

(a) Sea ϵ el error que cometimos utilizando el metodo de los trapecios con n intervalos para calcular la integral $\int_a^b f(x)dx$. Sabemos que $\epsilon \le \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M$ donde $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
En nuestro caso, $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$, $b = 1$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$.
Para todo $x \in [0,1]$, tenemos que $f''(x) \ge 0$, asi que $|f''(x)| = f''(x)$. Ademas, $f''(x)$ es creciente en $[0,1]$, entonces su maximo será en $x = 1$. Entonces $M = f''(1) = 6e \simeq 16.31$.
Para imponer que el error ϵ sea menor que 0.05, ponemos $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M < 0.05$.
Substituyendo obtenemos $\dfrac{6e}{12n^2} < 0.05$. Entonces $n^2 > \dfrac{6e}{12 \cdot 0.05}$. Como n tiene que ser positivo, obtenemos

$$n > \sqrt{\frac{6e}{12 \cdot 0.05}} \simeq 5.21$$

y como n tiene que ser entero, el minimo n que nos va bien es $n = 6$.

1. Tenemos que dividir el intervalo $[0,1]$ en 6 subintervalos de igual longitud $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{6}$, entonces tenemos 7 puntos de la forma $x_i = 0 + \dfrac{i}{6}$,

$$x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ x_5 = \frac{5}{6},\ x_6 = 1.$$

2. El valor aproximado del integral es

$$\frac{1}{6}\Big(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \frac{f(x_6)}{2}\Big) \simeq 1.48$$

3. La formula para calcular el valor aproximado de la integral con el metodo de Simpson con $n = 6$ es

$$\frac{1}{18}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)).$$

2. *(2.5 punts)* Donada la funció de dues variables

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1.$$

(a) Trobeu la derivada direccional en el punt $(1, 1)$ en la direcció del vector $(-1, -1)$.

(b) Determineu la direcció en la qual la derivada direccional de f és màxima en el punt $(2, 3)$ i calculeu la derivada en aquesta direcció.

(c) Comproveu que $(0, 0)$ és l'únic punt crític de f. Determineu quin tipus de punt crític és.

Solución. (a) En primer lugar observamos que el vector $v = (-1, -1)$ no es unitario ya que su norma $||v|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Determinaremos el vector unitario u con la misma dirección que v, es decir, $u = \dfrac{v}{||v||} = \dfrac{(-1, -1)}{\sqrt{2}} = \Big(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Big)$.

Por otro lado, $f'_x(x, y) = 2x - y$, $f'_x(1, 1) = 1$ y $f'_y(x, y) = 2y - x$, $f'_y(1, 1) = 1$.

Entonces, como $f \in \mathcal{C}^1_{x,y}(1, 1)$ por ser polinómica y $u : \ \|u\| = 1$, resulta que

$$D_u f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot u = (1, 1) \cdot \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \Big) = -\sqrt{2}.$$

(b) La dirección en la cual la derivada direccional de f és máxima en el punto $(2, 3)$ es la dirección del vector gradiente de f en este punto

$$\nabla f(2, 3) = (f'_x(2, 3),\ f'_y(2, 3)) = (1, 4)$$

y la derivada en esta dirección $D_{\nabla f(2,3)} f(2, 3) = ||\nabla f(2, 3)|| = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17}$.

(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x, y) = 2x - y = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y - x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \implies (0, 0) \text{ el único punto crítico de } f.$$

$f''_{xx}(x, y) = 2$, $f''_{yy}(x, y) = 2$, $f''_{xy} = -1 \implies \triangle(0, 0) = det\, H(0, 0) = 3$. Como $\triangle(0, 0) > 0$ y $f''_{xx}(0, 0) > 0 \implies \exists$ un mínimo relativo de f en el punto $(0, 0)$.

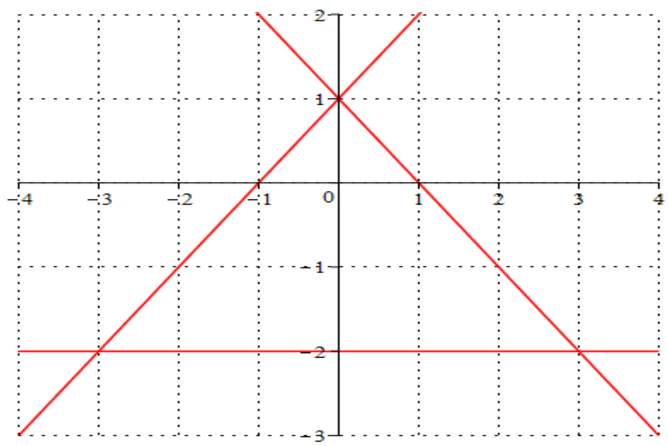
3. *(2.5 punts)* Sigui la funció $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ i la regió del pla

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1 + x, \quad y \leq 1 - x, \quad y \geq -2\}.$$

(a) Dibuixeu K i justifiqueu que f té extrems absoluts en K.

(b) Determineu el màxim i mínim absoluts de f en la regió K.

Solución.



(a) El conjunto K corresponde al interior de un triángulo y los segmentos de recta de sus lados que se puede ver representado en la figura. Los vértices del triángulo son los puntos: $(0,1)$, $(-3,-2)$ y $(3,-2)$. El primero se obtiene de la intersección de las rectas $y = 1 - x$ y $y = 1 + x$ y los dos restantes son los puntos en los que las rectas alcanzan el valor $y = -2$.

Se trata por tanto de un conjunto acotado ya que está contenido en una bola de centro el origen y radio lo bastante grande, por ejemplo, cinco. La frontera de K está formada por la unión de los tres segmentos de recta siguientes:

- $y = -2$ para $x \in [-3, 3]$.
- $y = 1 + x$ para $x \in [-3, 0]$.
- $y = 1 - x$ para $x \in [0, 3]$.

Esta frontera está contenida en el conjunto K según las desigualdades que definen este conjunto. Por tanto K contiene toda su frontera y se trata de un conjunto cerrado. En consecuencia, al ser K cerrado y acotado, es un conjunto compacto. Por otro lado $f(x,y)$ es una función polinómica en las variables x e y, de manera que es continua (y además diferenciable) en todo el plano, y en particular en todos los puntos de K.

Tenemos pues una función continua en todo el conjunto compacto K, por tanto, aplicando el teorema de Weisstrass se deduce que f admite un máximo y un mínimo absolutos en K.

(b) Primero determinamos la lista de puntos candidatos donde $f(x,y)$ puede alcanzar sus extremos absolutos en K. Después evaluaremos la función en dichos puntos y determinaremos en cuáles de ellos alcanza dichos extremos.

Para empezar tenemos que considerar los 3 vértices de la frontera de K: $f(0,1) = 1$, $f(-3,-2) = 7$, $f(3,-2) = 10$.

A continuación consideramos los puntos críticos de f in el interior del conjunto K. Para ello calculamos las derivadas parciales de f igualamos a cero y resolvemos el sistema de ecuaciones. En este caso se obtiene:

$$f_x = 2x - y = 0; \quad f_y = -x + 2y = 0$$

Resolviendo el sistema por sustitución se deduce que la única solución posible es la trivial, es decir, el punto $(0,0)$, el cual cumple las condiciones de pertenecer al interior de K. Siendo $f(0,0)=0$.

Finalmente, consideramos los puntos críticos de f sobre la frontera de K, es decir, los candidatos a extremos condicionados sobre la frontera. Puesto que la frontera la forman 3 segmentos de recta distintos, hemos de resolver 3 problemas diferentes, pero podemos hacerlo por sustitución de la condición en la función, obteniendo 3 problemas de extremos de funciones de 1 variable en un intervalo acotado. Evidentemente, también podría resolverse utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange en cada segmento de frontera.

- Para el segmento de la frontera $y=-2$, con $x\in(-3,3)$: Tomamos $f(x,-2)=g_1(x)=x^2+2x+4$. Derivando e igualando a cero el único punto crítico que se obtiene es $(-1,-2)$, siendo $f(-1,-2)=3$.
- Para el segmento de la frontera $y=1+x$, con $x\in(-3,0)$: Tomamos $f(x,1+x)=g_2(x)=x^2+x+1$. Derivando e igualando a cero el único punto crítico que se obtiene es $(-1/2,1/2)$, siendo $f(-1/2,1/2)=3/4=0.75$.
- Para el segmento de la frontera $y=1-x$, con $x\in(0,3)$: Tomamos $f(x,1-x)=g_3(x)=3x^2-3x+1$. Derivando e igualando a cero el único punto crítico que se obtiene es $(1/2,1/2)$, siendo $f(1/2,1/2)=1/4=0.25$.

Esto finaliza la lista de candidatos a extremos absolutos. Por tanto, se obtiene que el máximo absoluto de $f(x,y)$ en K es 19 y se alcanza en el punto $(3,-2)$, mientras que el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en el punto $(0,0)$.

4. *(2.5 punts)* Justifiqueu l'existència i calculeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y,z)=x-2y+5z$ sobre l'esfera $x^2+y^2+z^2=30$.

Solución. Sea D el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=30\right\}.$$

Probemos que D es compacto. En efecto, D es acotado ya que $D\subset B_6((0,0,0))$ y D es cerrado ya que $\partial D=D$. Por lo tanto D es compacto.

La función $f\in C(D)$, en consecuencia por el teorema de Weierstrass existen máximo y mínimo absolutos de f en D.

Este problema es de extremos condicionados y para resolverlo utilizaremos el método de multiplicadores de Lagrange:

1) definimos la función de Lagrange $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+5z+\lambda\,(x^2+y^2+z^2-30)$,

2) calculamos sus puntos críticos resolviendo el sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{rl} L'_x(x,y,z,\lambda)= & 1+2x\lambda=0\\ L'_y(x,y,z,\lambda)= & -2+2y\lambda=0\\ L'_z(x,y,z,\lambda)= & 5+2z\lambda=0\\ L'_\lambda(x,y,z,\lambda)= & x^2+y^2+z^2-30=0\end{array}\right.$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que $y=-2x$ y de la primera y tercera ecuación se deduce que $z=5x$. Insertando estas expresiones en la cuarta ecuación obtenemos que $x^2+(-2x)^2+(5x)^2=30\Longrightarrow x^2=1$ de donde resulta que

$x = \pm 1, \implies y = \mp 2, \quad z = \pm 5$. Sustituyendo $x = \pm 1$ en la primera ecuación obtenemos que $\lambda = \mp \frac{1}{2}$. Entonces los puntos críticos de la función de Lagrange son $(1, -2, 5, -\frac{1}{2})$ y $(-1, 2, -5, \frac{1}{2})$.

3) Los puntos candidatos de extremos condicionados son $(1, -2, 5)$ y $(-1, 2, -5)$ y $f(1, -2, 5) = 30$, $f(-1, 2, -5) = -30$. Por lo tanto

$$\max_D f(x, y, z) = f(1, -2, 5) = 30 \quad \text{y} \quad \min_D f(x, y, z) = f(-1, 2, -5) = -30.$$

.