1. *(2 punts)* Calculeu els límits següents:

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\,\sin n!}{n+1}, \qquad b) \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \text{ per a } b>a>0.$$

Indiqueu els criteris que feu servir i justifiqueu tots els passos.

2. *(2 punts)* Sigui f una funció contínua en l'interval $[0,1]$ tal que $0 < f(x) < 1$. Demostreu que la funció $F(x) = 2x - 1 - \int_0^x f(t)\,dt$ té un únic zero en $[0,1]$.

3. *(2 punts)* Sigui la funció $f(x) = e^{-2x^2}$ i la paràbola $y = Ax^2$, $A \in \mathbb{R}$.

a) Determineu el valor del paràmetre A perquè la paràbola talli la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = \frac{1}{2}$.

b) Per al valor de A obtingut en l'apartat a) feu un croquis de la regió D situada al primer quadrant i limitada per l'eix y, la paràbola i la gràfica de f.

c) Calculeu el nombre n de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ amb la fórmula dels trapezis amb un error menor que $2\cdot 10^{-3}$. Doneu el valor aproximat de la integral per a aquest n.

d) Calculeu aproximadament l'àrea de D usant l'aproximació obtinguda en c).

4. *(2 punts)* La temperatura d'una placa ve donada per la fórmula $T(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x^2+y^2}$.

a) En quina direcció hauríem de moure'ns des del punt $(1,1)$ perquè la temperatura decreixi el més ràpid possible?

b) En quina direcció des del mateix punt la variació de la temperatura és $\frac{1}{4}$?

5. *(2 punts)* Donada la funció $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$.

a) Dibuixeu les corbes de nivell de f corresponents als nivells 1, 2, 3, 6.

b) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de f en $\mathbb{R}^2$.

c) Justifiqueu l'existència dels extrems absoluts de la funció f en el conjunt

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

d) Determineu tots els punts on f pot tenir extrems absoluts a la frontera de K fent servir el mètode de multiplicadors de Lagrange.

e) Calculeu el màxim i mínim absoluts de f en la regió K.

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES.