1. *(2.5 puntos)* Sea $I = \displaystyle\int_0^1 \cos^3(x)dx$, siendo $f(x) = \cos^3(x)$.

Sabiendo que $f''(x) = 6\cos(x) - 9\cos^3(x)$ y $f^{(4)}(x) = -60\cos(x) + 81\cos^3(x)$

(a) Justificar $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)| \leq 3$ y $\max\limits_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)| \leq 21$.

(b) Calcular I con un error menor que 10^{-4}.

2. *(2.5 puntos)* Se considera la función $f(x,y) = 2 - x^2 + y$.

(a) Dibujar las curvas de nivel de f correspondientes a los niveles -1, 0, 1, y 2.

(b) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(4,-1)$ en la dirección del vector $(3,4)$.

(c) Determinar la dirección en la cual la derivada direccional de f en el punto $(4,-1)$ es igual a cero. Indicar la dirección mediante un vector unitario.

(d) Determinar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(4,-1)$ y calcular la derivada en esa dirección.

3. *(2.5 puntos)* Sea la función $f(x,y) = 4x^2 + 6y^2 + 5xy - 2y + 3 - 6x$.

(a) Hallar el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,0,1)$.

(b) Demostrar que el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en el punto $(1,0)$ coincide con la función $f(x,y)$.

4. *(2.5 puntos)* Considerar la función $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 2y^2 - x + y$, y la región del plano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 4\,, \quad y \leq 1\}\,.$$

(a) Dibujar la región A i demostrar que f admite extremos absolutos en A.

(b) Determinar el máximo y el mínimo absolutos de f en la región A.

Justificar todas las respuestas, inclusive los cálculos, redondeando correctamente los resultados numéricos.

`Notas: viernes 21 de diciembre de 2018 a las 18:00 en Atenea.`
`Revisión: martes 8 de enero de 2019 a las 16:00. El lugar se publicará en el Racó.`