1 *(2 punts)*

a) Empreu el polinomi de Taylor de grau 2 a l'origen de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1728 + x}$ per tal d'obtenir un valor aproximat de $\sqrt[3]{1731}$.

b) Fiteu l'error comès en l'apartat anterior.

Resolució: *a) Calculem les derivades primera i segona de* $f(x) = (1728 + x)^{1/3}$*:*

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1728 + x)^{-2/3} \ ; \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(1728 + x)^{-5/3}.$$

Avaluant en $x = 0$ s'obté

$$f(0) = \sqrt[3]{1728} = 12 \ ; \quad f'(0) = \frac{1}{432} \ ; \quad f''(0) = -\frac{1}{1119744}.$$

El polinomi de Taylor de grau 2 a l'origen és

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 = 12 + \frac{1}{432}x - \frac{1}{2239488}x^2$$

i, aleshores,

$$\sqrt[3]{1731} = \sqrt[3]{1728 + 3} = f(3) \approx P_2(3) \approx 12.00694043.$$

b) L'error comès és el valor absolut del residu $R_2(x)$ en el punt $x = 3$.
Recordem que $R_2(x) = \dfrac{f'''(c)}{3!}x^3$, on $0 < c < x$.
Tenim $f'''(x) = \dfrac{10}{27}(1728 + x)^{-8/3}$ i per tant, amb $0 < c < 3$,

$$R_2(3) = \frac{10}{27 \cdot 3!}(1728 + c)^{-8/3}3^3 = \frac{5}{3 \cdot (1728 + c)^{8/3}}.$$

Com que $c > 0$, tindrem $(1728 + c)^{8/3} > (1728)^{8/3}$, i, per tant,

$$|R_2(3)| < \frac{5}{3 \cdot (1728)^{8/3}} = 3.9 \cdot 10^{-9}.$$

I per tant una fita superior de l'error és $3.9 \cdot 10^{-9}$.

2 *(2 punts)*

a) Per a la funció $f(x) = e^{x^2-1}$, demostreu que $0 < f^{(4)}(x) \leq 76$ si $0 \leq x \leq 1$.

b) Fent ús del mètode de Simpson, calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les rectes $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ i la corba $y = e^{x^2-1}$, amb un error menor que 10^{-3}.

Resolució: *(a) Calculem les derivades successives de la funció $f(x) = e^{x^2-1}$ tot aplicant la regla del producte i obtenim que*

1. $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$,
2. $f^{(2)}(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2-1}$,
3. $f^{(3)}(x) = (8x^3 + 12x)e^{x^2-1}$,
4. $f^{(4)}(x) = (16x^4 + 48x^2 + 12)e^{x^2-1}$.

Anomenem per comoditat $g(x) = f^{(4)}(x) = (16x^4 + 48x^2 + 12)e^{x^2-1}$. *Se'ns demana que estudiem la funció* $g(x)$ *en l'interval* $[0,1]$ *i que comprovem que* $0 < g(x) \leq 76$ *en aquest interval. Observem que la funció* $g(x)$ *és creixent en* $[0,1]$*: la seva derivada* $g'(x) = (32x^5 + 160x^3 + 120x)e^{x^2-1}$ *és positiva en l'interval perquè la funció exponencial sempre pren valors positius i el polinomi* $32x^5 + 160x^3 + 120x$ *és positiu per* $0 \leq x \leq 1$.

Per tant els valors mínim i màxim que pren $g(x)$ *es troben en els extrems de l'interval: concretament*

$$g(0) = 12/e > 0, \qquad g(1) = 76e^0 = 76.$$

Això demostra que efectivament $0 < g(x) \leq 76$ *ja que de fet es té* $\frac{12}{e} \leq g(x) \leq 76$.

(b) Si dividim l'interval $[a,b]$ *en un nombre parell* n *de subintervals*

$$[x_0 = a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n = b],$$

tots ells de la mateixa mida $h = \frac{b-a}{n}$*, aleshores la regla de Simpson aproxima l'àrea que hi ha per sota la gràfica de* $f(x)$ *entre les abcisses* $x = a$ *i* $x = b$ *per la fórmula*

$$I(n) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

En funció del n *triat, l'error comès entre el valor real de la integral i el valor obtingut pel mètode de Simpson està fitat en valor absolut per l'expressió*

$$E(n) = \frac{h^4(b-a)}{180} \max|f^{(4)}(\eta)|$$

on el màxim el prenem sobre els valors absoluts que pren la quarta derivada de $f(x)$ *en els punts* $\eta \in [a,b]$.

En el nostre cas tenim $a = 0$, $b = 1$ *i* $f(x) = e^{x^2-1}$*, així que si volem que*

$$E(n) < 10^{-3} = 0.001$$

hem de trobar per quoin valor de n *això es satisfà. A l'apartat anterior hem vist que el valor màxim que pot prendre* $|f^{(4)}(\eta)|$ *per* $\eta \in [0,1]$ *és* 76. *Per tant*

$$E(n) = \frac{h^4(b-a)}{180} \max|f^{(4)}(\eta)| = \frac{76}{180n^4} < 10^{-3}$$

es satisfà quan

$$n^4 > \frac{76 \cdot 10^3}{180} \simeq 422.25,$$

és a dir, quan

$$n > \sqrt[4]{422.25} \simeq 4.533.$$

Com n *ha de ser parell, prenem* $n = 6$ *i calculem el valor aproximat de la integral donada per la regla de Simpson:*

$$I(6) = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(\frac{1}{6}) + 2f(\frac{2}{6}) + 4f(\frac{3}{6}) + 2f(\frac{4}{6}) + 4f(\frac{5}{6}) + f(1)) =$$
$$= \frac{1}{18}(e^{-1} + 4e^{\frac{1}{36}-1} + 2e^{\frac{4}{36}-1} + 4e^{\frac{9}{36}-1} + 2e^{\frac{16}{36}-1} + 4e^{\frac{25}{36}-1} + e^0) \simeq 0.5382.$$

Tal com hem calculat el valor de n*, podem assegurar que l'àrea és aquesta amb un error menor que* 10^{-3}.

3 *(2 punts)*

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de la superfície $z = e^{y-x^2}$ corresponents als nivells $z = -1, \dfrac{1}{e}, 1, e, e^2$.

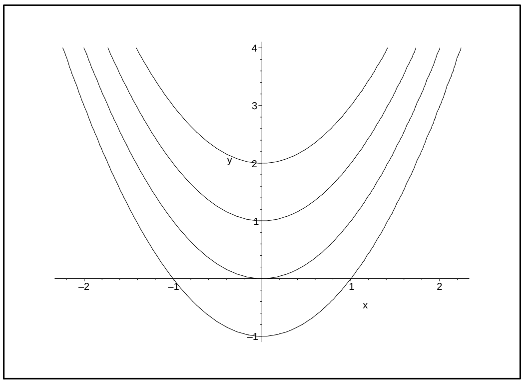
b) Trobeu la derivada direccional de $f(x,y) = e^{y-x^2}$ en el punt $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ i en la direcció $\overrightarrow{v} = (3,4)$.

c) Quina és la direcció en la qual $f(x,y) = e^{y-x^2}$ creix més ràpidament en el punt $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$? Trobeu el valor de la derivada direccional de $f(x,y)$ en aquesta direcció.

Resolució: *a) Las curvas de nivel de la función $z = e^{y-x^2}$ que corresponden a los niveles $z = -1,\ \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ e^2$ se obtienen haciendo $e^{y-x^2} = C$, donde $C = -1,\ \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ e^2$.*
Notemos que $e^{y-x^2} > 0,\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies e^{y-x^2} \neq -1, \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies \nexists$ una curva que corresponde al nivel $z=-1$. En los demás casos

$$\begin{aligned}
e^{y-x^2} &= \tfrac{1}{e} &&\iff y - x^2 = -1 &&\iff y = x^2 - 1,\\
e^{y-x^2} &= 1 &&\iff y - x^2 = 0 &&\iff y = x^2,\\
e^{y-x^2} &= e &&\iff y - x^2 = 1 &&\iff y = x^2 + 1,\\
e^{y-x^2} &= e^2 &&\iff y - x^2 = 2 &&\iff y = x^2 + 2.
\end{aligned}$$

Todas estas curvas son parábolas, mírese el dibujo siguiente:



Exercici 3. Corbes de nivell.

b) La derivada direccional de f en el punto P en la dirección del vector u se calcula como sigue: $D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u$, si $f'_x,\ f'_y \in \mathcal{C}(P)$ y el vector u es unitario.
En nuestro caso las derivadas parciales $f'_x(x,y) = -2xe^{y-x^2}$ y $f'_y(x,y) = e^{y-x^2}$ son continuas $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ por ser la composición de una función exponencial y un polinomio. El vector v no es unitario ya que su norma $\| v \| = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5$. El vector unitario que tiene la dirección de v será $u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(3,4)}{5} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Por lo tanto,

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u = (f'_x(P), f'_y(P)) \cdot u = (-1,1) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

c) La dirección en la cual la función f crece más rápido en el punto P coincide con la dirección del vector gradiente de f en el punto P, es decir, es $\nabla f(P) = (-1,1)$. El valor de la derivada direccional de f en el punto P en esta dirección es igual a la norma del vector gradiente, es decir,

$$D_{\nabla f(P)} f(P) = \| \nabla f(P) \| = \| (-1,1) \| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

4 (*4 punts*) Considereu la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ i el conjunt

$$\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \geq |x|, \; x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

a) Representeu gràficament el conjunt $\mathcal{K}$.

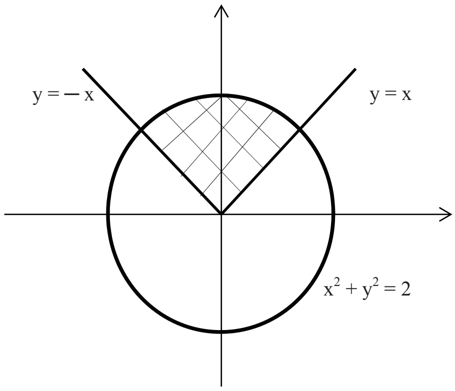
b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en $\mathcal{K}$.

c) Determineu tots els candidats a màxim i a mínim absoluts de f en $\mathcal{K}$.

d) Trieu els punts on f assoleix el màxim i el mínim absoluts en $\mathcal{K}$ i digueu quins són aquests valors.

Resolució:

a) Representem gràficament el conjunt $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \geq |x|, \, x^2 + y^2 \leq 2\}$*:*



Exercici 4. Recinte $\mathcal{K}$.

b) f *és una funció polinòmica i per tant contínua en tot* $\mathbb{R}^2$ *i, en particular en el conjunt* $\mathcal{K}$*. El conjunt* $\mathcal{K}$ *és tancat (Fr(*$\mathcal{K}$*)* $\subset \mathcal{K}$*) i fitat (*$\mathcal{K} \subset B((0,0),2)$*), i per tant és un conjunt compacte. En aquestes condicions, el Teorema de Weierstrass assegura l'existència d'extrems absoluts de* f *en* $\mathcal{K}$*.*

c) Hi ha tres tipus de candidats:

Primer, els punts crítics de f *a l'interior del conjunt* $\mathcal{K}$*: igualant a zero les dues derivades parcials de* f *s'obté un únic punt,* $(x,y) = (0,1)$*, que és el primer candidat.*

Segon, els punts crítics de f *condicionats a estar en la frontera del conjunt* $\mathcal{K}$*: En els dos segments rectes de la frontera, s'obtenen els punts* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *i* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*. En el segment circular, utilitzant el mètode dels multiplicadors de Lagrange, s'obté el punt* $(0, \sqrt{2})$*.*

Tercer, els tres vèrtexs: $(0,0)$*,* $(1,1)$ *i* $(-1,1)$*.*

Per tant, en total hi ha set candidats: $(0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \sqrt{2}), (0,0), (1,1)$ *i* $(-1,1)$*.*

d) Calculant les imatges per la funció f dels set candidats trobats a l'apartat anterior, veiem que el mínim absolut de f *en* $\mathcal{K}$ *és* -1 *i s'assoleix al punt* $(0,1)$ *i el màxim absolut de* f *en* $\mathcal{K}$ *és* 0 *i s'assoleix als punts* $(0,0), (1,1)$ *i* $(-1,1)$*.*