

La géométrie plane

Par Mickaël Launay (GéoMI17)



www.openclassrooms.com

*Licence Creative Commons 6 2.0
Dernière mise à jour le 17/04/2013*

Sommaire

Sommaire	2
Partager	2
La géométrie plane	4
Partie 1 : À la découverte de la géométrie	4
La géométrie d'Euclide	5
Les origines grecques	5
À l'école grecque	5
Les trois problèmes	6
L'âge d'or arabe	7
L'âge d'or des sciences arabes	7
Les géomètres arabes	7
L'époque moderne	8
Descartes et la géométrie cartésienne	8
À la mémoire de trois valeureux grecs	8
La géométrie renaît de ses cendres	9
Le point sur le plan	9
Le point	10
Le plan	11
Entre les deux	12
Lignes et surfaces	12
Les angles	15
Quel rapports ?	16
Figures semblables	17
Proportions et longueurs	17
Le théorème de Thalès	20
Le théorème de Thalès	20
La hauteur de la grande Pyramide	22
Le théorème de Pythagore	23
Figures semblables et surfaces	23
Théorème de Pythagore	25
Fameux rapports	26
Le carré	27
L'hexagone	27
Quelques autres	28
Le cercle	29
TP : Constructions à la règle et au compas	30
Premières constructions	31
Solutions	31
Les quatre opérations	33
Solutions	34
La racine carrée	36
Racines des nombres entiers	36
Racine d'un nombre quelconque	36
Solutions	36
Épilogue	40
Partie 2 : La trigonométrie	40
La méttrie des trigones	41
Le monde des polygones	41
Les polygones	41
Hénagonométrie et Digonométrie	43
Trigonométrie	43
Triangulons !	43
Des côtés et des angles	44
Trois côtés	45
Trois angles	46
Mélangeons les angles et les côtés	47
Les triangles rectangles	49
Classons les triangles rectangles	50
Deux côtés	50
Un angle et un côté	51
Les six rapports	52
Vocabulaire	52
Faisons du tri	54
Identités trigonométriques	54
Premières formules	55
Généralisation à tous les angles	55
Angles particuliers	56
Le carré pour 45°	57
Le triangle équilatéral pour 30° et 60°	57
Les dégénérés : 0° et 90°	58
Récapitulatif	58
Trigonométrie générale	59
Un triangle quelconque	60
Notations	60

Un angle, deux côtés	60
Trois côtés	62
Les sinus et Al-Kashi	64
La loi des sinus	64
Théorème d'Al-Kashi	65
Partie 3 : De l'aire	67
Premières aires	67
Rectangles	67
L'unité	67
Longueur fois largeur	67
Triangles	68
Les triangles rectangles	68
Les triangles quelconques	68
Le retour de la loi des sinus !	70
Parallélogrammes et trapèzes	70
Parallélogrammes	70
Trapèzes	72
TP : le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien	72
Puzzles géométriques	73
Le théorème	73
La transitivité	73
Vers le carré	75
Étapes 1 et 2 : petits triangles et petits rectangles	76
Étape 3 : tous les rectangles à la même taille	77
Étapes 4 et 5 : un rectangle et un carré	78
Paradoxes !	79
Le carré décalé	79
Deux cases disparues !	80
Les polygones réguliers	81
Polygones sans croisements	82
Construction des polygones	82
La trigonométrie à la rescousse	82
Polygones croisés	84
Complément sur les surfaces multiples et orientées	86
La méthode infinitésimale	89
Transvectons	90
Attention, ça penche	90
Les transvections	92
Le cercle	94
Les deux pi	94
La démonstration d'Archimète	94
Vers l'intégrale	96
Partie 4 : Annexes	97
Index des figures et du vocabulaire géométrique	98
Lignes	98
Lignes droites	98
Autres lignes	98
Lignes fermées	99
Angles	99
Angles particuliers	99
Autres angles	99
Relations entre les angles	100
Surfaces	100
Polygones	100
Courbes	101
Notations et conventions	101
Symboles géométriques	102
Lignes	102
Relations entre les lignes	102
Angles	102
Alphabet latin	102
Alphabet grec	104
Références	106
Quelques conseils pour aller plus loin	107
Livres	107
Sites web	107
Bibliographie	108



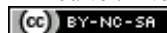
La géométrie plane



Par

Mickaël Launay (GéoMI17)

Mise à jour : 17/04/2013

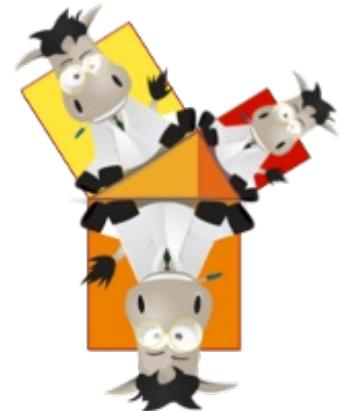
Difficulté : Intermédiaire  Durée d'étude : 1 mois

Vous voulez apprendre à faire de la géométrie ?

Mais vous ne savez pas par où commencer ? Les compas, équerres, rapporteurs et autres ustensiles géométriques ne sont pas vraiment vos amis et le mot *trigonométrie* vous fait dresser les cheveux sur la tête ? Vous cherchez un cours simple à comprendre et qui reprend tout depuis zéro ? Alors détendez-vous : vous êtes au bon endroit !

Dans ce cours, nous allons étudier le b.a.-ba de la géométrie : tout ce qu'il faut savoir pour partir sur de bonnes bases. Des parallélogrammes aux théorèmes de Thalès et de Pythagore en passant par les cosinus ou encore le nombre π , toutes ces choses seront bientôt pour vous un jeu d'enfants.

Si vous êtes ici pour mieux comprendre votre cours, pour réviser un contrôle ou par simple curiosité ce cours est fait pour vous !



Partie 1 : À la découverte de la géométrie

Dans cette partie, nous partons à la découverte de la géométrie plane. Quelle est son histoire ? Quelles sont les questions que l'on s'y pose ? Et quels sont les premiers théorèmes qu'on y rencontre ? Voilà ce qui nous attend !

La géométrie d'Euclide

La géométrie euclidienne, du nom du mathématicien grec [Euclide](#) (v. -325, v. -265), est la géométrie la plus classique, la plus ancienne et la plus concrète. C'est elle que l'on apprend à l'école et que l'on utilise dans la vie de tous les jours. À vrai dire, à moins que vous ne soyez déjà un amateur éclairé de mathématiques, il est probable que ce soit la seule géométrie que vous connaissiez ! Et ça tombe bien puisque c'est elle que nous allons étudier tout au long de ce cours.

Dans ce chapitre, nous allons donner un bref aperçu de son histoire et de ses problèmes les plus fameux.

Les origines grecques

Il est difficile de placer précisément les origines de la géométrie. Après tout, la nature elle-même pratique la discipline depuis bien avant l'apparition des hommes et les exemples sont nombreux : les trajectoires des planètes sont des ellipses, les abeilles construisent leurs ruches en suivant des pavages hexagonaux et les fougères ont inventé les figures autosimilaires bien avant les mathématiciens du XX^e siècle.



Si l'on se cantonne à la géométrie faite par les *Homo sapiens*, on en trouve également des traces très anciennes, par exemple chez les babyloniens, les celtes, les indiens ou encore les égyptiens qui s'en servaient notamment pour la mesure de leurs champs.

Pourtant, c'est dans la Grèce de l'antiquité que l'on situe traditionnellement les origines de la géométrie en tant que discipline mathématique.

À l'école grecque

L'école mathématique grecque ne manque pas de grands noms. [Thalès](#), [Pythagore](#), [Euclide](#) ou encore [Archimède](#) (pour ne citer que les plus connus) sont autant de noms que vous avez peut-être déjà entendus et que nous allons rencontrer au fil de ce cours. Ces mathématiciens se sont succédés sur un période allant du VII^e au III^e avant notre ère. Et si l'on attribue généralement à tous ces savants grecs la fondation de la discipline géométrique, il y a plusieurs raisons.

Tout d'abord, les grecs ont été les premiers à considérer la géométrie comme une discipline intéressante pour elle-même, indépendamment de ses possibles applications pratiques. Bien sûr la géométrie est souvent très utile pour de nombreux problèmes concrets (astronomie, architecture, cartographie,...), mais pour les savants grecs, il s'agit également d'une discipline noble que l'on peut pratiquer par simple plaisir intellectuel.

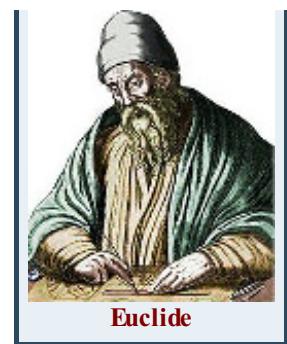


Le philosophe [Platon](#) considérait la pratique de la géométrie comme un exercice formateur de l'esprit indispensable à qui veut faire de la philosophie. La légende dit qu'au frontispice de son Académie était gravée la phrase « *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre* ». Voilà qui a le mérite d'être clair !

Euclide et ses Éléments

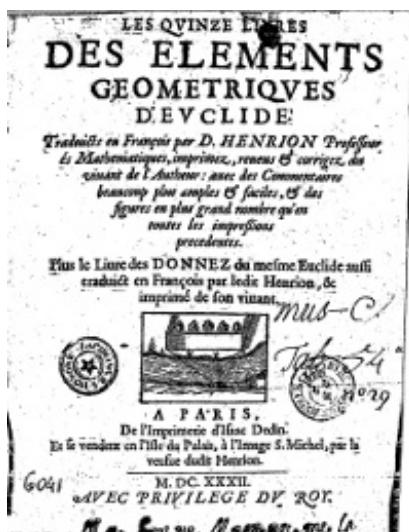
La deuxième raison, qui légitime l'école grecque comme fondatrice de la géométrie moderne, c'est la méthode utilisée. Les grecs sont les premiers à énoncer précisément des théorèmes mathématiques et à chercher à en rédiger des preuves précises, là où d'autres civilisations se contentaient de recettes dont ils avaient constaté qu'elles marchaient à peu près, mais sans toujours savoir pourquoi.

Les *Éléments* du mathématicien Euclide (v. -325, v. -265) est le premier grand livre mathématique de l'histoire. Sa méthode consiste à commencer par poser des postulats et des définitions de départ, pour ensuite énoncer des théorèmes qui sont toujours accompagnés de leur preuve rigoureuse. Cette approche est incroyablement moderne puisque c'est toujours de cette façon que fonctionnent les mathématiciens d'aujourd'hui !



Euclide

i Si vous êtes intrigués, vous pouvez vous lancer dans la lecture des *Éléments* dont on trouve aisément des versions sur internet. Les premières parties traitent des bases de la géométrie et sont tout à fait accessibles à un lecteur débutant. Si vous optez pour une version ancienne (comme cette traduction française du XVII^e siècle par exemple) le plus difficile n'est pas toujours la géométrie, mais parfois la compréhension de l'ancien français utilisé et qui est assez amusant à déchiffrer.



Couverture d'une traduction française des Éléments au XVII^e siècle

Les trois problèmes

Si les grecs ont véritablement lancé la discipline, l'histoire de la géométrie ne s'arrête pas là et de nombreux domaines restaient à explorer. Parmi les questions que se sont posés les géomètres grecs, il y en a trois en particulier qu'ils n'ont jamais réussi à résoudre et qui ont par la suite marqué l'histoire des mathématiques :

- **La trisection de l'angle.** Étant donné un angle, comment tracer un angle trois fois plus petit ?
- **La duplication du cube.** Étant donné un cube dont on connaît la longueur du côté, comment construire la longueur du côté d'un cube de volume double ?
- **La quadrature du cercle.** Étant donné un cercle, comment tracer un carré ayant la même surface ? Ce dernier problème est sans doute le plus célèbre au point d'être devenu dans le langage courant, synonyme de problème insoluble.

Pour ces trois questions, les tracés géométriques doivent se faire à l'aide d'une règle et d'un compas. Ces deux instruments sont considérés comme les deux instruments de base en géométrie. Ils permettent de reproduire les tracés que l'on peut faire avec les autres instruments classiques, par exemple, ajouter une équerre ne servirait à rien car tous les tracés réalisables avec une équerre sont également réalisables avec la règle et le compas réunis.

i Il existe bien des instruments permettant de tracer des choses que l'on ne peut pas faire à la règle et au compas mais ce sont en général des mécanismes un peu biscornus et il n'est pas vraiment raisonnable de les considérer comme des instruments de base.

La période grecque s'achève donc ici, et si vous souhaitez savoir ce qu'il est advenu des trois grands problèmes, il va nous falloir

avancer un peu dans le temps. 😊 Dans la prochaine partie, nous allons passer aux mathématiques arabes.

L'âge d'or arabe

Avec le déclin de la civilisation grecque englobée dans l'empire romain à partir du II^e siècle avant J.-C, la géométrie entre dans une phase de sommeil pendant quelques siècles où elle ne progresse quasiment plus ou seulement occasionnellement avec quelques géomètres comme [Pappus d'Alexandrie](#).

L'âge d'or des sciences arabes

À partir du VIII^e siècle s'ouvre une nouvelle période qui va s'étendre jusqu'au XIII^e et même un peu au delà. C'est cette période que l'on appelle l'âge d'or des sciences arabes.

Durant ces quelques siècles, l'arabe devient la langue savante par excellence que pratiquent même les savants originaires de pays dont ce n'est pas la langue principale, comme cela va être le cas de nombreux intellectuels perses (actuel Iran). De nombreuses villes du monde arabe ont une intense activité intellectuelle et scientifique, la plus importante étant sans conteste Bagdad, centre du monde scientifique durant toute cette période. On y trouve notamment le *Bayt al-Hikma*, ou [maison de la sagesse](#) qui est le repère des savants de tous horizons.



Savants au Bayt al-Hikma

Les arabes vont reprendre les mathématiques là où les grecs les avaient laissées. Ils en étudient les textes, les traduisent, en font de nombreuses copies et en assurent la large diffusion. Ils y intègrent également des connaissances en provenance d'autres civilisations comme les chinois ou les indiens.



En Europe, cette époque est celle du Moyen Âge et les sciences n'avancent plus ou seulement au ralenti. Quasiment personne ne s'intéresse aux écrits de l'antiquité qui disparaissent peu à peu. Si les arabes n'avaient pas été là pour prendre le relais, une très grande partie de l'héritage scientifique grec aurait été perdue à jamais.

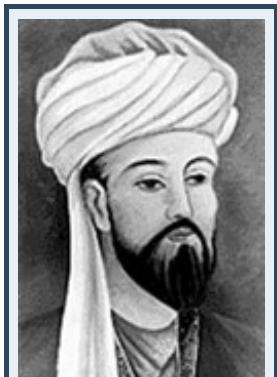
Mais les savants arabes ne se sont pas contentés de conserver et de diffuser les sciences grecques : ils ont surtout poursuivi leur travail et ont apporté de nombreuses connaissances nouvelles dans la plupart des sciences et en géométrie en particulier.

Les géomètres arabes

Le principal de l'œuvre des géomètres arabes a été le développement de la trigonométrie qui comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce cours occupe une place primordiale dans l'étude de la géométrie. On considère souvent le perse [Nasir al-Din al-Tusi](#) comme le fondateur de la trigonométrie comme domaine d'étude à part entière. Avant lui, cette discipline n'était envisagée que par ses applications en astronomie. Avant et après lui, plusieurs autres grands noms ont également apporté leur pierre à l'édifice trigonométrique. Parmi eux, on peut citer [Muhammad Abu al-Wafa](#) ou encore [Al-Kashi](#) qui au XV^e siècle découvrit une généralisation du théorème de Pythagore qui s'applique à tous les triangles.

On doit également à Al-Kashi une approximation du nombre π (que nous rencontrons dans ce cours) avec une précision de 16 décimales, record qui tiendra pendant près de 200 ans !

En 1077, le poète et savant [Omar Khayyam](#) publie un ouvrage dans lequel il s'interroge sur les



postulats de base des *Éléments* d'Euclide. C'est le début d'une réflexion qui hantera les mathématiciens pendant 800 ans avant d'accoucher de la géométrie non euclidienne au XIX^e siècle.

Nasir al-Din al-Tusi



Et les trois problèmes grecs, les géomètres arabes sont-ils parvenus à les résoudre ?

Toujours pas ! Pourtant, ce ne sera pas faute d'avoir essayé, ces trois problèmes ont fasciné de nombreux savants arabes. Mais à la fin du Moyen Âge, la trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle résistaient encore et toujours aux mathématiciens.

Le suspens continue donc tandis que le centre de gravité de la recherche en mathématiques se déplace peu à peu vers l'Europe...

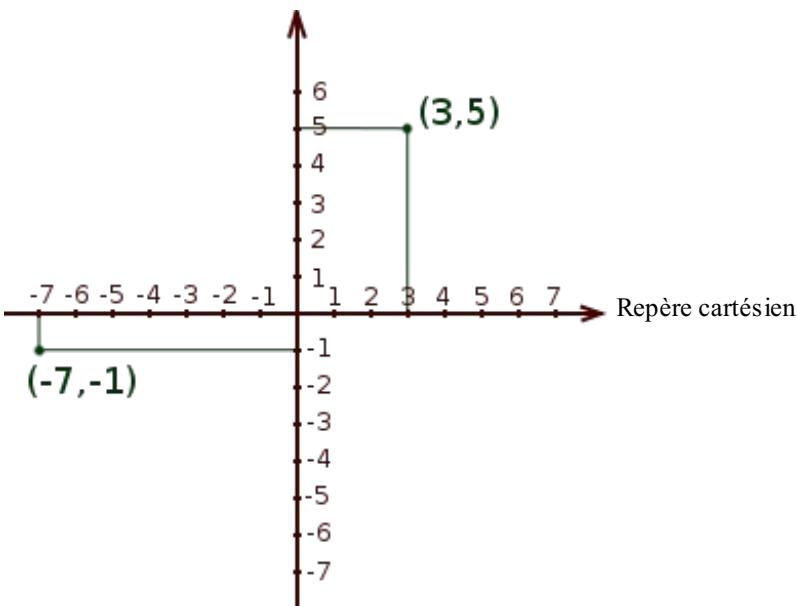
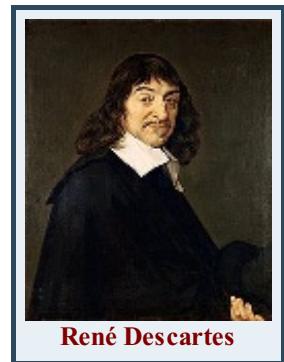
L'époque moderne

Le Moyen Âge achevé, les mathématiques reviennent peu à peu en Europe où elles vont s'installer pour quatre siècles. Plusieurs grands noms des mathématiques vont apporter leur pierre à l'édifice géométrique comme par exemple le suisse [Leonhard Euler](#) qui découvre plusieurs nouvelles propriétés du triangle ou l'allemand [Carl Friedrich Gauss](#) qui élabora une construction à la règle et au compas du polygone régulier à 17 côtés.

Pourtant, l'époque moderne est avant tout celle de la rencontre entre la géométrie et l'algèbre. Cette confrontation va radicalement et durablement changer le visage de la discipline.

Descartes et la géométrie cartésienne

Au XVII^e siècle, le mathématicien et philosophe français [René Descartes](#) (1596, 1650) a l'idée de relier la géométrie aux nombres par l'intermédiaire d'un repère. En traçant deux axes perpendiculaires dans un plan, chaque point peut être repéré par ses deux coordonnées.



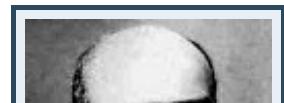
Cette idée qui peut paraître simple aujourd'hui jette une passerelle extraordinaire entre la géométrie et l'étude des nombres. Les points sont déterminés par des nombres, les figures deviennent alors des équations et les constructions géométriques se transforment en problèmes d'algèbre ! L'étude de nouvelles équations permet même de créer de nouvelles figures géométriques qui ne pouvaient pas être décrites en géométrie classique.



À l'époque certains mathématiciens reprochent à cette approche de dénaturer la pureté de la géométrie, mais la méthode est si puissante qu'elle s'impose tout de même rapidement.

À la mémoire de trois valeureux grecs

Grâce à la passerelle créée par Descartes, le mathématicien français [Pierre-Laurent Wantzel](#) (1814, 1848) parvient à résoudre en 1837, le problème d'algèbre qui équivaut en géométrie à la construction de figures à l'aide d'une règle et d'un compas. Son théorème permet de faire tomber d'un coup les deux premiers problèmes grecs (la trisection de l'angle et la duplication du cube)



pour lesquels il conclut que ni l'un ni l'autre ne sont possibles.

Son théorème constitue également un pas de géant dans la résolution de la quadrature du cercle puisqu'il ramène sa résolution à l'étude d'une certaine propriété du fameux nombre π . Seule survivante, la quadrature est fissurée mais résiste encore pendant quarante-cinq ans. C'est finalement le mathématicien allemand [Ferdinand von Lindemann](#) (1852, 1939) qui l'achève en 1882, en montrant à son tour qu'elle non plus n'est pas réalisable.

Avec plus de 2500 ans entre son énoncé et sa résolution, la quadrature du cercle est (et restera encore probablement longtemps ) le problème mathématique ayant tenu le plus longtemps tête aux mathématiciens.



Ferdinand
von Lindemann

La géométrie renaît de ses cendres

La chute de la quadrature du cercle aurait pu être fatale à la géométrie. Le rouleau compresseur de l'algèbre était venu à bout de la plupart de ses problèmes intéressants et les mathématiciens préféraient de plus en plus se tourner vers des domaines mathématiques plus jeunes tels que l'analyse où tant de choses restaient à découvrir.

Pourtant, à l'époque même où Wantzel puis Lindenmann résolvaient les trois problèmes grecs, d'autres mathématiciens créaient les prémisses d'une nouvelle géométrie : la géométrie non euclidienne.

L'un des cinq postulats de base dont était parti Euclide dans ses *Éléments*, était au fil des siècles apparu comme de plus en plus louche aux mathématiciens. D'abord ces derniers avaient tenté de l'éliminer en essayant de le prouver à partir des quatre autres, mais en vain. Puis au début du XIX^e siècle, plusieurs mathématiciens comme le hongrois [János Bolyai](#) ou le russe [Nikolai Lobachevsky](#) renoncèrent simplement à ce cinquième postulat sans autre forme de procès. Ils tombèrent alors sur de nouvelles géométries assez étranges au premier abord, mais dont l'étude s'est avérée passionnante et particulièrement riche.



János Bolyai



Nikolai Lobachevsky

Ces nouvelles géométries ont ouvert un nouveau territoire vierge des mathématiques plein de questions passionnantes dans lequel les mathématiciens se sont engouffrés. Aujourd'hui, l'étude de la géométrie possède de nombreuses facettes et est reliée de façon inextricable aux autres domaines des mathématiques tels que l'algèbre, l'analyse ou la topologie.

Le point sur le plan

Après ce bref tour d'horizon des grands noms qui ont fait les mathématiques dans l'histoire, à notre tour à présent de nous lancer dans le monde de la géométrie. Dans ce chapitre, nous allons poser le cadre dans lequel nous allons travailler dans tout ce cours : le cadre de la géométrie plane.

Le point

Le **point**, c'est l'ingrédient de base de la géométrie. Impossible de faire quoi que ce soit sans lui : toutes les figures géométriques que nous allons rencontrer sont uniquement constituées de points assemblés les uns avec les autres.



Mais alors qu'est ce qu'un point ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons faire un bond de plus de 2000 ans en arrière pour retrouver Euclide en personne. Sa définition du point est la toute première phrase du premier livre des *Éléments* :

I.1 Le point, est ce qui n'a aucune partie « Le point est ce qui n'a aucune partie » - Éléments I

Voilà une définition qui laisse un peu perplexe quand on la découvre pour la première fois !

Quand Euclide dit qu'un point n'a pas de partie, cela signifie qu'il ne peut pas être découpé en plusieurs parties. On ne peut pas avoir des morceaux de points : moins qu'un point, c'est rien. Cette définition rend bien compte du fait que le point est le plus petit élément de la géométrie. Dans certaines traductions des *Éléments*, on trouve également parfois le point défini comme ce qui n'a ni longueur, ni largeur, ni épaisseur.

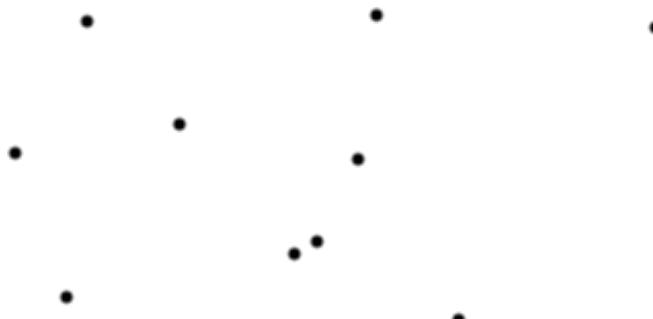


Cependant, ces définitions ont quand même un gros défaut : ce ne sont pas des définitions ! En effet, dire ce qu'un point n'est pas, n'est pas suffisant à définir ce qu'il est. En clair, une définition mathématique digne de ce nom ne devrait pas être une phrase négative.

Il est pourtant difficile d'en vouloir à Euclide car plus de 2000 ans après, les mathématiciens seraient encore bien en peine de donner une définition élémentaire d'un point. Ce qu'il faut comprendre, c'est que pour pouvoir définir une notion rigoureusement, il faut en donner une description à partir d'autres notions mathématiques déjà définies. Oui, mais voilà, il faut bien commencer quelque part, or le point est le tout premier objet géométrique que l'on rencontre. Impossible donc de le définir convenablement ! Ça commence bien...

Mais rassurez vous, je ne vais pas vous laisser plantés comme ça sans autres explications. S'il n'est pas possible de définir rigoureusement un point on peut quand même en donner une description intuitive largement suffisante pour se comprendre et faire de la géométrie sans ambiguïté. Cela peut paraître totalement fou, mais l'édifice géométrique d'Euclide tout entier repose sur le fait que nous comprenons tous de la même façon une notion que l'on ne sait pas définir !

De façon intuitive, on peut dire qu'un point, c'est un emplacement, un endroit, un « *quelque part* ». Chaque endroit correspond à un point et deux endroits différents, même s'ils sont très très proches, sont deux points différents. Voici par exemple dix points différents représentés :

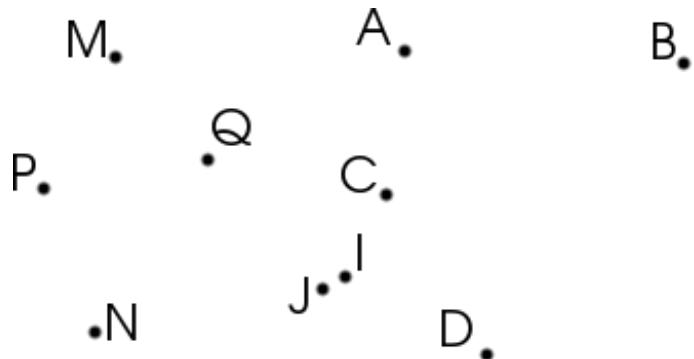


Alors bien sûr ce ne sont pas vraiment des points, ce sont des petits ronds. Mais les vrais points étant infiniment petits, il est impossible à représenter réellement. Le principal c'est que tout le monde comprenne bien ce que cette



figure représente.

En général, on donne aux points des noms qui sont des lettres de l'alphabet écrites en majuscule. Évidemment deux points différents ne peuvent pas être désignés par la même lettre. Revoici la même figure que ci-dessus une fois que l'on a nommé chacun des points :



Le plan

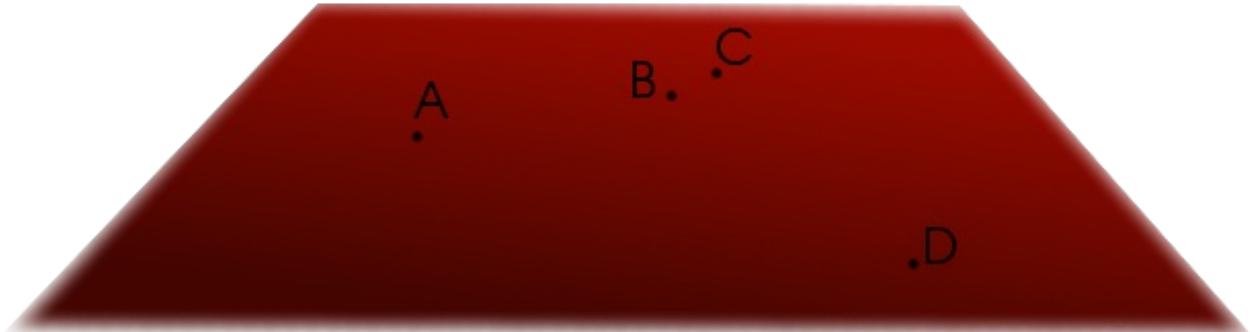
Nous venons de voir le point qui est le plus petit élément géométrique. Nous allons maintenant faire un grand écart pour voir le **plan**, qui est le plus grand.

Un plan est une surface infinie et plate. La **géométrie plane** que nous allons étudier dans ce cours désigne comme son nom l'indique la géométrie qui se passe dans un plan.



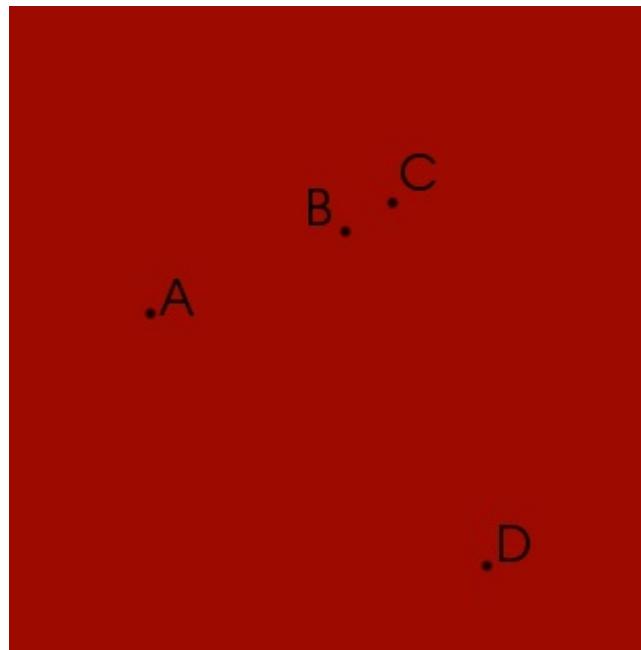
Il existe d'autres géométries qui sortent de ce cadre. C'est le cas par exemple de la géométrie dans l'espace dans laquelle on peut rencontrer des cubes, des sphères ou encore des tétraèdres. Mais dans tous les chapitres qui suivent, nous resterons toujours à l'intérieur du plan. Vous allez voir qu'il y a déjà beaucoup de choses à y faire !

Voici une représentation d'un plan en perspective avec quatre de ses points :

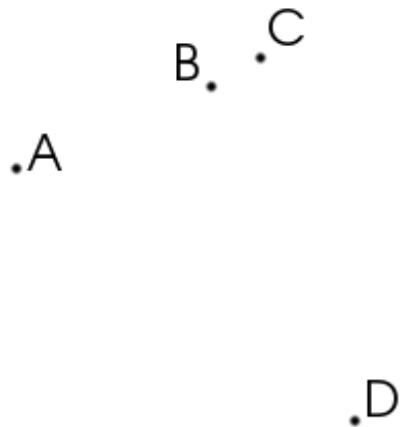


Bon d'accord, je vous arnaque un peu en vous disant qu'il s'agit d'un plan. Il ne s'agit en réalité que d'un morceau de plan car un plan étant infini il est impossible de le représenter entièrement.

Pour la première fois, vous avez droit à une image en perspective, mais dans la suite, il est plus pratique de représenter le plan vue de face de la façon suivante :



Et puis finalement, il n'est même plus besoin de colorier le plan en rouge pour le voir. On sait qu'il est là, infini, mais ce qui nous intéresse c'est avant tout les points que l'on y dessine :



Dans la suite de ce cours, le plan va donc se faire discret : vous ne le verrez plus. Et pourtant c'est dans lui que tout va se passer. Tous les points et toutes les figures que nous dessinerons lui appartiendront. Ne l'oubliez pas ! 😊

Entre les deux

Nous avons maintenant notre cadre : le plus petit c'est le point, le plus grand c'est le plan. Notre terrain de jeu se situe entre les deux : ce sont toutes les figures qui sont formées des points du plan. Une figure géométrique est un ensemble de plusieurs points (et même souvent une infinité).

Lignes et surfaces

Les figures géométriques du plan se divisent principalement en deux catégories : les lignes et les surfaces.

Les lignes

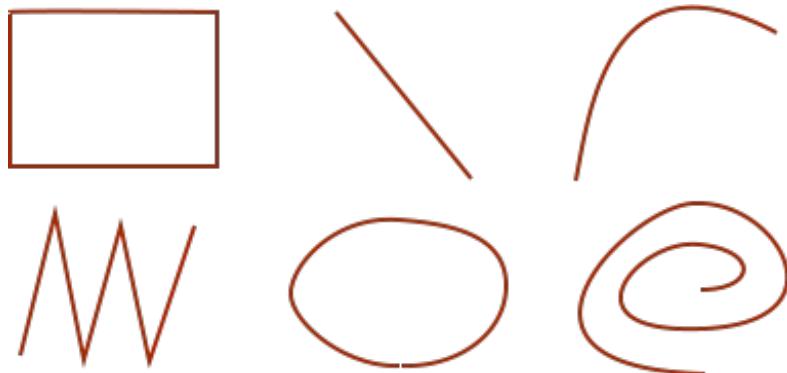
Euclide donne la définition suivante :

2. La ligne, est vne longueur sans largeur

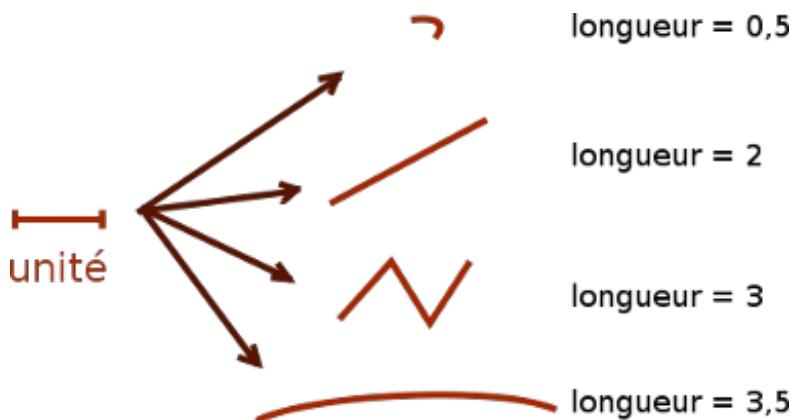
La ligne est une longueur sans largeur

- Éléments I

Voici quelques exemples de lignes.

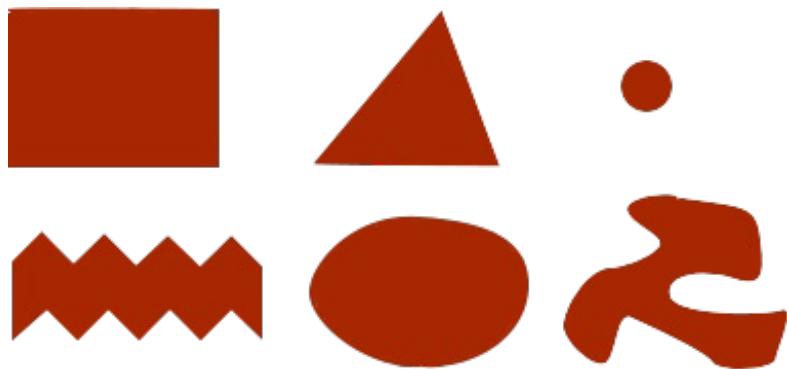


Les lignes sont mesurées par leur longueur. Pour cela, il faut avoir choisi au préalable une unité, c'est-à-dire un segment dont la longueur est déclarée égale à 1 et qui va servir d'échelon pour mesurer toutes les autres lignes. Une ligne deux fois plus grande que l'unité aura une longueur égale à 2. Une ligne deux fois plus petite aura une longueur égale à 0,5.

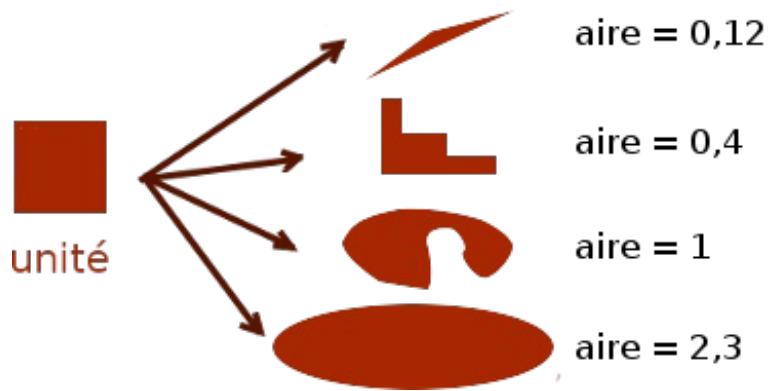


Les surfaces

Voici quelques exemples de surfaces.



Les surfaces sont mesurées par leur aire. L'unité pour les aires est traditionnellement choisie comme étant un carré dont le côté mesure une unité de ligne.

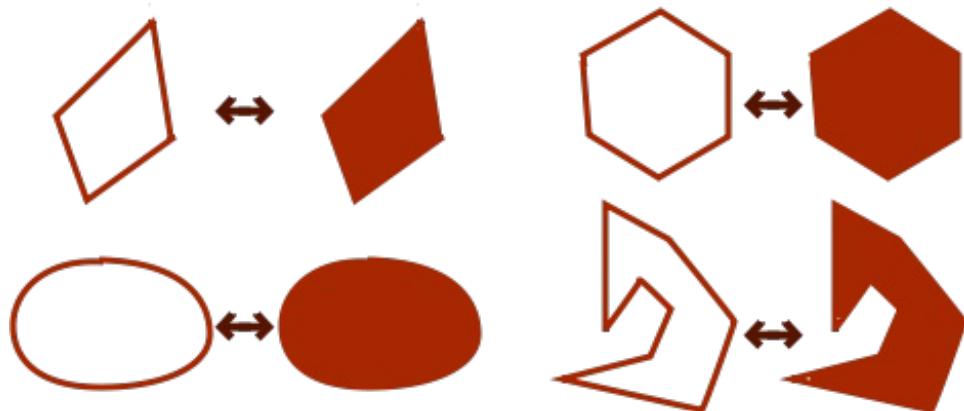


Figures ambiguës

En réalité plusieurs noms de figure peuvent désigner aussi bien une ligne qu'une surface. Par exemple le carré peut-être vu de deux façons différentes :



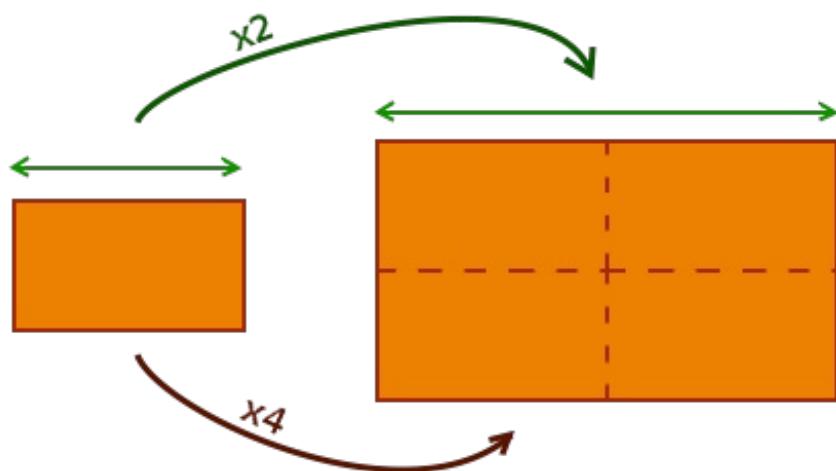
Ceci est vrai pour beaucoup d'autres figures dont voici quelques exemples.



Notez une exception : le cercle et le disque. Dans ce cas on a deux noms pour différencier les points de vue : le cercle est le nom de la ligne et le disque est le nom de la surface.

La longueur d'une telle figure, vue comme une ligne, se nomme son **périmètre**. Par exemple, un carré dont le côté mesure 10 a un périmètre égal à $4 \times 10 = 40$ et une aire égale à $10 \times 10 = 100$.

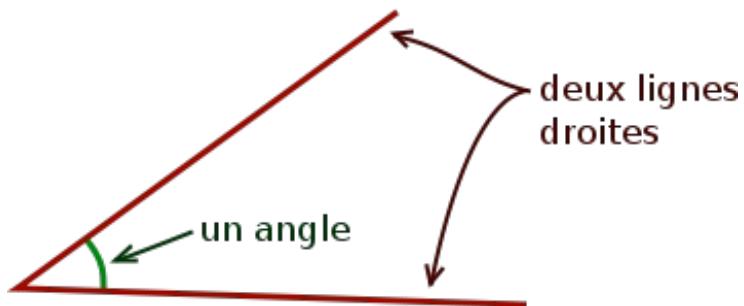
Notez que si l'on double la taille d'une figure, les longueurs sont multipliées par 2, mais les aires sont multipliées par 4. On peut le voir par exemple dans le cas d'un rectangle :



D'une manière générale, si on agrandit une figure en multipliant ses longueurs par x , alors les aires sont multipliées par x^2 . Pour en savoir plus, vous pouvez consulter [ce chapitre sur la mesure des figures](#).

Les angles

Les derniers types d'objet que l'on rencontre en géométrie plane, ce sont les **angles**. Un angle, c'est l'ouverture qui existe entre deux lignes droites qui se croisent.

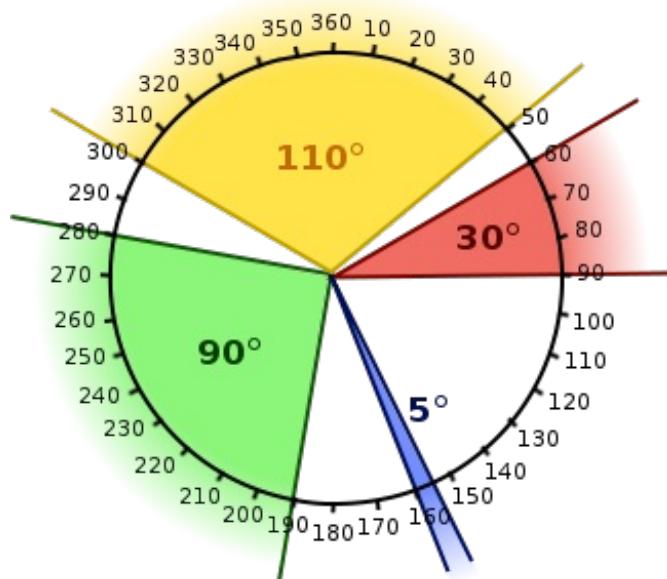


Il existe plusieurs façons de mesurer un angle, mais celle que nous allons utiliser dans ce cours, c'est la mesure en degrés qui place les angles sur une échelle de 0° à 360° .



La mesure en degré se note avec un petit rond en haut à droite du nombre, par exemple un angle pourra mesurer 220° , 12° ou encore 90° .

Pour mesurer un angle il faut imaginer que l'on trace un cercle gradué de 0 à 360 centré sur le point d'intersection des deux lignes droites. La mesure est alors donnée par le nombre de graduations englobées par l'angle. Voici quatre exemples d'angles :



Si la mesure des angles en degrés est la plus courante en géométrie plane, les mathématiciens lui préfèrent en général la mesure en radians. Cette dernière est plus adaptée pour de nombreuses applications dépassant le cadre de la géométrie. Dans ce cours nous nous contenterons des degrés, mais ne soyez pas étonné si un jour vous rencontrez d'autres méthodes de mesure des angles.

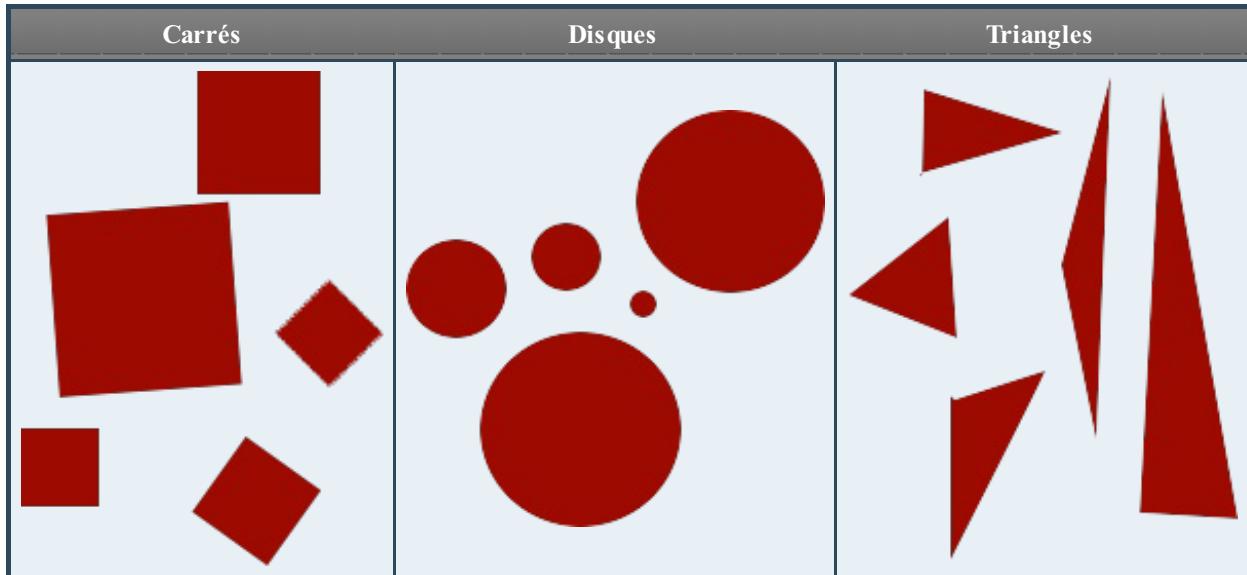


Quel rapports ?

Avec ce chapitre, nous entrons dans le vif du sujet ! Nous allons commencer par poser les outils de base qui vont nous être utiles dans toute la suite du cours. En chemin, nous démontrerons deux des plus célèbres théorèmes de géométrie : celui de Thalès et celui de Pythagore. Rien que ça !

Figures semblables

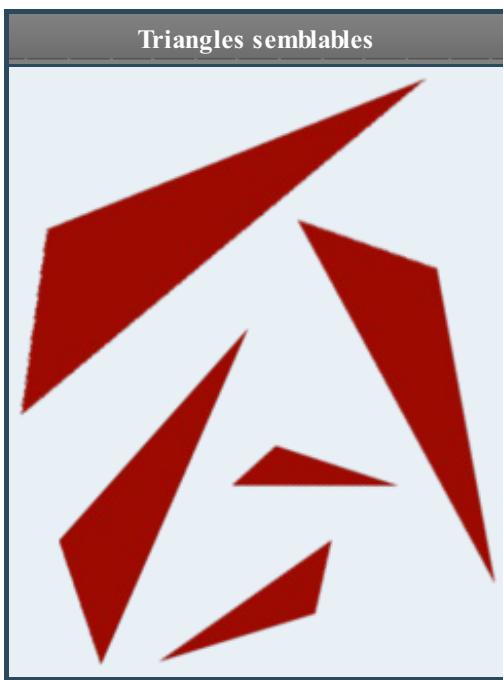
Deux figures **semblables**, ce sont deux figures qui ont la même forme, mais pas forcément la même taille. On peut par exemple dire que tous les carrés sont semblables entre eux. Les disques également sont tous semblables entre eux, mais les triangles en revanche ne le sont pas.



En bref, deux figures sont semblables si l'une est soit une réduction, soit un agrandissement de l'autre.



Attention, **tous** les triangles ne sont pas semblables entre eux, mais il est quand même possible d'en trouver **certains** qui sont semblables. C'est le cas par exemple des cinq triangles suivants :



La définition des figures semblables a beau être toute simple, nous allons voir que leur étude permet de mettre à jour plusieurs propriétés très intéressantes des figures géométriques.

Proportions et longueurs

Nous allons commencer par étudier les longueurs des figures semblables. Regardons par exemple les trois figures semblables suivantes :



Figure 1

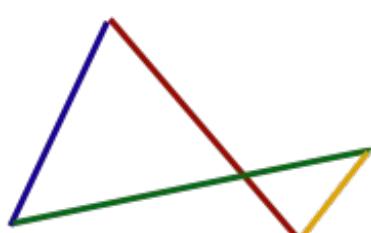


Figure 2

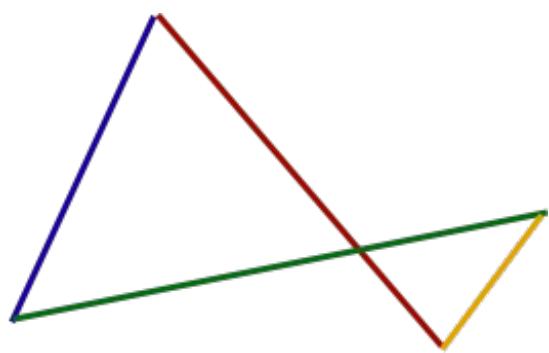


Figure 3

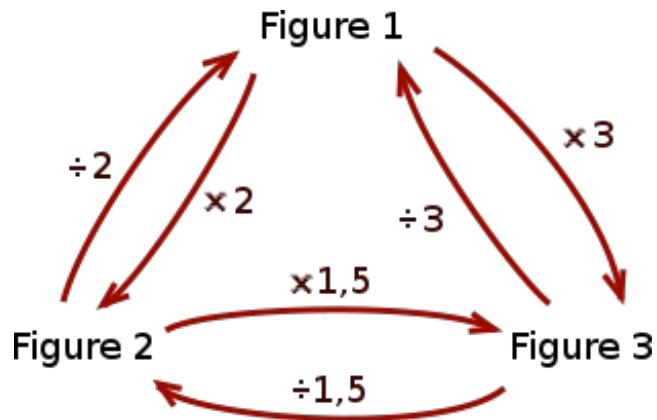
Et maintenant dressons le tableau des longueurs des différents côtés de chacune de ces trois figures.

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
	15 mm	30 mm	45 mm
	10 mm	20 mm	30 mm
	20 mm	40 mm	60 mm
	5 mm	10 mm	15 mm

On remarque alors que les trois colonnes de ce tableau sont proportionnelles entre elles ! Si par exemple on passe de la Figure 1 à la Figure 2 alors :

- le côté rouge voit sa longueur multipliée par 2 ;
- le côté bleu voit sa longueur multipliée par 2 ;
- le côté vert voit sa longueur multipliée par 2 ;
- le côté jaune voit sa longueur multipliée par 2.

Le facteur multiplicatif est le même pour tous les côtés : en passant de la Figure 1 à la Figure 2, **toutes** les longueurs sont multipliées par le **même** nombre. Et ceci est vrai pour toutes les colonnes du tableau :



En ligne

Les tableaux de proportionnalité comme celui que nous avons rempli ci-dessus possèdent une propriété très intéressante : si leurs colonnes sont toutes proportionnelles entre elles, alors **automatiquement** toutes leurs lignes sont également proportionnelles entre elles.

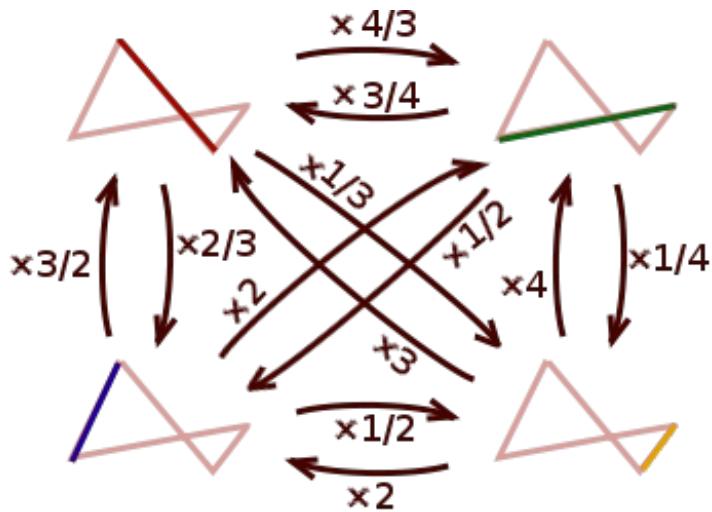


Si vous souhaitez en savoir plus sur les raisons pour lesquelles cette propriété est vraie, vous pouvez lire ce chapitre du cours de statistiques.

Concrètement, cela signifie que quelque soit celle des trois figures que l'on regarde, le rapport pour passer par exemple de la longueur jaune à la longueur rouge est toujours le même. En l'occurrence, il vaut 3 :

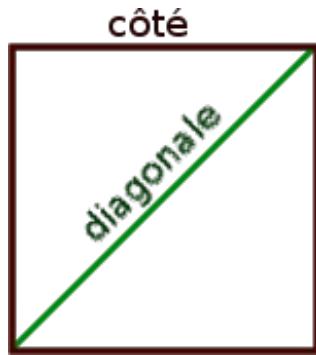
- dans la Figure 1, la longueur rouge est 3 fois plus grande que la jaune ;
- dans la Figure 2, la longueur rouge est 3 fois plus grande que la jaune ;
- dans la Figure 3, la longueur rouge est 3 fois plus grande que la jaune.

Et ceci est vrai pour toutes les couleurs. On peut résumer les rapports entre les différentes longueurs sur le schéma suivant :



Par exemple, on voit que la longueur rouge est toujours $3/2=1,5$ fois plus grande que la bleue. Autrement dit, quand on change la taille d'une figure, on change ses longueurs, mais on ne change pas les rapports entre ses longueurs !

Prenons le carré par exemple. Dans un carré, il y a principalement deux longueurs que l'on peut mesurer : son côté et sa diagonale :



Mais comme tous les carrés sont semblables entre eux, nous savons donc que le rapport entre la diagonale et le côté est toujours le même. Concrètement on a :

$$(\text{diagonale}) = (\text{côté}) \times (\text{un nombre qui est le même pour tous les carrés}).$$

Ce nombre est donc caractéristique du carré et il serait très intéressant d'essayer de trouver combien il vaut ! 🍋

Toutes les figures géométriques ont ainsi des rapports caractéristiques qui leur sont propres. Les cercles, les pentagones réguliers ou les triangles équilatéraux tous cachent des nombres dans les rapports de leurs longueurs. Et ce sera notre objectif dans la suite de ce chapitre de débusquer ces nombres !

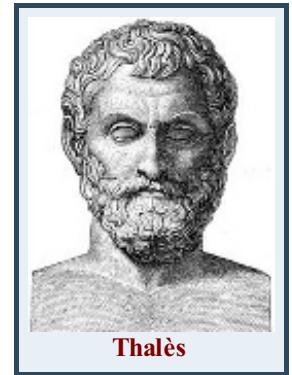
Il est encore un peu trop tôt pour vous les dévoiler, mais assurez-vous ce ne sera pas très long. Entre temps nous allons rendre une petite visite à Thalès et Pythagore qui devraient pouvoir nous éclairer...

Le théorème de Thalès

Si vous avez suivi la partie précédente sur les figures semblables, le théorème de Thalès ne vous posera aucun problème. En réalité, il s'agit simplement d'un cas particulier de situation où l'on a deux triangles semblables.

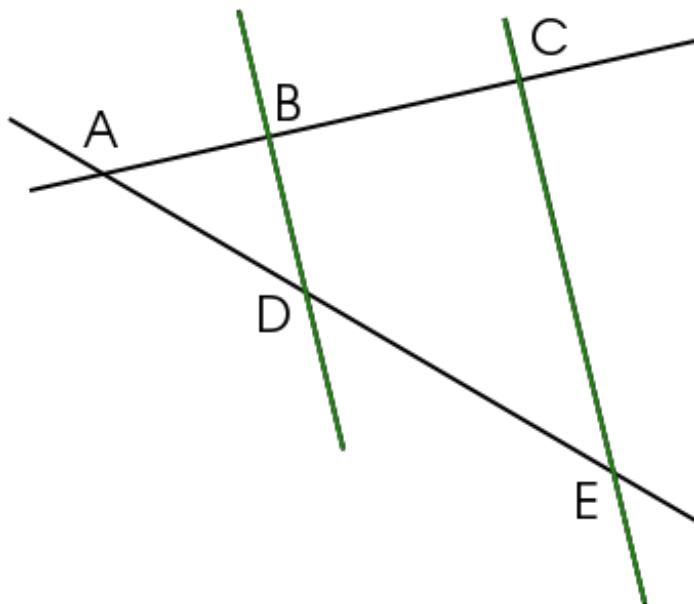
Thalès de Milet (-625, -547) était un mathématicien de la Grèce antique. La légende dit qu'il fut le premier à réussir à calculer la hauteur de la grande pyramide de Khéops en utilisant une version simplifiée de son théorème comme nous allons le voir. Mais paradoxalement il est assez probable que Thalès ne connaissait pas dans toute sa généralité le théorème auquel on a attaché son nom !

⚠️ Attention, le théorème que nous allons voir et qui s'appelle en français le *théorème de Thalès* se nomme dans la plupart des autres pays le *théorème d'intersection*. Le *théorème de Thalès* étant dans ces pays le nom d'un autre résultat géométrique totalement différent !



Le théorème de Thalès

Regardez la figure suivante.



Nous avons :

- deux droites (en noir) qui se coupent en un point A
- deux droites (en vert) parallèles entre elles et qui coupent chacune des deux premières droites.

Le théorème de Thalès affirme que dans cette situation, on a

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}.$$

La raison de ces égalités tient en une phrase : les triangles ABD et ACE sont semblables. On peut dresser le tableau des longueurs de ces deux triangles :

Triangle ABD	Triangle ACE
AB	AC
AD	AE
BD	CE

Les deux colonnes de ce tableau sont donc proportionnelles : on multiplie par un **même** nombre pour passer de l'une à l'autre. Or on a

- *ligne 1* : pour passer de AB à AC, il faut multiplier par AC/AB ;
- *ligne 2* : pour passer de AD à AE, il faut multiplier par AE/AD ;
- *ligne 3* : pour passer de BD à CE, il faut multiplier par CE/BD ;

Par conséquent les rapports des segments qui se correspondent doivent tous être égaux, c'est bien ce que dit le théorème de Thalès :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}.$$

Dans la figure qui sert d'exemple ci-dessus, ce rapport est égal à 2,5 ce qui signifie que le triangle ACE est 2,5 fois plus grand que le triangle ABD :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD} = 2,5 = \frac{5}{2}.$$

Remarquez qu'il est tout à fait possible d'énoncer le théorème de Thalès dans l'autre sens en regardant par combien on

multiplie la colonne 2 pour passer à la colonne 1. Autrement dit en regardant par combien sont multipliée les longueurs en passant du triangle ACE au triangle ABD. Cela revient simplement à inverser les numérateurs et les dénominateurs :

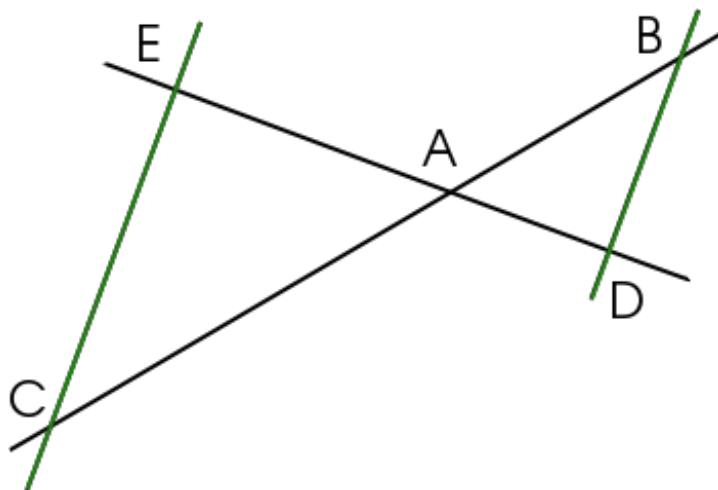


$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Notez que l'on trouve logiquement un nombre plus petit que 1 puisque le triangle ABD est plus petit que le triangle ADE !

Thalès en papillon

Il existe une autre configuration du théorème de Thalès : si les deux droites vertes ne se trouvent pas du même côté du point A on a alors une figure en forme de nœud papillon.



Le théorème marche exactement de la même façon, mais il faut se méfier en l'utilisant car dans cette configuration les deux triangles semblables ont une orientation différente. En l'occurrence le côté **AB** correspond au côté **AC** et le côté **AD** correspond au côté **AE**. Une fois constaté cela, la conclusion est exactement la même :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}.$$

La hauteur de la grande Pyramide

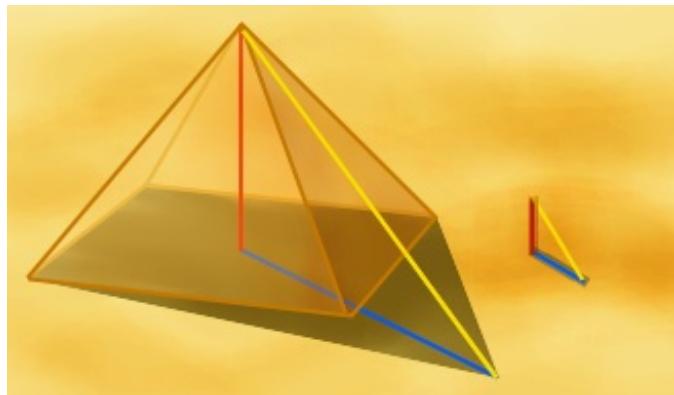
La légende dit qu'alors qu'il se trouvait en Égypte, Thalès rencontra le pharaon [Amasis](#) qui l'informa que jamais personne n'avait encore été capable de mesurer la hauteur de la grande pyramide de Khéops. Thalès releva le défi.

Pour cela, il eut l'idée d'utiliser l'ombre de la Pyramide (plus facile à mesurer puisqu'elle se trouve sur le sol) et de la comparer avec l'ombre d'un bâton planté verticalement dans le sol.



Le rapport entre la hauteur d'un objet et la longueur de son ombre est constant se dit Thalès. En d'autres termes, si le bâton est à un moment donné deux fois plus grand que son ombre, alors au même moment la pyramide est également deux fois plus grande que son ombre. Il suffit donc de mesurer l'ombre pour en déduire la hauteur !

Si on trace les figures correspondantes, on voit apparaître deux triangles semblables :



Les côtés jaunes sont bien parallèles puisqu'ils suivent tous les deux la direction des rayons du soleil. Ainsi, le rapport du côté bleu et du côté rouge est le même pour le bâton et pour la pyramide.

 Une version assez répandue de la légende dit que Thalès aurait tout simplement attendu un moment de la journée où le bâton et son ombre avaient la même longueur pour mesurer l'ombre de la pyramide. Pas la peine ainsi de faire un calcul de rapport. En réalité, il est possible que Thalès n'ait pas connu son théorème dans toute sa généralité tel que nous venons de le voir.

Le théorème de Pythagore Figures semblables et surfaces

Avant de voir le théorème de Pythagore, nous allons revenir un instant sur les figures semblables. Et tout d'abord nous allons remarquer que la propriété de proportionnalité est également vraie si on regarde les surfaces à la place des longueurs.

Reprendons nos trois figures semblables, mais cette fois en nous intéressant à leurs surfaces.

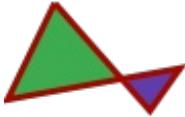


Figure 1

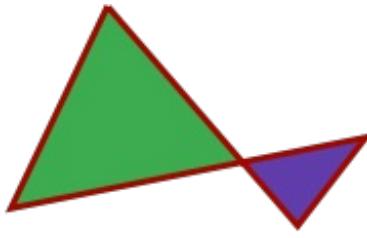


Figure 2

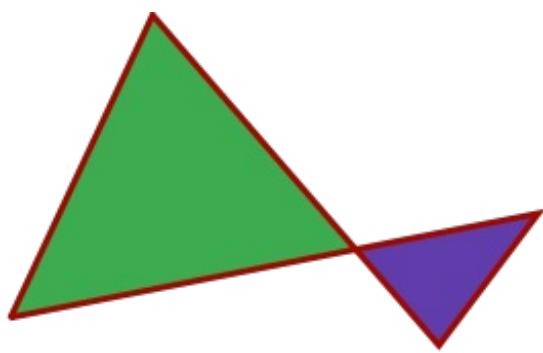


Figure 3

On obtient le tableau suivant :

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
	50	200	450
	10	40	90

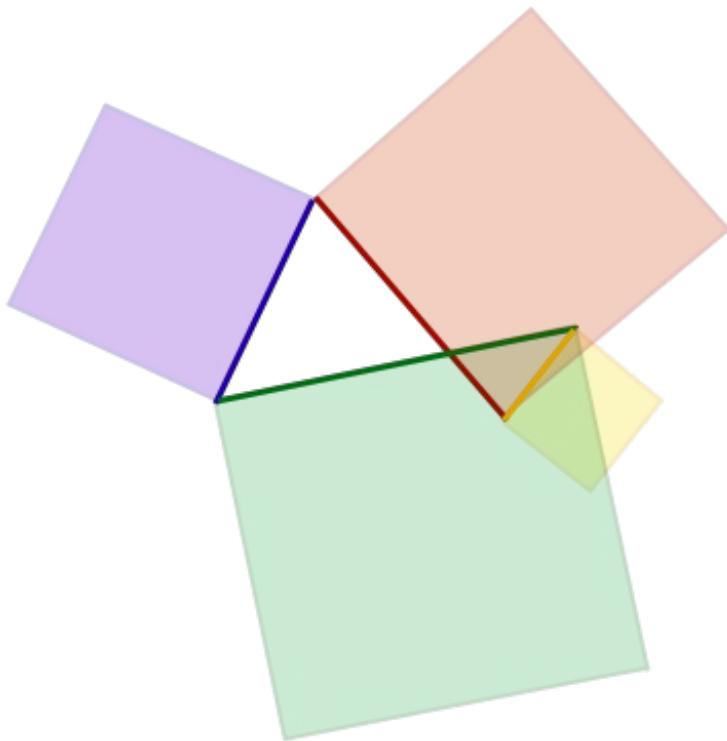
On peut bien vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité. Vous remarquez par exemple que les aires de la Figure 3 sont 9 fois plus grandes que celles de la Figure 1. On voit aussi que dans les trois figures la surface verte est toujours 5 fois plus grande que la violette.

Il y a une chose réellement intéressante dans le tableau des aires, c'est que l'on peut rajouter des lignes avec les carrés des distances.



Mais pourquoi ça ?

La raison est assez astucieuse. Cela provient du fait que le carré d'une distance peut être considéré comme une surface, et plus précisément comme la surface d'un carré ayant pour côté la longueur considérée. Il faut en quelque sorte imaginer que l'on rajoute à la figure des carrés fantômes de la façon suivante :



En ajoutant quatre lignes pour les carrés des quatre distances, on obtient le tableau suivant :

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
	50	200	450
	10	40	90
$(\text{triangle})^2$	225	900	2025
$(\text{triangle})^2$	100	400	900

$(\text{triangle})^2$	400	1600	3600
$(\text{triangle})^2$	25	100	225

Et hop, ce tableau est encore un tableau de proportionnalité. Vérifiez par vous même si vous n'en êtes pas convaincu !

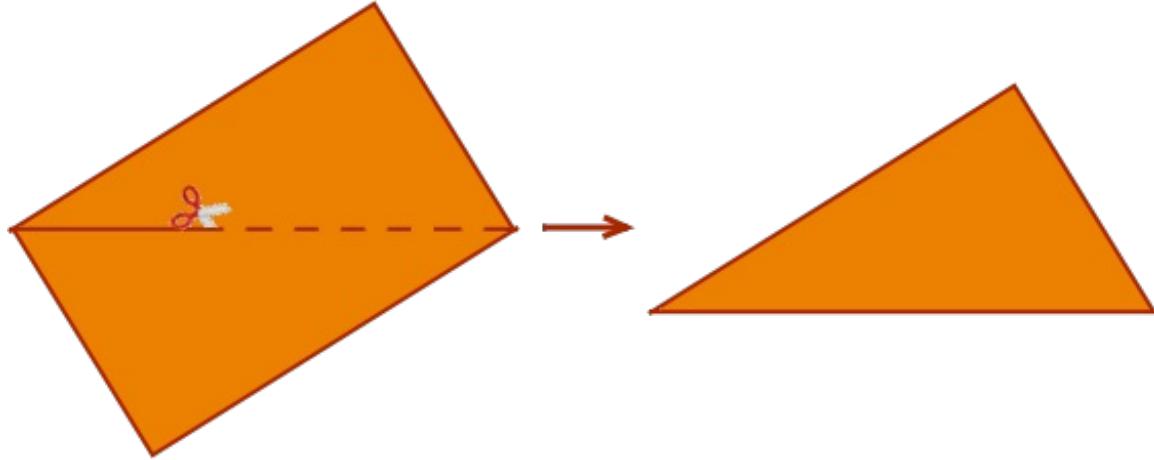
Théorème de Pythagore

De tous les théorèmes de géométrie, le théorème de Pythagore est sans doute le plus célèbre. Il concerne les **triangles rectangles**.



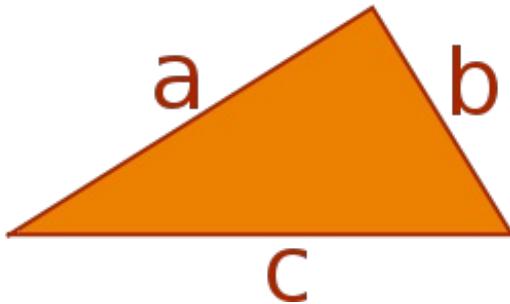
Qu'est ce qu'un triangle rectangle ?

Il s'agit d'un triangle obtenu en tranchant un rectangle en deux par la diagonale. En voici un exemple:



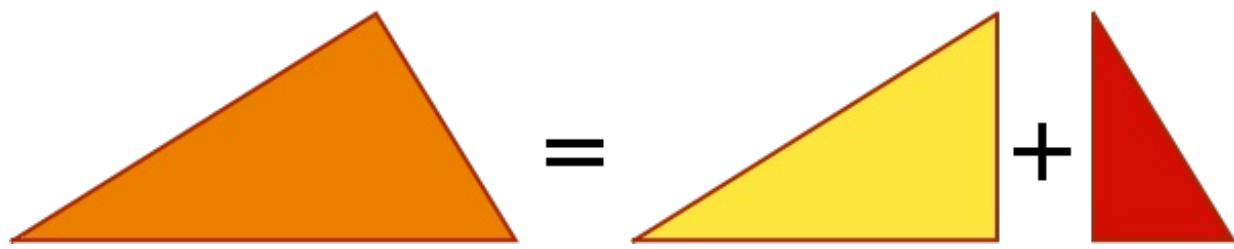
En d'autres termes, il s'agit d'un triangle possédant un angle droit, c'est-à-dire un angle de 90° ou encore d'un quart de tour. Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit de l'angle du haut : c'est l'angle du rectangle qui est resté entier après le découpage.

Pour pouvoir étudier ce triangle, nous allons donner des noms à ses côtés. Notons **a** et **b** les longueurs des deux côtés qui partent de l'angle droit et **c** la longueur du côté qui se trouve en face de l'angle droit.

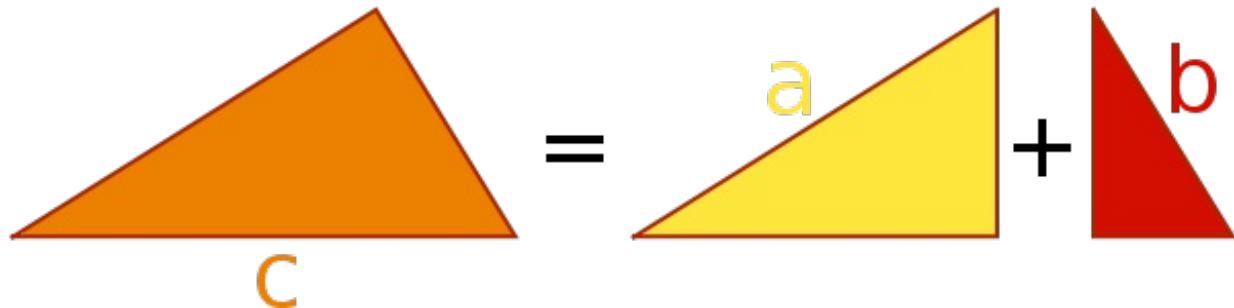


Dans un triangle rectangle, le côté qui se trouve en face de l'angle droit porte un nom : **l'hypoténuse**. Dans notre exemple, **c** est donc la longueur de l'hypothénuse. Notez que l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés.

Les triangles rectangles possèdent une très jolie propriété qui se trouve à l'origine du théorème de Pythagore : on peut les découper en deux triangles semblables à eux-mêmes.



Notez que dans ce découpage, le côté a devient l'hypoténuse du premier petit triangle (en jaune) et que b devient celle du deuxième (en rouge).



Puisque les trois triangles sont semblables, on peut dresser un tableau de proportionnalité :

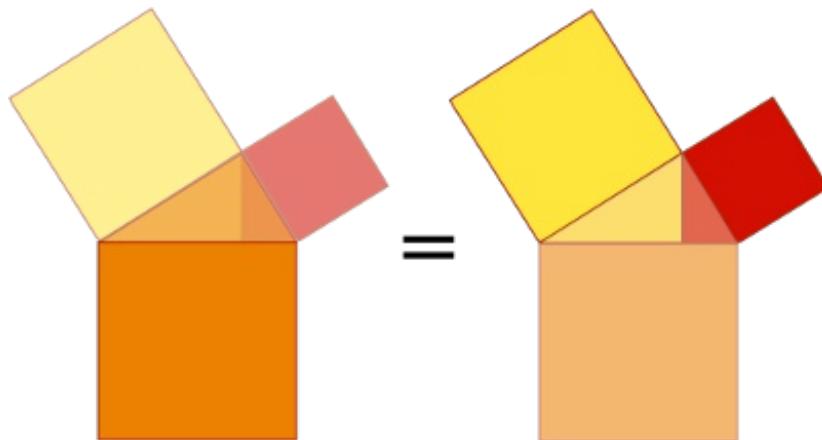
	Triangle jaune	Triangle rouge	Triangle orange
Aire			
Carré de l'hypoténuse	a^2	b^2	c^2

Or le triangle orange est composé des triangles jaunes et rouges, donc on sait que la somme de la première et de la deuxième colonne est égale à la troisième. Si on regarde les carrés des hypothénuses, on a donc :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Et voilà le théorème de Pythagore ! Il s'énonce de la façon suivante : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Si vous avez bien suivi, le raisonnement se résume sur la figure suivante.



Fameux rapports

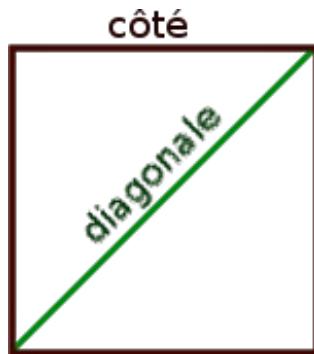
Armés du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore, nous sommes maintenant prêts pour reprendre les questions que nous avions laissées en suspend au début de ce chapitre :



Quels sont les rapports caractéristiques des figures classiques de la géométrie ?

Le carré

Commençons par le carré. Les deux distances que l'on peut mesurer sur un carré sont son côté et sa diagonale.



Pour plus de simplicité, supposons que le côté du carré mesure 1.



Attends, attends... pourquoi faire cette supposition ?

Tout d'abord, parce qu'on a le droit de choisir le carré qu'on veut puisque l'on sait déjà que le rapport est le même pour **tous** les carrés. Et comme le rapport que l'on cherche est le résultat de la division de la diagonale par le côté, autant prendre directement le côté égal à 1 comme ça il n'y a même pas de division à faire, la longueur de la diagonale est directement égale au rapport cherché. Eh oui, il faut savoir être malin en maths ! 😊

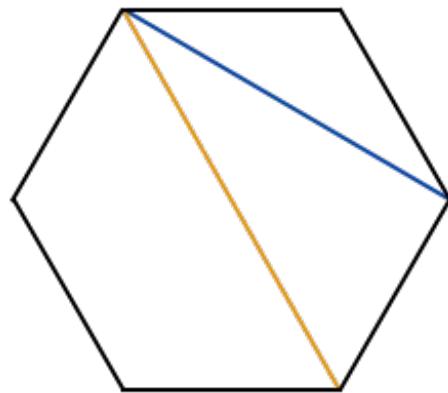
Bref, pour connaître le rapport des deux, nous allons faire appel à Pythagore. En effet, si on coupe le carré en deux par la diagonale, on obtient un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 1. Le théorème de Pythagore nous affirme donc que :

$$(\text{diagonale})^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Le carré de la diagonale vaut 2 et par conséquent la diagonale mesure $\sqrt{2} \approx 1,414\dots$. Voilà ce fameux nombre ! Dans n'importe quel carré, la diagonale est $\sqrt{2}$ fois plus grande que le côté.

L'hexagone

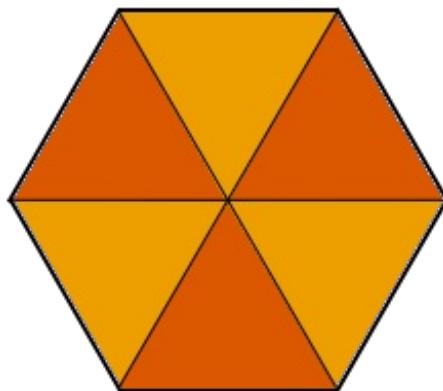
Passons maintenant à l'hexagone régulier qui est également intéressant car il possède deux types de diagonales :



Il y a des grandes diagonales (comme celle en jaune) et des petites diagonales (comme celle en bleu). Pour chacune des deux on peut se demander quel est son rapport au côté de l'hexagone. Encore une fois, pour plus de simplicité, on peut supposer que le

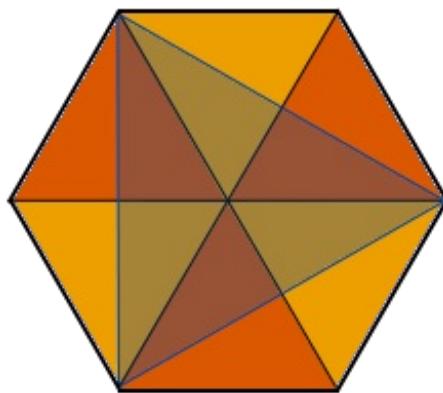
côté de l'hexagone mesure 1.

Pour pouvoir répondre, il y a une chose qu'il faut savoir à propos des hexagones réguliers, c'est qu'ils sont composés de six petits triangles équilatéraux :



Cette constatation permet immédiatement de conclure que la grande diagonale de l'hexagone est exactement deux fois plus grande que son côté. En effet, la grande diagonale est composée de deux côtés de petits triangles équilatéraux tandis que le côté de l'hexagone est égal au côté des ces petits triangles.

Passons maintenant à la petite diagonale qui va nous donner un peu plus de fil à retordre. Commençons par tracer trois petites diagonales de la façon suivante pour former un grand triangle équilatéral :



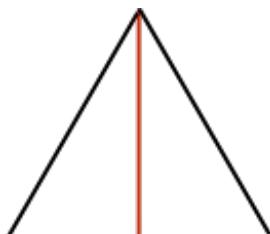
Ce grand triangle coupe chacun des six petits triangles en deux. Par conséquent, l'aire du grand triangle est trois fois plus grande que l'aire de chacun des petits triangles.

Rappelez-vous maintenant des propriétés des figures semblables. Si en agrandissant un triangle équilatéral on multiplie son aire par 3, par combien ses longueurs sont-elles multipliées ? La réponse est $\sqrt{3}$. Le côté du grand triangle bleu est donc $\sqrt{3}$ fois plus grand que les côtés des petits triangles. En d'autre termes, le rapport de la petite diagonale de l'hexagone et de son côté est égal à $\sqrt{3}$. Et voilà le travail !

Quelques autres

Il y a beaucoup de figures dont on peut calculer les rapports et ce serait assez long de tous les chercher ici. Je vous en donne cependant deux autres qui sont assez importants, je vous laisse chercher vous-même les démonstrations si vous les voulez. 

Le triangle équilatéral



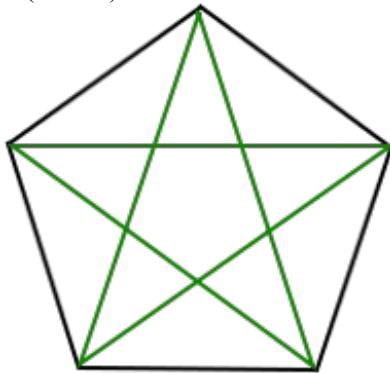
Dans un triangle équilatéral le rapport entre la hauteur (en rouge) et le côté est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866\dots$



Un indice si vous voulez le démontrer : regardez les petits triangles équilatéraux qui apparaissent dans l'étude de l'hexagone ci-dessus et observez bien ce que font les petites diagonales bleues.

Le pentagone

Un pentagone régulier possède cinq diagonales (en vert) :



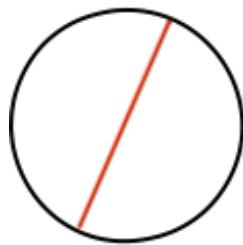
Dans un pentagone, le rapport entre une diagonale et un côté est égal au célèbre nombre d'or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$



La démonstration de cette valeur est un peu plus subtile que les autres. Si vous essayez de la trouver, il vous faudra avoir quelques notions de résolution des équations du second degré.

Le cercle

Je vous ai gardé le meilleur pour la fin. Nous allons conclure avec le plus célèbre des rapports, celui qui apparaît quand on étudie un cercle. Dans un cercle, on peut mesurer son périmètre et son diamètre (en rouge).



Combien vaut le rapport du périmètre et du diamètre ? Autrement dit, combien obtient-on en divisant le périmètre d'un cercle par son diamètre ?

La réponse est assez déroutante : il n'existe pas de formule simple pour ce rapport. Et en mathématiques quand on a un nombre dont on ne parvient pas à calculer la valeur, on lui donne un nom pour pouvoir l'étudier ! Les mathématiciens ont donc donné à ce rapport le nom « π », qui se lit *pi* et est la seizeième lettre de l'alphabet grec. Il vaut environ 3,1415...

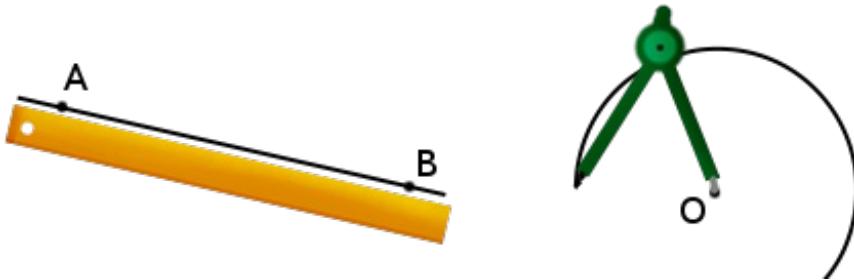
Le nombre π fascine les mathématiciens depuis les grecs et jusqu'à aujourd'hui. Au cours de l'histoire de nombreux grands savants s'y sont intéressé et en ont calculé des approximations avec de plus en plus de précision. Aujourd'hui on connaît plus de 5 000 000 000 000 de décimales de ce nombre, mais toujours pas de formule en fonction des opérations élémentaires. Mais n'essayez pas de chercher car [Ferdinand von Lindemann](#) a démontré en 1882 qu'une telle formule ne pouvait pas exister et c'est cette impossibilité qui lui a permis de conclure que la quadrature du cercle n'est pas réalisable.

Bref, ce nombre est sans doute le plus célèbre de toutes les mathématiques et conserve encore à notre époque de nombreux

mystères !

TP : Constructions à la règle et au compas

Les grecs anciens considéraient la règle et le compas comme les deux instruments de base en géométrie. Dans ce TP, nous allons marcher dans leur pas en réfléchissant à notre tour aux constructions que ces deux outils permettent. La règle permet de tracer des lignes droites passant par deux points donnés et le compas permet de tracer des cercles de rayon et de centre donnés.

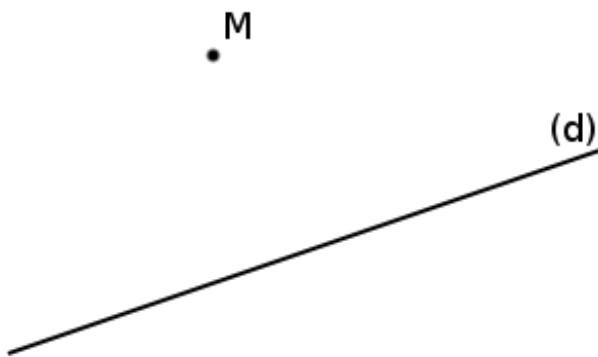


i Si vous avez une règle et un compas pas très loin, vous pouvez les sortir. Mais si vous n'en avez pas, ne vous inquiétez pas, l'important est de réfléchir aux méthodes de construction et ceci est toujours possible même si vous tracez vos figures approximativement à la main.

Premières constructions

Cette fois, c'est à vous de jouer ! 😊 Et je vous propose de commencer avec les constructions élémentaires qui vont nous être très utiles dans la suite : les perpendiculaires et les parallèles.

La situation est la suivante, vous disposez d'une droite (d) et d'un point M :



Les deux premières constructions que je vous propose de réaliser sont les suivantes :

- **Construction 1.** Tracer la droite perpendiculaire à (d) qui passe par M.
- **Construction 2.** Tracer la droite parallèle à (d) qui passe par M.



Attention, le but du jeu est de trouver une méthode de construction exacte de ces droites. Il ne s'agit pas juste de poser votre règle à vue d'œil pour obtenir un résultat approxamatif. Même si **concrètement** il n'est pas possible de faire une figure parfaite, vous cherchez une construction qui doit être parfaite d'un point de vue **théorique**.

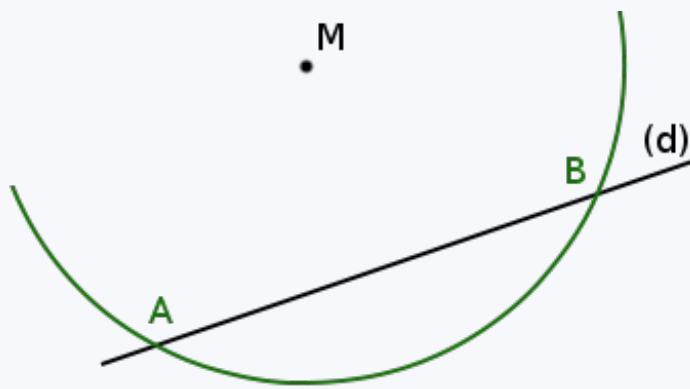
Prenez réellement le temps d'y réfléchir par vous même avant de lire la solution. C'est beaucoup plus agréable de faire les choses par soi-même. 😊

Solutions

La perpendiculaire

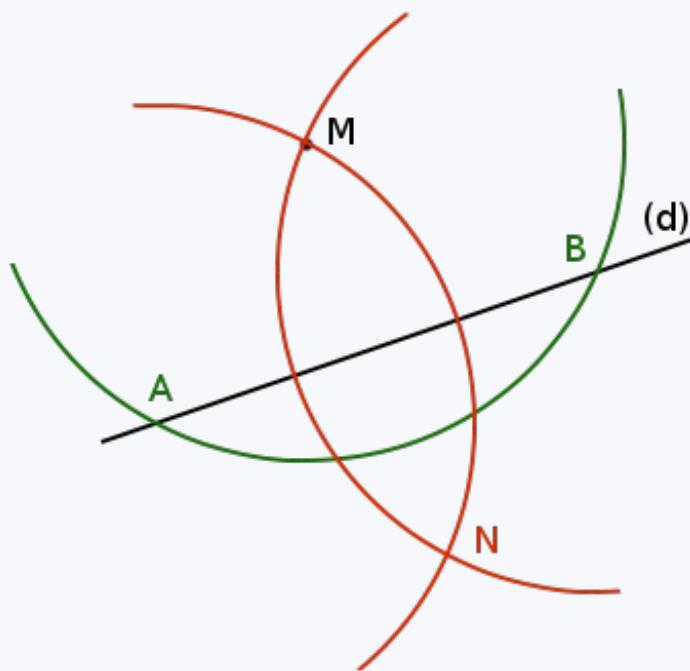
Secret (cliquez pour afficher)

À vrai dire, pour commencer nous n'avons pas vraiment le choix. Pour tracer une droite, il faut deux points et nous n'en avons qu'un. Nous sommes donc obligés de commencer par un coup de compas en traçant un cercle centré sur le point M. Pour que ce coup de compas soit utile, il faut que le rayon soit assez grand pour que le cercle intersecte la droite. Deux nouveaux points apparaissent alors ! Notons les A et B.



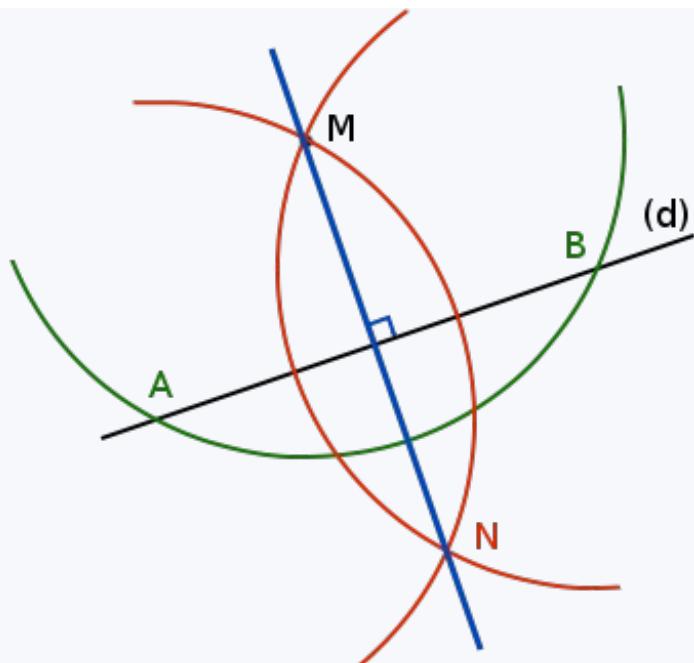
Il faut remarquer que les points A et B ne sont pas quelconques sur la droite (d) : ils sont tous les deux à la même distance du point M. On peut donc garder le même écartement de compas et tracer deux nouveaux cercles, centrés en A et B et qui passent par M.

Ces deux cercles se croisent en M, mais pas seulement. Ils ont un deuxième point d'intersection de l'autre côté de la droite. Notons le N.



Le point N est le symétrique de M par rapport à la droite (d). Cela signifie que si on pliait le plan en deux en suivant la droite (d), les points M et N viendraient se coller l'un contre l'autre.

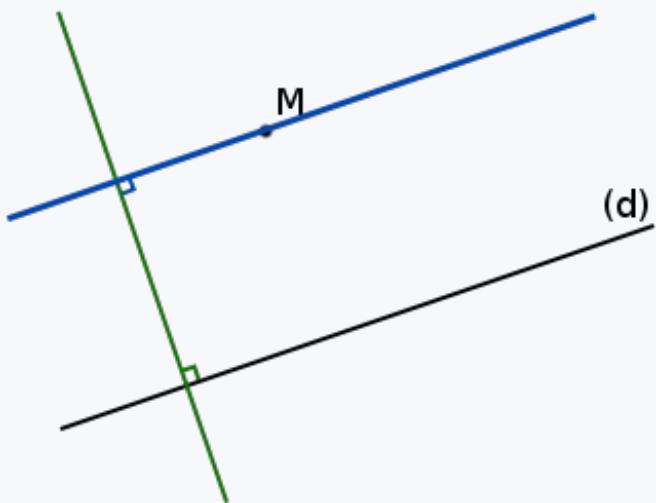
À partir de là, il est facile de tracer la perpendiculaire que l'on cherche. Vous la voyez ? Il s'agit de la droite passant par M et N. Un coup de règle et c'est fini.



La parallèle

Secret (cliquez pour afficher)

Une fois que l'on sait tracer des perpendiculaires, il est plus facile d'en déduire une méthode pour les parallèles. Il suffit de tracer une perpendiculaire quelconque à la droite (d), puis de tracer une perpendiculaire à cette nouvelle droite qui passe par M.



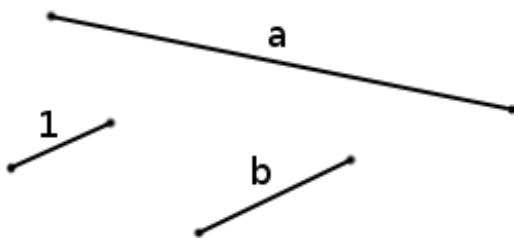
Simple, non ? Notez que je n'ai pas reproduit sur la figure tous les tracés nécessaires à la construction des perpendiculaires. L'important c'est de savoir qu'on sait le faire. 😊



Ces constructions sont intéressantes car elles prouvent que des outils comme une équerre (qui sert à tracer des angles droits) ou un trace parallèle sont inutiles puisque l'on peut reproduire leurs constructions uniquement à partir de la règle et du compas.

Les quatre opérations

Dans cette partie, on change un peu de contexte. Maintenant, vous disposez de trois segments : un segment unité (c'est-à-dire de longueur égale à 1) et deux segments quelconques de longueurs que nous appellerons a et b .



Le but du jeu est de construire à la règle et au compas des segments réalisant les quatre opérations de base. Autrement dit, vous avez à réaliser :

- un segment de longueur $a+b$;
- un segment de longueur $a-b$ (on suppose que a est plus grand que b) ;
- un segment de longueur $a \times b$;
- un segment de longueur $a \div b$.

C'est à vous ! N'oubliez pas que vous avez le droit de réutiliser les constructions de perpendiculaires et de parallèles que nous avons trouvées dans la partie précédente.

Réfléchissez bien, l'addition et la soustraction sont les plus faciles et si vous séchez sur la multiplication et la division, voici un petit indice :

Secret ([cliquez pour afficher](#))

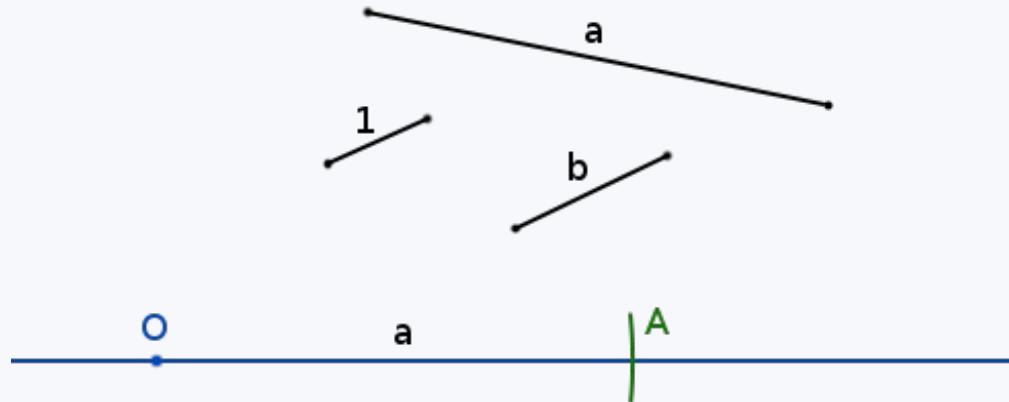
Thalès peut vous aider.

Solutions

L'addition et la soustraction

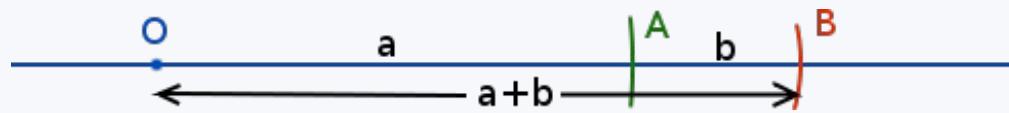
Secret ([cliquez pour afficher](#))

L'addition et la soustraction sont assez faciles à réaliser. Commençons par tracer une droite sur laquelle on place un point O quelconque. Grâce au compas, il est possible de reporter la longueur a sur la droite à partir du point O ce qui donne un nouveau point que l'on note A.

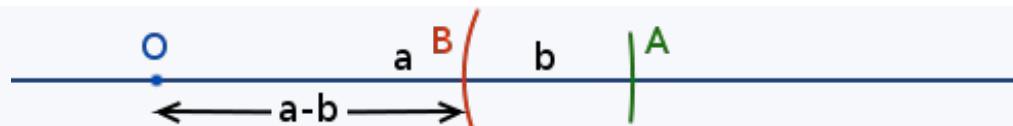


Il suffit alors de reporter la longueur b à partir du point A pour y placer un point B.

- Si on place le point B de l'autre côté de O par rapport à A, alors le segment OB mesure $a + b$:



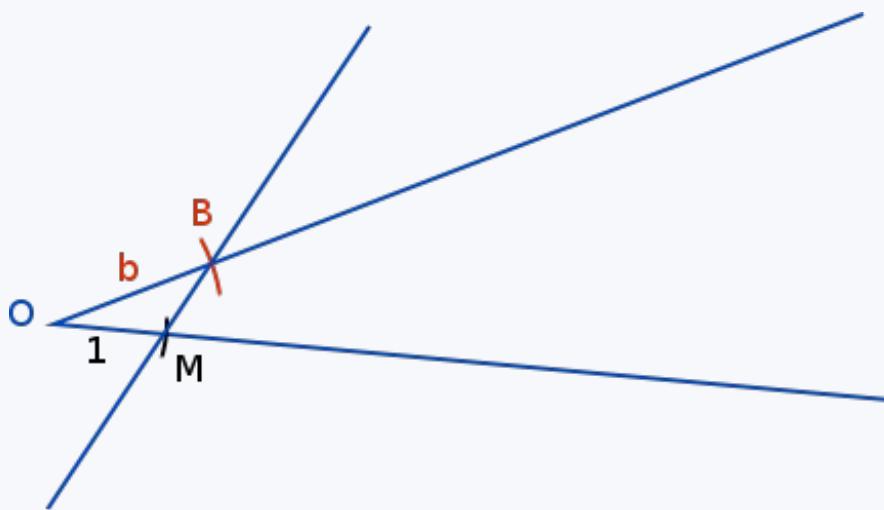
- Et si on place le point B du même côté que O par rapport à A, alors le segment OB mesure $a - b$:



La multiplication et la division

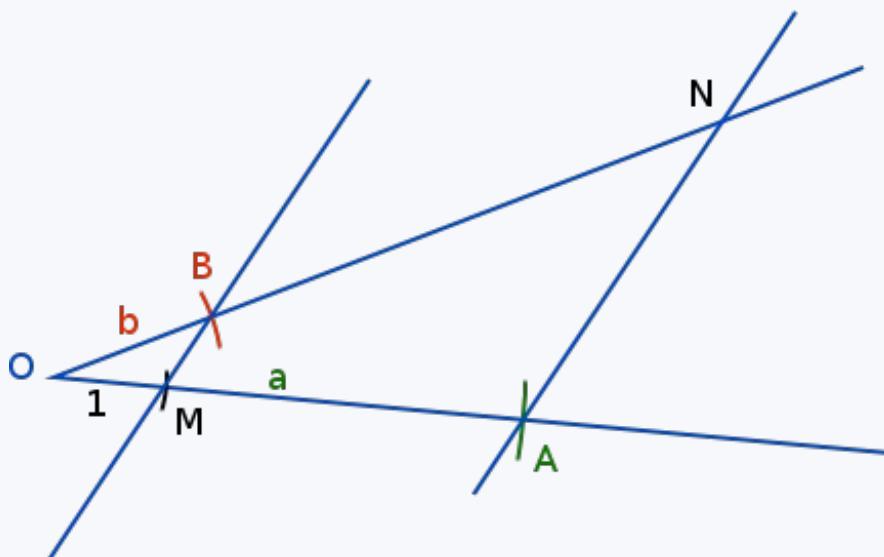
Secret (cliquez pour afficher)

Pour la multiplication et la division, nous allons utiliser des triangles semblables, et plus particulièrement la configuration du théorème de Thalès. Commençons par placer deux droites qui se croisent en un point O. Sur l'une d'elle, on place un point M situé à une distance 1 de O (reportée au compas grâce au segment unité à notre disposition) et sur l'autre on place un point B situé à distance b de O.



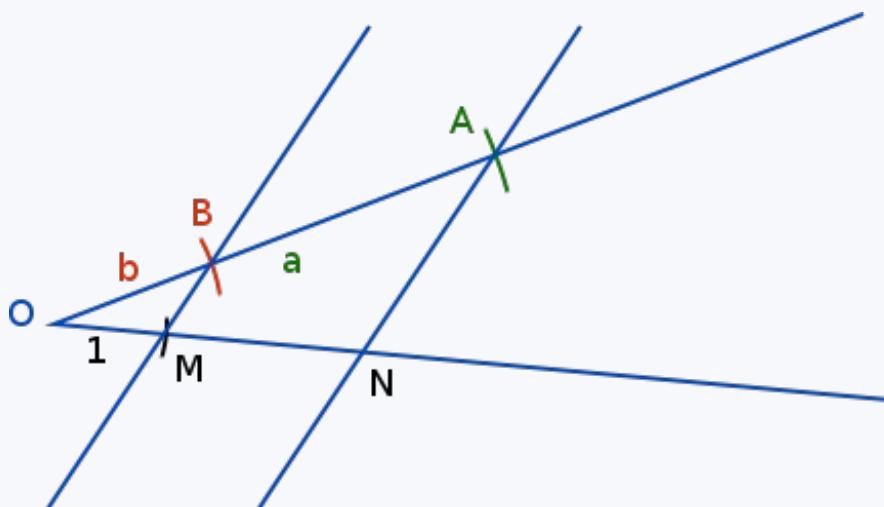
On remarque que dans le triangle OMB, quand on passe du côté OM au côté OB, la longueur est multipliée par b . L'idée est donc de construire un triangle semblable à celui-ci mais a fois plus grand.

Pour cela, on place sur la même droite que M un point A à une distance a de O. Puis on trace la parallèle à MB passant par A. On obtient ainsi un point N sur la droite (OB).



Les triangles OBM et OAN sont alors semblables. Puisqu'on multiplie par b pour passer de OM à OB, cela signifie que l'on multiplie aussi par b pour passer de OA à ON. Autrement dit, le segment ON a une longueur égale à $a \times b$, c'est ce que l'on cherchait.

Pour la division le principe est le même. Il suffit de placer le point A sur l'autre droite.



Les triangles OBM et OAN sont toujours semblables. Comme on divise par b pour passer de OB à OM, on divise également par b pour passer de OA à ON. Le segment ON mesure donc $a \div b$.

La racine carrée

Vous savez désormais faire les quatre opérations avec une règle et un compas. Maintenant nous allons passer à la vitesse supérieure avec la racine carrée.

Racines des nombres entiers

Pour cette question, vous disposez juste d'un segment unité et les constructions que vous devez réaliser sont les suivantes :

- un segment de longueur $\sqrt{2}$;
- un segment de longueur $\sqrt{3}$;
- un segment de longueur $\sqrt{4}$;
- un segment de longueur $\sqrt{5}$;
- un segment de longueur $\sqrt{6}$;
- un segment de longueur $\sqrt{7}$.

Et ainsi de suite ! En fait je vous demande de trouver une construction qui permet d'obtenir successivement toutes les racines carrées des entiers naturels. Pensez que Pythagore peut vous aider et si vous ne les avez pas toutes, essayez d'en trouver un maximum avant de regarder la solution. 😊

Racine d'un nombre quelconque

Pour cette dernière question, vous disposez d'un segment unité et d'un segment quelconque de longueur a . Cette fois, le but est le suivant :

- construire un segment de longueur \sqrt{a} .



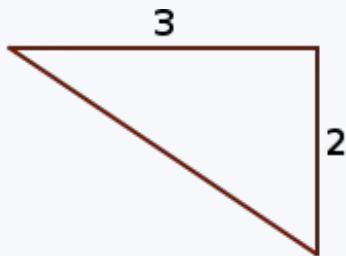
Pensez à utiliser des figures semblables. Cette dernière question est plus difficile que les autres (il en faut bien un). Si vous avez vraiment du mal à voir comment cette racine peut apparaître, n'ayez pas trop de scrupules à aller voir la solution. Je ne vous en voudrais pas. 🦸

Solutions

Racines des nombres entiers

Secret (cliquez pour afficher)

Le théorème de Pythagore est le moyen idéal d'obtenir des racines carrées. Construisons par exemple un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 2 et 3.



Par le théorème de Pythagore, le carré de l'hypoténuse est égal à $2^2 + 3^2 = 13$. Par conséquent l'hypoténuse a une longueur égale à $\sqrt{13}$.

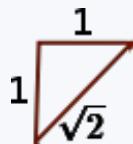


Je ne rentre pas davantage dans les détails sur le fait que ce triangle est bien constructible. À partir de l'unité on peut construire les longueurs 2 et 3 et on sait construire des perpendiculaires. C'est tout ce qu'il nous faut, si vous n'en êtes pas convaincu n'hésitez pas à relire les parties précédentes.

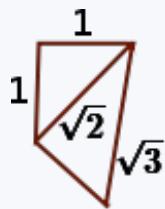
En faisant varier les longueurs des côtés de l'angle droit il est ainsi possible d'obtenir toutes sortes de racines carrées de nombres entiers. Pourtant, si vous y regardez d'un peu plus près vous vous rendrez compte qu'elles ne sont pas toutes réalisables de cette façon. Par exemple, il n'est pas possible d'obtenir $\sqrt{7}$.

Nous allons donc sophistiquer un peu notre méthode en réutilisant au fur et à mesure les racines que l'on sait déjà faire.

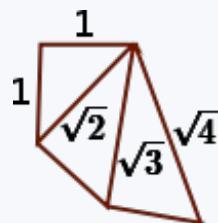
Commençons par $\sqrt{2}$. C'est facile, nous avons déjà vu comment construire $\sqrt{2}$: il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, ou en d'autres termes de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 1.



L'astuce de la construction arrive maintenant : pour contruire $\sqrt{3}$ nous allons réutiliser $\sqrt{2}$. Et plus précisément, nous allons construire un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit mesure $\sqrt{2}$ et l'autre 1.



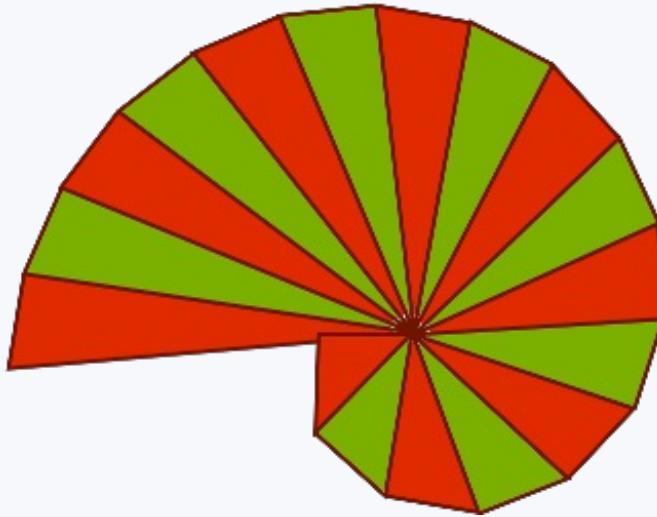
Le carré de l'hypoténuse de ce nouveau triangle vaut $\sqrt{2}^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$. L'hypoténuse mesure donc bien $\sqrt{3}$. En réitérant la même construction à partir de $\sqrt{3}$, on obtient un segment de longueur $\sqrt{4}$.





Notez que comme $\sqrt{4} = 2$, il n'était pas nécessaire de faire toute cette construction pour y arriver. Mais l'important c'est d'avoir compris le principe général par lequel on passe de la racine carrée d'un nombre à celle du nombre suivant.

Si on réitère le processus, on obtient toutes les racines carrées des nombres entiers les unes après les autres. Voici ces constructions de $\sqrt{2}$ jusqu'à $\sqrt{18}$:

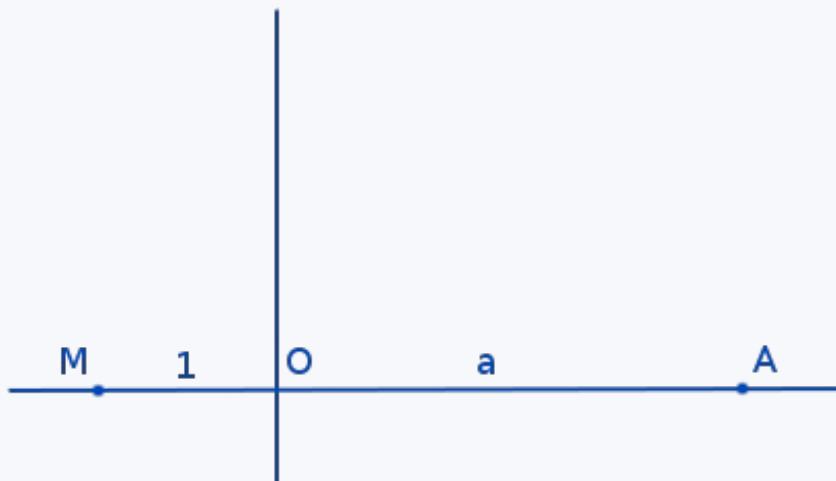


Cette figure se nomme l'escargot de Pythagore.

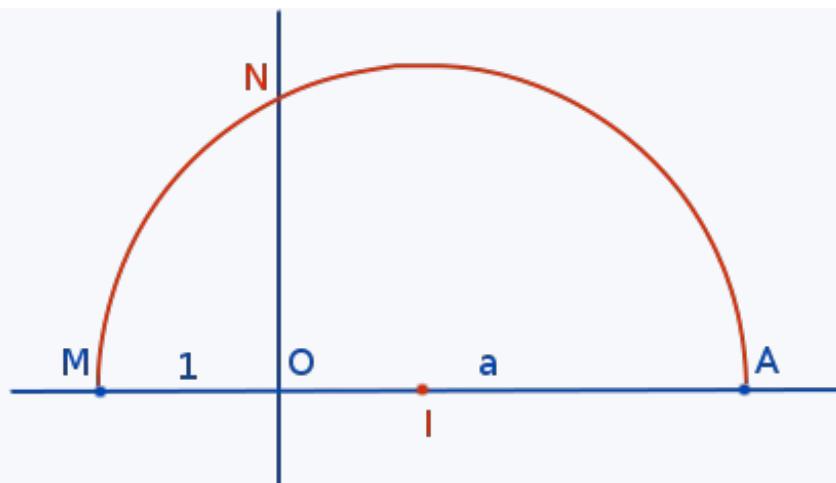
Racine d'un nombre quelconque

Secret (cliquez pour afficher)

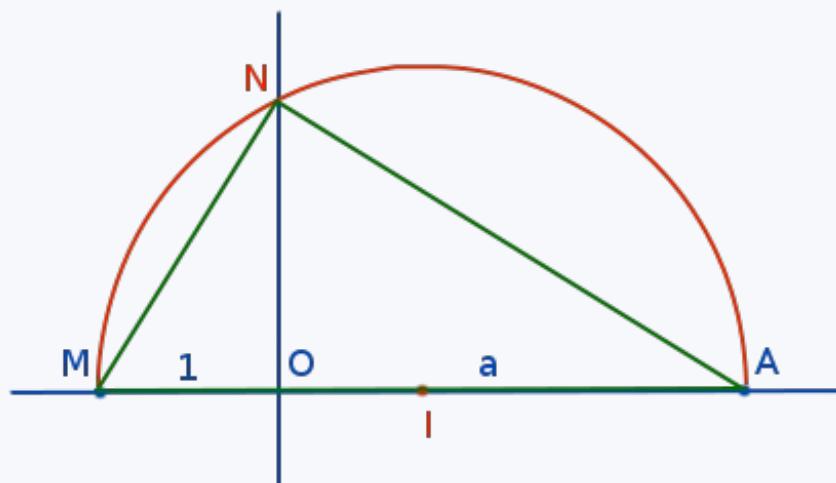
Pour cette construction, nous allons commencer par tracer deux droites perpendiculaires qui se croisent en un point O. Sur l'une de ces droites, plaçons un point M à distance 1 de O ainsi qu'un point A à une distance a de O de l'autre côté.



Plaçons maintenant un point I au milieu de MA (je vous laisse vous convaincre que les constructions que nous connaissons permettent bien de trouver ce point), puis on trace un demi-cercle centré en I passant par A et M. Ce demi-cercle croise la deuxième droite de départ en un point que l'on note N.

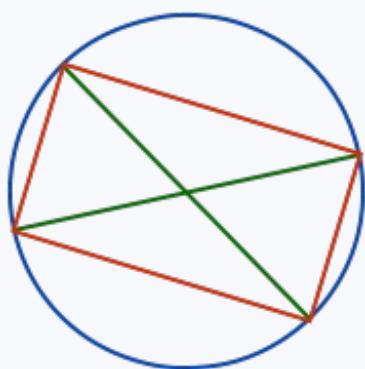


Voilà, la figure est finie. Devinez-vous maintenant où va se trouver le segment de longueur \sqrt{a} ? Pour le trouver concentrons-nous sur le triangle ANM.



Ce triangle possède une propriété étonnante qui n'est pas évidente à repérer au premier coup d'œil : c'est un triangle rectangle. L'angle du sommet N est un angle droit.

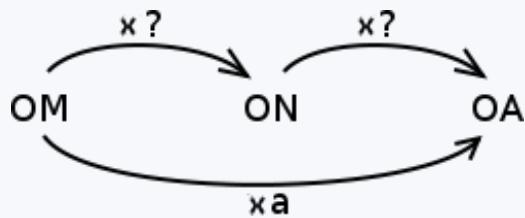
Pour comprendre cela, il faut se rappeler qu'un triangle rectangle est un rectangle coupé en deux par la diagonale. Or quand on a un rectangle, il est possible de tracer un cercle centré à l'intersection de ses diagonales et passant par ses quatre sommets.



Ainsi, quand on a un triangle rectangle, ses trois sommets sont également situés sur un même cercle dont le centre se trouve au milieu de son hypoténuse (c'est-à-dire au centre du rectangle dont il est découpé). Réciproquement, si on trace le diamètre d'un cercle et un troisième point sur le cercle, on obtient un demi-rectangle, autrement dit un triangle rectangle.

En bref, le triangle AMN est bien rectangle ! Il est donc semblable aux deux petits triangles rectangles qui le composent : ANO et MNO.

Le fait que les triangles ANO et MNO soient semblables signifie que pour passer de OM à ON, on multiplie par le même nombre que pour passer de ON à OA. On sait également que pour passer de OM à OA, on multiplie par a . Autrement dit, on a le schéma suivant.



Mais alors combien vaut le point d'interrogation de ce schéma ? Par quel nombre faut-il multiplier deux fois pour qu'au total on ait multiplié par a ?

La réponse est \sqrt{a} en effet, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$. Nous avons donc trouvé ce que nous cherchons : le segment ON mesure \sqrt{a} .

Épilogue

Grâce aux constructions que nous avons appris à faire, nous pouvons maintenant réaliser à la règle et au compas des segments dont les longueurs sont tous les nombres constitués avec les quatre opérations de base et la racine carrée. Par exemple, il est possible de construire un segment de longueur égale à :

$$\sqrt{\frac{2 \times \sqrt{\frac{131}{4}} - 7}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}}.$$

Mine de rien, ce résultat est vraiment fort car il est en réalité possible de montrer qu'absolument **toutes** les longueurs que l'on peut obtenir à la règle et au compas s'écrivent forcément avec ces opérations. Il n'est pas possible d'en trouver d'autres !

Cette dernière affirmation, je ne vais pas vous la prouver ici car cela dépasserait le cadre de la géométrie mais si vous avez quelques notions de résolution des équations, cela se démontre grâce à la passerelle qu'a créée Descartes entre la géométrie et l'algèbre :



- les droites sont décrites par des équations de degré 1 ;
- les cercles sont décrits par des équations de degré 2.

Or en algèbre, les solutions de ce genre d'équations s'expriment uniquement à partir des quatre opérations et des racines carrées.

C'est ce résultat qui a permis à Wantzel puis à Lindemann de résoudre les trois problèmes grecs au XIX^e siècle.

Par exemple, pour réaliser la *duplication du cube* il faudrait pouvoir construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ (car un cube de volume égal à 2 a un côté égal à $\sqrt[3]{2}$), or la racine cubique ne fait pas partie des opérations que l'on peut obtenir à la règle et au compas donc la *duplication du cube* n'est pas possible. De même, pour que la *quadrature du cercle* soit réalisable il faudrait pouvoir construire un segment de longueur π . C'est en prouvant que le nombre π ne peut pas s'exprimer à partir des quatre opérations et de la racine carrée que Lindemann montra en 1882 que la *quadrature du cercle* est impossible.

Voilà, ce TP s'achève ici. Mais n'abandonnez pas votre règle et votre compas pour autant. Il est toujours bien utile de les avoir à portée de main. 😊

Partie 2 : La trigonométrie

Le mot *trigonométrie* fait souvent peur aux géomètres débutants. Et pourtant, il n'y a vraiment pas de quoi ! Dans cette partie, nous allons voir en douceur de quoi il s'agit et pourquoi cette branche de la géométrie est extrêmement utile.

La métrie des trigones

Parmi toutes les figures géométriques, les triangles sont les plus chanceux car une branche entière de la géométrie est consacrée à leur étude : **la trigonométrie**.

 Mais quel est l'intérêt d'étudier plus particulièrement les triangles ? Qu'ont-ils de plus que les autres figures pour mériter cet honneur ? Quelles sont leurs propriétés particulières ?

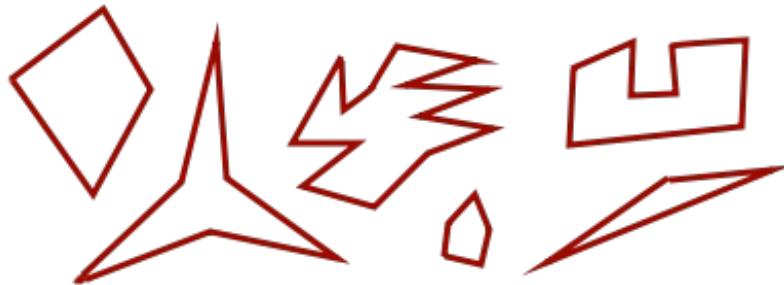
Voici les questions auxquelles ce chapitre va répondre.

Le monde des polygones

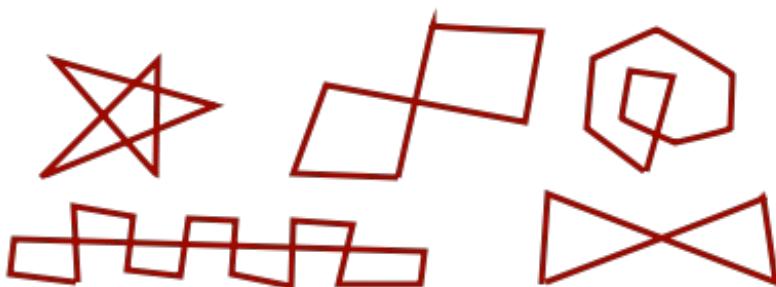
Avant de concentrer notre étude sur les triangles, nous allons commencer par une classe plus vaste de figures géométriques.

Les polygones

Les **polygones** forment une famille de figures très utilisées en géométrie. Leur définition est toute simple : un polygone est une chaîne de segments qui se referme sur elle-même. Voici quelques exemples :



Notez qu'il n'est pas interdit que les segments se coupent entre eux. On parle dans ce cas de **polygones croisés** :

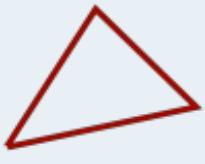
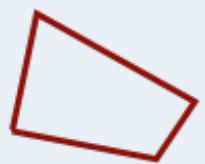
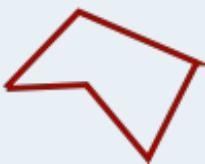
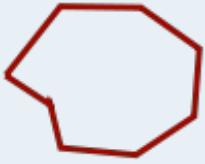
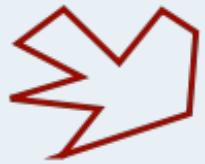


Le mot *polygone* est composé du préfixe *poly-* qui vient du grec πολύ signifiant « beaucoup » ou « plusieurs » et du suffixe *-gone* venant de γωνία qui signifie « angle » ou « coin ». Un polygone est donc étymologiquement une figure qui possède plusieurs angles.

Il est possible de classer les polygones selon leur nombre de côtés (ou leur nombre d'angles, le résultat est le même). Le nom est alors composé de la racine grecque du nombre de côtés, suivit du suffixe *-gone*. Par exemple, le nombre 5 se dit *pente* (ou plus précisément πέντε en alphabet grec), un polygone à 5 côtés s'appelle donc un pentagone. Élémentaire, n'est-ce pas ?

Voici les dix premiers noms de polygones :

Nombre de côtés	Nom	Exemple
-----------------	-----	---------

1	Hénagone ou monogone	<i>N'existe pas</i>
2	Digone	
3	Trigone ou triangle	
4	Tétragone ou quadrilatère	
5	Pentagone	
6	Hexagone	
7	Heptagone	
8	Octogone	
9	Ennéagone ou nonagone	
10	Décagone	

On pourrait continuer comme ça pendant longtemps : un icosagone a 20 côtés, un hectogone en a 100, un chiliogone en a 1000 et un myriagone 10000.



Notez deux choses dans ce tableau. Premièrement que l'hénagone, c'est-à-dire le polygone à 1 côté n'existe pas, en effet, une ligne qui part d'un point pour revenir au même point peut difficilement être une ligne droite ! Deuxièmement les



digones quant à eux existent mais sont des figures dites dégénérées puisque leurs deux côtés sont confondus.

Hénagonométrie et Digonométrie

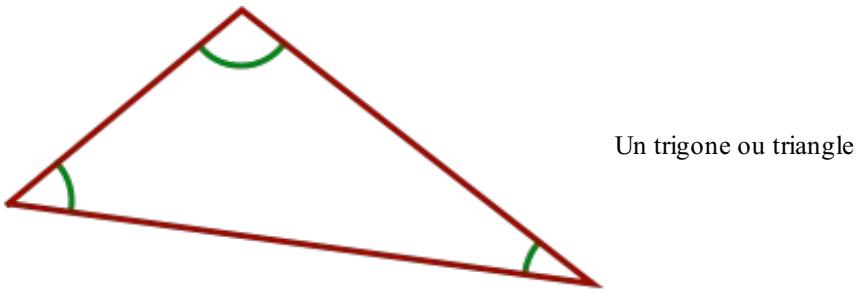
Quand on commence à étudier quelque chose, il semble raisonnable de débuter par le plus facile avant de s'attaquer ensuite aux points les plus compliqués. Dans l'étude des polygones, les plus simples sont ceux qui ont le moins de côtés.

Comme nous venons de le voir, les hénagones (ou polygones à un seul côté) n'existent pas. Inutile donc d'essayer de les étudier : l'hénagonométrie n'existe pas.

Viennent ensuite les digones. Cette fois ils existent bien, mais leur étude n'est vraiment pas passionnante. Un digone, c'est simplement deux segments de même longueur superposés. Ainsi la seule chose qui peut varier dans un digone, c'est sa longueur. Son aire est toujours égale à 0 et ses deux angles mesurent également 0° . Bref, la digonométrie, on en a vite fait le tour ! 

Trigonométrie

Les choses commencent à devenir vraiment intéressantes quand on arrive à trois côtés ! Comme son nom l'indique la **trigonométrie** est l'étude des mesures des trigones, plus communément appelés triangles.



Un trigone ou triangle

Dans un triangle, on a six paramètres qui peuvent varier : trois côtés et trois angles.

Cependant, tous ces paramètres ne sont pas indépendants. Par exemple, le triangle est totalement déterminé par les longueurs de ses trois côtés : si je vous dis que les côtés d'un triangle mesurent 3, 4 et 5 alors plus moyen de faire varier les angles. Mais alors combien valent-ils ? Voilà le genre de questions auxquelles on aimerait bien savoir répondre.

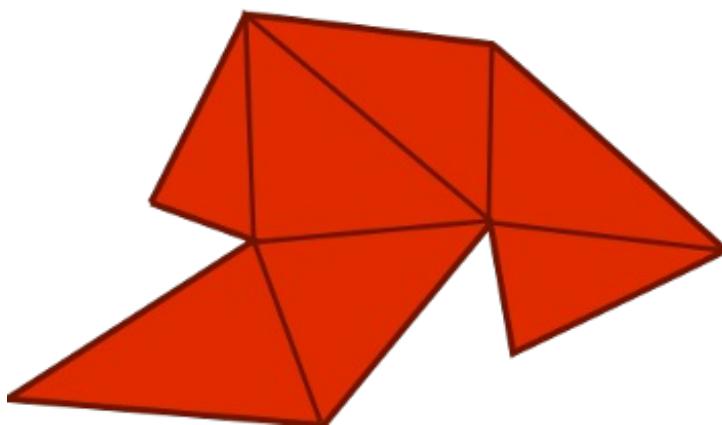
Tout l'art de la trigonométrie consiste à jongler entre ces six paramètres et à savoir retrouver les uns à partir des autres. C'est ce que nous commencerons à faire dès la deuxième partie de ce chapitre.

Triangulons !



Et ensuite ? Une fois que nous aurons étudié la trigonométrie, passerons-nous à la tétragonométrie ? Puis à la pentagonométrie, à l'hexagonométrie... ? Et peut-être un jour à la myriagonométrie !?

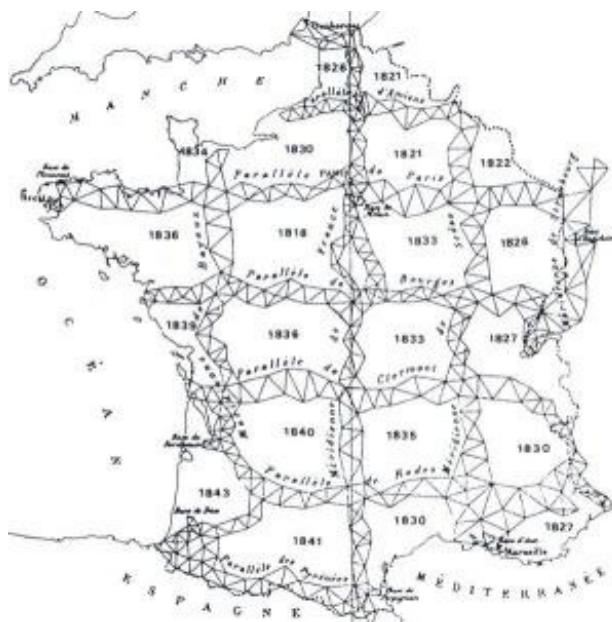
Non, non rassurez-vous nous ne ferons pas ça.  Toute la puissance de la trigonométrie réside dans le fait qu'elle permet également de s'attaquer à des figures bien plus complexes que les triangles. N'importe quel polygone, quelque soit son nombre de côtés, est décomposable en une multitude de petits triangles. On appelle cela une triangulation.



Triangulation d'un polygone

Ainsi, lorsque vous maîtriserez parfaitement l'art de la trigonométrie, vous serez à même d'étudier n'importe quel polygone en le découplant en triangles et en étudiant ces triangles séparément. Si vous voulez par exemple connaître l'aire du polygone, il suffit de calculer les aires de chacun des petits triangles et de faire une addition à la fin.

i Les triangulations sont notamment très utilisées en cartographie. L'image ci-dessous montre la triangulation de base ayant servi à l'élaboration de la carte de France au XIX^e siècle. Cette carte ne montre que le réseau des triangles principaux, mais des maillages secondaires ont ensuite été réalisés pour combler les trous laissés par cette première triangulation.

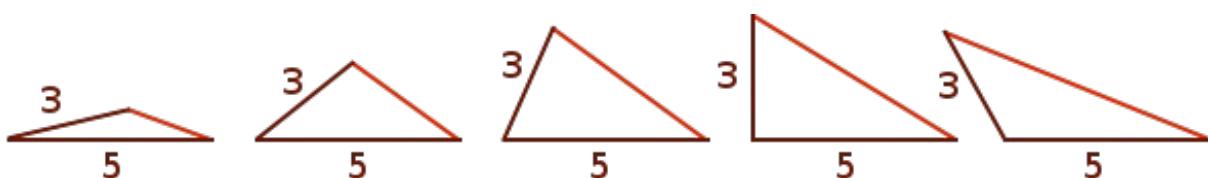
Triangulation de la France au XIX^e siècle

La trigonométrie ne se borne donc pas à l'étude des triangles, elle nous offre une clé formidablement puissante qui permet de démêler un très grand nombre d'autres problèmes géométriques. « Où sont les triangles ? » devrait être la première question que se pose tout apprenti géomètre devant une construction géométrique ! Pensez-y ! 😊

Des côtés et des angles

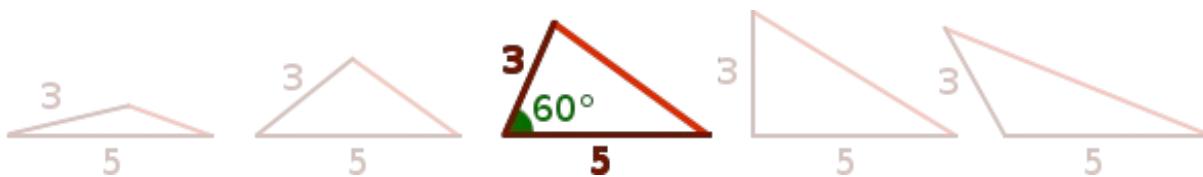
Nous venons de voir pourquoi l'étude des triangles est primordiale en géométrie. Dans cette partie nous allons nous poser la question suivante : quelles sont les informations nécessaires pour connaître parfaitement un triangle ?

Si par exemple je vous dis qu'un triangle possède un côté égal à 3 et un autre égal à 5, ce n'est pas suffisant car il existe de nombreux triangles comme ceci.



Si en revanche je rajoute que l'angle entre ces deux côtés mesure 60°, alors là tout se dégage, il ne reste plus qu'un seul triangle

possible.



Dans tous ce cours quand nous dirons que deux triangles sont identiques cela signifiera qu'ils peuvent être superposés après en avoir éventuellement retourné un des deux. Si par exemple on dessine les deux triangles suivant sur une feuille de papier et qu'on les découpe, ils ne sont pas directement superposables, l'un est l'image miroir de l'autre. Il faut donc en retourner un pour pouvoir les faire coïncider.



Malgré cela, pour nous ces deux triangles seront considérés comme identiques car ils ont les mêmes côtés et les mêmes angles.

Les trois informations

Un triangle, c'est six informations : trois longueurs de côtés et trois mesures d'angles. La règle est alors *grossso modo* la suivante : pour déterminer un triangle, il faut connaître trois informations parmi les six.

Cette règle a l'air toute simple mais il faut tout de même s'en méfier car en réalité vous allez voir que son application possède quand même quelques subtilités. Nous allons maintenant faire un petit tour d'horizon des possibilités.

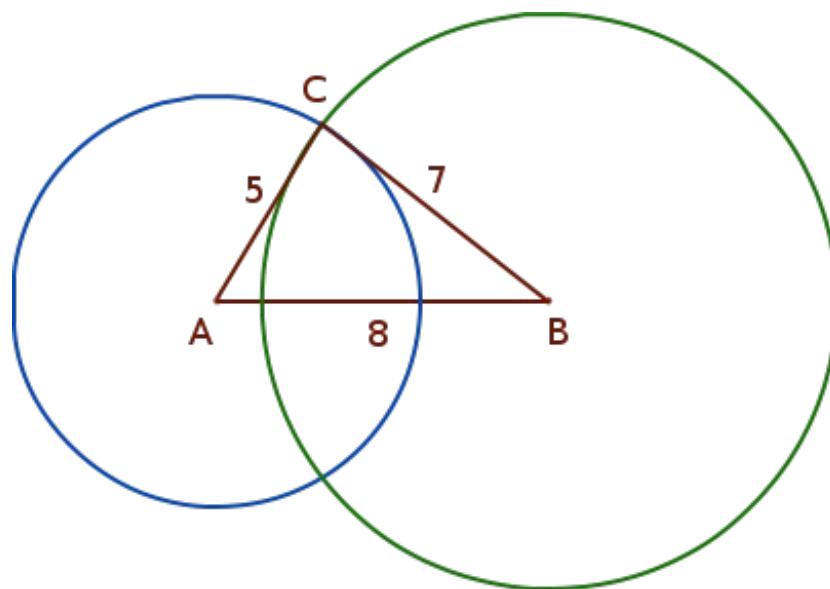
Trois côtés

Commençons par le cas le plus simple : celui où nous connaissons les longueurs des trois côtés du triangle. Considérons par exemple un triangle ABC dont les côtés AB, AC et BC mesurent respectivement 8, 5 et 7.

Tout d'abord, traçons le segment AB de longueur 8.



Puisque AC mesure 5, cela signifie que le point C se trouve sur le cercle de centre A et de rayon égal à 5. De même, le point C se trouve sur le cercle de centre B et de rayons égal à 7.



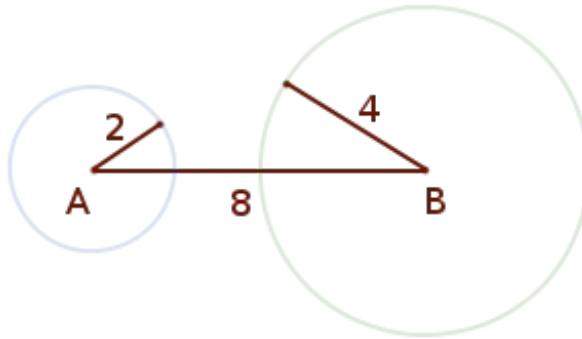
Le point C se trouve donc à l'intersection des deux cercles. Nous voyons sur la figure qu'il y a deux intersections, mais cela n'a pas d'importance car les deux triangles obtenus de cette façon sont les mêmes (ou plus précisément ils sont miroir l'un de l'autre comme dans l'exemple ci-dessus).

La forme du triangle est donc entièrement déterminée par ses trois côtés.

L'inégalité triangulaire

Il faut toutefois se méfier d'un piège : étant données trois longueurs quelconques, il n'existe pas forcément de triangle dont les côtés ont ces longueurs.

Par exemple, il n'existe pas de triangle dont les côtés mesurent 2, 4 et 8. La raison est simple : le côté de longueur 8 est trop grand pour que les côtés de longueur 2 et 4 puissent se rejoindre.



La construction que nous avons faites ci-dessus pour le triangle 5-7-8 ne marche plus car les deux cercles sont trop petits et ne s'intersectent pas.

La règle pour qu'un triangle ayant trois côtés donnés existe est donc la suivante : il faut que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres. Autrement dit, dans un triangle quelconque ABC, les trois inégalités suivantes sont toujours vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \leq AC + BC ; \\ AC \leq AB + BC ; \\ BC \leq AB + AC . \end{array} \right.$$

Cette propriété porte le nom d'**inégalité triangulaire**.



Une autre façon de comprendre ces inégalités consiste à dire que le plus court chemin d'un point à l'autre est la ligne droite. Si on veut aller de A à B, c'est plus court de faire directement AB plutôt que de faire un détour par C et de faire AC+CB. On a donc bien $AB \leq AC + BC$.

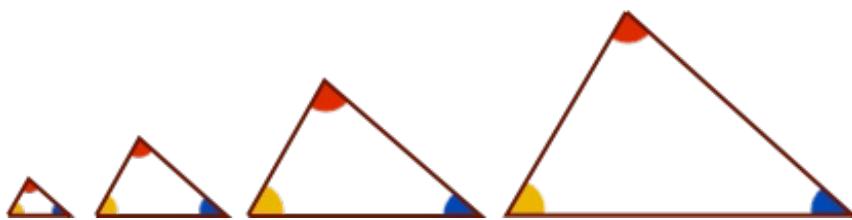
Trois angles

Passons au cas des trois angles.



À votre avis, est-il possible de reconstituer entièrement un triangle en connaissant ses angles ? Prenez garde avant de répondre, il y a un piège.

Si on s'en tient à la règle des trois informations vous avez certainement envie de répondre oui. Et pourtant pensez aux triangles semblables : si vous regardez plusieurs triangles semblables de tailles différentes, ils ont tous les mêmes angles, mais pas les même côtés.



Il n'est donc pas possible de déterminer les côtés uniquement à partir de angles.

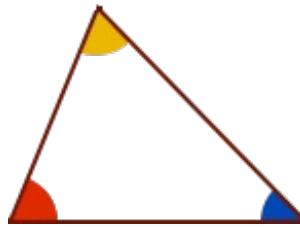


Mais alors la règle des trois informations est fausse ?

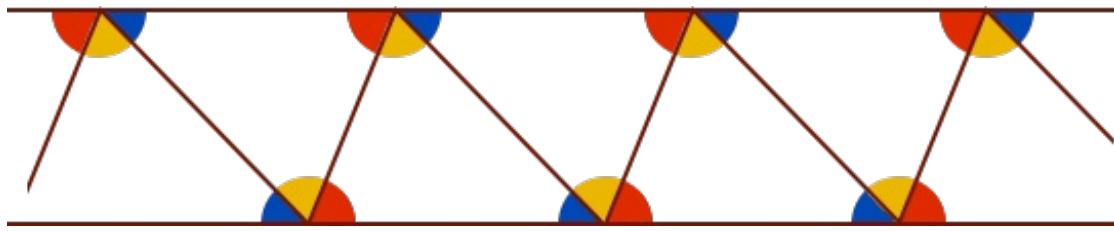
Pas tout à fait. Mais avant de vous expliquer pourquoi, il nous faut nous pencher sur une propriété étonnante des angles d'un triangle.

La somme des angles

La somme des trois angles d'un triangle vaut 180° , c'est-à-dire un angle d'un demi-tour. Pour comprendre ceci, regardons le triangle suivant.



Prenons maintenant plusieurs copies de ce triangle et disposons-les de la façon suivante.



Les triangles qui sont à l'envers sur cette figure sont bien les mêmes que ceux de départ : cela vient tout simplement du fait que les longueurs de leurs trois côtés sont les mêmes. La propriété apparaît alors comme évidente : les angles bleus, jaunes et rouges se regroupent par trois pour former des angles plats de 180° .

Ce résultat est réellement une des propriétés fondamentales du triangle ! Souvenez-vous en nous aurons à nous en resservir.

Revenons à présent à notre règle des trois informations. Imaginez que je vous donne les informations suivantes sur un triangle :

- **Information 1.** L'un des angles mesure 40° .
- **Information 2.** L'un des angles mesure 60° . Alors, comme la somme fait 180° , vous pouvez aussitôt en déduire que le troisième angle mesure 80° .
- **Information 3.** L'un des angles mesure 80° . Eh, mais ce n'est pas une information ça ! Vous le savez déjà.

Vous avez compris l'idée ? Donner les trois angles d'un triangle ce n'est pas donner trois informations car il y a une information qui est répétée. En clair, il faut que les renseignements donnés sur le triangle soient indépendants, si l'une des informations peut se déduire des autres, ça ne marche pas. Je vous avais prévenu que c'était un peu subtil.

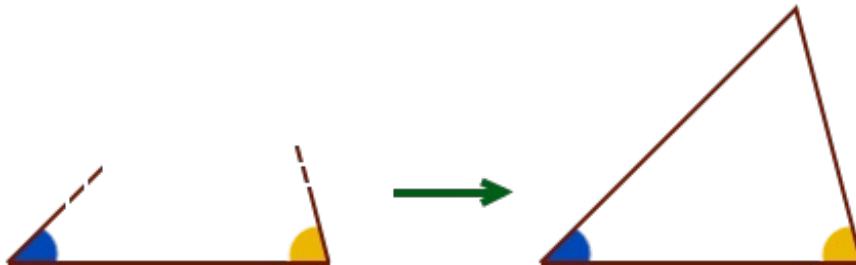
Mélangeons les angles et les côtés

Bien maintenant voyons voir ce qui se passe si on mélange un peu les informations.

Deux angles et un côté

Tout d'abord, si nous disposons de deux angles et d'un côté. Dans ce cas, tout est facile car grâce à la somme des trois angles on peut tout de suite en déduire la valeur du troisième angle.

Il suffit alors de tracer les deux angles qui se trouvent aux extrémités du côté que nous avons, puis de prolonger les deux côtés inconnus jusqu'à ce qu'ils se croisent pour retrouver le triangle.



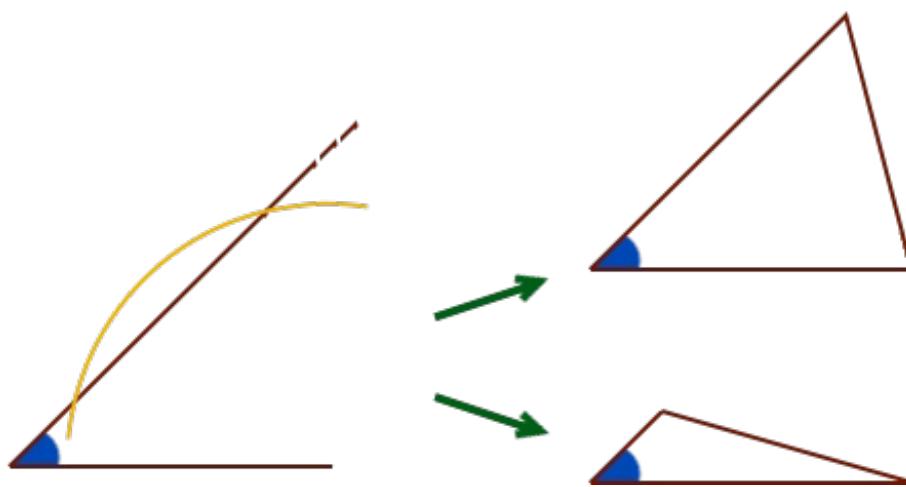
Deux côtés et un angle

Si nous disposons de deux côtés et d'un angle c'est un peu plus subtil. Il y a deux configurations possibles.

Configuration 1. L'angle donné est celui qui se trouve entre les deux côtés donnés. Dans ce cas, le triangle se reconstitue immédiatement :

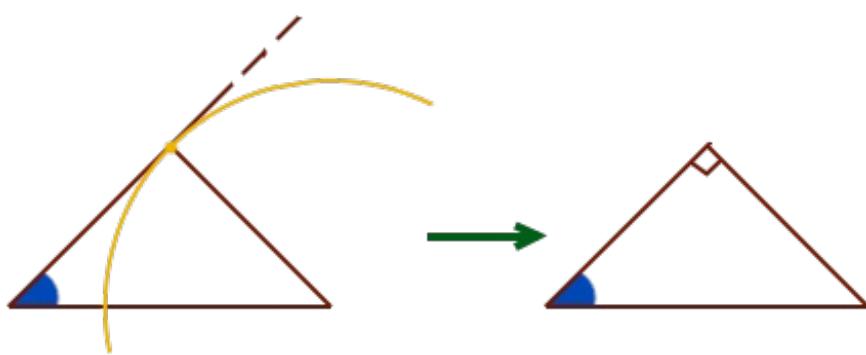


Configuration 2. L'angle donné ne se trouve pas entre les deux côtés donnés. C'est l'exception à notre règle. Dans ce cas, on peut tracer celui de nos deux côtés qui côtoie l'angle. Le troisième sommet du triangle se trouve alors sur le cercle centré en l'autre extrémité du premier côté et ayant pour rayon la longueur du second.



Vous constatez alors qu'il y a deux triangles qui satisfont les conditions. Bon, c'est déjà pas mal, au départ, il y a une infinité de triangles possibles et il n'en reste plus que deux. Souvent le contexte fait qu'il est en réalité facile de déterminer lequel des deux est celui que l'on cherche.

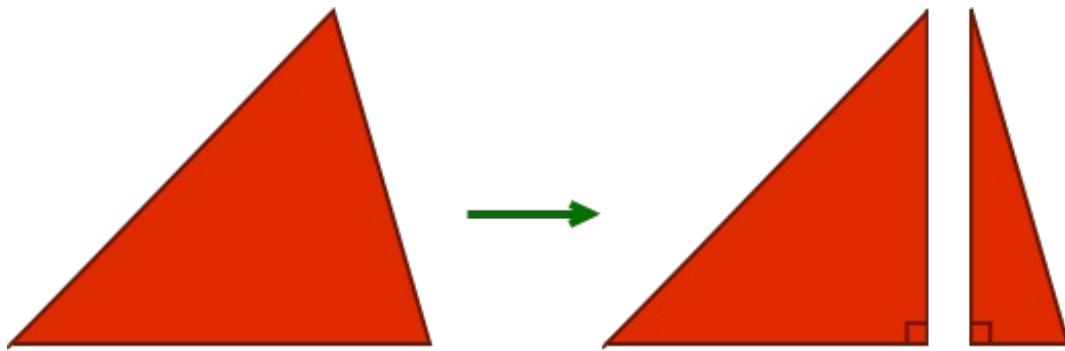
Remarquez que si dans la construction précédente le cercle est juste tangent au côté de façon à ce qu'il n'y ait qu'un seul point d'intersection, alors il n'y a plus qu'un seul triangle et pas d'ambiguïté.



Dans ce cas, le triangle est rectangle et ça tombe bien puisque c'est justement à ces triangles que nous allons nous intéresser dans le chapitre suivant.

Les triangles rectangles

Dans le précédent chapitre, nous avons vu que tous les polygones pouvaient se décomposer en triangles via une triangulation. Mais il est possible de pousser le découpage encore plus loin, car chaque triangle peut à son tour être découpé en deux triangles rectangles.



Dans ce chapitre, nous allons donc nous concentrer sur les triangles rectangles. Cette étude nous permettra d'attaquer les triangles quelconques dans le chapitre suivant.

Classons les triangles rectangles

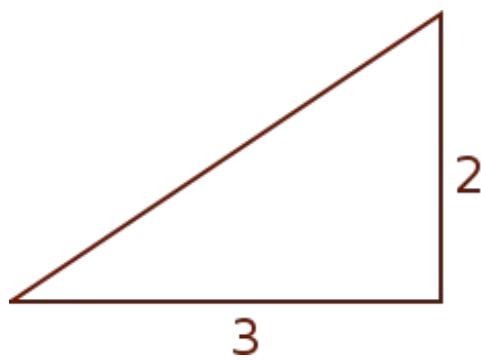
Étant donné qu'un triangle rectangle possède un angle droit, il ne nous manque plus que deux informations pour pouvoir le déterminer entièrement. Ces deux informations peuvent être :

- deux côtés ;
- un angle et un côté.

Commençons par récapituler séparément ce que nous savons déjà dans chacune de ces deux situations.

Deux côtés

Si nous connaissons deux côtés du triangle rectangle, alors nous savons déjà comment faire pour retrouver le troisième. Vous en rappelez-vous ? Nous avons vu ça dans la première partie de ce cours : il s'agit du théorème de Pythagore. Prenons l'exemple du triangle suivant dont les deux côtés de l'angle droit mesurent respectivement 2 et 3.



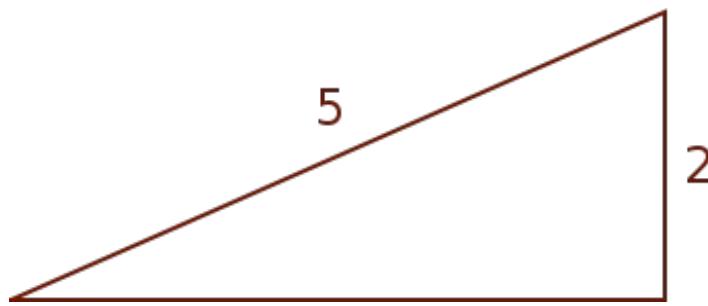
Combien mesure alors l'hypoténuse ? (Je vous rappelle que l'hypoténuse c'est le nom du côté opposé à l'angle droit dans un triangle rectangle.)

La réponse s'obtient simplement grâce à Pythagore qui nous dit que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. En clair, si on note h la longueur de l'hypoténuse, on a

$$h^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

On en déduit alors que $h = \sqrt{13} \approx 3,6056\dots$

Le deuxième cas de figure est celui où l'on connaît un seul des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse. Par exemple, dans le triangle suivant l'hypoténuse mesure 5 et l'un des côtés de l'angle droit mesure 2.



Dans ce cas, si on note x le deuxième côté de l'angle droit dont on ne connaît pas encore la longueur, alors on a

$$2^2 + x^2 = 5^2.$$

Autrement dit, $4 + x^2 = 25$ et par conséquent $x^2 = 21$. On en déduit que $x = \sqrt{21} \approx 4,583\dots$

En bref, vous pouvez retourner le problème dans tous les sens, si on a deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours en déduire le troisième grâce à Pythagore.

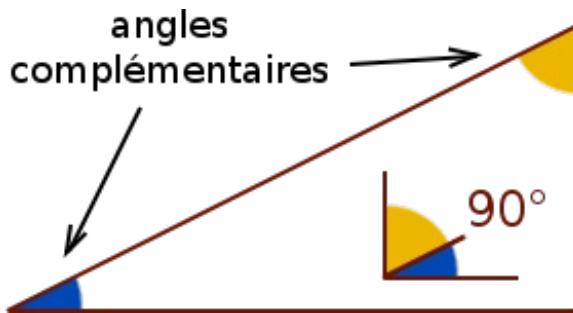
Il nous reste maintenant à trouver les trois angles à partir des trois côtés. Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour répondre à cette question, mais nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

Un angle et un côté

Angles complémentaires

Dans un triangle rectangle, si on a un angle, alors on les a tous ! En effet, comme la somme de tous les angles d'un triangle vaut 180° , cela signifie que si on enlève l'angle droit (90°), la somme des deux autres angles est égale à 90° . Si par exemple, l'un d'eux mesure 30° , alors l'autre mesure automatiquement 60° .

Deux angles dont la somme vaut 90° s'appellent des **angles complémentaires**.



Or nous savons que si deux triangles ont leurs trois angles égaux, alors ils sont semblables. Par conséquent tous les triangles rectangles ayant un angle en commun sont semblables :

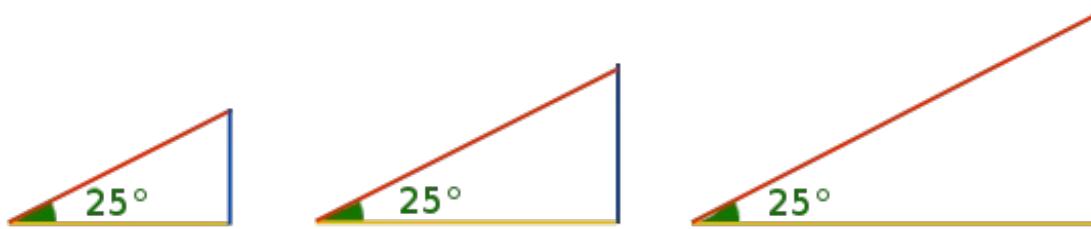
- tous les triangles rectangles avec un angle de 20° sont semblables entre eux ;
- tous les triangles rectangles avec un angle de 30° sont semblables entre eux ;
- tous les triangles rectangles avec un angle de 43° sont semblables entre eux ;
- tous les triangles rectangles avec un angle de $56,7^\circ$ sont semblables entre eux...

Et ainsi de suite, vous avez compris le principe. 🍋



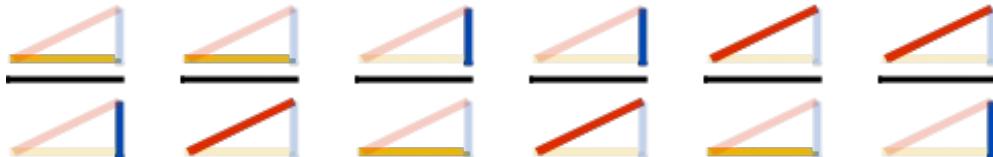
C'est maintenant que nous allons voir si vous avez retenu ce que nous avons dit dans la première partie du cours.
Quelles quantités caractéristiques peut-on calculer quand on dispose de figures semblables ?

Les figures semblables n'ont pas les mêmes longueurs mais elles ont toutes les mêmes proportions, c'est-à-dire les mêmes rapports de longueurs. Nous allons donc étudier et essayer de calculer les rapports entre les différentes longueurs de nos triangles rectangles. Regardez par exemple les triangles rectangles suivants qui ont tous un angle de 25° .



Tous leurs rapports sont égaux. Par exemple, la division du côté rouge par le côté bleu donne le même résultat (environ 2,4) pour chacun des trois triangles.

Si vous comptez, vous constaterez qu'au total, il y a six rapports possibles que l'on peut calculer :



Ces rapports s'appellent les **rapports trigonométriques** et jouent un rôle fondamental en géométrie et même au-delà dans de nombreuses branches des mathématiques. Chacun d'entre eux porte un nom spécifique et nous allons les étudier en détail dans la suite de ce chapitre.

Une fois que l'on connaît ces six rapports, il suffit de connaître un seul des trois côtés du triangle pour pouvoir tous les retrouver. Si par exemple, on sait d'une part que le côté bleu mesure 10 et d'autre part que les côtés rouges et jaunes sont 2,4 et 2,2 fois plus grands que le côté bleu, alors on en déduit immédiatement que le côté rouge mesure 24 et que le côté jaune mesure 22.

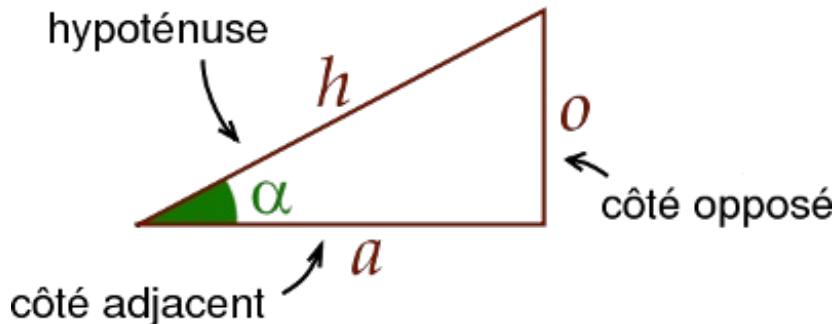
Les six rapports

Vocabulaire

Commençons par poser un peu de vocabulaire. Si on a un triangle rectangle ayant un angle de mesure α , alors on nomme ses trois côtés de la façon suivante :

- l'**hypoténuse** (vous la connaissez déjà) est le côté situé en face de l'angle droit, c'est également le plus grand des côtés du triangle rectangle ;
- le **côté adjacent** à l'angle α est l'autre côté qui forme l'angle α avec l'hypoténuse ;
- le **côté opposé** à l'angle α est le côté qui se trouve en face de l'angle α .

On note alors h la longueur de l'hypoténuse, a celle du côté adjacent et o celle du côté opposé. En image, cela donne ceci :



Nous avons vu dans la section précédente que l'on pouvait à partir de ces trois côtés calculer six rapports différents. Chacun d'entre eux possède un nom spécifique, les voici dans le tableau suivant.

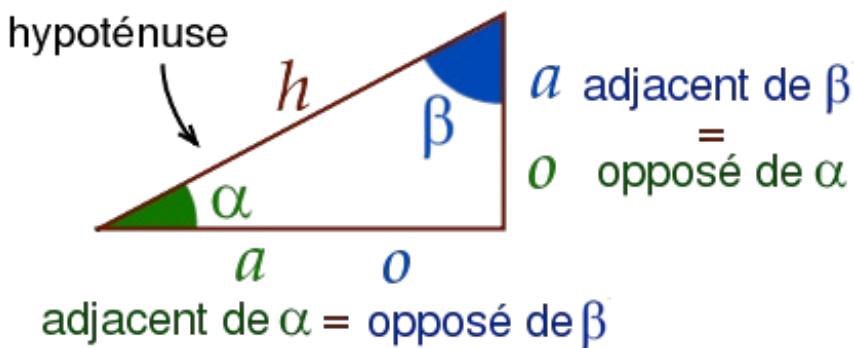
Nom	Notation	Rapport
Sinus	$\sin(\alpha)$	$\frac{o}{h}$
Cosinus	$\cos(\alpha)$	$\frac{a}{h}$

Tangente	$\tan(\alpha)$	$\frac{o}{a}$
Cotangente	$\cotan(\alpha)$	$\frac{a}{o}$
Sécante	$\sec(\alpha)$	$\frac{h}{a}$
Cosécante	$\cosec(\alpha)$	$\frac{h}{o}$



Tiens, tiens... c'est amusant, on a l'impression que les noms vont par deux : sinus/cosinus, puis tangente/cotangente et enfin sécante/cosécante. Voulez-vous le lien qui existe entre ces trois paires ?

Ces regroupements viennent du fait qu'il est possible de retourner le triangle pour se placer du point de vue de l'angle complémentaire de l'angle α . Par ce changement de point de vue, l'hypoténuse reste l'hypoténuse, mais les côtés opposés et adjacents sont inversés. En notant β l'angle complémentaire de α on obtient la figure suivante :



Ainsi, dans les formules des rapports, si on inverse a et o , on obtient la valeur du rapport pour l'angle complémentaire. Les trois paires de rapports que nous avons remarquées correspondent à cette inversion. Regardons par exemple le sinus et le cosinus :

$$\sin(\alpha) = \frac{o}{h} \longleftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{a}{h}$$

Le h est conservé mais le o et le a sont échangés. En clair, le cosinus d'un angle c'est le sinus de son complémentaire et *vice versa*. L'inversion marche de la même façon pour le couple tangente/cotangente et pour le couple sécante/cosécante.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{o}{a} \longleftrightarrow \cotan(\alpha) = \frac{a}{o} \\ \sec(\alpha) &= \frac{h}{a} \longleftrightarrow \cosec(\alpha) = \frac{h}{o} \end{aligned}$$

En bref, on a la règle générale suivante : « le *comachin* d'un angle, c'est le *machin* de son angle complémentaire ». Ce qui donne les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \sin(\beta) ; \\ \cotan(\alpha) = \tan(\beta) ; \\ \cosec(\alpha) = \sec(\beta). \end{array} \right.$$

Comme, α et β sont complémentaires, on a $\beta = 90 - \alpha$, les formules ci-dessus peuvent donc se réécrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha) ; \\ \cotan(\alpha) = \tan(90 - \alpha) ; \\ \cosec(\alpha) = \sec(90 - \alpha). \end{array} \right.$$

Faisons du tri

Nous avons pour l'instant six rapports trigonométriques, pourtant, il est assez rare que les mathématiciens utilisent les six. En réalité, trois d'entre eux sont très utilisés tandis que les trois autres sont plutôt délaissés.

La raison de cette scission, c'est que certains rapports donnent exactement la même information. Regardons par exemple le sinus et la cosécante :

$$\sin(\alpha) = \frac{o}{h} \quad \text{et} \quad \csc(\alpha) = \frac{h}{o}.$$

Vous remarquez que ces deux rapports sont simplement inverses l'un de l'autre. Il est donc facile de déduire l'un de l'autre :

- si le sinus vaut $3/5$, alors la cosécante vaut $5/3$;
- si le sinus vaut $12/34$, alors la cosécante vaut $34/12$;
- si la cosécante vaut 6 , alors le sinus vaut $1/6$...

Et d'une manière générale $\sin(\alpha) = 1/\csc(\alpha)$. En bref, inutile de s'encombrer des deux rapports, il suffit d'en garder un des deux et de jeter l'autre qui ne nous apporte rien de plus.



Pour faire notre choix, il est bon de se rappeler que l'hypoténuse est le plus grand des côtés du triangle. Dans les cas extrêmes où le triangle est dégénéré, c'est-à-dire quand l'un des angles du triangle est égal à 0° , il se peut que le côté adjacent ou le côté opposé aient une longueur nulle. L'hypoténuse en revanche a toujours une longueur positive. Or vous savez qu'il est impossible en mathématiques de faire une division par 0. Pour ne pas avoir ce problème il est donc préférable de garder l'hypoténuse au dénominateur. Bref, on garde le sinus et on abandonne la cosécante.

Le choix se fait de la même façon entre le cosinus et la sécante :

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{h} \quad \text{et} \quad \sec(\alpha) = \frac{h}{a}.$$

Nous gardons alors le cosinus car l'hypoténuse est au dénominateur. En revanche, pour la tangente et la cotangente, il n'est pas possible de faire le même choix car l'hypoténuse n'intervient pas.

$$\tan(\alpha) = \frac{o}{a} \quad \text{et} \quad \cotan(\alpha) = \frac{a}{o}.$$

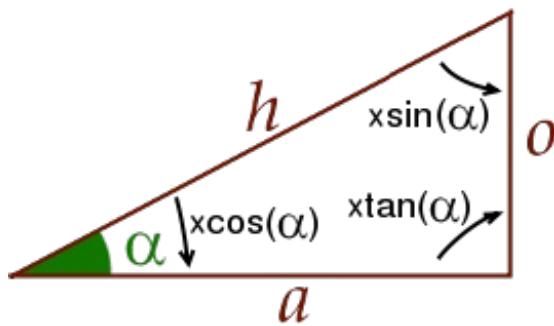
Dans ce cas, les deux choix se valent. Dans les faits, c'est la tangente qui est utilisée le plus souvent au détriment de la cotangente. C'est donc le choix que nous allons faire également dans la suite de ce cours.

Identités trigonométriques

Les six rapports de départ ne sont plus que trois. Rappelons leurs définitions avant d'étudier leurs propriétés.

- **Le sinus** d'un angle α est le rapport de son côté opposé sur l'hypoténuse. C'est donc le nombre par lequel il faut multiplier l'hypoténuse pour obtenir le côté opposé.
- **Le cosinus** d'un angle α est le rapport de son côté adjacent sur l'hypoténuse. C'est donc le nombre par lequel il faut multiplier l'hypoténuse pour obtenir le côté adjacent.
- **La tangente** d'un angle α est le rapport de son côté opposé sur son côté adjacent. C'est donc le nombre par lequel il faut multiplier le côté adjacent pour obtenir le côté opposé.

En dessin, cela donne ceci :



Premières formules

Une des premières choses que l'on peut remarquer, c'est que pour passer de l'hypoténuse au côté opposé, il y a deux chemins possibles :

- soit on multiplie directement par le sinus ;
- soit on passe par le côté adjacent en multipliant par le cosinus, puis par la tangente.

Cette remarque toute simple nous donne la formule suivante :

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \times \tan(\alpha).$$

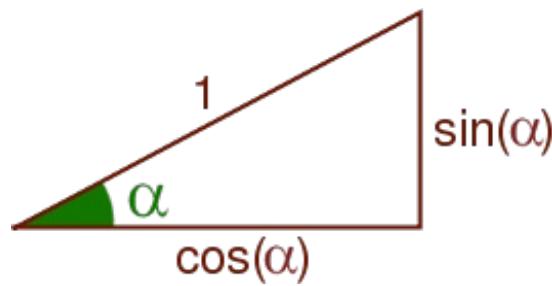
Remarquez que cette formule peut également se prouver directement à partir des formules :

$$\cos(\alpha) \times \tan(\alpha) = \frac{a}{h} \times \frac{o}{a} = \frac{a \times o}{h \times a} = \frac{o}{h} = \sin(\alpha).$$



Si vous avez des difficultés avec les règles de manipulation des fractions, n'hésitez pas à aller lire le cours opérations et fractions.

On peut mettre en évidence une autre propriété des sinus et des cosinus en regardant un triangle rectangle dont l'hypoténuse a une mesure égale à 1. L'intérêt d'avoir une hypoténuse égale à 1, c'est que dans ce cas, le côté adjacent est égal au cosinus et le côté opposé est égal au sinus :



Dans ce cas, si on applique le théorème de Pythagore on obtient la formule suivante.

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1.$$

Cette formule est très utile car elle permet de trouver le cosinus à partir du sinus et inversement. Si par exemple $\sin(\alpha) = 0,6$, alors

$$\cos(\alpha)^2 = 1 - 0,6^2 = 0,64.$$

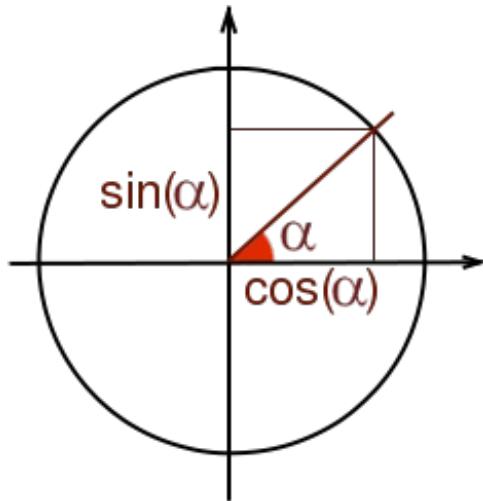
Et donc $\cos(\alpha) = \sqrt{0,64} = 0,8$.

Généralisation à tous les angles

Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est une construction géométrique permettant de faire apparaître le sinus et le cosinus de n'importe quel angle.

Traçons un cercle de rayon égal à 1 dont le centre se situe à l'intersection de deux droites perpendiculaires, une horizontale et l'autre verticale. Pour un angle α donné, on trace alors une demi-droite qui fait un angle α avec la droite horizontale. Cette construction fait apparaître un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à 1 (puisque c'est le rayon du cercle) :

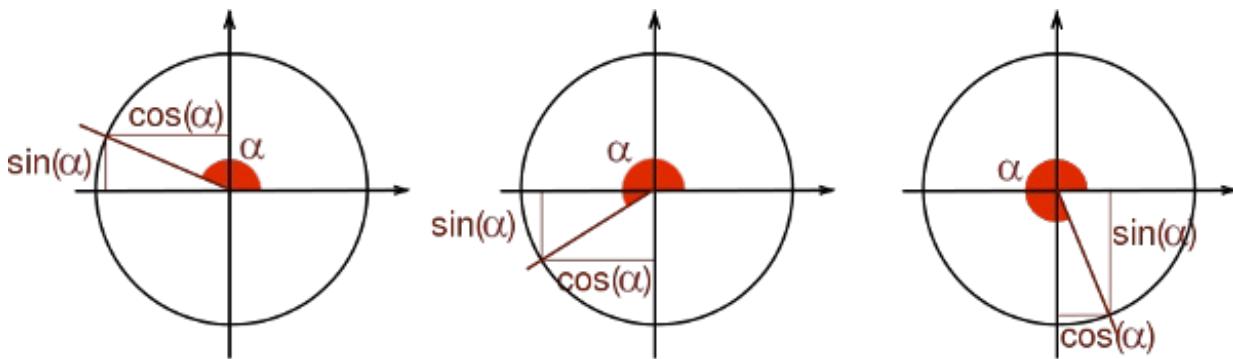


Les deux autres côtés de ce triangle rectangle mesurent alors $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.



Si vous avez déjà entendu parler de repères, alors vous aurez remarqué que les deux droites perpendiculaires forment un repère orthonormé dont la droite horizontale est l'axe des abscisses et la droite verticale est l'axe des ordonnées. Le cosinus et le sinus sont alors les deux coordonnées du point d'intersection du cercle et de la demi-droite.

Ce qui est formidable avec cette construction, c'est qu'elle permet de généraliser les rapports trigonométriques à tous les angles. Jusque-là, ces rapports n'étaient définis que pour les angles de 0° à 90° , puisque les angles d'un triangle rectangle ne peuvent pas aller au-delà de cet intervalle. Mais avec notre cercle trigonométrique, il est maintenant possible de partir au-delà de 90° :



On remarque alors que les rapports peuvent prendre des valeurs négatives :

- entre 90° et 180° , le sinus est positif, mais le cosinus est négatif ;
- entre 180° et 270° , le sinus et le cosinus sont négatifs ;
- entre 270° et 360° , le sinus est négatif et le cosinus est positif.

On peut déduire de cette nouvelle définition que le sinus et le cosinus sont toujours compris entre -1 et 1.

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 ;$$

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1.$$

Remarquez que ces encadrements sont logiques puisque le sinus et le cosinus sont des rapports dont le numérateur est en valeur absolue plus petit que le dénominateur (car celui-ci correspond à l'hypoténuse).

Angles particuliers

Nous connaissons maintenant les propriétés de base des rapports trigonométriques, mais nous n'avons toujours pas répondu à la question principale que vous vous posez tous. 😊



Peut-on calculer concrètement le sinus, le cosinus et la tangente ? Existe-t-il des formules ?

Vous vous souvenez peut-être que dans la première partie de ce cours nous avions eu deux situations différentes :

- Pour certaines figures, nous avions pu sans problèmes calculer leurs rapports caractéristiques. Par exemple le rapport de la diagonale et du côté d'un carré vaut $\sqrt{2}$.
- Pour d'autres figures cela s'était révélé impossible. Par exemple, il n'existe pas de formule simple pour le rapport du périmètre d'un cercle et de son diamètre, nous avons donc donné un nom à ce rapport : π .



Alors de quel côté se trouvent les triangles rectangles ? Peut-on donner une formule simple pour leurs rapports trigonométriques ou bien est-ce impossible ?

La réponse est « ça dépend ». 🤔

Dans la grande majorité des cas, ce n'est hélas pas possible et il n'existe pas de formule simple pour exprimer le sinus, le cosinus et la tangente des angles. C'est le cas par exemple des angles de 10° , de 20° , de 25° , de 40° ou encore de 50° . Si dans une construction géométrique vous rencontrez un de ces angles, vous serez alors obligé de faire une approximation numérique.

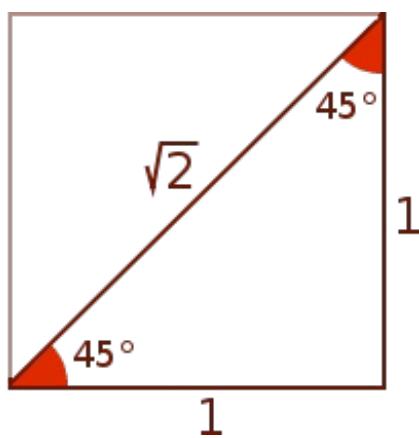


Aujourd'hui, les calculatrices permettent de donner des valeurs très précises des rapports trigonométriques, mais autrefois, on avait recours à des tables trigonométriques qui énuméraient dans de longs tableaux les valeurs des sinus, cosinus et tangentes de tous les angles avec une précision de quelques chiffres après la virgule.

Cependant, il existe quand même quelques angles particuliers pour lesquels on peut calculer explicitement les sinus, cosinus et tangentes. C'est le cas par exemple de 30° , de 45° et de 60° . Ce sont ces trois exemples que nous allons voir maintenant.

Le carré pour 45°

On obtient un triangle rectangle avec des angles de 45° en coupant un carré en deux par la diagonale.

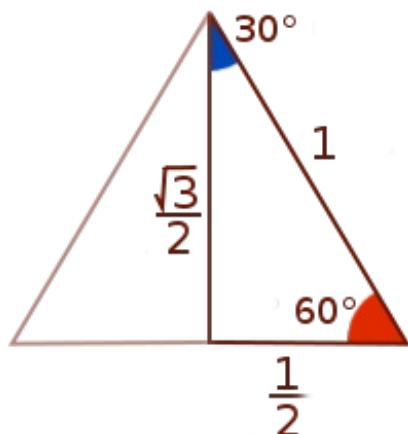


L'hypoténuse correspond donc à la diagonale du carré dont nous savons qu'elle est $\sqrt{2}$ fois plus grande que les côtés. Nous avons donc les valeurs suivantes :

$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan(45^\circ) = 1.$$

Le triangle équilatéral pour 30° et 60°

Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux à 60° . Donc si on le coupe en deux par une hauteur, on trouve un triangle rectangle ayant un angle de 30° et un angle de 60° . Nous avons déjà vu que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 est égal à $\sqrt{3}/2$.



On obtient donc les valeurs suivantes pour les rapports trigonométriques de l'angle de 30° :

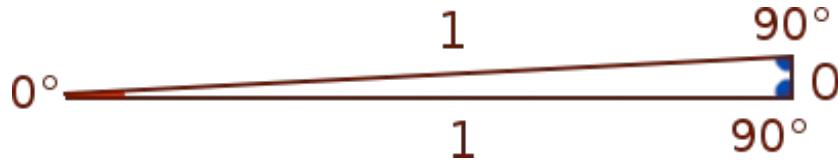
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Et pour l'angle de 60° :

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(60^\circ) = \sqrt{3}.$$

Les dégénérés : 0° et 90°

Il existe deux autres angles pour lesquels il est facile de calculer les rapports trigonométriques : les angles de 0° et de 90° . On les obtient pour un triangle dégénéré possédant deux angles droits et un angle de 0° .



Bon d'accord, la figure est fausse. 😊 Pour que ce soit lisible, j'ai pris un angle très petit mais pas exactement égal à 0° , mais il faut que vous imaginiez que ce triangle est totalement aplati. On obtient alors les valeurs suivantes :

$$\sin(0^\circ) = 0, \quad \cos(0^\circ) = 1, \quad \tan(0^\circ) = 0.$$

Et pour l'angle de 90° on a :

$$\sin(90^\circ) = 1, \quad \cos(90^\circ) = 0.$$



Notez que la tangente n'est pas définie pour l'angle de 90° car on a une division par 0. En fait, plus un angle se rapproche de 90° plus sa tangente est grande et tends vers l'infini, on peut donc en quelque sorte considérer que $\tan(90^\circ)$ est infini.

Récapitulatif

Ouf ! Nous arrivons au bout de ce chapitre bien chargé sur la trigonométrie. Pour finir, voici un petit tableau récapitulant les valeurs que nous venons de calculer.

Angle	Sinus	Cosinus	Tangente
0°	0	1	0

30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞ <i>(non défini)</i>



Ces valeurs ne sont pas les seules que l'on peut calculer, mais ce sont celles qui sont utiles le plus souvent.

Trigonométrie générale

Nous savons maintenant tout ce qu'il faut savoir sur les triangles rectangles, nous sommes donc prêts à nous attaquer à la trigonométrie générale, c'est-à-dire à l'étude des triangles quelconques.

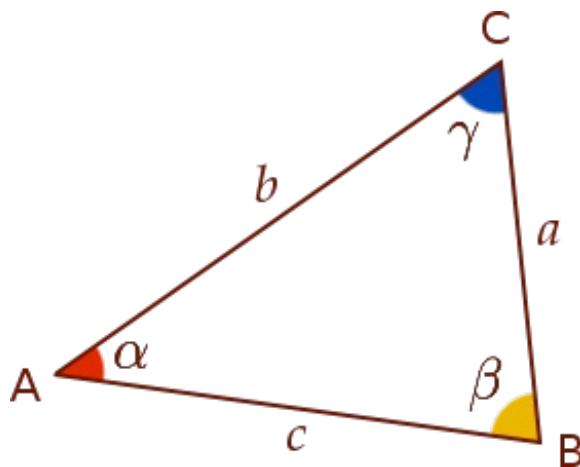


Attention, certaines démonstrations de ce chapitre demandent quelques connaissances de manipulations élémentaires des expressions mathématiques et de résolution d'équations (du premier degré uniquement). Si vous avez quelques doutes, tout ce que vous avez besoin de savoir se trouve dans les deux premiers chapitres du [cours sur les équations](#).

Un triangle quelconque

Notations

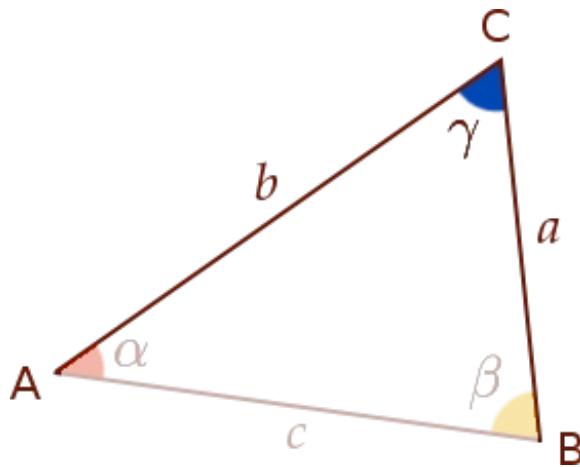
Commençons par poser quelques notations. Soit un triangle ABC, alors ses trois côtés sont appelés a , b , c et ses trois angles α , β et γ (ce sont les trois premières lettres de l'alphabet grec). Le tout disposé de la façon suivante :



Notez que les points ABC sont placés en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens inverse des aiguilles d'une montre se nomme le **sens trigonométrique** et c'est celui qui est utilisé la plupart du temps en géométrie. Vous remarquerez également que le côté de longueur a est opposé au point A (idem pour B et b et pour C et c). Ce choix de notation est le plus symétrique et le plus élégant et vous verrez dans la deuxième partie de ce chapitre qu'il rend les formules bien plus jolies et faciles à retenir.

Un angle, deux côtés

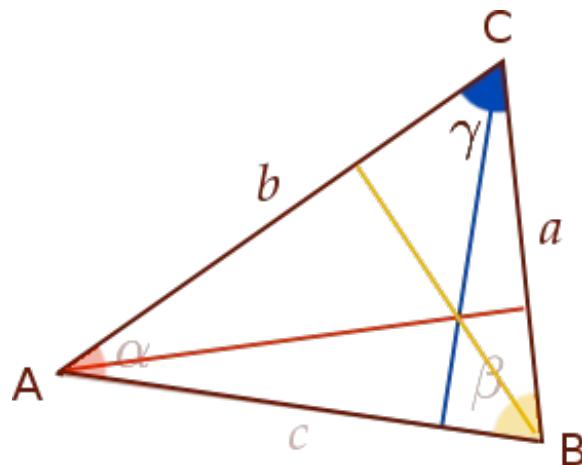
Commençons par un cas simple, celui où on connaît deux côtés par exemple a et b ainsi que l'angle γ entre les deux.



Puisque nous avons étudié en détail les triangles rectangles, vous aurez compris que la première chose à faire est de couper notre triangle en deux triangles rectangles.



Oui, mais comment ? Un triangle possède trois hauteurs, c'est-à-dire trois manières différentes de couper notre triangle en deux. Selon vous, quelle hauteur devons-nous choisir, la bleue, la jaune ou la rouge ?

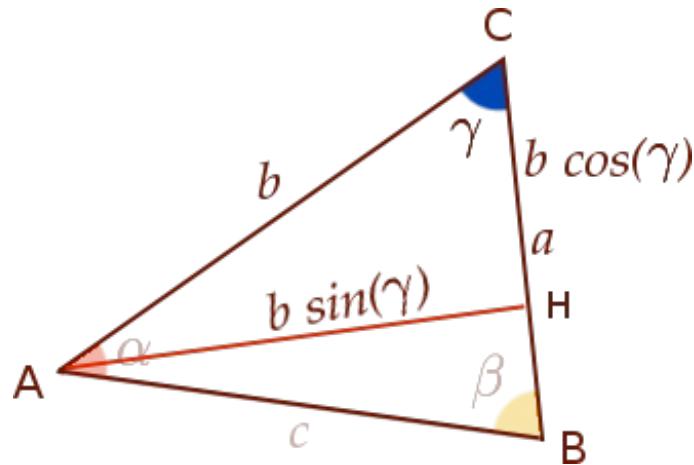


Puisque nous disposons de l'angle γ , nous devons absolument le garder intact, il ne faut donc pas choisir la hauteur bleue qui le coupe en deux. C'est notre seule contrainte, à partir de là, nous pouvons choisir indifféremment la hauteur jaune ou la hauteur rouge.

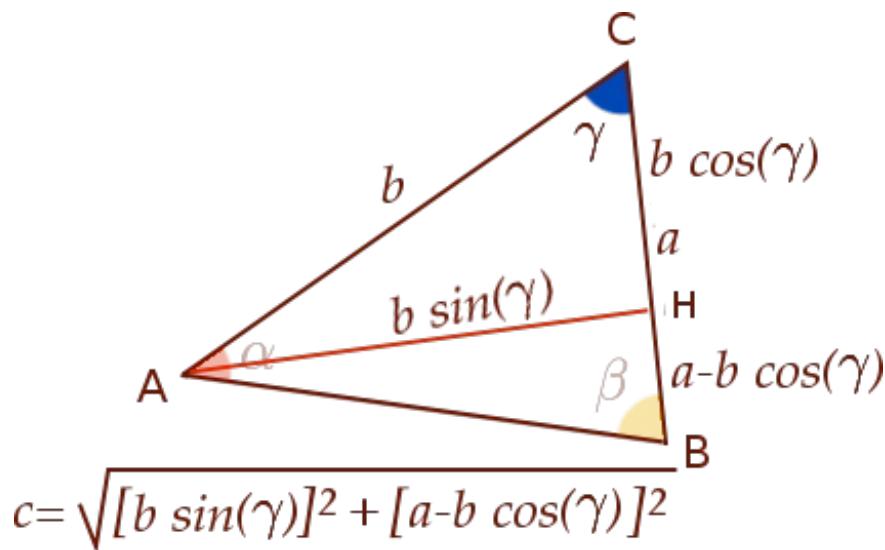
Choisissons par exemple la rouge et notons H le point qui se trouve à sa base. Alors dans le triangle CAH, nous disposons du côté b et de l'angle γ , c'est tout ce qu'il nous faut :

- Pour passer de AC à CH, on multiplie par le cosinus de γ , on a donc $CH = b \cos(\gamma)$;
- Pour passer de AC à AH, on multiplie par le sinus de γ , on a donc $CH = b \sin(\gamma)$.

Voici la figure :



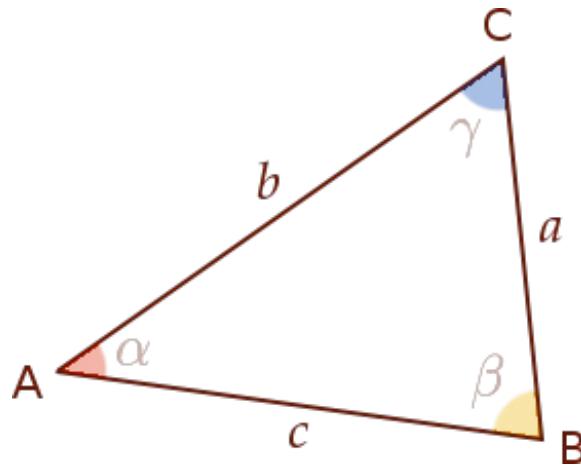
Nous connaissons maintenant entièrement le triangle CAH, passons au triangle HAB. Puisque $CB = a$ et que $CH = b \cos(\gamma)$, il suffit d'une petite soustraction pour trouver $HB = a - b \cos(\gamma)$. Dans le triangle HAB, nous connaissons donc deux côtés : AH et HB. Deux informations, c'est gagné. On peut tout de suite en déduire la longueur de l'hypoténuse AB par le théorème de Pythagore.



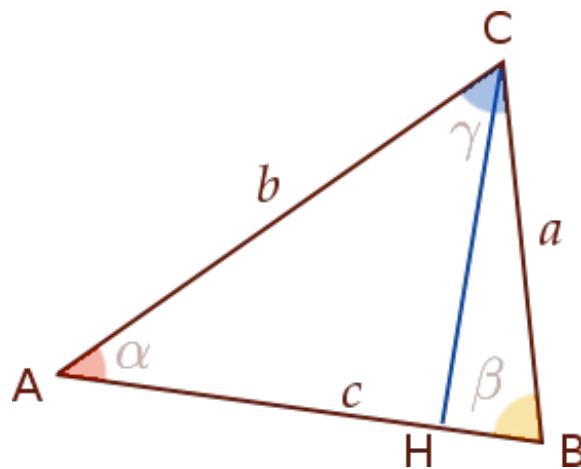
Nous avons toutes les longueurs du triangle HAB, nous pouvons donc calculer tous ses rapports trigonométriques : $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$ et $\tan(\beta)$. On en déduit donc l'angle β , puis l'angle $\alpha = 180 - \gamma - \beta$.

Trois côtés

Le cas où l'on dispose des trois côtés a , b et c pour retrouver les trois angles est le plus subtil.



Comme précédemment, la première chose à faire est de couper le triangle en deux par une hauteur. Cette fois, il n'y a pas de choix meilleur que les autres, vous pouvez prendre n'importe laquelle des trois hauteurs. Prenons par exemple celle issue du sommet C, puis notons H le point qui se trouve à sa base.

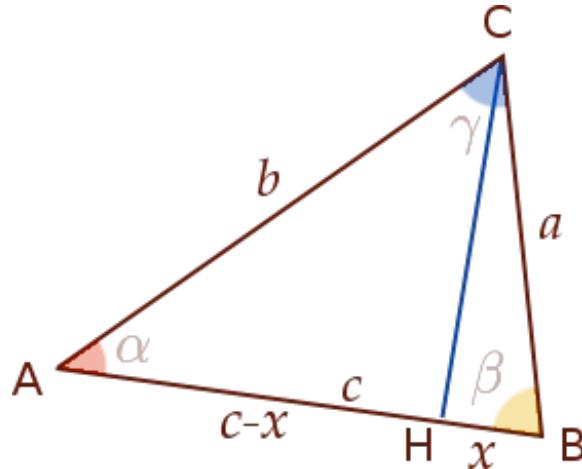


Et là, on a un problème ! Nous ne disposons des deux informations nécessaires à appliquer nos formules trigonométriques dans aucun des deux triangles rectangles créés :

- dans le triangle CAH, nous n'avons que b ;
- dans le triangle CHB, nous n'avons que a .

Le côté c quant à lui est inutilisable pour l'instant car il est coupé en deux par la hauteur CH.

Pour nous sortir de ce mauvais pas, il va nous falloir utiliser quelques connaissances en résolution des équations. Puisque nous n'avons pas assez d'information, nous allons devoir jouer avec une information inconnue. Par exemple, notons x la longueur de HB. Dans ce cas, le segment AH mesure $c - x$.



Nous disposons donc maintenant de deux côtés dans chacun des deux triangles rectangles. Ce qui va nous sauver, c'est que le seul côté qui nous manque est le segment CH qui est commun aux deux triangles.

- Dans le triangle CHB, par le théorème de Pythagore, on a

$$CH^2 = a^2 - x^2.$$

- Dans le triangle CAH, par le théorème de Pythagore, on a

$$CH^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

En bref, on a l'équation suivante :

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

En développant on obtient :

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2.$$

Après élimination des termes $-x^2$ de chaque côté, on tombe sur une équation du premier degré qui donne

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2c}.$$

Et le tour est joué ! Une fois que nous avons x , nous avons tous les côtés des triangles rectangles, donc nous avons tous les rapports trigonométriques et nous pouvons en déduire les angles.

 Quand on trouve une formule, il est souvent intéressant d'observer sa structure pour voir si elle correspond bien à ce que l'on cherche. Si on regarde la forme $x = c/2 + (a^2 - b^2)/2c$, on remarque notamment que si $a = b$ alors $x = c/2$, ce qui est cohérent puisque si le triangle est isocèle, le point H doit tomber au milieu du segment AB. Si $a > b$, alors $x > c/2$ et le triangle penche vers la gauche, tandis que si $a < b$, on a $x < c/2$ et le triangle penche vers la droite. Tout ceci est bien cohérent, ce qui nous conforte dans nos calculs. 

Nous allons nous arrêter ici pour les exemples de configurations. Il serait long et fastidieux de traiter une à une toutes les situations possibles, d'autant plus que ça fonctionne toujours de la même manière. Le cas des trois côtés que nous venons de voir est le plus difficile car il fait appel aux équations, mais toutes les autres configurations se résolvent comme le premier exemple.

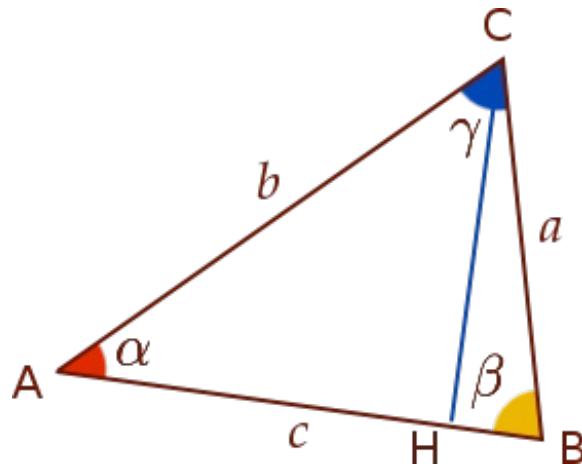
Bref, si vous avez compris le principe, vous devriez maintenant être capable de traiter les autres situations par vous-même. C'est d'ailleurs un bon exercice si vous voulez vérifier que vous avez bien suivi. 😊

Les sinus et Al-Kashi

Vous savez maintenant tout ce qu'il faut savoir pour traiter toutes les configurations. Seulement voilà, refaire un découpage en triangles rectangles à chaque fois, ça peut vite devenir long et pénible. Dans cette section, nous allons voir qu'il existe quelques raccourcis qui permettent de s'attaquer directement aux triangles quelconques sans avoir à tout redémontrer à chaque fois.

La loi des sinus

Considérons un triangle quelconque avec une de ses trois hauteurs.



Alors la longueur CH de cette hauteur peut se calculer de deux façons différentes :

- dans le triangle CAH, on a $CH = b \sin(\alpha)$;
- dans le triangle CHB, on a $CH = a \sin(\beta)$;

Au final, on a donc

$$b \sin(\alpha) = a \sin(\beta).$$

Et en divisant par $\sin(\alpha) \times \sin(\beta)$ des deux côtés on obtient :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Si on refait la même construction avec la hauteur issue de A, on obtient :

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta},$$

et avec la hauteur issue de B on a :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

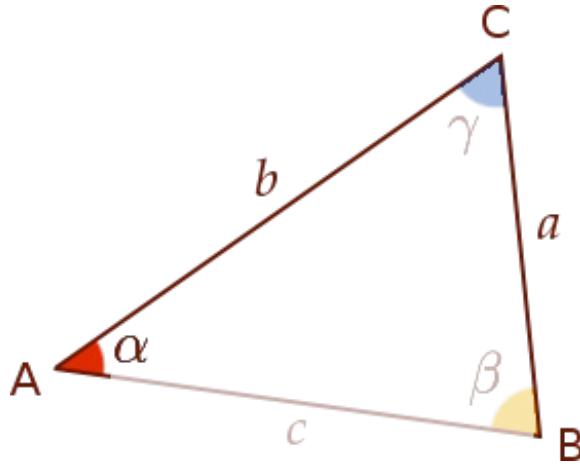
Bref, on a la jolie formule générale suivante :

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}.$$

Cette formule simple à retenir se nomme la **loi des sinus**, elle dit en clair que le rapport d'un côté du triangle et du sinus de l'angle opposé est le même pour les trois côtés.

Un exemple

Voici un exemple de situation pour laquelle la loi des sinus est bien utile. Supposons que l'on connaît les côtés a et b ainsi que l'angle α .



Le triangle se résout alors en deux temps trois mouvements :

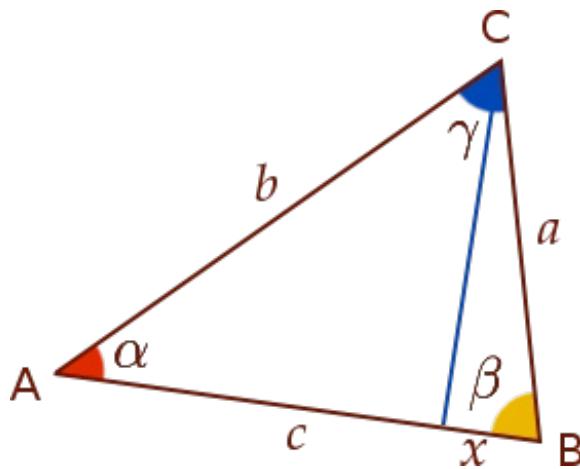
- grâce à a et α , on peut calculer le rapport $a / \sin(\alpha)$;
- pour trouver $\sin(\beta)$ et β : on utilise b et le rapport $b / \sin(\beta)$ (qui est égal à $a / \sin(\alpha)$) ;
- pour trouver γ : on calcule simplement $\gamma = 180 - \alpha - \beta$;
- pour trouver c : on utilise $\sin(\gamma)$ et $c / \sin(\gamma)$ (qui est lui aussi égal à $a / \sin(\alpha)$).

Et voilà, nous avons résolu notre triangle sans avoir eu à le découper en triangles rectangles !

Théorème d'Al-Kashi

La deuxième formule très utile s'appelle le **théorème d'Al-Kashi**, mais on lui trouve parfois d'autres noms tels que la **loi des cosinus** ou le **théorème de Pythagore** généralisé.

Et j'ai une bonne nouvelle : nous avons déjà fait la moitié du travail pour obtenir ce théorème. 🍋 Rappelez-vous dans la section précédente quand nous avons étudié le cas des trois côté, nous avions la figure suivante :



Et nous avions trouvé que la longueur x vérifiait l'équation suivante :

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2cx$$

Mais si au lieu de résoudre immédiatement cette équation pour obtenir x , on commence par constater que dans le triangle CHB, on a $x = a \cos(\beta)$, alors, notre équation (en la manipulant un peu) devient :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta).$$

Et voilà, c'est cette formule que l'on appelle le théorème d'Al-Kashi.



Mais dites-moi, elle ne vous rappelle rien cette formule ? Vous ne trouvez pas quelques points communs avec un autre théorème classique ?

Imaginez que l'angle β soit un angle droit, alors combien vaut $\cos(90^\circ)$? Vous pouvez retourner faire un petit tour au chapitre précédent si vous avez oublié : le cosinus d'un angle droit vaut 0 ! Autrement dit, on tombe sur la formule :

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Qui n'est rien de moins que le théorème de Pythagore. Eh oui, c'est pour ça que cette formule porte également le nom de théorème de Pythagore généralisé. C'est tout simplement une version adaptée du célèbre théorème grec qui marche pour tous les triangles.

Bien entendu, il est tout à fait possible d'utiliser le théorème d'Al-Kashi avec l'angle α ou l'angle γ à la place de β :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) ; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \end{cases}$$

Exemples d'utilisation

Comme la loi des sinus, le théorème d'Al-Kashi est très utile. Dès que vous connaissez deux côtés et un angle, il permet de retrouver le troisième côté. Et si vous connaissez les trois côtés il permet de retrouver immédiatement les trois angles.

En effet, imaginez que vous disposez des longueurs a , b et c , alors en utilisant le théorème avec les trois angles et en isolant à chaque fois le cosinus, vous obtenez ceci :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} ; \\ \cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} ; \\ \cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

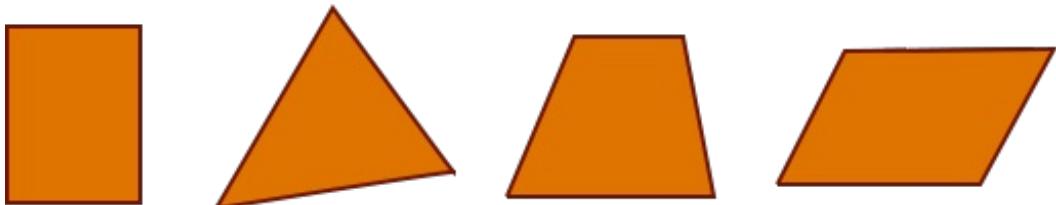
Autrement dit, vous pouvez maintenant retrouver les trois angles à partir des trois côtés sans faire de découpages en triangles rectangles, ni résoudre d'équation. Merci Al-Kashi ! 😊

Partie 3 : De l'aire

Dans cette partie, nous allons étudier les différentes techniques que l'on peut mettre en place pour calculer l'aire d'une figure géométrique.

Premières aires

Dans ce chapitre, nous allons commencer par étudier les aires des figures géométriques de base. Au programme : rectangles, triangles, trapèzes et parallélogrammes.

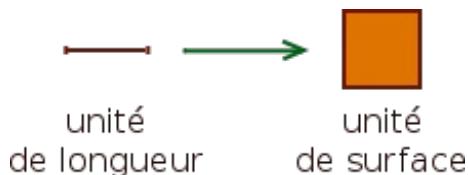


Les surfaces de ces figures peuvent se mesurer facilement grâce à quelques découpages. Et nous ne faisons pas ça pour rien car les formules que nous allons trouver nous seront très utiles dans la suite pour nous attaquer aux figures plus complexes !

Rectangles

L'unité

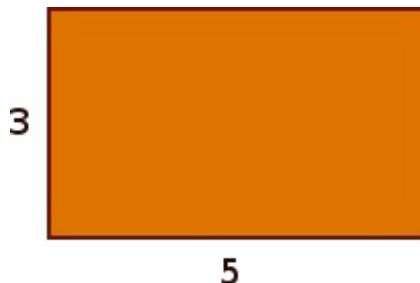
La première chose qu'il convient de faire quand on veut mesurer les aires, c'est de choisir une unité. Théoriquement rien ne nous oblige à choisir une unité plutôt qu'une autre, mais dans la pratique, le plus simple est de prendre un petit carré dont le côté mesure une unité de longueur.



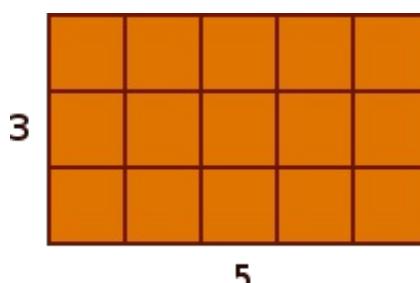
À de très rares exceptions près, c'est toujours ce choix qui est fait et c'est donc lui que nous allons utiliser dans la suite de ce cours.

Longueur fois largeur

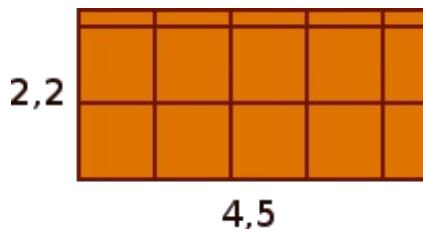
Notre unité carrée est absolument idéale pour mesurer la surface des rectangles. Commençons par un rectangle dont la longueur et la largeur sont des nombres entiers. Voici par exemple un rectangle de largeur 3 et de longueur 5 :



Il est possible de découper ce rectangle en petits carrés unités :



On constate alors simplement que le rectangle est composé de $3 \times 5 = 15$ petits carrés unité. Ainsi la surface du rectangle se calcule simplement en multipliant sa largeur et sa longueur. Et si ces dernières ne sont pas des nombres entiers, cela marche également, à la différence que l'on a des fractions d'unité et l'aire peut ainsi être un nombre à virgule.



Ce rectangle a une aire égale à $2,2 \times 4,5 = 9,9$.

Au final, en notant $A_{\text{rectangle}}$ l'aire du rectangle, on a la formule suivante :

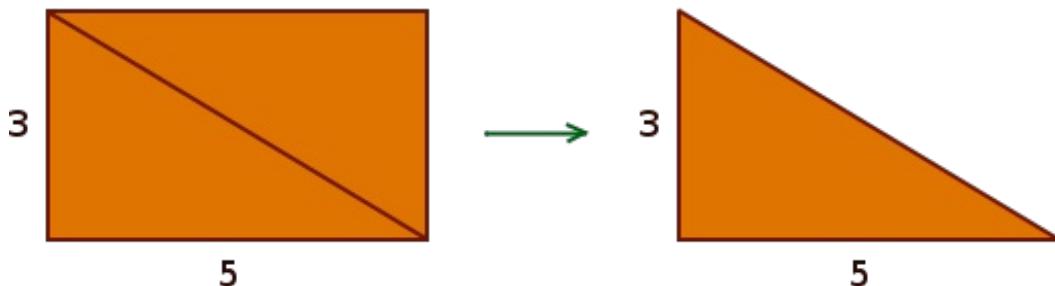
$$A_{\text{rectangle}} = \text{largeur} \times \text{longueur}.$$

Triangles

Nous avons vu dans la partie sur la trigonométrie que les triangles sont probablement les figures les plus importantes en géométrie. Savoir calculer leur aire est donc essentiel.

Les triangles rectangles

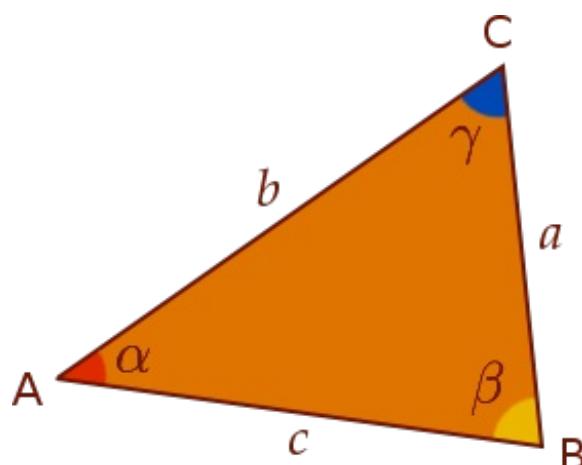
Avant de voir les triangles quelconques, nous allons commencer par les triangles rectangles. Rappelez-vous de leur définition : ce sont les triangles obtenus en tranchant en deux un rectangle par la diagonale.



Et vu que nous savons déjà calculer l'aire du rectangle, il ne nous reste plus qu'à diviser par deux ! 😊 Par ce découpage, la longueur et la largeur du rectangle deviennent les deux côtés de l'angle droit. Ainsi, l'aire d'un triangle rectangle est égale au produit des longueurs des côtés de l'angle droit divisé par deux. Dans l'exemple ci-dessus on trouve une aire égale à 7,5.

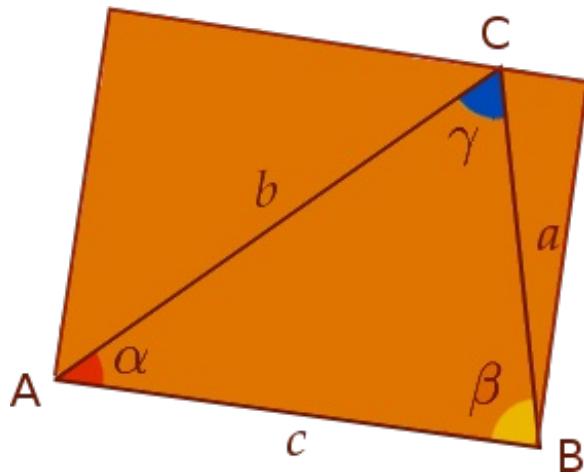
Les triangles quelconques

Il est temps maintenant de passer aux triangles quelconques. Je vous rappelle les notations classiques pour les côtés et les angles :

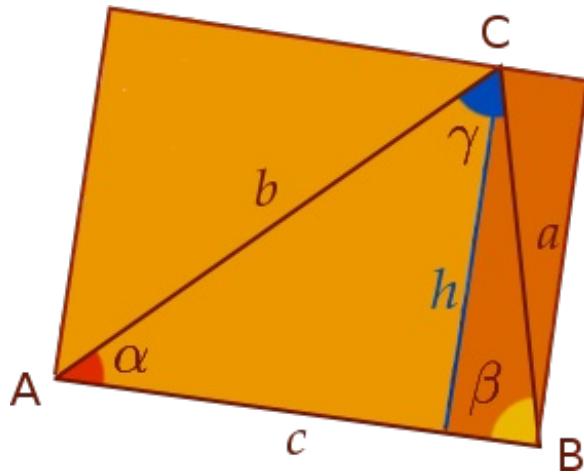


Comme nous savons déjà calculer les aires des rectangles, nous avons très envie d'inclure ce triangle dans un rectangle, par

exemple de la façon suivante :



On peut alors constater que l'aire du triangle est encore une fois égale à la moitié de celle du rectangle. Pour voir ça, il suffit de tracer la hauteur du triangle issue du point C qui divise le grand rectangle en deux rectangles plus petits :

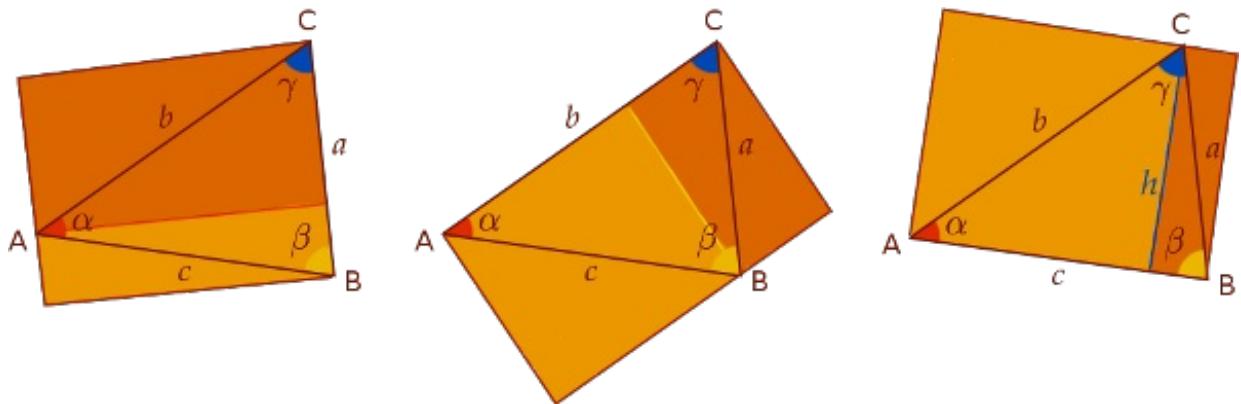


On retrouve alors la configuration du triangle rectangle : nos deux petits rectangles sont coupés par leur diagonale, une moitié se trouve à l'intérieur du triangle et l'autre moitié à l'extérieur.

La longueur et la largeur du rectangle valent c et h , la surface du triangle mesure donc :

$$A_{\text{triangle}} = \frac{c \times h}{2}.$$

Notez qu'au lieu d'appuyer notre rectangle sur le côté AB, il aurait tout à fait été possible de le construire sur l'un des côtés BC ou AC.

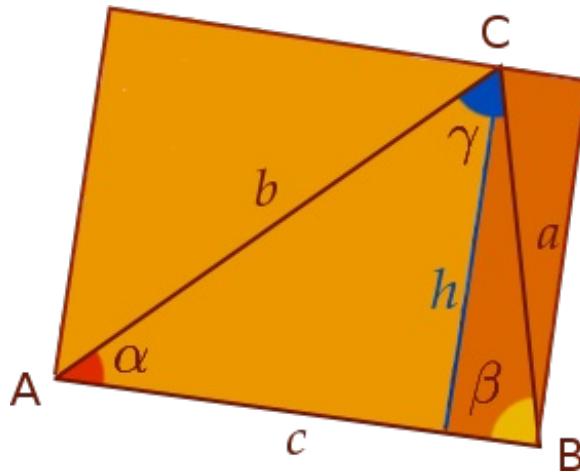


Dans les trois cas l'aire du triangle est bien égale à la moitié de celle du rectangle. Il y a donc trois façons de calculer l'aire du triangle : on choisit un des trois côtés du triangle, que l'on appelle **la base**, puis on le multiplie par la hauteur issue de l'angle opposé et on divise par deux. En clair, la formule générale à retenir est la suivante :

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Le retour de la loi des sinus !

La formule précédent peut ne pas être toujours la plus utile car elle oblige de calculer la hauteur. On pourrait préférer une formule ne faisant intervenir que les trois côtés et les trois angles. Pour cela reprenons la figure suivante :



Grâce à la trigonométrie on sait que $h = b \sin(\alpha)$, on peut alors réinjecter cette égalité dans la formule de l'aire pour obtenir :

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{cb \sin(\alpha)}{2}.$$

Cette formule correspond bien à ce que nous cherchions. Et en partant d'une autre base, on obtient les deux autres expressions suivantes :

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{cb \sin(\alpha)}{2} = \frac{ac \sin(\beta)}{2} = \frac{ab \sin(\gamma)}{2}.$$

Nous pourrions nous arrêter là, mais je vous propose de faire encore une petite étape pour retrouver une vieille connaissance. Multiplions tous les termes de cette égalité par deux et divisons-les par le produit abc , on trouve alors :

$$\frac{2\mathcal{A}_{\text{triangle}}}{abc} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Tiens, tiens,... les trois derniers termes de cette égalité ne nous sont pas inconnus : c'est la loi des sinus ! 😊 En fait, c'est une version un peu différente, il faudrait prendre l'inverse de tous ces termes pour retomber exactement sur la forme que nous connaissons :

$$\frac{abc}{2\mathcal{A}_{\text{triangle}}} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

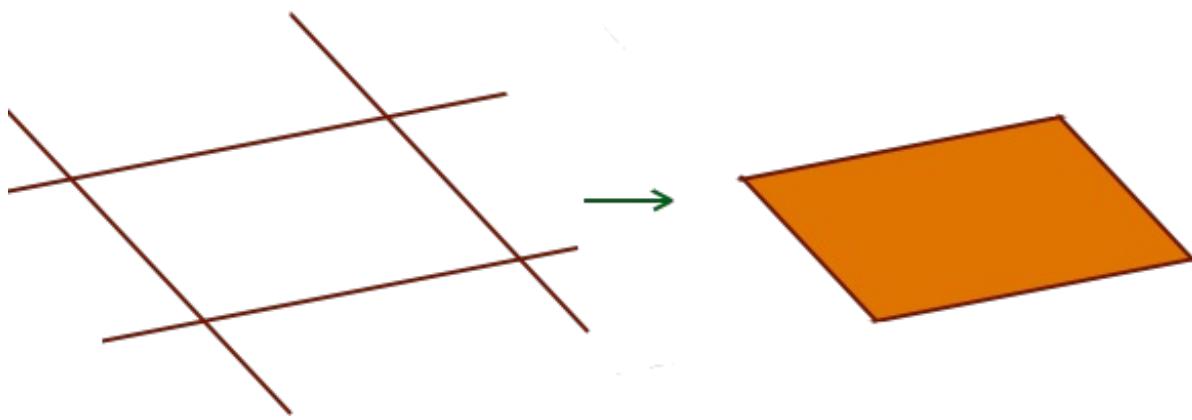
En utilisant le premier terme de cette égalité, vous êtes désormais capable de calculer l'aire du triangle à partir de la loi des sinus !

Parallélogrammes et trapèzes

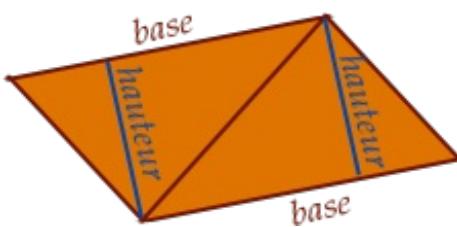
Une fois que l'on sait calculer l'aire d'un triangle, il est possible grâce aux triangulations de calculer l'aire de n'importe quel polygone. Dans cette section, nous allons voir deux cas particuliers : les parallélogrammes et les trapèzes.

Parallélogrammes

Un **parallélogramme** est la figure formée par le croisement de deux bandes de droites parallèles.



En d'autres termes, c'est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles entre eux. Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on peut le découper en deux par la diagonale, on obtient alors deux triangles identiques ayant la même base et la même hauteur.



Comme l'aire d'un seul de ces triangles est égale à la moitié du produit de la base et de la hauteur, l'aire du parallélogramme est tous simplement donnée par la formule suivante :

$$A_{\text{parallélogramme}} = \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Notez qu'il est tout à fait possible d'utiliser cette formule en utilisant le point de vue suivant :



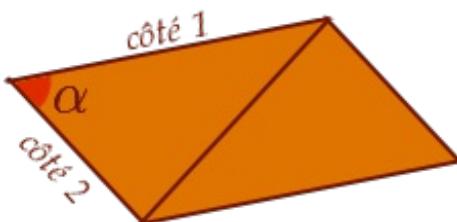
Le résultat sera évidemment le même. 😊



Un rectangle est un cas particulier de parallélogramme ayant un angle droit. Dans un rectangle, la base est égale à la longueur et la hauteur est égale à la largeur, on constate donc que la formule ci-dessus est simplement une généralisation de ce que nous connaissons déjà.

Avec un angle

Comme pour le triangle, si l'on dispose d'un angle et des deux côtés, on peut ne pas vouloir se fatiguer à calculer la hauteur.



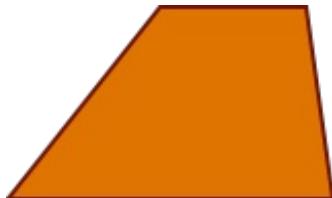
On a alors directement la formule suivante :

$$A_{\text{parallélogramme}} = \text{côté 1} \times \text{côté 2} \times \sin(\alpha).$$

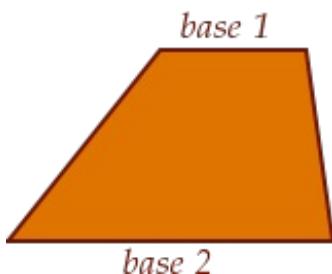
Cette formule est obtenue exactement de la même manière en multipliant par deux la formule obtenue dans la section précédente pour le triangle.

Trapèzes

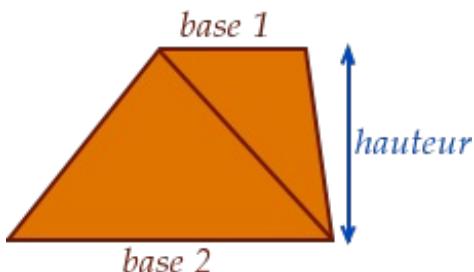
Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux de ses côtés opposés parallèles.



Contrairement au parallélogramme, ses deux côtés opposés n'ont pas la même longueur, nous allons les appeler *base 1* et *base 2*.



Ainsi, si on coupe le trapèze en deux par une diagonale, on obtient deux triangles n'ayant pas la même base, mais ayant la même hauteur.



L'aire du trapèze est donc égale à la somme des aires de ces deux triangles, on obtient la formule suivante :

$$A_{\text{trapeze}} = \frac{\text{base } 1 \times \text{hauteur}}{2} + \frac{\text{base } 2 \times \text{hauteur}}{2} = \frac{\text{base } 1 + \text{base } 2}{2} \times \text{hauteur}.$$

En d'autres termes, la dernière égalité nous dit que l'aire du trapèze est égale à la moyenne de ses deux bases multipliée par sa hauteur.



La dernière égalité est obtenue en factorisant par la hauteur et par 1/2. Si vous maîtrisez mal ces manipulations des fractions, n'hésitez pas à faire un tour du côté du cours [Opérations et fractions](#).

TP : le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien



Que diriez-vous d'un petit TP pour manipuler un peu les surfaces ?

Dans ce chapitre, nous allons démontrer un résultat nommé le **théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien** qui va nous faire découper des polygones en petits morceaux et les rassembler dans tous les sens. Si vous aimez les puzzles, vous allez adorer ce TP ! Mais je ne vous en dis pas plus car à partir de maintenant, c'est à vous d'activer vos petites cellules grises. 😊



La difficulté d'un théorème est indépendante du nom de ses inventeurs. Cette affirmation peut sembler totalement évidente, pourtant, par un phénomène psychologique étrange, on constate souvent que les étudiants en mathématiques ont tendance à avoir davantage peur des théorèmes qui portent des noms à rallonge ou qui contiennent des lettres comme K, W, X, You Z. 🎉 Ôtez-vous cette idée de la tête, ce n'est pas parce que le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien porte un nom à couper dehors qu'il est difficile !

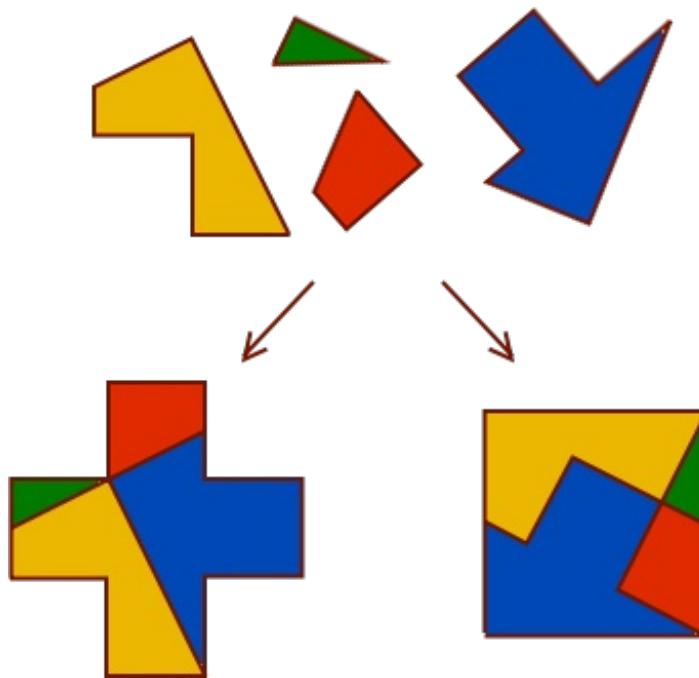
Puzzles géométriques

Le théorème

Entrons tout de suite dans le vif du sujet avec l'énoncé du théorème.

Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien. Si deux polygones ont la même aire, alors il est possible de découper le premier en petits morceaux de façon à pouvoir recomposer le deuxième avec ces morceaux.

En d'autres termes, il est possible de trouver des petites pièces qui quand on les assemblent façon puzzle permettent de reconstituer soit l'un soit l'autre des deux polygones. Voici un exemple avec une croix ou un carré.



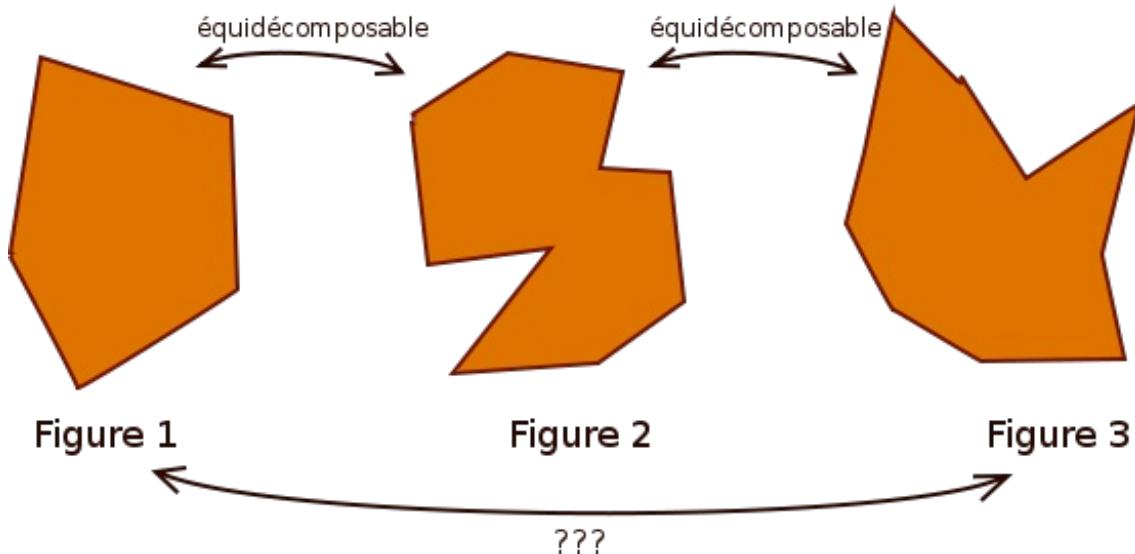
Notez que dans cet exemple, le découpage n'utilise que quatre pièces, ce qui est le minimum, mais dans ce TP, notre but n'est pas d'essayer d'avoir le moins de pièces possible. Nous voulons simplement de trouver un découpage, même s'il y a beaucoup de pièces. Trouver le nombre minimum de pièces peut ensuite devenir un problème beaucoup plus dur !

Comme nous allons avoir beaucoup besoin de parler de figures qui se décomposent de la sorte dans ce chapitre, nous il sera plus facile d'avoir un mot pour désigner cette propriété : deux figures géométriques qui peuvent s'obtenir façon puzzle à partir des mêmes pièces sont dites **équidécomposables**. Ainsi, le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien affirme que deux polygones de même aire sont toujours équidécomposables.

La transitivité

La première propriété que nous allons démontrer se nomme la **transitivité** et dit que si deux figures sont équidécomposables à une même troisième, alors elles sont équidécomposables entre-elles.

Si l'on dispose de trois figures et que d'une part les figures 1 et 2 sont équidécomposables et que d'autre part les figures 2 et 3 sont équidécomposables, alors la figure 1 et la figure 3 sont équidécomposables. Sauriez-vous expliquer pourquoi ?



Cette propriété n'est pas très dure à démontrer, mais elle demande de l'astuce. Essayez de voir par vous-même pourquoi elle est vraie avant de regarder la solution. 😊

Solution

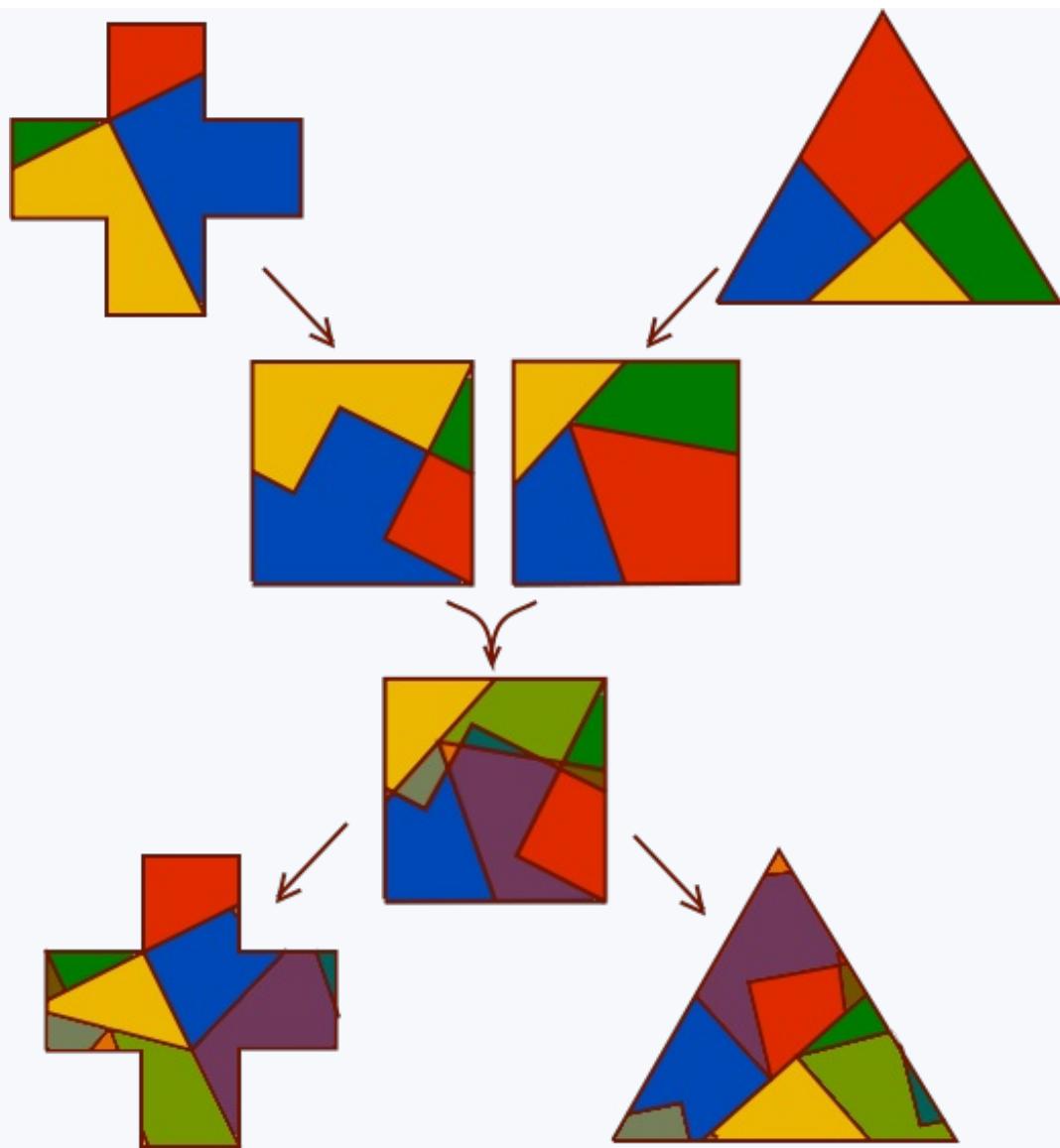
Secret (cliquez pour afficher)

Pour commencer, nous savons deux choses :

- on peut découper la figure 2 de façon à obtenir la figure 1 avec les pièces ;
- on peut découper la figure 2 de façon à obtenir la figure 3 avec les pièces.

Mais supposons que l'on prenne la figure 2 et qu'on lui fasse ces deux découpages à la fois : on obtient alors plein de pièces plus petites qui permettent de reconstituer soit la figure 1, soit la figure 3. Ceci prouve bien que les figures 1 et 3 sont équidécomposables.

Si cette explication vous paraît un peu floue, voici un exemple en image qui utilise le fait que la croix et le triangle équilatéral sont tous les deux équidécomposables au carré.



Au final, on voit bien que la croix et le triangles sont équidécomposables. 😊 Le fait de superposer les deux découpages que l'on connaît nous donne la solution. Bien sûr ce découpage n'est certainement pas celui qui utilise le moins de pièces possibles, mais encore une fois, ce n'est pas ceci qui nous intéresse dans ce TP.

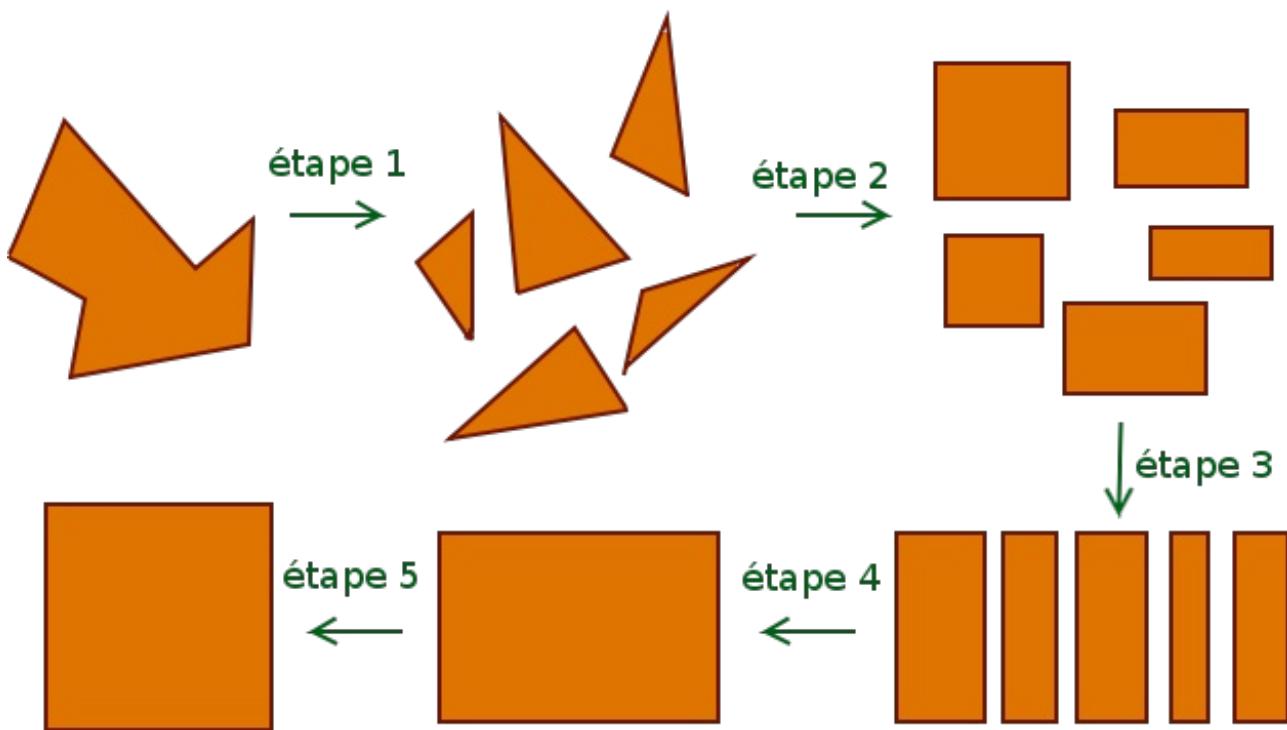
Vers le carré

Grâce à la transitivité que nous avons vue dans la section précédente, nous savons que si deux polygones de même aire sont équidécomposables au carré, alors ils sont également équidécomposables entre eux ! Autrement dit, il suffit de prouver que tout polygone est équidécomposable au carré pour que cela prouve immédiatement le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien ! 😊

Le but de cette section est donc de prouver que tout polygone est équidécomposable à un carré de même surface. La preuve va se dérouler en quatre étapes :

- **Étape 1.** Le polygone peut se découper en plusieurs petits triangles.
- **Étape 2.** Chacun de ces petits triangles est équidécomposable à un rectangle.
- **Étape 3.** Tous les petits rectangles obtenus sont équidécomposables en d'autres rectangles ayant tous la même largeur.
- **Étape 4.** Le polygone de départ est équidécomposable à un rectangle.
- **Étape 5.** Le polygone de départ est équidécomposable à un carré de même aire !

En image, cela donne ceci :



Allez hop, c'est parti !

Étapes 1 et 2 : petits triangles et petits rectangles

L'étape 1 est facile puisque nous avons déjà fait ce genre de découpage dans le premier chapitre de trigonométrie. Vous rappelez-vous comment s'appelle le découpage d'un polygone en triangles ? Pour l'étape 2, à vous de montrer qu'un triangle quelconque est équidécomposable à un rectangle. Peu importe la longueur et la largeur du rectangle pour l'instant : vous devez juste partir d'un triangle et le découper de façon à pouvoir reconstituer un rectangle.

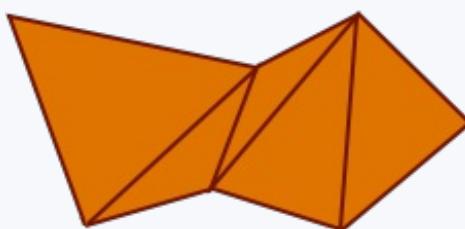
Un petit indice : ceci est possible avec uniquement trois morceaux. Mais si vous trouvez une solution avec plus de morceaux, pas de problème, ça marche aussi ! 😊

Solution

Secret (cliquez pour afficher)

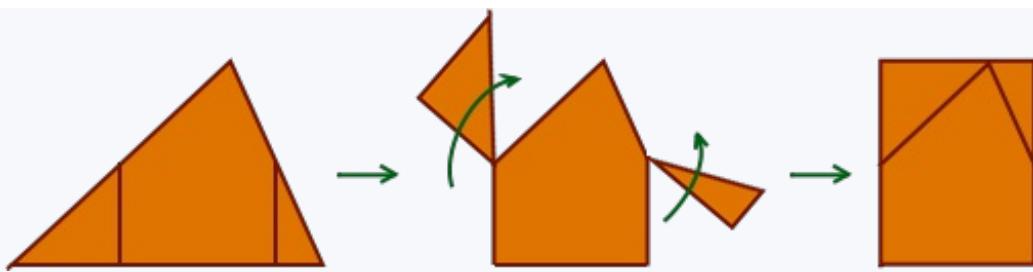
Étape 1

L'étape 1 est assez évidente, nous avons déjà utilisé le fait qu'un polygone peut toujours se découper en triangle, cela se nomme une **triangulation**. 😊



Étape 2

Pour l'étape 2, un bon dessin vaut mieux qu'un long discours, voici le découpage d'un triangle pour obtenir un rectangle :



Pour que les deux pièces qui pivotent s'ajustent bien pour former le rectangle, il faut que les deux coupures verticales passent par le milieu des deux côtés qui forment l'angle du haut.

Ce découpage n'est évidemment pas la seule solution. Si vous en avez trouvé une autre, bravo !

Étape 3 : tous les rectangles à la même taille

Nous avons désormais plein de petits rectangles de tailles diverses et variées et nous allons maintenant essayer de leur donner une dimension commune.

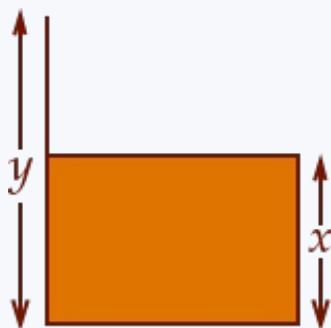


Montrez que si l'on dispose d'un rectangle, il est possible d'obtenir un autre rectangle de même aire ayant la largeur que l'on veut. Autrement dit pour deux nombres x et y quelconques, deux triangles de même aire et de largeurs respectives x et y sont équidécomposables.

Solution

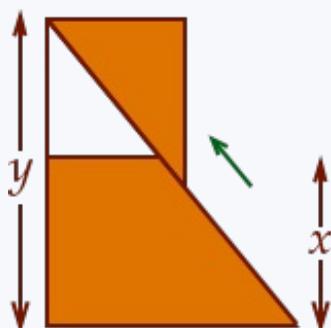
Secret (cliquez pour afficher)

Supposons que l'on ait un rectangle de largeur x et que l'on veuille le transformer en rectangle de de largeur y . On commence par prolonger la largeur du rectangle de base en un segment de longueur y de la façon suivante :

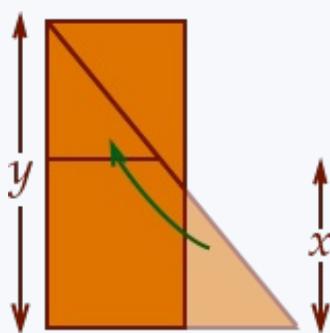


On peut supposer que y est plus grand que x sinon on fait le découpage dans l'autre sens en partant du rectangle de largeur y .

On fait alors une coupure qui part du point en haut à gauche jusqu'au coin en bas à droite et on fait glisser le morceau de droite de la façon suivante :



Il ne reste alors plus qu'à découper le triangle qui dépasse qui vient exactement se loger dans le trou :

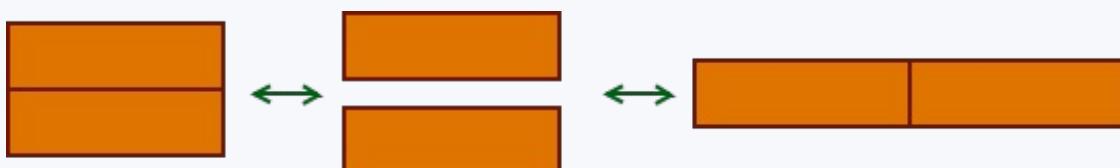


Notez que ce dernier triangle découpé s'ajuste bien dans le trou. En effet, on peut commencer par remarquer que ce triangle est semblable au trou puisqu'ils ont les mêmes angles. Il suffit donc qu'ils aient un côté en commun pour qu'ils soient égaux et c'est bien le cas puisque leur côté vertical par exemple est égal dans les deux cas au décalage vertical de la première pièce, c'est-à-dire $y = x$. Si ces explications vous paraissent floues, n'hésitez pas à retourner faire un tour du côté des chapitres de trigonométrie pour savoir reconnaître quand deux triangles sont identiques.



Et le tour est joué ! 😊 Remarquez seulement, que pour que la méthode ci-dessus marche, il faut que y ne soit pas trop grand. Et plus précisément il faut que y ne dépasse pas le double de x sinon lors du déplacement de la pièce du premier découpage, celle-ci monte trop haut et ne touche plus le reste de la figure.

Pour résoudre ceci, il suffit d'utiliser le découpage suivant qui permet de multiplier ou de diviser la largeur de notre rectangle par deux autant de fois qu'on le veut.



Grâce à ceci, on peut commencer par ajuster la taille de notre rectangle pour que y ne dépasse pas le double de x . Et une fois ceci fait, on conclut grâce au précédent découpage.

Étapes 4 et 5 : un rectangle et un carré

On approche de la fin ! Si vous avez suivi jusque là, les deux dernières étapes ne devraient pas poser de problème.

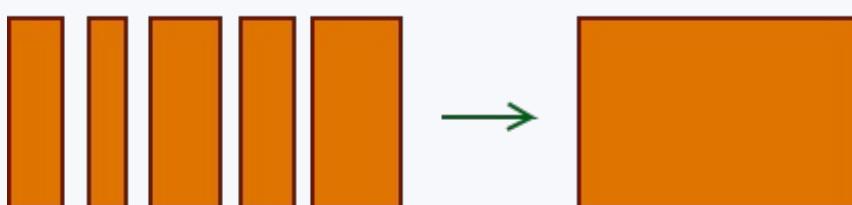


Formez un unique rectangle à partir des petits rectangles trouvés à la question précédente, puis expliquez comment transformer ce rectangle en carré.

Secret (cliquez pour afficher)

Étape 4

Vu que nous n'avons maintenant plus que des rectangles de même largeur il n'y a aucune difficulté à les rassembler en un seul grand rectangle. Cela se fait simplement de la façon suivante :



Étape 5

Pas de difficulté nouvelle non plus pour l'étape 5, puisqu'il suffit de réutiliser le découpage de l'étape 3. Vu qu'un carré est

simplement un rectangle particulier, il est possible de découper notre rectangle pour lui donner une forme carrée.

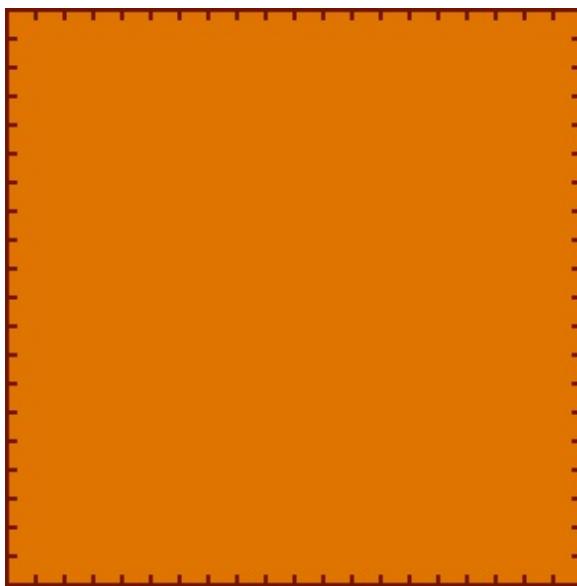
Pour être un peu plus précis, si notre rectangle a une largeur égale à a et une longueur égale à b , alors son aire est égale à ab et un carré de même aire a donc un côté égal à \sqrt{ab} . Il suffit donc de faire un découpage donnant au rectangle un largeur de \sqrt{ab} , et c'est gagné. 😊

Paradoxes !

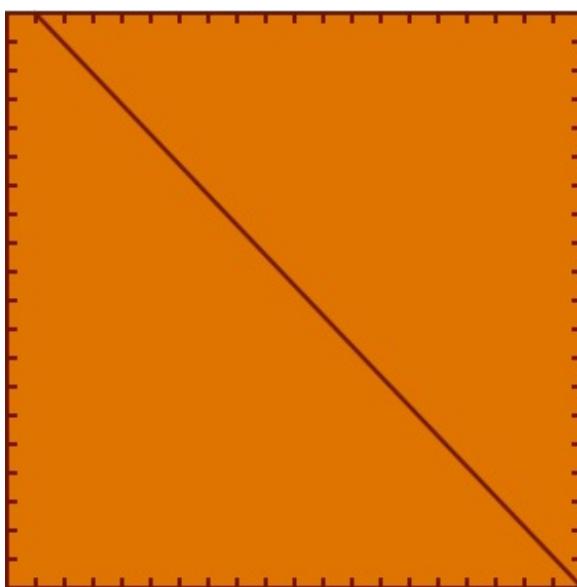
Nous allons finir ce chapitre avec deux petites énigmes. Nous avons vu, que quand on découpe une figure en plusieurs morceaux pour la recomposer d'une autre façon, son aire reste invariante. Et pourtant, si l'on y prend pas garde, il peut arriver de tomber sur des paradoxes étonnantes. Saurez-vous trouver la faille dans les deux constructions géométriques suivantes ?

Le carré décalé

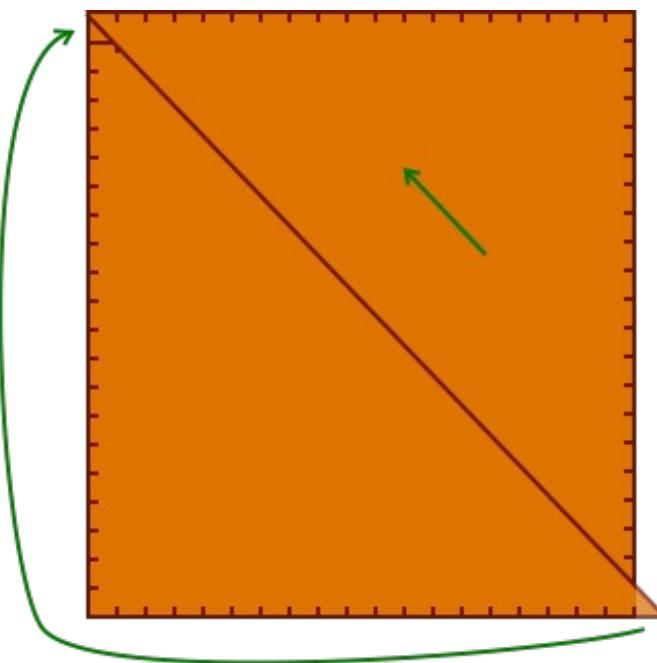
Commençons par prendre un carré dont le côté mesure 20 :



Traçons alors un segment qui n'est pas tout à fait égal à la diagonale du carré, mais qui part une unité à droite du coin supérieur gauche et qui arrive dans le coin inférieur droit :



On effectue alors le découpage et repositionnement suivant, selon le même principe que nous avons vu dans l'étape 3 de la démonstration du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien :



La partie supérieure du triangle a glissé le long de la diagonale pour se décaler d'une unité vers le haut et une unité vers la gauche. Le petit triangle qui dépassait en bas à droite se découpe et vient boucher le trou en haut à gauche.

Nous sommes donc partis d'un carré 20×20 ayant une aire égale à 400 et nous arrivons à un rectangle 19×21 dont l'aire ne vaut plus que 399 ! 😱

Mais où est passée l'unité d'aire qui a disparu ?! Comprenez-vous où se trouve l'arnaque ? Prenez le temps d'y réfléchir et d'essayer de trouver par vous-même avant de lire les explications qui suivent.

Explanations

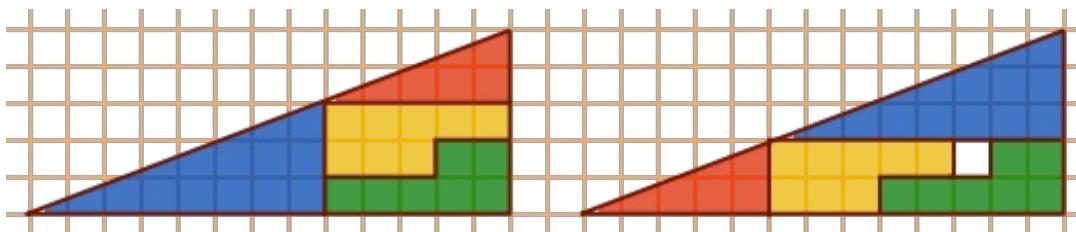
Secret (cliquez pour afficher)

L'erreur se trouve au moment où l'on dit que le triangle du haut est décalé d'une unité vers le haut. En effet, ce triangle est bien décalé d'une unité vers la gauche, seulement il ne glisse pas sur la diagonale du carré, mais sur un segment qui a une pente un peu plus raide que la diagonale. Ainsi son décalage vers le haut est légèrement supérieur à une unité.

Plus précisément le décalage vers le haut est de $20/19 \approx 1,05\dots$ unités. Ainsi l'aire du deuxième rectangle est égale à $19 \times (20 + 20/19) = 19 \times (400/19) = 400$. Ouf ! L'aire est bien restée la même. 😊

Deux cases disparues !

Regardez les deux figures suivantes :

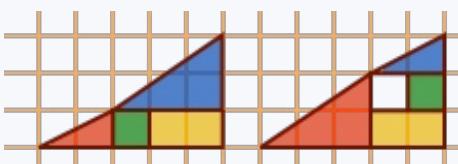


Les deux triangles sont identiques et sont composés des mêmes quatre pièces. Mais alors, d'où vient ce trou dans la figure de droite ? 😱 À vous d'élucider ce mystère.

Explications

Secret (cliquez pour afficher)

Pour comprendre ce paradoxe, regardez celui-ci, construit sur le même principe avec des pièces plus petites :



Ici, le truc devient évident : la forme n'est pas la même. Sur la figure de gauche le côté diagonal est creusé, tandis que sur celle de droite, il est gonflé. Il est donc normal qu'il reste un trou dans cette dernière.

En bref, le problème vient du fait que les triangles rouges et bleus ne sont pas semblables ce qui fait que la figure globale n'est pas un triangle mais un quadrilatère avec un angle quasi-plat. L'astuce de ce paradoxe consiste à prendre deux triangles qui sont presque semblables si on les regarde à l'œil nu, mais qui ne le sont pas en réalité.



Si vous connaissez la suite de Fibonacci, remarquez que les dimensions de ces triangles sont des nombres qui lui appartiennent : 2, 3, 5, 8 et 13 dans l'énigme, 1, 2, 3 et 5 dans l'exemple réduit ci-dessus. Le fait que le rapport de deux termes consécutifs de cette suite se rapproche de plus en plus du nombre d'or permet de construire facilement des triangles quasi-semblables.

Les polygones réguliers

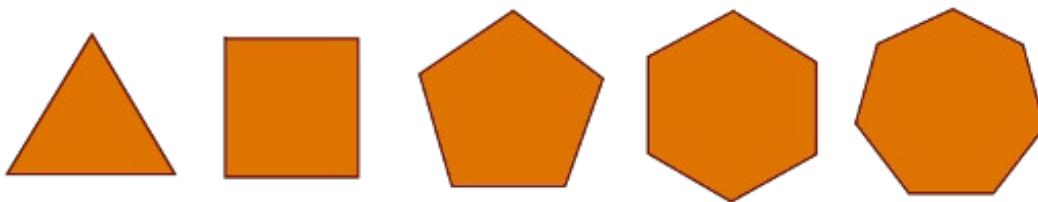
Dans ce chapitre, nous allons étudier les polygones réguliers, c'est-à-dire les polygones dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles la même mesure. L'objectif est de trouver la formule qui permet de calculer leur aire en fonction du nombre de leurs côtés et de la mesure de leurs angles.



Cela va être l'occasion de mettre en application les connaissances en trigonométrie que nous avons acquises dans la partie II de ce cours. Nous ne sommes toutefois pas au bout de nos surprises car les polygones croisés nous réservent quelques découvertes surprenantes qui vont nous entraîner dans le monde des surfaces multiples et orientées !

Polygones sans croisements Construction des polygones

Commençons par le cas le plus simple, il s'agit des polygones réguliers non croisés. Voici quelques exemples de tels polygones ayant de 3 à 7 côtés.

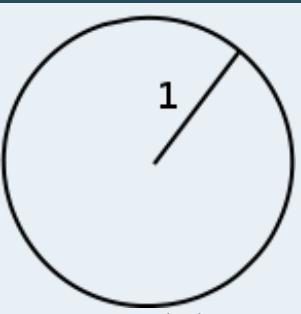
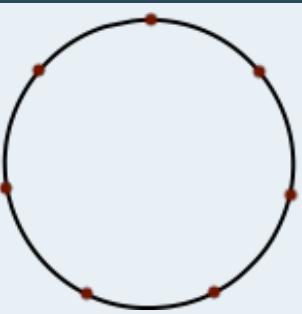
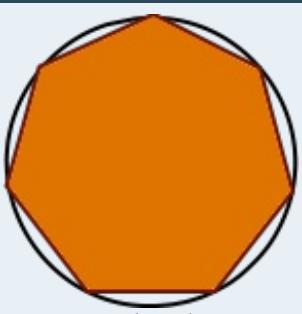


On pourrait continuer longtemps comme ça : 8 côtés, 9 côtés, 10 côtés, 11 côtés... Pour chaque nombre entier supérieur à 3, on peut construire des polygones réguliers non croisés ayant ce nombre de côtés.



Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre de trigonométrie, on peut aussi considérer les digones qui ont deux côtés, mais ce cas n'est pas très intéressant puisque leur aire est égale à 0.

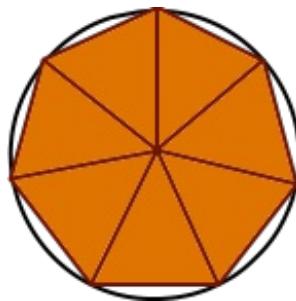
Pour pouvoir étudier ces polygones réguliers, nous allons avoir besoin d'une définition un peu plus précise de la façon dont nous les construisons. En particulier nous n'avons pour l'instant pas précisé leur taille. Nous allons donc considérer les polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon égal à 1. Leur construction se fait en 3 étapes :

Étape 1	Étape 2	Étape 3
 <p>On trace un cercle de rayon 1.</p>	 <p>On place n points à intervalle régulier sur le cercle.</p>	 <p>On trace le polygone.</p>

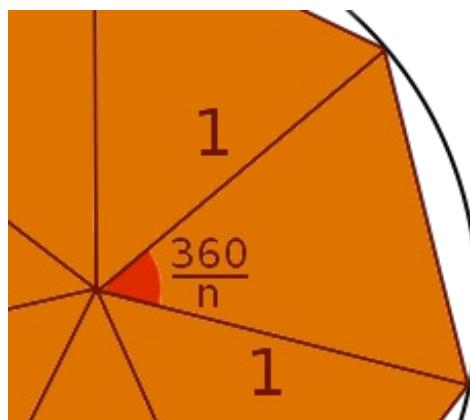
Dans cet exemple, on a $n = 7$, on tombe donc sur l'heptagone. Dans la suite nous nommerons A_n l'aire du polygone régulier à n côtés. Le but de ce chapitre est donc de trouver une formule générale qui donne l'aire A_n en fonction de n . Pour nos figures, nous utiliserons le cas $n = 7$, mais nos résultats seront valables pour tout n .

La trigonométrie à la rescousse

Si vous vous souvenez ce que nous avons dit dans la partie sur la trigonométrie, vous savez que la première chose à faire est de trianguler notre polygone, c'est-à-dire le découper en triangles. La façon la plus naturelle de faire ceci est de le découper en n triangles en partant du centre du cercle.

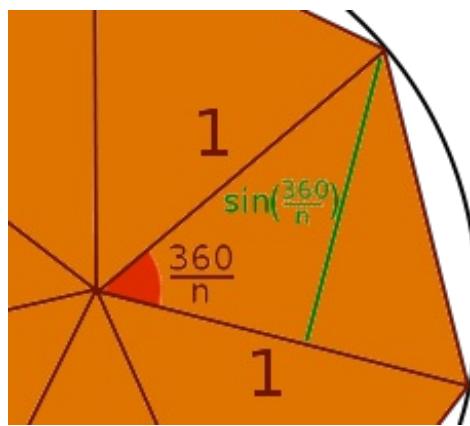


Une fois le découpage effectué, l'aire du polygone est égal à n fois l'aire de chaque petit triangle. Reste à calculer l'aire de l'un de ces triangles, pour cela, commençons par faire un zoom sur la figure :



Nous connaissons deux des côtés du triangle qui mesurent 1 puisque ce sont les rayons du cercle de base. Et nous connaissons également l'angle au centre de ce triangle qui mesure $360 \div n$ puisqu'un tour complet fait 360° et qu'il y a n triangles qui entourent le centre du cercle.

Bref, nous avons trois informations sur notre triangle, donc c'est gagné ! Nous savons maintenant tout calculer. En particulier, pour trouver son aire, il faut calculer une de ses hauteurs. Il y a plusieurs façons de faire, la plus simple étant sans doute de choisir la hauteur suivante :



Comme indiqué sur la figure, cette hauteur mesure $\sin(360/n)$, en effet, il s'agit du côté opposé à l'angle de $360/n$ dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 1. Ainsi, la surface de ce triangle mesure :

$$A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times \sin(360/n)}{2}.$$

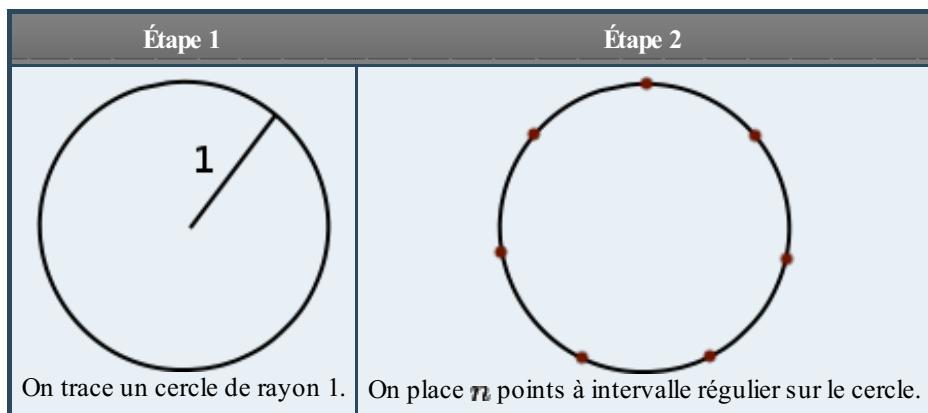
Et au final, l'aire totale du polygone régulier non croisé à n côtés s'obtient en multipliant cette valeur par n :

$$\mathcal{A}_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{360}{n}\right).$$

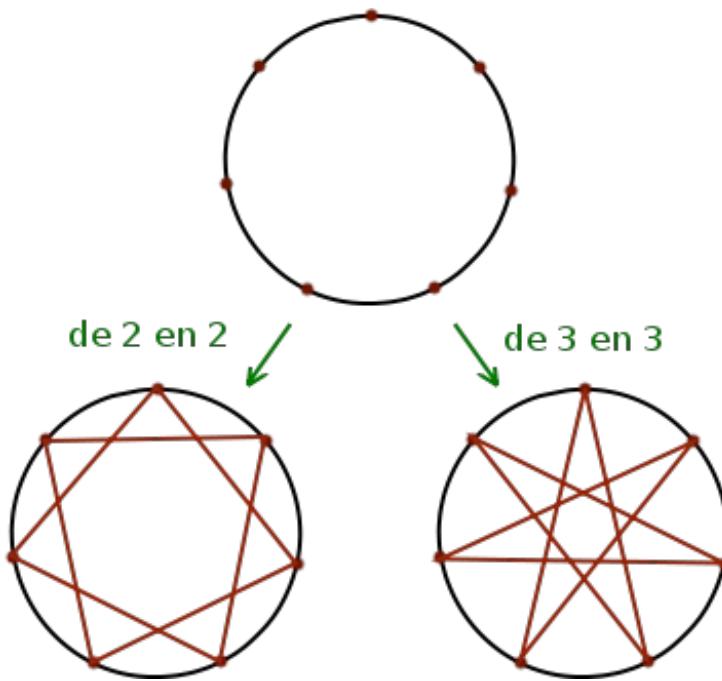
Une petite remarque amusante pour conclure : la formule marche également pour les digones. Vous vous rappelez des digones ? Ce sont les polygones dégénérés à deux côtés qui sont composés de deux segments superposés. Leur aire est égale à 0. Et en effet, si on regarde la formule pour $n = 2$ on obtient $\mathcal{A}_2 = \sin(180)$. Et vu que $\sin(180) = 0$, la formule marche bien. 😊

Polygones croisés

Si l'aire des polygones convexes se calcule assez directement en utilisant la trigonométrie, les choses deviennent un peu plus subtiles quand on passe aux polygones croisés. Pour construire ces polygones, les deux premières étapes sont les mêmes :



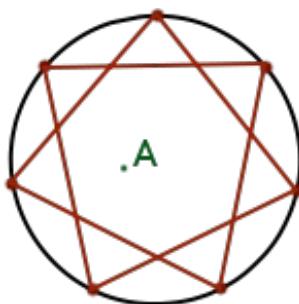
Seulement pour la troisième étape, au lieu de relier les points les uns à la suite des autres, nous allons les relier en sautant à chaque fois un certain nombre. Par exemple, dans le cas de l'heptagone (7 côtés), on peut relier les points de deux en deux, ou bien de trois en trois :



Notez que si on les relie de quatre en quatre ou bien de cinq en cinq, on trace les mêmes deux figures, mais en tournant dans l'autre sens.

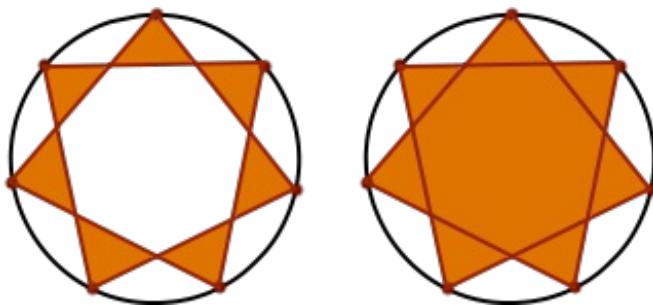
Dans la suite nous noterons $\mathcal{A}_{n,k}$ l'aire du polygone étoilé à n côtés dont les sommets sont reliés de k en k . Autrement dit, les aires des deux exemples ci-dessus sont $\mathcal{A}_{7,2}$ et $\mathcal{A}_{7,3}$. L'aire des polygones non croisés que nous avons vus dans la section précédente se note donc de cette façon $\mathcal{A}_{n,1}$ puisque les points sont reliés directement de 1 en 1.

Pour calculer l'aire de ces figures, il se pose un problème inattendu. Prenons par exemple la première étoile où l'on relie les points de deux en deux et regardons le point A suivant :



La question est toute bête : est-ce que le point A se trouve à l'intérieur de la figure ? Ou en d'autres termes, la zone centrale doit-elle être comptabilisée dans le calcul de l'aire ?

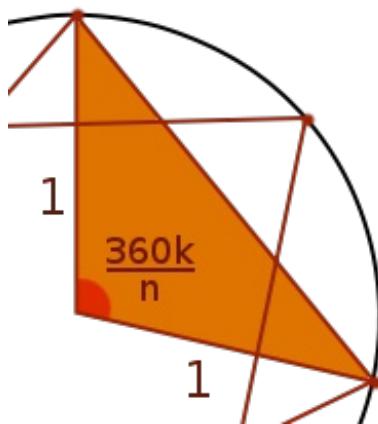
Dans un certain sens, on a envie de dire que oui, le point A est dans la figure puisque celle-ci l'entoure. Mais d'un autre côté, si on imagine un point qui se trouve à l'extérieur et qui se rend au point A, il doit traverser deux fois la ligne du polygone, donc la première fois il rentre dedans et la deuxième fois il ressort. En clair, laquelle des deux surfaces suivante veut-on calculer ?



Eh bien la réponse est : ni l'une ni l'autre ! 😮 Étonnamment, nous allons voir que c'est une troisième façon de calculer l'aire qui est la plus naturelle. Arrivez-vous à imaginer laquelle ?

En mathématiques, on aime bien quand les objets et les formules que l'on trouve sont les plus générales possibles. Autrement dit, on aimeraît que le calcul de l'aire des polygones étoilés donne une formule qui est simplement une généralisation de la formule que nous avons découverte pour les polygones non croisés. Pour cela, nous allons essayer de faire le même type de triangulation.

Commençons par zoomer sur la figure et regardons un triangle compris entre le centre du cercle et deux points consécutifs du polygone :

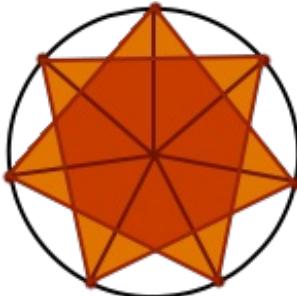


L'angle au centre de ce triangle vaut $360 \div n \times k$ puisque l'angle entre deux points consécutifs du cercle vaut $360 \div n$ et qu'il faut multiplier cet angle par k puisque les points sont reliés de k en k .

Comme dans le cas des polygones non convexes, nous connaissons donc l'angle au centre de ce triangle et deux de ses côtés qui mesurent 1. Son aire est donc donnée par la même formule que dans la section précédente en changeant simplement la valeur de l'angle :

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{360k}{n}\right).$$

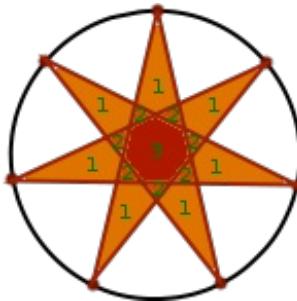
Ici, on a très envie de multiplier cette aire par n , car il y a n triangles, mais si on fait cela, les zones du milieu seront comptées deux fois puisque les triangles se chevauchent :



Mais au fond, compter deux fois la zone centrale, n'est-ce pas la solution à tous nos problèmes ?

Effectivement, ce point de vue a réellement tout pour nous satisfaire. De cette façon, si un point part de l'extérieur du polygone pour rejoindre le centre, il entre une première fois dans le polygone en franchissant le premier segment qu'il rencontre, puis une seconde fois en traversant le second. De plus, si on y regarde bien, on remarque que quand on trace le polygone, on fait deux tours autour de la zone centrale.

Si on considère d'autres polygones étoilés, il est possible que des zones appartiennent trois fois ou davantage au polygone.



Dans ce cas, la zone centrale est entourée trois fois par le polygone, les petites zones intermédiaires ne sont entourées que deux fois et les zones qui forment les pointes de l'étoile une seule fois. En prenant ce point de vue sur les aires, on peut maintenant dire que d'une manière générale, l'aire d'un polygone à n côtés dont les sommets sont reliés de k en k est égale à :

$$\mathcal{A}_{n,k} = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{360k}{n}\right).$$

Voilà une jolie formule générale qui marche également pour les polygones non croisés en prenant $n = 1$.

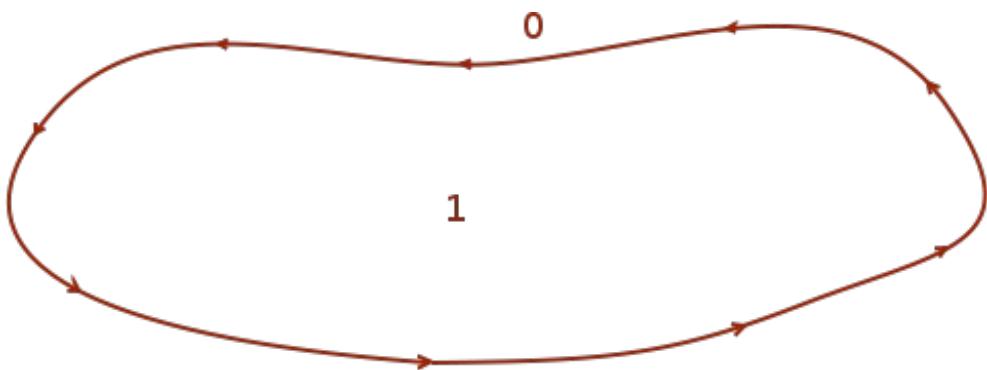


Cette façon de faire qui consiste à compter plusieurs fois certaines choses pour obtenir un point de vue plus élégant et plus adapté est fréquent en mathématiques. Un autre exemple classique se trouve dans la résolution des équations polynomiales où certaines solutions peuvent être multiples.

Complément sur les surfaces multiples et orientées

Nous venons de voir que selon la figure, certaines zones peuvent être comptabilisées plusieurs fois dans le calcul de l'aire. Il est possible d'aller encore plus loin : avec les **surfaces orientées**, nous allons même nous retrouver avec des aires négatives ! 😊

Mais plutôt que de longues explications, rien de tel qu'un bon dessin pour comprendre les surfaces orientées. Regardons la figure suivante :

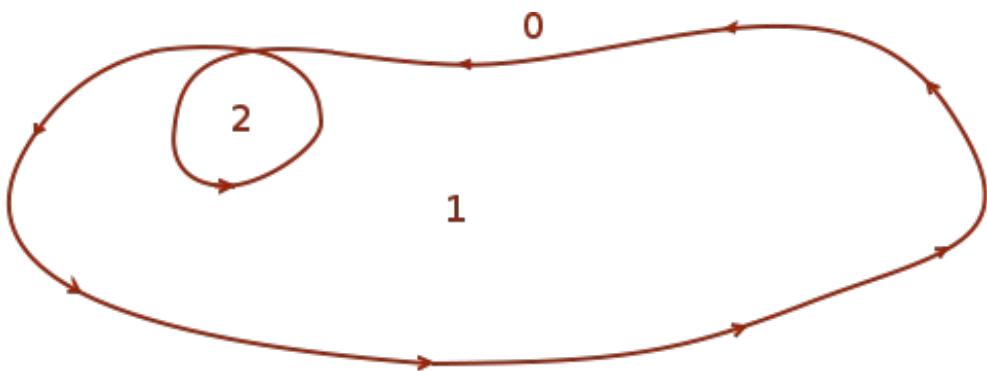


Pour l'instant, tout va bien : il n'y a qu'une seule zone, les points à l'intérieur appartiennent une fois à la surface et ceux à l'extérieur n'y appartiennent pas.



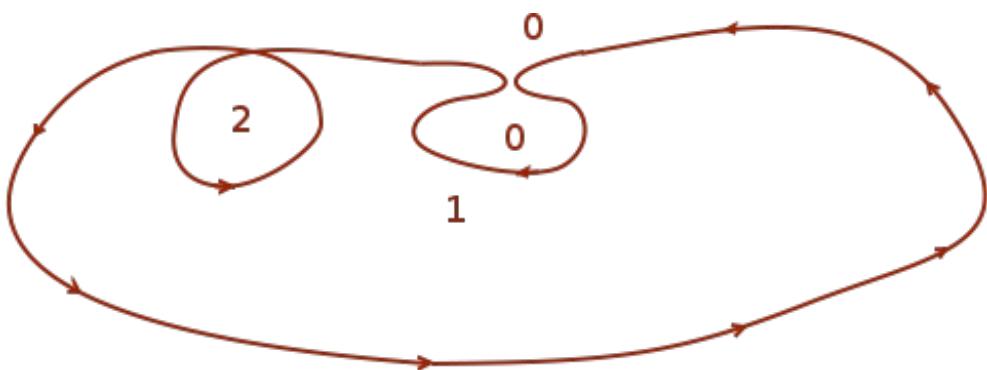
Notez que des petites flèches sont placées sur la courbe de façon à repérer le sens dans lequel la courbe est tracée, cela va permettre de mieux suivre les constructions suivantes.

Reprendons cette figure et ajoutons lui une boucle tracée en tournant dans le même sens que la grande boucle.



Si vous avez bien suivi la section précédent, la conclusion ne doit pas vous poser de problème : les points qui se situent à l'intérieur de la petite boucle appartiennent deux fois à la figure. La courbe fait deux fois le tour de ces points.

C'est maintenant que les choses vont devenir un peu plus subtile. Que se passe-t-il si on rajoute une boucle à la surface, mais en tournant dans le sens inverse ? Il suffit de tracer la figure pour avoir la réponse :



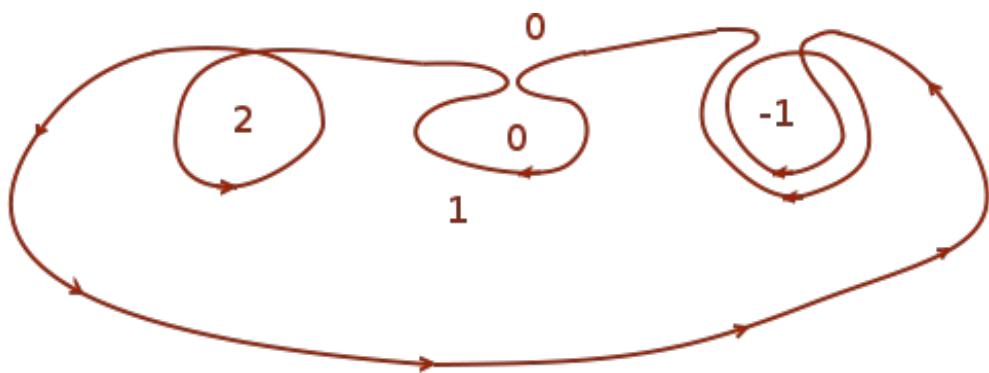
Les points de la deuxième boucle ne sont pas dans la figure : ils y appartiennent 0 fois. On peut donc en conclure la règle suivante :

- si on rajoute une petite boucle qui tourne dans le même sens que la grande boucle, les points à l'intérieur appartiennent une fois de plus à la figure ;
- si on rajoute une petite boucle qui tourne dans le sens contraire à la grande boucle, les points à l'intérieur appartiennent une fois de moins à la figure.



Mais dans ce cas, que ce passe-t-il si on rajoute une double boucle qui fait deux tours dans le sens contraire ?

D'après ce que nous venons de dire, les points à l'intérieur d'une telle boucle appartiennent deux fois de moins à la figure. Ils y appartiennent donc $1 - 2 = -1$ fois !



Eh oui, aussi étonnant que cela puisse paraître, on peut dire que cette petite boucle appartient -1 fois à la figure et son aire est donc comptée de façon négative ! De ce point de vue là, une surface peut donc avoir une aire positive ou une aire négative : c'est cela que l'on appelle une surface orientée.

Prenons un autre exemple, une figure en forme de 8 :

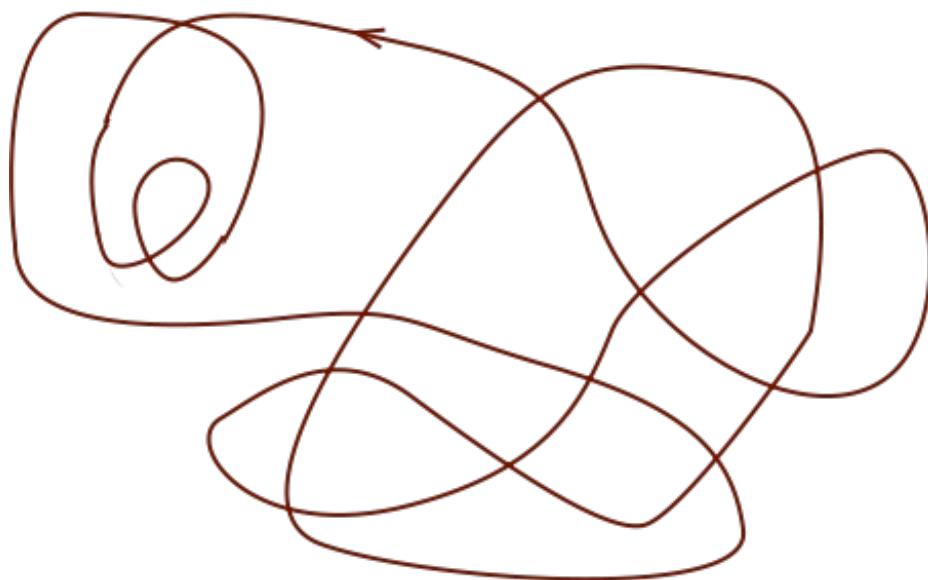


Cette figure compte deux boucles, qui tournent chacune dans le sens inverse de l'autre. Ainsi si on se place du point de vue des surfaces orientées, les deux boucles s'annulent et cette figure a une aire égale à 0 !

Un petit point de vocabulaire : le nombre de tours que fait une courbe autour d'un point, s'appelle l'**indice** du point par rapport à la courbe. Ainsi, quand on veut calculer l'aire entourée par une courbe il faut compter chaque point autant de fois que son indice.

 Notez que pour définir l'indice, il faut que la courbe soit orientée, c'est-à-dire que l'on sache dans quel sens elle a été tracée. Si la courbe tourne dans le sens trigonométrique autour du point, l'indice est positif, et si elle tourne dans l'autre sens (le sens des aiguilles d'une montre), alors l'indice est négatif.

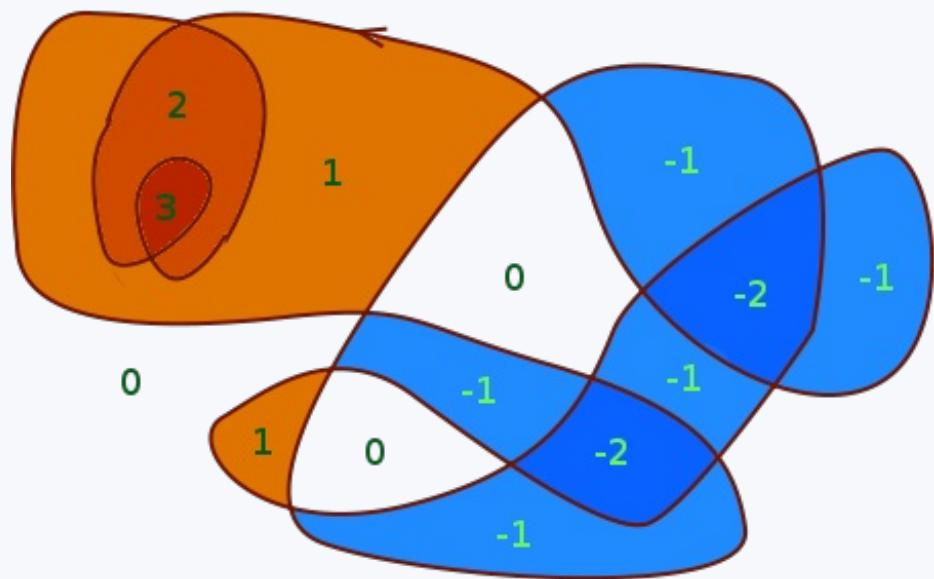
 Allez, avant de conclure ce chapitre, un petit défi. Saurez-vous donner l'indice des points de chacune des zones déterminées par la courbe suivante ?



Solution

Secret (cliquez pour afficher)

Voici la solution. Bravo si vous avez tout juste ! Et sinon vous êtes bon pour un recomptage, ce n'est pas toujours évident pour s'y retrouver dans ces entremêlements. 😊



Remarquez que certaines zones ont un indice égal à 0, ceci signifie qu'elles n'appartiennent pas à la figure. Ainsi, si on construit cette figure avec une ficelle posée sur une table, que l'on pose le doigt dans une zone d'indice zéro et que l'on tire sur la ficelle, celle-ci se libère sans se prendre autour du doigt. 😊

La méthode infinitésimale

Nous voilà déjà arrivés au dernier chapitre de ce cours de géométrie. Nous allons y voir une nouvelle méthode pour calculer les aires de figures : la **méthode infinitésimale**.

 À vrai dire, ce chapitre ne va être qu'une introduction à cette méthode qui dans son ensemble constitue un domaine extrêmement vaste des mathématiques ! Les techniques infinitésimales permettent de s'attaquer au calcul de toutes les surfaces possibles et imaginables en utilisant des outils puissants issus de l'analyse (c'est-à-dire l'étude des fonctions) tels que le calcul d'intégrales.

Mais rassurez-vous, nous n'allons pas faire ici d'analyse, nous allons nous contenter de voir quelques exemples simples qui donnent malgré tout une idée des possibilités extraordinaires qui se cachent derrière cette méthode. 😊

Transvectons

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'il peut souvent être utile pour calculer l'aire d'une figure de découper cette figure pour se ramener à des figures plus simples. La méthode infinitésimale consiste à découper la figure en une infinité de morceaux infiniment petits ! 🍪

Mais comme vous le savez peut-être, en mathématiques l'infini est une notion qui doit se manipuler avec précaution sous peine de tomber sur des paradoxes. Nous allons donc y aller en douceur.

Attention, ça penche

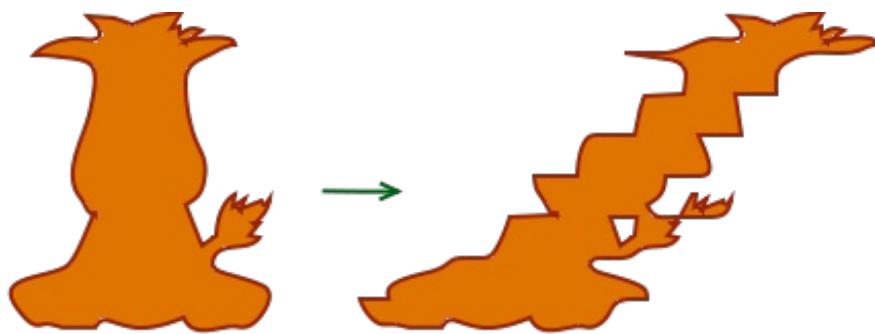
Pour comprendre le principe de la méthode infinitésimale, nous allons prendre un exemple. Regardons la figure suivante :



Nous allons faire subir à cette figure la transformation suivante. Tout d'abord on la découpe en plusieurs tranches :



Puis on fait glisser ces tranches horizontalement de sorte que chacune d'entre-elle se trouve décalée un peu plus sur la droite par rapport à sa voisine du dessous :



On obtient alors une figure assez biscornue et la seule chose que nous allons remarquer pour l'instant, c'est que cette nouvelle figure a la même aire que la figure d'origine. Ceci est évident puisqu'elle est composée des mêmes morceaux. 😊

Maintenant que nous avons dit ça, nous allons répéter le même procédé mais en coupant des tranches un peu plus fines :



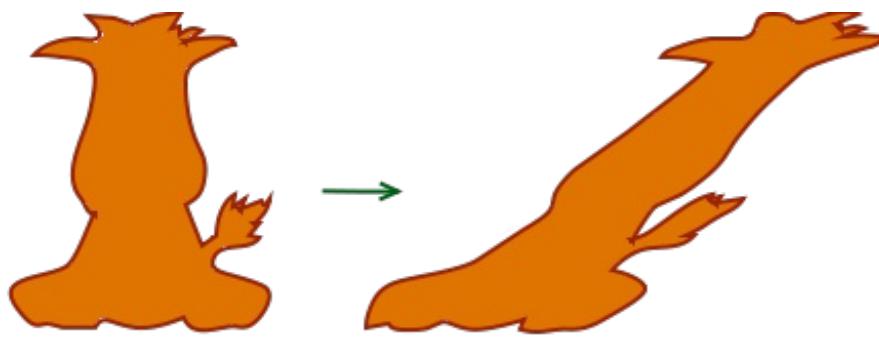
En faisant un décalage à partir de ces pièces, on obtient une nouvelle figure qui a également la même aire que la figure de départ.



On peut continuer longtemps comme ça, en découplant des tranches toujours de plus en plus fines.



On remarque alors que plus les tranches sont fines, plus la figure obtenue se précise et se rapproche d'une figure qui ressemble à ceci :



D'une certaine manière on peut dire que cette figure est obtenue en découpant la figure d'origine en une infinité de tranches infiniment fines que l'on a fait glisser les unes sur les autres.

Le problème avec cette figure limite, c'est que l'on ne peut pas calculer son aire directement, en effet elle est composée d'une infinité de pièces ayant une aire égale à 0, son aire devrait donc être $\infty \times 0$ mais ceci est ce que l'on appelle en maths une *forme indéterminée* c'est-à-dire qu'il est impossible de faire cette opération avec l'infini car son résultat dépend du contexte dans lequel on se trouve.



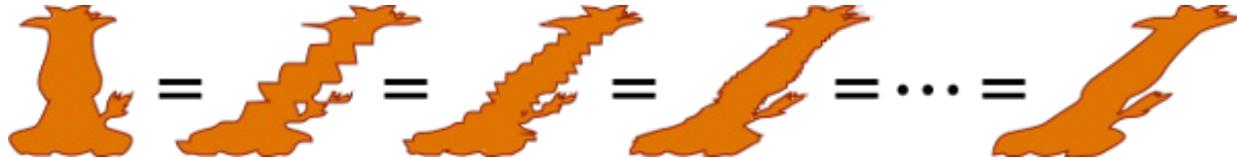
Vous l'aurez sans doute compris, ∞ en mathématiques est le symbole de l'infini.

Pour calculer l'aire de notre figure décalée, il va donc nous falloir utiliser les figures intermédiaires que nous avions fabriquées avec un nombre fini de tranches. Le raisonnement se fait en deux temps :

- Tout d'abord, on remarque que plus on fait de tranches plus la figure décalée se rapproche de la figure limite avec une infinité de tranches, par conséquent l'aire de ces figures se rapproche de plus en plus de l'aire de la figure limite.
- Oui, mais on sait que toutes ces figures intermédiaires ont la même aire, égale à l'aire de la figure d'origine ! Conclusion : la figure limite a elle aussi la même aire que la figure d'origine.

Ce raisonnement est court mais subtil, n'hésitez pas à prendre bien le temps de retourner ça dans votre tête pour vous convaincre que vous avez bien compris.

Voici ce raisonnement résumé en image :



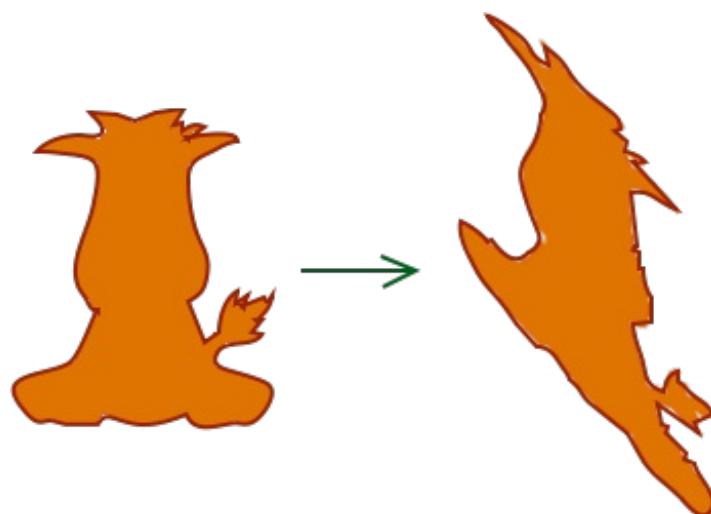
Les transvections

La transformation géométrique que nous venons de voir s'appelle une **transvection**. Dans certains contextes, il arrive également que l'on appelle ceci un *cisaillement*.



Notez que dans l'exemple précédent, nous avons fait une transvection horizontale, car nous avons découpé notre figure en tranches horizontales, mais il est également possible de faire des transvections verticales ou selon n'importe quelle autre direction.

Voici ce que l'on obtient si on applique une transvection verticale à notre figure.



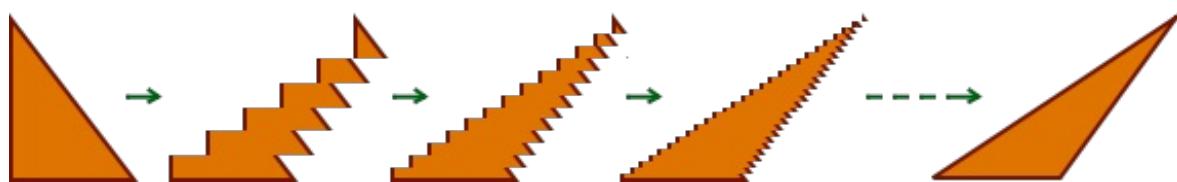
Remarquez également qu'il n'existe pas qu'une seule transvection horizontale, il est possible de faire varier le décalage que l'on applique aux différentes tranches.



Toutes ces figures ont la même aire. Le raisonnement que nous avons fait pour notre premier exemple marche toujours. C'est un résultat assez important auquel nous pouvons même donner le nom de *théorème* :

Théorème. Si on applique à une transvection à une figure, son aire reste la même quelque soit la direction de la transvection et l'amplitude du décalage.

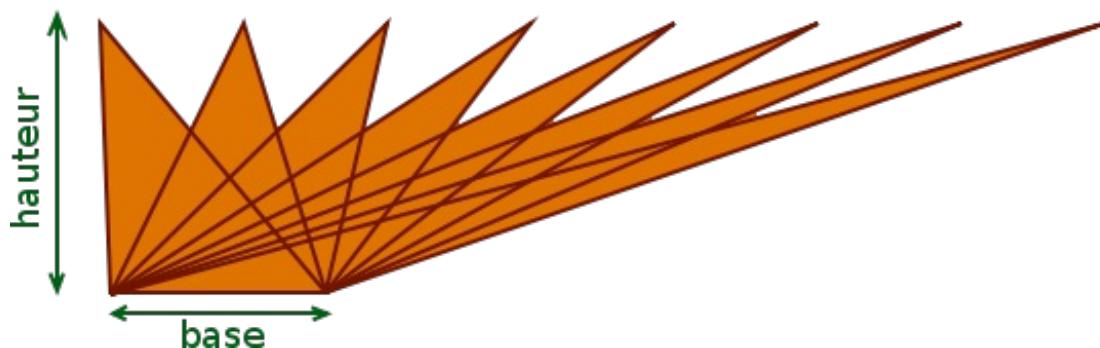
Voici une autre illustration de ce théorème avec un triangle :



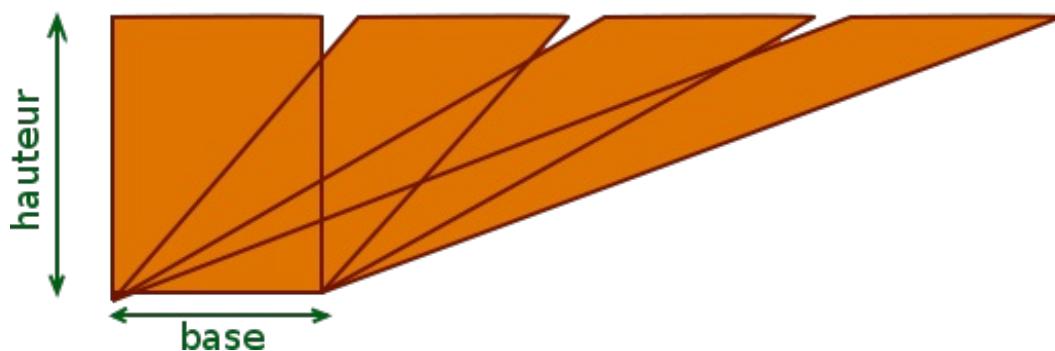
Triangles et parallélogrammes

Ce théorème nous permet de d'éclairer d'un jour nouveau nos connaissances sur les triangles et les parallélogrammes.

Quand on fait subir à un triangle une transvection de direction parallèle à sa base, alors ni sa base ni sa hauteur ne sont modifiées. Il est donc logique que tous ces triangles aient la même aire.



De même, un parallélogramme n'est rien d'autre qu'un rectangle ayant subi une transvection. On retrouve bien ainsi que tous les parallélogrammes ayant la même base et la même hauteur ont la même aire.



Le cercle Les deux pi

Il est maintenant temps de se lancer à l'assaut de l'une des figures géométriques les plus simples par sa définition, mais pourtant des plus mystérieuses : le disque. Rappelez-vous dans la première partie de ce cours nous avions dit qu'il n'existe pas de formule simple pour exprimer le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle. Nous avions donc appelé π ce nombre qui vaut environ 3,14.



Maintenant, nous allons nous intéresser à sa surface et nous allons à nouveau nous demander si elle peut se mesurer facilement. Par exemple, quel est le rapport entre l'aire du disque et le carré de son rayon ?



Et là, coup de théâtre, si on calcule la valeur approximative de ce rapport, on trouve à nouveau 3,14 ! 😊

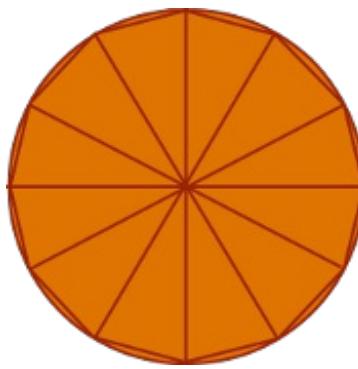


Est-ce un hasard ? Ou bien est-ce réellement le même nombre ? Si on continue de calculer les chiffres après la virgule de ces deux rapports, seront-ils toujours les mêmes ou est-on simplement tombé sur une coïncidence et les deux nombres sont proches mais sans être vraiment égaux ? À votre avis ?

Eh bien aussi étonnant que cela puisse paraître, il n'y a pas de coïncidence, ce sont bien les deux mêmes nombres ! Le rapport entre l'aire du disque et le carré de son rayon vaut également π ! Le premier à l'avoir démontré est [Archimède](#) au III^e siècle avant J.-C. grâce à une méthode de découpages infinitésimaux proche de celle que nous avons vue dans la section précédente.

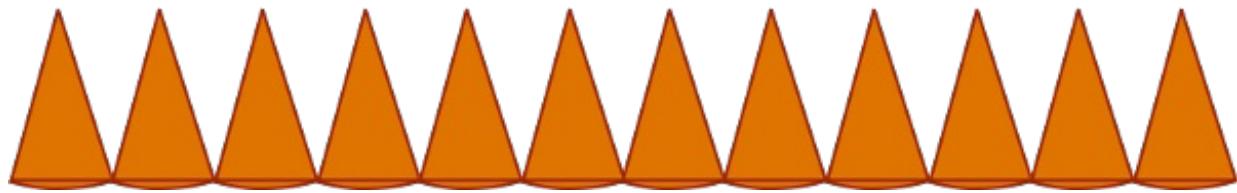
La démonstration d'Archimède

Pour cette démonstration, nous allons découper notre triangle en quartiers de la façon suivante :

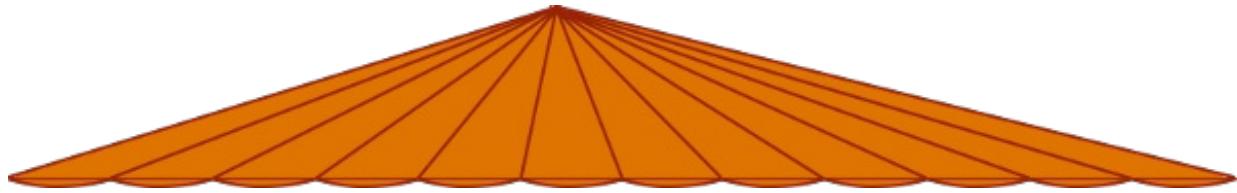


Sur cette figure, il y a douze quartiers, mais avec le même principe que pour le découpage en tranches qui nous a donné la transvection, le but va être de partager le disque en quartiers de plus en plus petits.

Une fois les quartiers découpés, on déplie le cercle de la façon suivante :



On peut alors faire subir des transvections à tous ces triangles de façon à les regrouper en un seul et même grand triangle.



Par cette transformation, l'aire de notre figure est toujours égale à l'aire du disque de départ.

Maintenant réfléchissons un peu. Notre figure n'est pas exactement un triangle puisqu'il y a des petites bosses sur la base, mais plus le nombre de quartiers sera grand, plus ces bosses seront fines et au bout du compte, la figure limite sera bien un triangle.



D'accord, mais quelle est l'aire de ce triangle ?

Pour le savoir, il nous faut mesurer sa hauteur et sa base.

- La hauteur du triangle est égale au rayon du disque de départ que nous noterons π .
- La base du triangle est égale au périmètre du disque de départ qui a été déplié, elle est donc égale au diamètre multiplié par π , soit $2\pi \times \pi$.

Avec ceci, nous pouvons maintenant calculer l'aire du triangle :

$$A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{r \times 2r \times \pi}{2} = \pi \times r \times r = \pi r^2.$$

Et l'aire de ce triangle est égale à l'aire du disque de départ. Nous avons bien la formule que nous souhaitions, pour obtenir l'aire d'un disque, il faut multiplier par π le carré de son rayon.

$A_{\text{disque}} = \pi r^2$



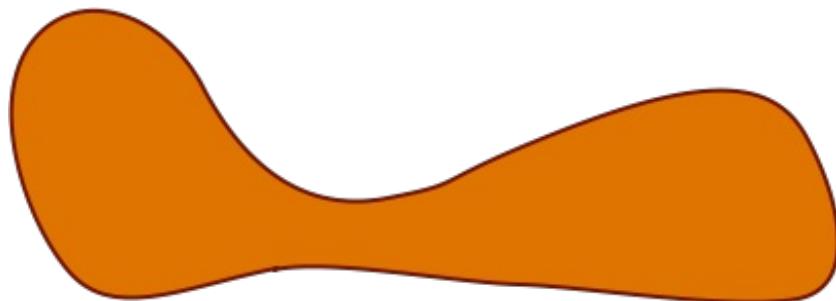
Après avoir été défini pour calculer le périmètre d'un cercle, le nombre π se révèle également utile pour son aire. Et ce n'est là que le début de la merveilleuse odyssée de ce nombre qui apparaît de façon inattendue dans la plupart des domaines des maths ! Cette omniprésence en fait certainement le nombre le plus important et le plus mystérieux des mathématiques !

Vers l'intégrale



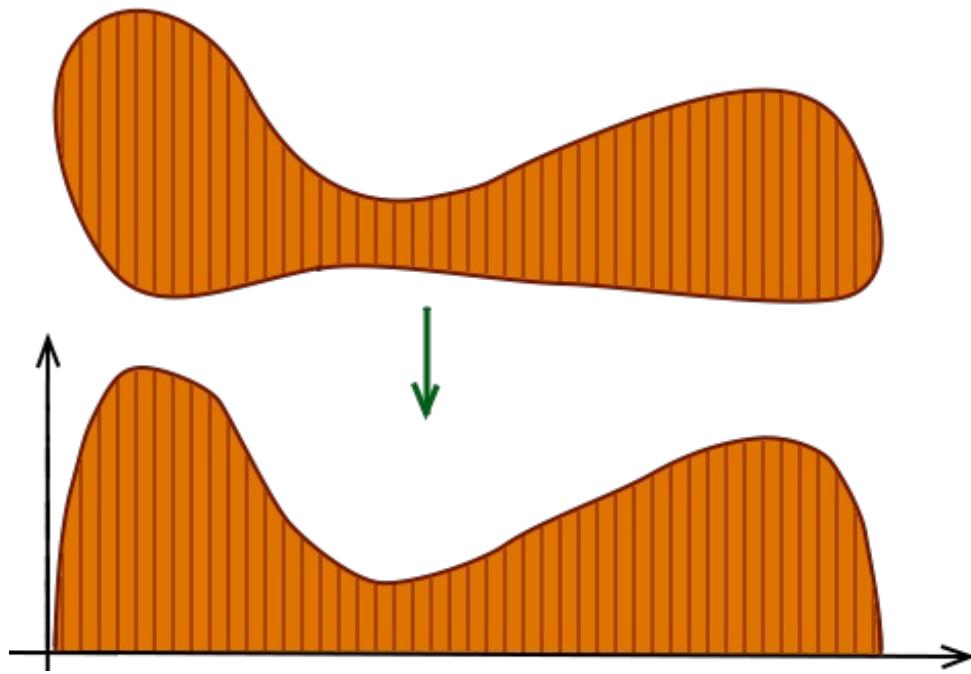
Jusque là, nous avons vu comment calculer les aires de quelques figures particulières telles que les triangles, les parallélogrammes, les trapèzes, les polygones réguliers ou encore les cercles, mais comment peut-on s'y prendre pour calculer l'aire d'une figure totalement quelconque ?

Tenez, par exemple celle-ci :



Pour calculer l'aire de telles figures, nous allons faire appel à des découpages infinitésimaux qui vont faire basculer notre question géométrique dans le domaine de l'analyse et de l'étude des fonctions.

Effectuons un découpage infinitésimal vertical de notre figure et faisons glisser les pièces pour qu'elles viennent s'aligner sur l'axe horizontal d'un repère de la façon suivante :

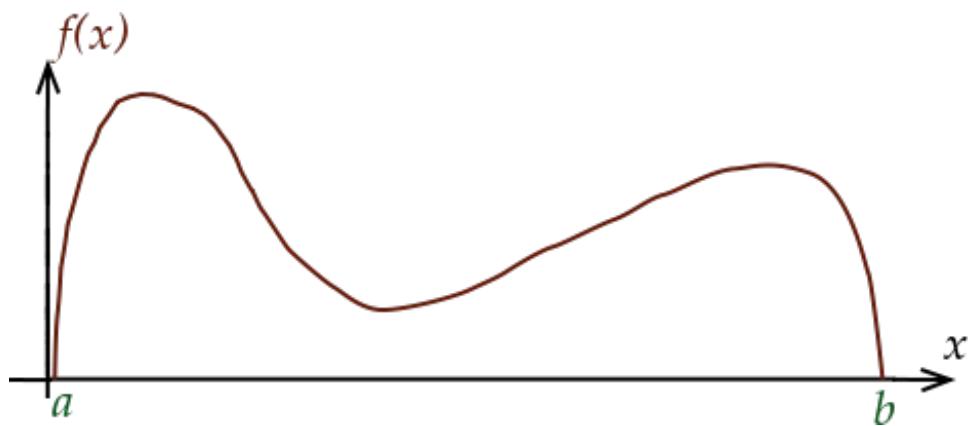


Le contour de notre figure peut alors être considéré comme le graphe d'une fonction. Comme l'aire de la figure n'a pas été modifiée, il suffit donc de calculer l'aire comprise entre la courbe de notre fonction et l'axe horizontal.

Calculer ces aires est précisément le but de la branche des mathématiques qui se nomme le **calcul intégral**. Si on appelle f notre fonction, alors l'aire que nous cherchons se note de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)dx,$$

où a et b sont les bornes de l'intervalle où est définie la fonction et x est sa variable.



À partir de là, le calcul intégral regroupe toutes sortes de techniques (certaines simples et d'autres horriblement complexes) pour mesurer cette surface. Ceci permet de calculer les aires de la plupart des surfaces classiques, mais il existe toujours certains cas particuliers qui résistent encore et toujours et pour lesquels il n'existe pas de formule simple.



Mais tout ceci nous entraînerait bien au-delà de la géométrie. Ce cours s'arrête ici, et si vous voulez aller plus loin, il est maintenant temps d'ouvrir un cours d'analyse. 😊

Partie 4 : Annexes

Dans cette partie retrouvez les différentes annexes concernant ce cours.

Index des figures et du vocabulaire géométrique

Cette annexe répertorie l'ensemble des figures géométriques que l'on croise dans ce cours. Vous y trouverez leurs définitions et quelques exemples. N'hésitez pas à vous y référer dès que vous avez un doute sur une figure. 😊



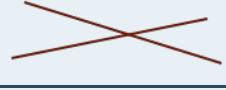
Attention, ce n'est en aucun cas une liste de **toutes** les figures géométriques existantes, ce serait beaucoup trop long ! Seules les figures rencontrées dans ce cours sont présentes.

Lignes

Lignes droites

Nom	Définition	Exemple
Segment	Un segment est une ligne droite finie qui commence en un point et se termine en un autre point. Étant donnés deux points A et B, le segment ayant A et B pour extrémités se note [AB].	
Demi-droite	Une demi-droite est une ligne droite qui commence en un point et se prolonge infiniment. Étant donnés deux points A et B, la demi-droite qui commence en A et passe par B se note [AB).	
Droite	Une droite est une ligne droite infinie qui se prolonge infiniment des deux côtés. Étant donnés deux points A et B, la droite qui passe par A et B se note (AB).	

Relations entre les lignes droites

Nom	Définition	Exemple
Parallèles	Deux droites sont dites parallèles si elles ne se croisent pas.	
Sécantes	Deux droites sont dites sécantes si elles se croisent. Le point où elles se croisent s'appelle alors le point d'intersection .	
Perpendiculaires	Si deux droites sécantes forment un angle droit (voir la partie sur les angles) elles sont dites perpendiculaires.	

Autres lignes

Nom	Définition	Exemple
Ligne brisée ou Ligne polygonale	Une ligne brisée est une ligne formée de plusieurs segments les uns à la suite des autres.	
Arc de cercle	Un arc de cercle est un morceau de cercle, autrement dit une ligne formée de points qui sont tous à la même distance d'un autre point (le centre du cercle).	

Lignes fermées

Une ligne fermée, c'est-à-dire une ligne qui se referme sur elle-même délimite une surface. C'est le cas par exemple des triangles, des rectangles, des hexagones... Dans ce cas, la ligne porte la plupart du temps le même nom que la surface qu'elle délimite. Ces figures sont listées dans [la partie sur les surfaces](#).

Il existe cependant, une exception à la règle : le cercle. Le mot cercle désigne exclusivement la ligne tandis que la surface associée s'appelle un disque.

Nom	Définition	Exemple
Cercle	Un cercle est une ligne formée par tous les points situés à une certaine distance d'un même point (appelé centre du cercle).	

Angles

Angles particuliers

Nom	Définition	Exemples
Angle nul	Un angle nul est un angle de 0° . Autrement dit, les deux lignes qui le forment sont confondues	 0°
Angle droit	Un angle droit est un angle de 90° , c'est-à-dire un angle d'un quart de tour.	 90°
Angle plat	Un angle plat est un angle de 180° , c'est-à-dire un angle d'un demi tour.	 180°
Angle plein	Un angle plein est un angle de 360° , c'est-à-dire un angle d'un tour complet.	 360°

Autres angles

Nom	Définition	Exemples
Angle aigu	Un angle aigu est un angle qui mesure entre 0° et 90° . Il se situe donc entre l'angle nul et l'angle droit.	
Angle obtus	Un angle obtus est un angle qui mesure entre 90° et 180° . Il se situe donc entre l'angle droit et l'angle plat.	
Angle saillant	Un angle saillant est un angle qui mesure entre 0° et 180° . Ainsi un angle saillant est soit un angle aigu, soit un angle obtus.	
Angle rentrant	Un angle rentrant est un angle qui mesure entre 180° et 360° . Il se situe donc entre l'angle plat et l'angle plein.	

Relations entre les angles

Nom	Définition	Exemples
Angles complémentaires	Deux angles sont complémentaires si leur somme est égale à un angle droit (90°).	 
Angles supplémentaires	Deux angles sont supplémentaires si leur somme est égale à un angle plat (180°).	 

Surfaces Polygones

Triangles

Nom	Définition	Exemples
Triangle	Un triangle est un polygone à trois côtés et trois angles.	
Triangle isocèle	Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux. De façon équivalente, c'est également un triangle qui a deux angles égaux.	
Triangle équilatéral	Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux. De façon équivalente, c'est également un triangle dont les trois angles mesurent 60° .	
Triangle rectangle	Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.	

Quadrilatères

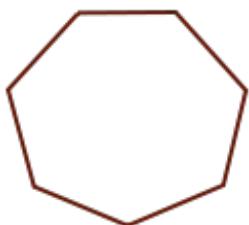
Nom	Définition	Exemples
Quadrilatère	Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés et quatre angles.	
Trapèze	Un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles.	
Parallélogramme	Un parallélogramme est un quadrilatère dont les paires de côtés opposés sont parallèles. Les parallélogrammes sont donc aussi des trapèzes.	
Losange	Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux. Les losanges sont tous des parallélogrammes.	
Rectangle	Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont égaux. Ce sont forcément des angles droits (90°). Les rectangles sont tous des parallélogrammes.	
Carré	Un carré est un quadrilatère dont les quatre côtés et les quatre angles sont égaux. Les carrés sont donc à la fois des losanges et des rectangles.	

Pentagones

Nom	Définition	Exemples
Pentagone	Un pentagone est un polygone à cinq côtés et cinq angles.	
Pentagone régulier convexe	Un pentagone régulier convexe est un pentagone dont les cinq côtés sont égaux et dont les cinq angles sont égaux à 108° .	
Pentagone régulier étoilé	Un pentagone régulier étoilé est un pentagone dont les cinq côtés sont égaux et dont les cinq angles sont égaux à 36° .	

Polygones suivants

Pour les polygones suivants, il existe à chaque fois un type de polygone régulier convexe (dont tous les côtés et tous les angles sont égaux), en revanche le nombre de polygones réguliers étoilés peut varier. Par exemple, il existe deux types d'heptagones réguliers étoilés (7 côtés).



Convexe



Étoilé 1



Étoilé 2

Pour les noms des polygones suivants selon leur nombre de côtés, vous pouvez vous reporter au chapitre [La géométrie des trigones](#).

Courbes

Nom	Définition	Exemples
Disque	Un disque est composé de l'ensemble des points situés à l'intérieur d'un cercle, c'est-à-dire les points dont la distance au centre est inférieure au rayon.	
Ellipse	Une ellipse est une figure obtenue en écrasant ou en étirant un cercle.	

Notations et conventions

Cette annexe récapitule l'ensemble des notations et conventions d'écriture utilisées dans ce cours.

Notez que ce n'est pas une liste exhaustive de toutes les notations utilisées en mathématiques (ce serait beaucoup trop long !), mais bien uniquement celles présentes dans ce cours. Ne vous étonnez donc pas si des notations d'autres domaines des maths sont absentes ou s'il n'est pas indiqué par exemple à la lettre f que celle-ci dénote habituellement des fonctions.

Ce n'est pas parce qu'une notation a une signification "habituelle" que vous n'avez pas le droit de l'utiliser dans d'autres contextes si il n'y a pas d'ambiguïté et que pour une raison ou une autre ça vous semble plus pertinent. Et inversement ce n'est pas parce qu'une lettre (la lettre s par exemple) n'a pas d'emploi spécifique qu'il vous est interdit de l'utiliser, bien au contraire, c'est une lettre libre que vous pouvez utiliser à votre guise. 😊

Symboles géométriques

Lignes

[]	Le segment délimité par les deux points A et B se note $[AB]$.
()	La droite déterminée par les deux points A et B se note (AB) .
[)	La demi-droite qui débute au point A et passe par B se note $[AB)$.

Relations entre les lignes

⊥	Si deux droites (d) et (d') sont perpendiculaires , alors on note $(d) \perp (d')$.
\ \ \	Si deux droites (d) et (d') sont parallèles , alors on note $(d) \parallel (d')$.

Angles

•	Le symbole \circ est utilisé pour noter la mesure des angles en degrés . Par exemple : un angle droit mesure 90° .
	Si on dispose d'un angle dont l'origine se trouve au point A , cet angle se note \widehat{A} . Si plus de deux demi-droites partent du point A , alors on peut préciser les points par lesquels elles passent : \widehat{BAC} désigne l'angle formé des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Alphabet latin

L'alphabet latin compte 26 lettres, chacune d'entre elles se déclinant en minuscule et en majuscule. En voici la liste avec leurs utilisations courantes.

Minuscule	Utilisation	Majuscule	Utilisation
a		A	
b		B	<ul style="list-style-type: none"> Les lettres A, B et C sont souvent utilisées pour désigner les sommets d'un triangle.
c	<ul style="list-style-type: none"> Les lettres a, b et c sont souvent utilisées pour désigner les longueurs des trois côtés d'un triangle. <p>D'une manière générale, pour désigner les longueurs des côtés d'un polygone ou d'une autre figure, on utilise les</p>	C	<p>D'une manière générale, on peut utiliser les premières lettres majuscules de l'alphabet pour désigner les sommets d'un polygone ou d'une autre figure quelconque. On attribue généralement les lettres dans l'ordre en tournant dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).</p> <ul style="list-style-type: none"> La lettre A en caractère calligraphié est souvent utilisé pour désigner une aire. <i>Par exemple</i> : notons

	premières lettres de l'alphabet.		\mathcal{A}_{ABC} l'aire du triangle ABC . • La lettre C en caractère calligraphié désigne généralement un cercle. <i>Exemple</i> : Soit C le cercle de centre O et de rayon r .
d	<ul style="list-style-type: none"> La lettre d sert à désigner une droite. <i>Par exemple</i>, soit (d) et (d') deux droites perpendiculaires. Dans un problème de géométrie issu d'un problème concret, la lettre d peut également désigner une distance. <i>Par exemple</i> : notons d la distance entre la ville A et la ville B. 	D	
e		E	
f		F	
g		G	<ul style="list-style-type: none"> La lettre G désigne en général le centre de gravité d'une figure géométrique. Il s'agit du point sur lequel il faut poser la figure si on la découpe dans du carton et qu'on la fait tenir en équilibre sur une aiguille. <i>Exemple</i> : Le centre de gravité G d'un triangle se trouvent à l'intersection de ses trois médianes qui relient chaque sommet au milieu du côté opposé.
h	<ul style="list-style-type: none"> La lettre h est utilisée pour désigner la hauteur d'une figure, en particulier d'un triangle ou d'un parallélogramme. 	H	<ul style="list-style-type: none"> La lettre H désigne en général l'orthocentre d'un triangle, c'est-à-dire le point d'intersection de ses trois hauteurs.
i		I	<ul style="list-style-type: none"> Les lettres I et J sont souvent utilisées pour désigner des points secondaires ou intermédiaires dans une construction géométrique. <i>Par exemple</i> : Soit un triangle ABC, notons respectivement I et J les milieux de AB et AC, alors ABC et AIJ sont semblables.
j		J	
k		K	
ℓ	<ul style="list-style-type: none"> La lettre ℓ est utilisée pour désigner une longueur ou une largeur. En particulier dans le cas d'un rectangle, la largeur est souvent notée ℓ tandis que la longueur est désignée par la majuscule L. 	L	<ul style="list-style-type: none"> Quand on a un rectangle, la longueur est souvent notée L tandis que la largeur est désignée par la minuscule ℓ.
m		M	

<i>minuscule</i>	<i>majuscule</i>	
<i>n</i>	<i>N</i>	<ul style="list-style-type: none"> Les lettres M et N sont souvent utilisées pour désigner des points quelconques. <i>Par exemple</i> : Soit ABC un triangle et soit M un point à l'intérieur de ce triangle...
<i>o</i>	<i>O</i>	<ul style="list-style-type: none"> La lettre O est généralement utilisé pour désigner un point central dans une figure. Cela peut être le centre d'un cercle ou le centre d'un repère. <i>Par exemple</i> : Soit C le cercle de centre O et de rayon r.
<i>p</i>	<i>P</i>	
<i>q</i>	<i>Q</i>	<ul style="list-style-type: none"> Comme M et N, les lettres P et Q sont utilisées pour désigner des points quelconques
<i>r</i>	<i>R</i>	<ul style="list-style-type: none"> La lettre r est utilisée pour désigner le rayon d'un cercle. <i>Par exemple</i> : Soit C le cercle de centre O et de rayon r. Comme sa minuscule, le R majuscule est parfois utilisé pour désigner le rayon d'un cercle.
<i>s</i>	<i>S</i>	
<i>t</i>	<i>T</i>	
<i>u</i>	<i>U</i>	
<i>v</i>	<i>V</i>	
<i>w</i>	<i>W</i>	
<i>x</i>	<i>X</i>	
<i>y</i>	<i>Y</i>	
<i>z</i>	<i>Z</i>	

Alphabet grec

L'alphabet grec compte 24 lettres qui sont très fréquemment utilisées en mathématiques. Il est très utile de connaître cet alphabet. (Si vous avez l'intention de faire des études de maths, vous pouvez d'ores et déjà faire des lignes pour vous entraîner à les écrire. Ce ne sera pas du temps perdu. 

Nom	Minuscule	Utilisation	Majuscule	Utilisation
Alpha	α		A	Voir A dans l'alphabet latin.
Bêta	β	<ul style="list-style-type: none"> Les lettres α, β et γ désignent généralement les trois angles d'un triangle. 	B	Voir B dans l'alphabet latin.
Gamma	γ		Γ	
Delta	δ		Δ	
Epsilon	ϵ		E	Voir E dans l'alphabet latin.

Zêta	ζ		Z	Voir Z dans l'alphabet latin.
Êta	η		H	
Thêta	θ	<ul style="list-style-type: none"> La lettre θ désigne en général un angle quelconque. <i>Par exemple :</i> Notons θ, l'angle aigu formé par les droites (d) et (d'). 	Θ	
Iota	ι		I	Voir I dans l'alphabet latin.
Kappa	κ		K	
Lambda	λ		Λ	
Mu	μ		M	Voir M dans l'alphabet latin.
Nu	ν		N	Voir N dans l'alphabet latin.
Xi	ξ		Ξ	
Omicron	\omicron		O	Voir O dans l'alphabet latin.
Pi	π	<ul style="list-style-type: none"> Le nombre π est certainement le plus célèbre des nombres en mathématiques, il vaut approximativement 3,14159265... et correspond au rappart entre la circonference et le diamètre d'un cercle. Autrement dit, un cercle de diamètre égal à 1 possède une circonference égale à π. 	Π	
Rhô	ρ		P	Voir P dans l'alphabet latin.
Sigma	σ		Σ	
Tau	τ		T	
Upsilon	υ		Y	
Phi	φ	<ul style="list-style-type: none"> La lettre φ désigne le nombre d'or qui est le rapport entre la diagonale et le côté d'un pentagone régulier. Ce nombre vaut $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$ 	Φ	
Chi	χ		X	
Psi	ψ		Ψ	

<i>Oméga</i>	ω		Ω	
--------------	----------	--	----------	--

Références

Cette annexe se compose de deux parties.

Dans la première, vous trouverez un certain nombre de livres, site web, vidéos, etc. pour aller plus loin après ou pendant la lecture de ce cours. Il est fondamental en mathématiques d'avoir plusieurs points de vue sur les sujets que vous étudiez et je vous conseille fortement d'aller voir ailleurs si vous voulez compléter vos connaissances et votre maîtrise des notions abordées au fil de ce cours.

La seconde partie est une bibliographie complète de tous les livres que j'ai utilisés à un moment donné dans l'écriture de ce cours. Cette liste est donnée à simple titre informatif, il ne s'agit pas de conseils de lecture. Certaines de ces références ne sont présentes que pour des petits détails du cours et peuvent n'avoir qu'un rapport très éloigné avec le thème de celui-ci.

Quelques conseils pour aller plus loin

Cette partie présente quelques conseils ciblés pour ceux qui veulent approfondir, compléter ou tout simplement découvrir un autre angle d'approche des différentes notions abordées dans ce cours.

Livres



Éléments Euclide

Écrits vers l'an 300 avant J.-C., les treize livres des *Éléments* d'Euclide forment l'un des ouvrages les plus importants de l'histoire des mathématiques. Il s'agit du troisième livre ayant eu le plus d'éditions au cours de l'histoire après la Bible et le Coran.

Les livres I à IV traitent de la géométrie plane. On y trouve les fondements de la géométrie connue à cette époque et la plupart des théorèmes classiques que l'on apprend aujourd'hui au collège tels que le théorème de Pythagore. Les *Éléments* sont tout à fait accessibles aux débutants en géométrie. Plusieurs traductions sont disponibles sur internet, notamment la première traduction française datant du XVII^e siècle sur le [site de la Bibliothèque Nationale de France](#).



Histoires de géomètres... et de géométrie Jean-Louis Brahem

Un livre passionnant ! Vous y trouverez une multitude d'anecdotes sur la géométrie et son histoire le tout illustré de très nombreux schémas, figures et dessins (la moitié de la surface du livre est occupée par les illustrations et l'autre par les textes est-il annoncé dans l'avant-propos).

Vous êtes guidé par quatre personnages qui vous expliquent la géométrie de leur époque à travers ses applications. Ils nous entraînent de l'époque de Babylone jusqu'au XVI^e siècle en passant par l'Égypte et la Grèce antique pour nous faire découvrir les problèmes de mesure de champs, d'architecture ou encore de construction de ponts.

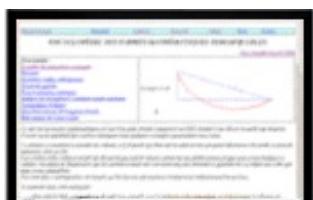


La géométrie en vers techniques Lyon-François Des Roys

Et pour terminer, une pépite. *La géométrie en vers techniques* est un cours de géométrie en alexandrin écrit en 1801 par Lyon des Roys. En réalité, ce petit texte qui se lit en quelques minutes a été écrit comme un aide mémoire et s'adresse plutôt à des lecteurs qui connaissent déjà la géométrie. On y retrouve la plupart des points qui ont été abordés dans ce cours ainsi qu'un passage sur la géométrie dans l'espace à la fin.

Si vous êtes curieux, jetez un oeil à cette poésie mathématique, ça vaut le détour. Vous pouvez en trouver le texte par exemple sur [le site internet du projet Gutenberg](#).

Sites web



Mathcurve <http://www.mathcurve.com>

Ce site propose des billets sur l'actualité des mathématiques, des articles de vulgarisation écrits par des chercheurs en mathématiques ou encore des portraits de mathématiciens d'hier ou d'aujourd'hui. Les articles sont de niveaux divers et sont classés selon une graduation qui



y !

va de la piste verte pour le grand public, jusqu'à la piste noire pour les étudiants post-bac en mathématiques.

Le contenu est renouvelé assez régulièrement et je vous conseille vivement d'aller y faire un tour de temps en temps. Les actualités permettent également de se tenir au courant des différents évènements prévus prochainement (conférences, animations mathématiques, ...)

Wikipedia

<http://fr.wikipedia.org/> et <http://en.wikipedia.org/>

Vous connaissez probablement déjà. En mathématiques comme dans d'autres domaines, Wikipedia recense des articles de référence sur presque tous les sujets possibles et inimaginables. Pour écrire ce cours, j'ai consulté les pages Wikipédia d'à peu près tous les concepts qui y sont abordés.

À noter, que si vous lisez l'anglais, les articles de la version anglophone de Wikipedia sont régulièrement plus complets et plus précis que ceux de son homologue francophone. Pensez-y !

Si vous avez des idées de livres, sites web ou autres qui peuvent être intéressants dans cette partie, n'hésitez pas à m'en faire part par mp ou dans les commentaires de cette annexe. Attention toutefois, il faut que vos propositions rentrent dans le thème du cours (Nombres et opérations), soient de qualité et apportent quelque chose de nouveau par rapport aux références déjà présentes. Le but de cette partie n'est pas de faire une liste de tout ce qui existe sur le sujet mais de donner quelques conseils ciblés (tout conseiller, c'est ne rien conseiller 😊).

Bibliographie

Dans cette partie, vous trouverez l'ensemble des livres que j'ai consultés lors de l'écriture de ce cours. Les livres sont donnés par ordre alphabétique de leurs auteurs.

Nouvelles tables de logarithmes - Bouvart et Ratinet - Librairie Hachette - 1957

Histoire de géomètres... et de géométrie - J.-L. Brahem - Éditions Le Pommier - 2011

Géométrie - R. Cluzel J.-P. Robert - Librairie Delagrave - 1937

Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège - A. Deledicq et C. Missenard - ACL - 1996

La géométrie en vers techniques - L.-F. Des Roys - 1801

Éléments - Euclide - v. -300

Les Mots & les Maths - B. Hauchecorne - Ellipses - 2003

Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd - S. Loyd et M. Gardner - Dunod - 1964

Des mathématiciens de A à Z - B. Hauchecorne et D. Surreau - Ellipses - 1996