
SIMULACIÓN DE UN MODELO M/M/1 E INVENTARIO

Abud Santiago Elias
Legajo 47015
sabudvicco@gmail.com

Castellano Marcelo
Legajo 39028
marce.geek22@gmail.com

Navarro Franco
Legajo 46387
franconavarro1889@gmail.com

30 de agosto de 2022

ABSTRACT

En este trabajo estudiaremos dos modelos de simulación de eventos discretos, el primero es el comportamiento de líneas de espera. El cual es de gran ayuda para predecir el comportamiento de dichas líneas en situaciones del mundo real, desde la entrada y salida de autos de un estacionamiento hasta la utilización de una red distribuida de servidores a lo largo del mundo que alojan una página web para miles de usuarios. El siguiente será un modelo de inventario que nos permitirá saber los costos correspondientes al mantenimiento o de compras necesarias y será de gran ayuda para un inventario en la vida real

1. Introducción

En el siguiente trabajo simularemos mediante un programa desarrollado en lenguaje Python, una cola simple, en la que solamente habrá llegada de clientes, atendidos por un único servidor luego de haber realizado una espera determinada en la cola y posteriormente partirán. El modelo de inventario contará con el mismo formato y consistirá en un proceso por mes en el que se realiza una orden de compra a los proveedores, mientras se trata de alcanzar la demanda de los clientes a través de distintos indicadores de escasez y existencia. Finalmente se realizará una evaluación y se calcularán las estadísticas correspondientes. A su vez estudiaremos la eficacia de dichos programas al comparar ciertas medidas de rendimiento observadas con las teóricas computadas y a su vez con las obtenidas mediante una calculadora web, y de otra simulación desarrollada en el aplicativo AnyLogic.

2. Marco teórico

2.1. Proceso estocástico

En la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para representar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden o no estar correlacionadas entre sí.

Cada variable o conjunto de variables sometidas a influencias o efectos aleatorios constituye un proceso estocástico. Un proceso estocástico X_t puede entenderse como una familia uniparamétrica de variables aleatorias indexadas mediante el tiempo t . Los procesos estocásticos permiten tratar procesos dinámicos en los que hay cierta aleatoriedad.

3. Modelo M/M/1

Un sistema de espera M/M/1 es aquel que considera un servidor, con tiempos exponenciales de servicio y entre llegadas de clientes. La implicancia de que los tiempos de servicio se distribuyan de manera exponencial es que existe una preponderancia de tiempos de servicio menores al promedio combinados con algunos pocos tiempos extensos. Un ejemplo de ello es lo que sucede en las cajas de los bancos donde la mayoría de las transacciones requieren poco tiempo de proceso por parte del cajero, no obstante algunas transacciones más complejas consumen bastante tiempo. Por otra

parte afirmar que los tiempos entre llegadas se distribuyen de manera exponencial implica una preponderancia de tiempos entre llegadas menores que el promedio en combinación con algunos tiempos más extensos. Lo anterior tiene relación con la aleatoriedad del proceso de llegada de clientes que permite establecer la propiedad de falta de memoria o amnesia de la distribución exponencial [3] y con los conceptos presentados en [4], donde queda en evidencia que la formación de las colas o filas esta asociada a la variabilidad del sistema.

Un sistema de cola está caracterizado por tres componentes: el proceso de llegada, el mecanismo de servicio y la disciplina de la cola. El proceso de llegada se refiere a cómo se produce la llegada de clientes al sistema. Sea A_i el tiempo entre los arribos del $(i - 1)$ -ésimo y el i -ésimo cliente. Si suponemos que A_1, A_2, \dots son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, definimos el tiempo medio (o esperado) entre arribos por $E(A)$ y definimos entonces la tasa de arribo de clientes $\lambda = 1/E(A)$.

El mecanismo de servicio se define especificando el número de servidores (s), si cada servidor tiene su propia cola o hay una sola cola para todos, y la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio. Sea S_i el tiempo de servicio del i -ésimo cliente. Si S_1, S_2, \dots son variables aleatorias IID, definimos el tiempo medio de servicio como $E(S)$ y la tasa de servicio de un servidor como $\mu = 1/E(S)$.

La disciplina de la cola se refiere a cómo se selecciona al siguiente cliente de la cola (si es que hay) una vez finalizado el servicio del cliente actual. Algunas disciplinas comunes son:

- FIFO: Los clientes son atendidos por orden de llegada (el primero que entra, el primero que sale).
- LIFO: Los clientes son atendidos en orden inverso al de llegada (el último que entra, el primero que sale).
- Con prioridad: Los clientes son atendidos según su importancia o sus requerimientos de servicio.

Existen ciertos sistemas de cola que se dan con frecuencia en la práctica, por lo que se han desarrollado notaciones estándar. En particular nos interesa el caso con s servidores, una única cola (cola simple) con disciplina FIFO y tiempos entre llegadas y de servicio IID, e independientes entre sí.

A tal sistema se lo denomina una cola $GI/G/s$ (notación de Kendall), donde GI (general independiente) se refiere a la distribución de los A_i y G (general) se refiere a la distribución de los S_i . Cuando se conocen las distribuciones de A_i y S_i , se emplean los símbolos correspondientes en su lugar. En particular nos interesa el símbolo M que se refiere a una distribución exponencial, por su propiedad markoviana (es decir, de falta de memoria). De esta manera a un sistema de cola de servidor único con tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales y disciplina FIFO se lo denomina una cola $M/M/1$.

Para cualquier cola $GI/G/s$, se denomina la cantidad $\rho = \lambda/s\mu$ el factor de utilización ($s\mu$ es la tasa de servicio cuando todos los servidores se encuentran ocupados).

Como la llegada de clientes y su tiempo en ser servidos son variables aleatorias, se pueden considerar nuevas variables aleatorias, que son combinaciones lineales de las anteriores, por ejemplo:

Considere un sistema de colas de un solo servidor para el cual los tiempos entre arribos A_1, A_2, \dots son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

A partir de una única ejecución de la simulación con retrasos de los clientes D_1, D_2, \dots, D_n , es obvio que el estimador de $d(n)$ es:

$$\hat{d}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \quad (1)$$

que es solo el promedio de los D_i que se observaron en la simulación.

Una de las medidas para nuestro modelo simple es el número promedio esperado de clientes en la cola (pero sin ser servida), denotada por $q(n)$, donde la n es necesaria en la notación para indicar que este promedio se toma durante el período de tiempo necesario para observar los n retrasos que definen nuestra regla de parada. Este es un tipo diferente de “promedio” a comparación del retraso promedio en cola, porque se toma el tiempo (continuo), en lugar de los clientes (siendo este discreto). Por lo tanto, necesitamos definir qué significa este número promedio de tiempo de clientes en cola. Para hacer esto, sea $Q(t)$ el número de clientes en cola en el tiempo t , para cualquier número real $t \geq 0$, y sea $T(n)$ el tiempo requerido para observar nuestros n retrasos en la cola. Entonces para cualquier tiempo t entre 0 y $T(n)$, $Q(t)$ es un entero no negativo. Además, si dejamos que p_i sea la proporción esperada (que estará entre 0 y 1) del tiempo que $Q(t)$ es igual a i , entonces una definición razonable de $q(n)$ sería:

$$q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i \quad (2)$$

Por lo tanto, $q(n)$ es un promedio ponderado de los posibles valores de i para la longitud de la cola $Q(t)$, siendo las áreas la proporción esperada de tiempo que la cola pasa en cada uno de sus posibles longitudes. Para estimar $q(n)$ a partir de una simulación, simplemente reemplazamos los p_i con estimaciones de ellos y obtenemos:

$$\hat{q}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i \hat{p}_i \quad (3)$$

donde \hat{p}_i es la proporción observada (en lugar de la esperada) del tiempo durante la simulación donde que había i clientes en la cola. Computacionalmente, sin embargo, es más fácil reescribir $\hat{q}(n)$ usando algunas consideraciones geométricas. Si dejamos que T_i sea el total de tiempo durante la simulación donde la cola tiene una longitud i , entonces $T(n) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots$ y $\hat{p}_i = T_i/T(n)$, por lo que podemos reescribir la ecuación 3 como:

$$\hat{q}(n) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T(n)} \quad (4)$$

El numerador de la ecuación anterior, representa el área bajo la función $Q(t)$:

$$\sum_{i=0}^{k-1} i T_i = \int_0^{T(n)} Q(t) dt \quad (5)$$

Reemplazándolo en la ecuación anterior, nos queda:

$$\hat{q}(n) = \frac{\int_0^{T(n)} Q(t) dt}{T(n)} \quad (6)$$

Esta integral puede ser calculada como la suma de rectángulos formados por la base tiempo de cierta cantidad de clientes en cola por la altura dicha cantidad de clientes en cola.

La proporción esperada de tiempo del servidor en estado ocupado $u(n)$, deviene de la probabilidad de que el servidor no esté vacío, $p_N > 0 = 1 - p_0$. Para calcular su estimador $\hat{u}(n)$, primero se define la “función ocupado”:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } Nt > 0 \\ 0 & \text{si } Nt = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Entonces $\hat{u}(n)$ es la porción del tiempo total en la que $B(t) = 1$. Al igual que a la medida anterior, podemos considerarlo como el área bajo $B(t)$, así,

$$\hat{u}(n) = \frac{\int_0^{T(n)} B(t) dt}{T(n)} \quad (8)$$

En definitiva, $\hat{u}(n)$ es la sumatoria de áreas rectangulares, donde la base es el tiempo en el que el servidor está en un estado específico, y la altura es dicho estado, 0 o 1.

4. Modelo de inventario

Los inventarios están presentes en todas las compañías que tratan con productos físicos, tales como fabricantes, distribuidores, comerciantes, etc. Las empresas necesitan inventarios de materias primas para la manufactura de productos y a su vez deben almacenar productos terminados en el almacén a la espera de ser vendidos. De manera similar, los distribuidores deben mantener inventarios de bienes que deberán estar disponibles cuando los consumidores los necesiten. Dado que los stocks representan una cantidad de dinero inmovilizada muy importante dentro de una empresa, la reducción de los costos de almacenamiento (evitando inventarios innecesariamente grandes) podría mejorar la competitividad de cualquier sistema productivo.

Cuando hay que analizar los inventarios con una demanda independiente los modelos de gestión de stocks que se utilizan son: el modelo de cantidad fija del pedido (EOQ) y el modelo de periodo de tiempo fijo (también llamado de revisión periódica, modelo P) [11, 12]. En el modelo de cantidad fija de pedido se coloca un pedido cuando el inventario restante cae a un punto de pedido y se revisa el nivel de inventario continuamente. De esta manera, el modelo de cantidad fija de pedido es un sistema perpetuo que requiere que cada vez que se haga un retiro o una adición al

inventario, los registros deban actualizarse para asegurar que el punto del nuevo pedido se ha alcanzado o no. En cambio en el modelo de periodo de tiempo fijo, el conteo tiene lugar solo durante el periodo de revisión.

Suponiendo una empresa que vende un solo producto le gustaría decidir cuántos artículos debería tener en inventario para cada uno de los siguientes n meses (n es un parámetro de entrada fijo). Los tiempos entre demandas son variables aleatorias exponenciales con una media de 0,1 mes. Los tamaños de las demandas, D , son variables aleatorias IID (independientes de cuando se presentan las demandas), con:

$$D = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } 1/6 \\ 2 & \text{c.p. } 1/3 \\ 3 & \text{c.p. } 1/3 \\ 4 & \text{c.p. } 1/6 \end{cases} \quad (9)$$

donde c.p. significa “con probabilidad de”.

Al comienzo de cada mes, la empresa revisa el nivel de inventario y decide cuántos artículos pedir a su proveedor. Si la empresa ordena Z artículos, incurre en un costo de $K + iZ$, donde $K = \$32$ es el costo de preparación e $i = \$3$ es el costo incremental por artículo pedido. (Si $Z = 0$, no incurre ningún costo). Cuando se realiza un pedido, el tiempo requerido para que llegue (llamado retraso en la entrega o tiempo de entrega) es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0,5 y 1 mes.

La empresa utiliza una política estacionaria (s, S) para decidir cuánto pedir, es decir,

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{if } I < s \\ 0 & \text{if } I \geq s \end{cases} \quad (10)$$

donde I es el nivel de inventario al comienzo del mes.

Para nuestro modelo, supondremos que la empresa incurre en un costo de mantenimiento de $h = \$1$ por artículo por mes mantenido en el inventario (positivo). El costo de mantenimiento incluye costos tales como alquiler de almacenes, seguros, impuestos y mantenimiento, así como el costo de oportunidad de tener capital inmovilizado en el inventario en lugar de invertirlo en otra parte. Hemos ignorado en nuestra formulación el hecho de que todavía se incurre en algunos costos de mantenimiento cuando $I = 0$. Sin embargo, dado que nuestro objetivo es comparar las políticas de pedido, ignorar este factor, que después de todo es independiente de la política utilizada, no afectará nuestra evaluación de qué política es la mejor. Ahora, dado que I es el número de elementos retenidos en el inventario en el momento t , la cantidad promedio de tiempo (por mes) de artículos mantenidos en el inventario durante el período de n meses es

$$\bar{I}^+ = \frac{\int_0^n I^+(t) dt}{n} \quad (11)$$

De manera similar, suponga que la compañía incurre en un costo de trabajo pendiente de $p = \$5$ por artículo por mes en reserva; esto representa el costo del mantenimiento adicional de activos cuando existe acumulación de pedidos, así como pérdida de la buena voluntad de los clientes. El número promedio de tiempo de los elementos en la reserva es:

$$\bar{I}^- = \frac{\int_0^n I^-(t) dt}{n} \quad (12)$$

por lo que el costo promedio de la cartera de pedidos por mes es πI .

5. Análisis de resultados

5.1. Modelo M/M/1 en AnyLogic

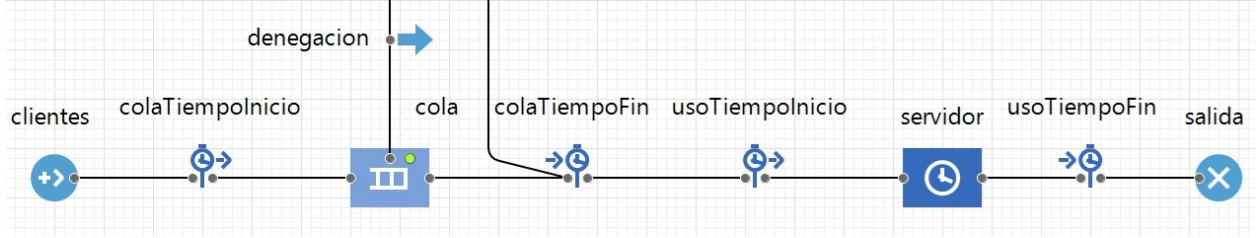


Figura 1: Bloques del modelo M/M/1 en Anylogic.

Para analizar el rendimiento del modelo, variamos la tasa de arribos (T_a) en base a la tasa de servicio (T_s), y la capacidad de la cola (cap).

Realizaremos 10 simulaciones de 1000 clientes cada una y promediamos los siguientes estadísticos:

- Promedio de clientes en el sistema ($q(n) + u(n)$)
- Cantidad de clientes en cola en promedio ($q(n)$)
- Demora promedio esperada en cola ($d(n)$)
- Tiempo promedio en el sistema ($d(n) + s(n)$)
- Ocupación del servidor ($u(n) * 100\%$)
- Probabilidad de denegación del servicio. ($p(den)$)
- Probabilidad de encontrar n clientes en cola. ($p(Q(t) = n) \times 100\%$)

Los primeros 5 fueron tabulados y el último fue graficado.

5.1.1. $cap = 0$

Los parámetros $d(n)$, $q(n)$ y $p(Q(t) = n) \times 100\%$ no aplican cuando la capacidad de la cola es 0. El promedio de clientes en sistema es en este caso, equivalente al factor de uso del servicio.

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	2,005	19,823	19,46
50	2,059	33,656	34,09
75	1,93	42,212	41,65
100	1,985	49,165	50,12
125	2,004	55,434	55,15

5.1.2. $cap = 2$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	0,313	0,068	0,548	2,54	24,546	1,26
50	0,739	0,266	1,148	3,186	47,27	6,39
75	1,168	0,524	1,65	3,681	64,373	15,71
100	1,499	0,748	2,014	4,039	75,164	25,3
125	1,756	0,934	2,26	4,246	82,168	32,93

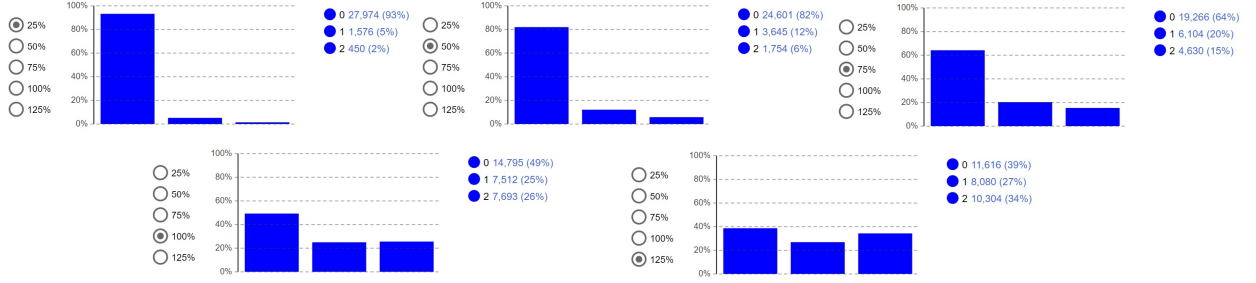


Figura 2: Probabilidad de encontrar n clientes en cola.

5.1.3. $cap = 5$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	0,326	0,079	0,634	2,069	24,672	0,01
50	0,917	0,424	1,7	3,681	49,263	0,85
75	1,882	1,18	3,318	5,289	70,119	4,9
100	3,122	2,253	5,234	7,254	86,914	14,19
125	3,847	2,917	6,267	8,266	93,034	25,23

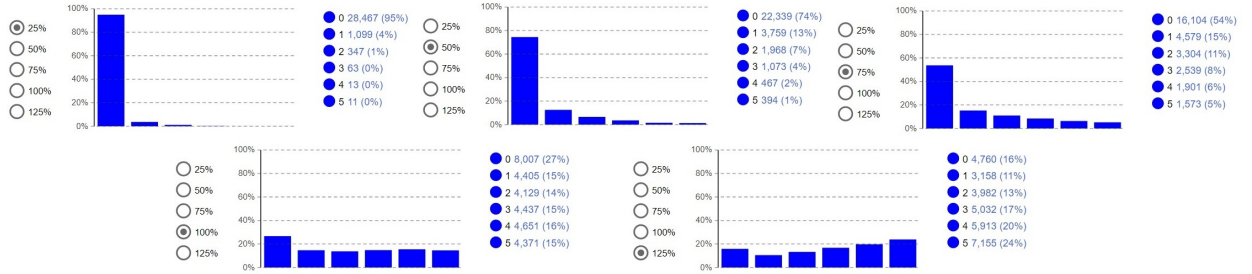


Figura 3: Probabilidad de encontrar n clientes en cola.

5.1.4. $cap = 10$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	0,325	0,08	0,648	2,631	24,52	0
50	1,032	0,534	2,15	4,159	49,816	0,08
75	2,314	1,593	4,351	6,332	72,183	0,64
100	5,294	4,382	9,62	11,623	91,217	8,13
125	7,582	6,606	13,329	15,296	97,504	19,65

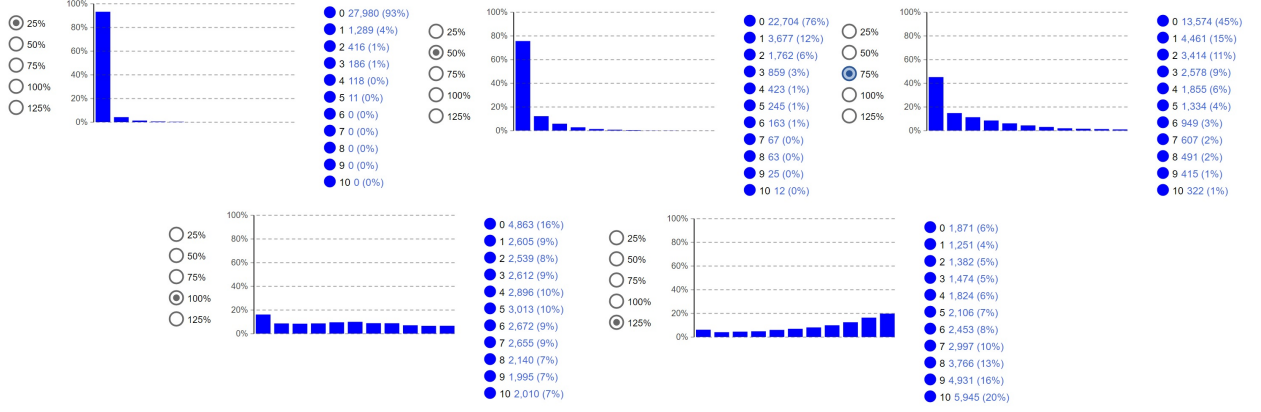


Figura 4: Probabilidad de encontrar n clientes en cola.

5.1.5. $cap = 50$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100 \% [\%]$	$q(n) + u(n) [min]$	$q(n) [clientes]$	$d(n) [min]$	$d(n) + s(n) [min]$	$u(n) \times 100 \% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	0,335	0,085	0,679	2,686	25,007	0
50	1,039	0,532	2,099	4,11	50,7	0
75	3,116	2,368	6,341	8,358	74,8	0
100	22,932	21,957	45,615	47,631	97,42	0,8
125	39,365	38,37	75,431	77,386	99,539	13,41

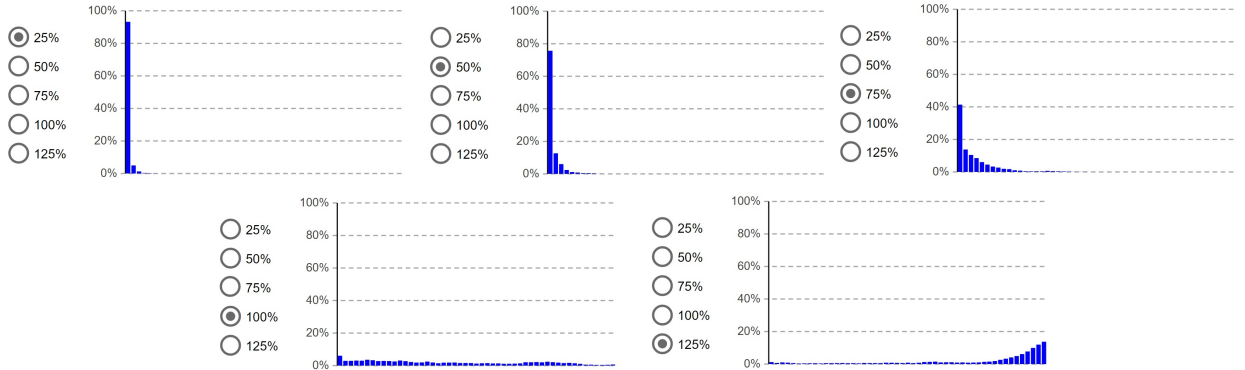


Figura 5: Probabilidad de encontrar n clientes en cola.

5.2. Modelo M/M/1 en Python

Para analizar el rendimiento del modelo, variamos la tasa de arribos (T_a) en base a la tasa de servicio (T_s), y la capacidad de la cola (cap).

Realizaremos 100 simulaciones de 1000 clientes cada una y promediamos los siguientes estadísticos:

- Promedio de clientes en el sistema ($q(n) + u(n)$)
- Cantidad de clientes en cola en promedio ($q(n)$)
- Demora promedio esperada en cola ($d(n)$)
- Tiempo promedio en el sistema ($d(n) + s(n)$)
- Ocupación del servidor ($u(n)$)
- Probabilidad de denegación del servicio. ($p(den)$)

- Probabilidad de encontrar n clientes en cola. ($p(Q(t) = n)$)

Presentaremos los resultados obtenidos junto con sus intervalos de confianza del 95 %, obtenidos suponiendo que los mismos se distribuyen de manera normal, por el teorema central del límite, en el formato *valor* \pm *error*.

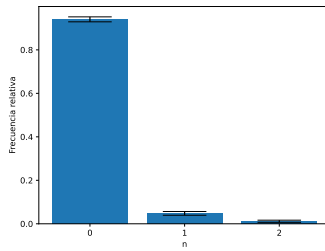
5.2.1. $cap = 0$

Los parámetros $d(n)$, $q(n)$ y $p(Q(t) = n)$ no aplican cuando la capacidad de la cola es 0. El promedio de clientes en sistema es en este caso, equivalente al factor de uso del servicio.

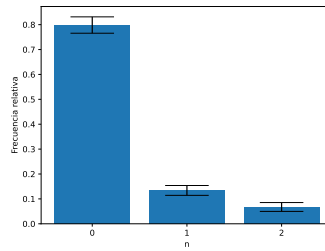
$\frac{T_a}{T_s} \times 100 \% [\%]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100 \% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	$1,992 \pm 0,122$	$19,915 \pm 1,375$	$19,878 \pm 2,118$
50	$2,003 \pm 0,126$	$33,32 \pm 1,803$	$33,354 \pm 2,358$
75	$2,004 \pm 0,119$	$42,924 \pm 2,14$	$42,892 \pm 2,048$
100	$1,991 \pm 0,116$	$49,905 \pm 2,116$	$49,596 \pm 2,279$
125	$2,008 \pm 0,122$	$55,555 \pm 2,066$	$55,503 \pm 2,028$

5.2.2. $cap = 2$

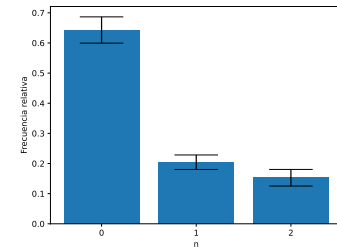
$\frac{T_a}{T_s} \times 100 \% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100 \% [\%]$	$p(den) [\%]$
25	$0,32 \pm 0,031$	$0,071 \pm 0,015$	$0,576 \pm 0,112$	$2,589 \pm 0,198$	$24,871 \pm 1,842$	$1,165 \pm 0,811$
50	$0,737 \pm 0,082$	$0,269 \pm 0,049$	$1,15 \pm 0,207$	$3,154 \pm 0,337$	$46,817 \pm 3,684$	$6,666 \pm 2,297$
75	$1,141 \pm 0,102$	$0,51 \pm 0,069$	$1,604 \pm 0,225$	$3,593 \pm 0,347$	$63,133 \pm 3,754$	$15,088 \pm 3,029$
100	$1,507 \pm 0,119$	$0,754 \pm 0,085$	$2,006 \pm 0,25$	$4,009 \pm 0,368$	$75,238 \pm 3,781$	$25,061 \pm 3,607$
125	$1,773 \pm 0,1$	$0,946 \pm 0,075$	$2,282 \pm 0,239$	$4,278 \pm 0,351$	$82,628 \pm 2,868$	$33,783 \pm 3,5$



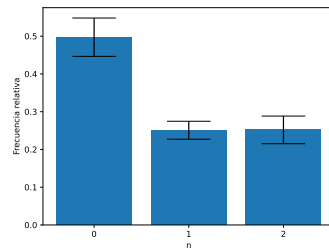
(a) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 25 \%$



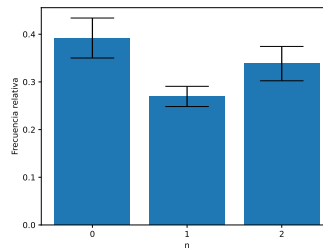
(b) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 50 \%$



(c) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 75 \%$



(d) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 100 \%$

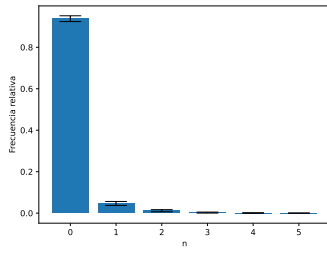
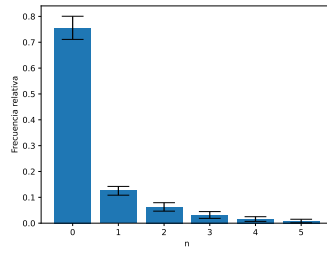
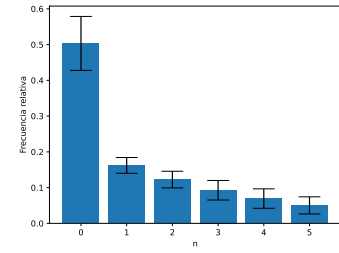
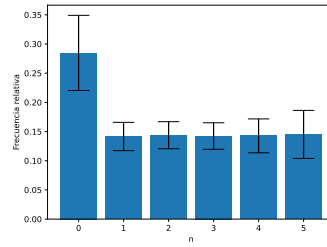
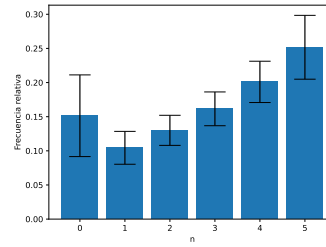


(e) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 125 \%$

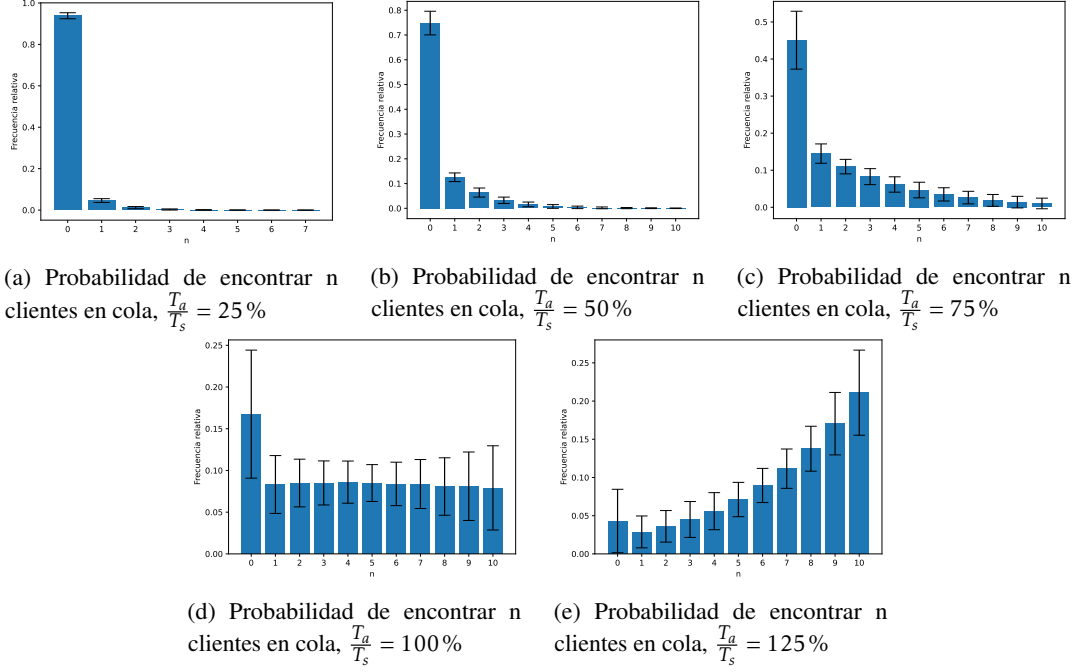
Figura 6: Probabilidad de encontrar n clientes en cola, con bandas de error del 95 %.

5.2.3. $cap = 5$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(\text{den}) [\%]$
25	$0,331 \pm 0,037$	$0,082 \pm 0,025$	$0,653 \pm 0,191$	$2,652 \pm 0,26$	$24,943 \pm 1,86$	$0,011 \pm 0,078$
50	$0,948 \pm 0,153$	$0,452 \pm 0,117$	$1,812 \pm 0,424$	$3,809 \pm 0,519$	$49,608 \pm 4,103$	$0,805 \pm 0,846$
75	$1,925 \pm 0,327$	$1,213 \pm 0,281$	$3,413 \pm 0,728$	$5,423 \pm 0,827$	$71,213 \pm 5,204$	$5,082 \pm 2,563$
100	$3,009 \pm 0,343$	$2,152 \pm 0,307$	$5,017 \pm 0,773$	$7,02 \pm 0,886$	$85,697 \pm 4,226$	$14,367 \pm 4,22$
125	$3,845 \pm 0,341$	$2,911 \pm 0,316$	$6,229 \pm 0,828$	$8,23 \pm 0,936$	$93,364 \pm 3,049$	$25,278 \pm 4,571$

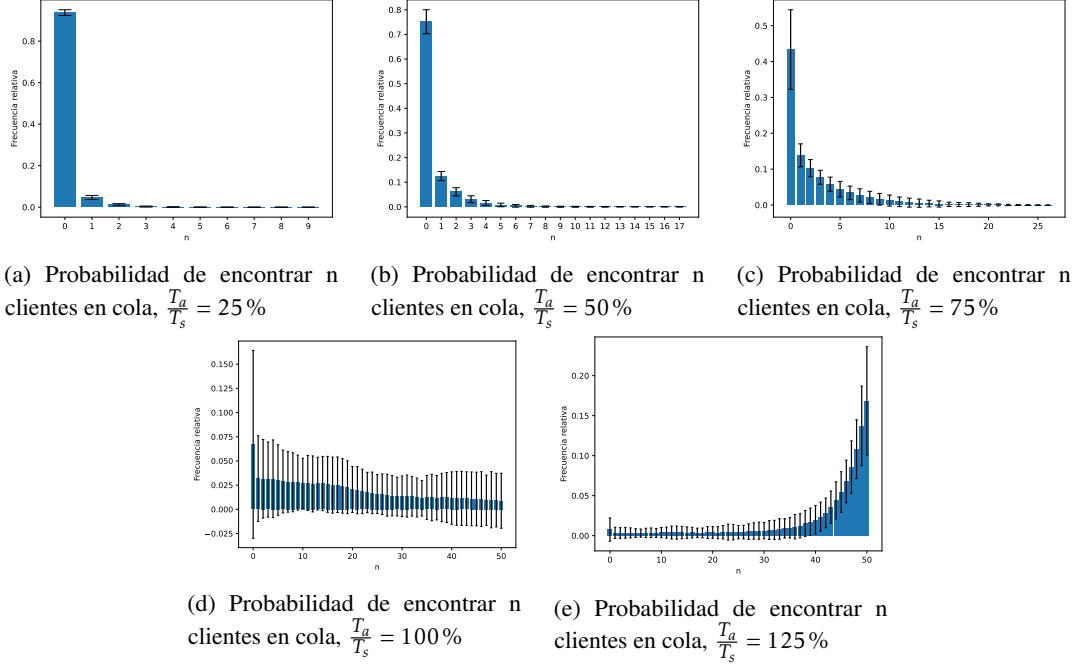
(a) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 25\%$ (b) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 50\%$ (c) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 75\%$ (d) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 100\%$ (e) Probabilidad de encontrar n clientes en cola, $\frac{T_a}{T_s} = 125\%$ Figura 7: Probabilidad de encontrar n clientes en cola, con bandas de error del 95 %.5.2.4. $cap = 10$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(\text{den}) [\%]$
25	$0,331 \pm 0,043$	$0,082 \pm 0,026$	$0,656 \pm 0,195$	$2,649 \pm 0,279$	$24,899 \pm 1,98$	0 ± 0
50	$1 \pm 0,196$	$0,499 \pm 0,161$	$1,991 \pm 0,577$	$3,997 \pm 0,653$	$50,056 \pm 4,315$	$0,03 \pm 0,191$
75	$2,603 \pm 0,633$	$1,861 \pm 0,592$	$5,009 \pm 1,467$	$7,017 \pm 1,528$	$74,207 \pm 5,288$	$1,006 \pm 1,392$
100	$5,448 \pm 1,097$	$4,532 \pm 1,063$	$9,81 \pm 2,36$	$11,8 \pm 2,451$	$91,566 \pm 4,281$	$7,819 \pm 5,039$
125	$7,858 \pm 0,818$	$6,878 \pm 0,802$	$13,973 \pm 2,167$	$15,974 \pm 2,285$	$98,064 \pm 2,147$	$21,018 \pm 5,133$

Figura 8: Probabilidad de encontrar n clientes en cola, con bandas de error del 95 %.

5.2.5. $cap = 50$

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$	$p(\text{den}) [\%]$
25	$0,332 \pm 0,041$	$0,083 \pm 0,024$	$0,665 \pm 0,174$	$2,661 \pm 0,252$	$24,895 \pm 2,103$	0 ± 0
50	$1 \pm 0,224$	$0,501 \pm 0,193$	$2 \pm 0,715$	$3,999 \pm 0,79$	$49,895 \pm 4,074$	0 ± 0
75	$3,091 \pm 1,422$	$2,34 \pm 1,363$	$6,176 \pm 3,348$	$8,177 \pm 3,427$	$75,172 \pm 7,084$	0 ± 0
100	$19,447 \pm 14,655$	$18,48 \pm 14,622$	$37,589 \pm 30,016$	$39,592 \pm 30,1$	$96,679 \pm 4,886$	$0,911 \pm 2,832$
125	$42,903 \pm 3,911$	$41,907 \pm 3,909$	$82,136 \pm 11,07$	$84,138 \pm 11,164$	$99,614 \pm 0,795$	$16,649 \pm 6,263$

Figura 9: Probabilidad de encontrar n clientes en cola, con bandas de error del 95 %.

5.2.6. $cap = \infty$

En este caso no tenemos tope de clientes en la cola, entonces no hay probabilidad de denegación.

- Promedio de clientes en el sistema ($q(n) + u(n)$)
- Cantidad de clientes en cola en promedio ($q(n)$)
- Demora promedio esperada en cola ($d(n)$)
- Tiempo promedio en el sistema ($d(n) + s(n)$)
- Ocupación del servidor ($u(n) * 100\%$)

$\frac{T_a}{T_s} \times 100\% [\%]$	$q(n) + u(n) [\text{min}]$	$q(n) [\text{clientes}]$	$d(n) [\text{min}]$	$d(n) + s(n) [\text{min}]$	$u(n) \times 100\% [\%]$
25	$0,333 \pm 0,048$	$0,082 \pm 0,028$	$0,656 \pm 0,201$	$2,655 \pm 0,283$	$25,043 \pm 2,484$
50	$0,987 \pm 0,207$	$0,488 \pm 0,173$	$1,95 \pm 0,633$	$3,951 \pm 0,698$	$49,869 \pm 4,294$
75	$2,897 \pm 1,212$	$2,154 \pm 1,168$	$5,747 \pm 2,921$	$7,744 \pm 2,981$	$74,292 \pm 5,812$
100	$24,092 \pm 25,391$	$23,123 \pm 25,365$	$45,93 \pm 49,21$	$47,936 \pm 49,28$	$96,902 \pm 4,846$
125	$130,666 \pm 54,734$	$129,669 \pm 54,733$	$206,951 \pm 85,041$	$208,946 \pm 85,13$	$99,668 \pm 0,573$

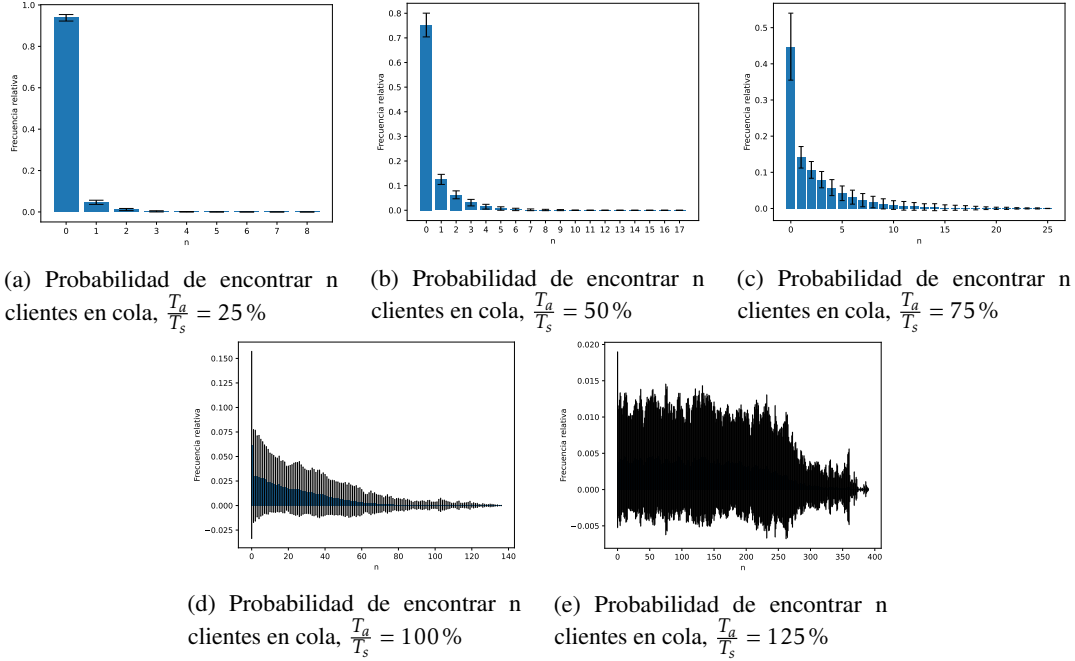


Figura 10: Probabilidad de encontrar n clientes en cola, con bandas de error del 95%.

5.3. Modelo de inventario en Python

En esta simulación se realizarán las corridas del sistema en base a los eventos correspondientes a las distintas acciones de un inventario. El funcionamiento del sistema desarrollado consta de eventos que surgen por meses donde la demanda cambia en base a una distribución de probabilidad. Cada cierto tiempo se realiza la evaluación del inventario con sus existencias o faltantes para poder tomar acciones que permitan cubrir la demanda según una política de inventario determinada (s, S) . En caso de que ante la demanda el modelo de inventario tenga una existencia menor al nivel inferior de inventario s , entonces se programa un pedido con la cantidad necesaria para completar hasta el nivel superior S , esto es $S - I$, para que luego de unos días llegue y el inventario se reponga. Caso contrario, si el nivel de inventario es mayor o igual que s , sigue funcionando de manera habitual.

Para esto se tendrán en cuenta los siguientes parámetros con los que se contará para poder llegar a nuestros objetivos:

- Política de inventario (s, S) : niveles inferior y superior de inventario que determinan a partir de qué punto realizar un pedido y en qué cantidad.
- Nivel inicial de inventario: en nuestro caso igual a 60 unidades.
- Costo de mantenimiento (h) : precio por el cual se mantiene cada unidad en stock, \$1 para nuestro caso.
- Costo inicial de envío (K) : costo fijo en el que se incurre cada vez que se hace un pedido, \$32 (cuando la cantidad pedida $Z > 0$, si no \$0) para nuestro caso.
- Costo incremental de envío (i) : costo adicional por unidad pedida, \$3 para nuestro caso.
- Costo de orden $(C_o(Z))$: costo de realizar una orden de compra, $C_o(Z) = K + iZ$.
- Costo de faltante (π) : costo por la falta de stock, \$5 para nuestro caso.
- Tardanza de la reposición: tiempo que tarda en arribar un pedido para reponer stock, en nuestro caso es una variable aleatoria que se distribuye de manera uniforme entre 0.5 y 1 mes.
- Tiempo medio entre demandas (meses): variable aleatoria con distribución exponencial, $1/\lambda = 0,1$ en nuestro caso ($\lambda = 10$ demandas/mes).

$$\blacksquare \text{ Distribución de la demanda: en nuestro caso } D = \begin{cases} 1 & c.p. & 1/6 \\ 2 & c.p. & 1/3 \\ 3 & c.p. & 1/3 \\ 4 & c.p. & 1/6 \end{cases}.$$

- Criterio de finalización: en nuestro caso es por el tiempo de la simulación, $t = 120$ meses, es decir 10 años.

Para poder llevar a cabo la simulación, emplearemos las siguientes variables de estado y estadísticas:

- Nivel de inventario: el nivel actual del inventario.
- Costo total de pedido: el costo de pedido acumulado actual.
- Área de existencia: área debajo del nivel de inventario real a lo largo del tiempo.
- Área de escasez: área debajo del nivel de inventario faltante a lo largo del tiempo.

Finalmente, el sistema calcula los costos mencionados anteriormente para poder analizar el estado de los costos del inventario, hacer comparaciones y extraer conclusiones que permitan tomar decisiones.

Para analizar el rendimiento del modelo, variamos la política de inventario (s, S) , dado que es el principal factor que la empresa puede modificar y sobre el cual podrá tomar decisiones.

Realizaremos 100 simulaciones, de 120 meses cada una como se ha mencionado anteriormente y promediaremos los siguientes estadísticos:

- Costo de orden promedio (\bar{C}_o)
- Costo de mantenimiento promedio ($h\bar{I}^+$)
- Costo de faltante promedio ($\pi\bar{I}^-$)
- Costo total promedio ($\bar{C}_T = \bar{C}_o + h\bar{I}^+ + \pi\bar{I}^-$)

Presentaremos los resultados obtenidos junto con sus intervalos de confianza del 95 %, obtenidos suponiendo que los mismos se distribuyen de manera normal, por el teorema central del límite, en el formato *valor \pm error*.

Política (s, S)	\bar{C}_o [\$/mes]	$h\bar{I}^+$ [\$/mes]	$\pi\bar{I}^-$ [\$/mes]	\bar{C}_T [\$/mes]
(20, 40)	97,428 \pm 5,639	9,277 \pm 1,043	17,693 \pm 4,08	124,398 \pm 7,457
(20, 60)	88,624 \pm 4,921	17,531 \pm 1,581	12,926 \pm 3,972	119,081 \pm 6,545
(20, 80)	85,022 \pm 5,32	26,941 \pm 2,093	9,653 \pm 3,539	121,615 \pm 6,333
(20, 100)	83,098 \pm 5,35	36,777 \pm 2,074	7,336 \pm 2,821	127,211 \pm 5,857
(40, 60)	98,196 \pm 5,963	25,615 \pm 1,484	1,797 \pm 1,253	125,608 \pm 5,411
(40, 80)	88,739 \pm 5,041	35,226 \pm 2,123	1,342 \pm 1,11	125,307 \pm 4,299
(40, 100)	85,31 \pm 5,175	45,12 \pm 2,393	1,094 \pm 1,037	131,523 \pm 4,598
(60, 80)	99,073 \pm 6,08	45,117 \pm 1,804	0,075 \pm 0,204	144,264 \pm 4,979
(60, 100)	89,9 \pm 5,195	54,423 \pm 2,206	0,055 \pm 0,177	144,378 \pm 3,938

5.3.1. Conclusiones de la simulación

De los resultados obtenidos, podemos observar como a medida que se van incrementando los niveles generales de inventario, el costo por faltante se va reduciendo hasta hacerse prácticamente despreciable, mientras que por el contrario se va incrementando el costo de mantenimiento. Por otro lado, notamos como el costo de orden es afectado por la diferencia entre entre los niveles superior e inferior, siendo mayor cuanto más cercanos están estos entre sí, lo cual es una consecuencia de la mayor frecuencia con la que se realizan pedidos al proveedor.

Finalmente, buscamos un balance entre los costos que permita minimizar el costo total. De las simulaciones realizadas, podemos determinar que de las políticas de inventario comparadas, la mejor resulta ser $(s, S) = (20, 60)$, dado que es la que presenta el menor costo total por mes, $\bar{C}_T = \$119,081 \pm 6,545$, con un 95 % de confianza. Sin embargo, cabe mencionar que, como los valores obtenidos están dados por un intervalo de confianza hay que tener en cuenta su solapamiento con los intervalos obtenidos para otras políticas, en nuestro caso resulta que el mismo se solapa con los obtenidos para casi todas las políticas, quedando las políticas $(s, S) = (40, 100)$, $(s, S) = (60, 80)$ y $(s, S) = (60, 100)$

completamente separados con costos totales mucho mayores de $\bar{C}_T = \$131,523 \pm 4,598$, $\bar{C}_T = \$144,264 \pm 4,979$ y $\bar{C}_T = \$144,378 \pm 3,938$, respectivamente.

De todo esto podemos concluir que las políticas $(s, S) = (40, 100)$, $(s, S) = (60, 80)$ y $(s, S) = (60, 100)$ deberán ser descartadas, por presentar éstos costos significativamente superiores al resto de políticas.

5.4. Modelo de inventario en AnyLogic

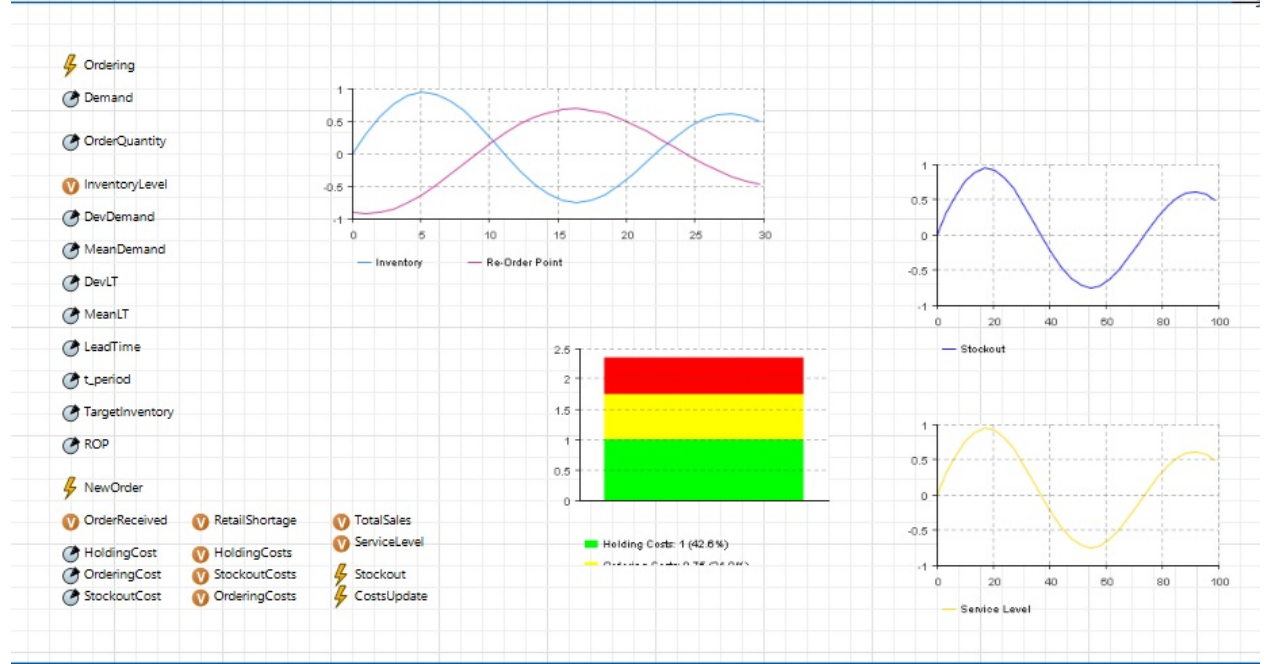


Figura 11: Modelo de Inventario con sus parámetros, variables y eventos utilizados en Anylogic.

Como podemos ver, hay ciertos parámetros que ya hemos utilizados en el modelo realizado en Python, pero fué necesario además agregar nuevos para poder utilizarlos con distintas funcionalidades.

Comenzando por el evento “Ordering” el cual nos permite programar los reabastecimientos del inventario a través de dos parámetros: (demand y order quantity). Además agregamos una variable llamada inventoryLevel la cual analizaremos con una línea de tiempo.

Este es un evento cíclico con un tiempo de recurrencia de un día.

Suponiendo que la demanda diaria y/o el tiempo de entrega se distribuyen normalmente. Necesitamos definir más parámetros para el tiempo de entrega, la demanda media, el tiempo de entrega promedio, la desviación estándar de la demanda y la desviación estándar del tiempo de entrega.

Para el sistema de revisión periódica, reabastecemos en fechas fijas, por lo que solo modificamos el tiempo de recurrencia del evento “Ordering” definiéndolo a través del parámetro “t_period”.

Para el sistema de revisión continua, la regla de reabastecimiento se puede definir con la ayuda del punto de pedido (ROP).

Además incluiremos stock de seguridad en nuestro modelo. Para modelar el tiempo de entrega, definimos el evento “NewOrder” y la variable “OrderReceived” de tipo “Booleano” (con valor inicial “false”) y vuelva a escribir la regla de reposición en el evento “Ordering”.

Si el nivel de inventario alcanza el punto de pedido, se genera un nuevo pedido de reabastecimiento el cual llegará en X días definidos en el parámetro LeadTime. Es por eso que dejamos que el evento “NewOrder” comience en X días. En el momento de la entrada del pedido y el aumento del nivel de inventario, la variable lógica “OrderReceived” toma el valor “false”. Esto significa que no hay otras órdenes recibidas por nuestro proveedor. El siguiente pedido se generará cuando el nivel de inventario vuelva a alcanzar el punto de pedido.

Para estimar la eficiencia de las diferentes políticas de pedidos, necesitamos estimar los costos de mantenimiento de inventario, pedidos y agotamiento de existencias. Primero, se necesitan nuevos parámetros y variables para estos tres tipos de costos. En segundo lugar, los diagramas deben construirse como gráficos de barras y diagramas de tiempo. Definimos tres nuevos parámetros “HoldingCost”, “OrderingCost” y “StockoutCosts” y tres nuevas variables de los mismos. Es necesario definir otras tres nuevas variables, “ServiceLevel”, “TotalSales” y “RetailShortage”.

Los costos, la escasez y el nivel de servicio se actualizan en el evento “CostsUpdate”.

A continuación se realizarán 10 simulaciones de 30 días cada una, donde se llevarán a cabo las mediciones de las siguientes variables:

- Costo de Orden
- Costo de Mantenimiento
- Costo de Faltante
- Costo Total

Para esto se tiene en cuenta que cada 30 días se varían de forma aleatoria distintos parámetros, los cuales inciden entre sí de manera continua. De esta forma, luego de 10 meses de 30 días cada uno se puede ver la siguiente tabla con los resúmenes:

Simulación	Costo de Mantenimiento	Costo de Faltante	Costo de Orden	Costo Total
1	285.5	0	60	345.5
2	140	9	30	179
3	-148	599	90	541
4	-57.3	1,024	50	1,016.7
5	517.2	1,084.8	30	1,632
6	184.1	1,086.6	40	1,310.7
7	-35.3	1,263	140	1,367.7
8	393.2	1,364.4	30	1,787.6
9	189.5	1,368	80	1,637.5
10	144.7	1,375.2	40	1,559.9

Figura 12: Tabla con resúmenes de 10 simulaciones.

Por consiguiente mostraremos las gráficas de los últimos 30 días.

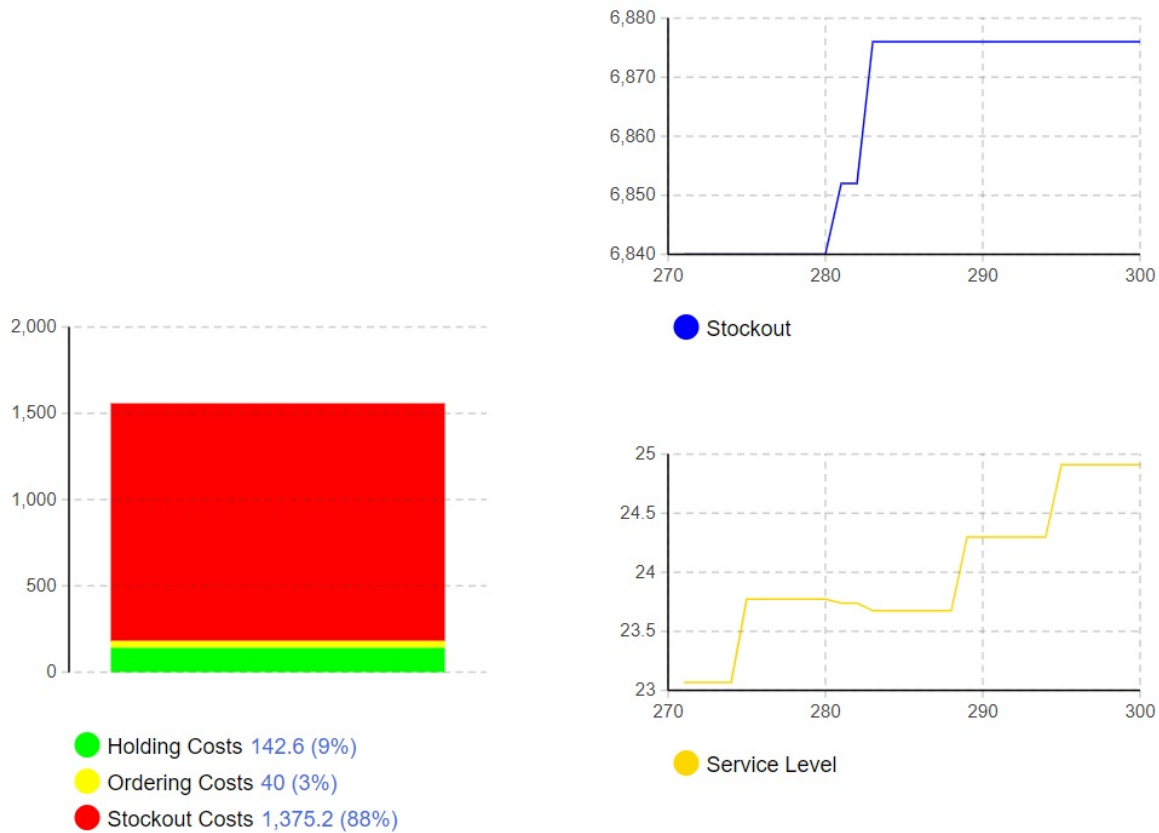


Figura 13: Tabla con resúmenes de 10 simulaciones.

5.4.1. Conclusión de las simulaciones

Cabe aclarar que los resultados negativos no significan que se “ahorró” el costo, esto cuenta como 0 debido a que no se pudo realizar el costo de mantenimiento del stock ya que hubo faltante del mismo. Además se puede observar como en la simulación 2 fué la que más pudo mantener bajos costos a comparación de las demás debido a que tuvo pocas ordenes de compra y una gran existencia al principio.

La Simulación 8 fué la siguiente con menos costo debido a que si bien tuvo muchos gastos en las ordenes de compra, pudo distribuir mejor la faltante y el mantenimiento de la existencia en el inventario.

A su vez la Simulación 1 fué la más costosa, debido a que mantuvo una gran cantidad de stock en el inventario mientras que la segunda mas costosa (la simulación 7) tuvo el mismo problema con la diferencia de que esta que tuvo mucha faltante.

Como conclusión se puede decir que el mayor problema radica en la falta de equilibrio en los costos de cada acción, ya que por ejemplo se pueden tener altos costos de orden de compra, pero esto no fué problema para la simulación 8 que distribuyó la faltante y el mantenimiento de existencia de manera que pudo reducir los costos. De la misma manera, hubo simulaciones con pocas ordenes de compra pero con altos costes de faltante o de mantenimiento, lo que llevo a grandes costos totales.

6. Conclusiones

Se buscó realizar 10 corridas de cada modelo donde se quiso analizar determinados resultados para saber como se comportaría con parámetros aleatorios. Ante esto se realizaron los modelos con dos tecnologías distintas para poder compararlas y así tener distintas fuentes de donde evaluar su potencial. Las tecnologías utilizadas fueron el lenguaje Python, donde se desarrollaron clases y métodos específicos para las corridas; Y luego se desarrolló el mismo modelo en AnyLogic buscando tener un funcionamiento similar al hecho en código pero a través de patrones específicos de la presente herramienta.

Se puede afirmar que los modelos de simulación creados han funcionado de la manera esperada. Los creados en Python fueron los más adaptables y maleables debido a la posibilidad de desarrollarlo de la manera más conveniente. Sin embargo, a pesar de que AnyLogic pueda tener sus restricciones, es una tecnología muy interesante para este tipo de experimentos debido a que cuenta con muchas herramientas que hacen posible llegar a distintas soluciones con una gran capacidad de procesar información y datos.

Referencias

- [1] Wikipedia, *Proceso estocástico* — *Wikipedia, La enciclopedia libre*, [Internet; consultado 01-junio-2022], 2021. dirección: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Proceso_estoc%C3%A1stico&oldid=140355105.
- [2] Gestión de Operaciones. (2015). Simulación de una Línea de Espera M/M/1 (Teoría de Colas) en Excel. [Internet; consultado 01-junio-2022], dirección: <https://www.gestiondeoperaciones.net/lineas-de-espera/simulacion-de-una-linea-de-espera-mm1-teoria-de-colas-en-excel/>.
- [3] —, (2015). Propiedad de Falta de Memoria o Amnesia de la Distribución Exponencial, dirección: <https://www.gestiondeoperaciones.net/estadistica/propiedad-de-falta-de-memoria-o-amnesia-de-la-distribucion-exponencial/>.
- [4] —, (2015). Qué son las Líneas de Espera (Teoría de Colas), dirección: <https://www.gestiondeoperaciones.net/lineas-de-espera/que-son-las-lineas-de-espera-teoria-de-colas/>.
- [5] A. Mahdavi, “M/M/1/∞/∞ (single-server queues),” en *The Art of Process-Centric Modeling with AnyLogic*. The AnyLogic Company, 2020, págs. 81-103. dirección: <https://www.anylogic.com/resources/books/the-art-of-process-centric-modeling-with-anylogic/>.
- [6] A. M. Law y W. D. Kelton, “Simulation of a single-server queueing system,” en *Simulation Modeling Analysis*, 2nd edition. 1991, págs. 13-74.
- [7] —, “Simulation of an inventory system,” en *Simulation Modeling Analysis*, 2nd edition. 1991, págs. 75-103.
- [8] —, “Appendix 1B - A Primer on Queueing Systems,” en *Simulation Modeling Analysis*, 2nd edition. 1991, págs. 118-120.
- [9] —, “Appendix 1A - Fixed-Increment Time Advance,” en *Simulation Modeling Analysis*, 2nd edition. 1991, págs. 116-117.
- [10] C. Arzac, J. A. Alves, E. Vera Bahima, C. Bohdan, N. N. Nichio y G. F. Santori, “Simulación aplicada a la gestión de stocks,” en *I Jornadas de Investigación y Transferencia (La Plata, 2011)*, 2011.
- [11] R. B. Chase, N. J. Aquilano y R. Jacobs, *Administración de Producción y Operaciones. Manufactura y Servicios*. Ed. Mc.Graw Hill, 2004.
- [12] L. J. Krajewski, M. K. Malhotra y L. P. Ritzman, *Administración de operaciones procesos y cadenas de valor*. Ed. Pearson Addison-Wesley, 2008.