

# Geometrische Regularisierung durch Dämpfung: Aichmayr-Metrik, endliche Skalenübergänge und das $\phi$ -Regime

Marcel Aichmayr<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Aichmayr Technology, Österreich

December 17, 2025

## Abstract

Wir untersuchen eine gedämpfte, statische, sphärisch symmetrische Familie von Metriken, motiviert durch das Prinzip, dass physikalisch sinnvolle Übergänge über endliche Skalen erfolgen sollten und dass singuläre Kopplungen auf ein Versagen einer effektiven Beschreibung hinweisen. Wir unterscheiden (i) eine exponentielle Dämpfung der Schwarzschild-artigen Kopplung und (ii) eine kern-regularisierte Vervollständigung, die endliche Krümmungsvarianten im Grenzfall  $r \rightarrow 0$  erzwingt. Darüber hinaus definieren wir ein Kriterium für einen radikalen Bruch “mikroskopischer” Beschreibungen und führen ein  $\phi$ -dominiertes effektives Regime als operational definierte Ordnungsparameter-Ebene ein. Der Rahmen wird in einer paierfähigen, falsifizierbaren Form dargestellt.

## 1 Einleitung

Klassische Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie weisen unter idealisierten Bedingungen Krümmungssingularitäten auf. Solche Divergenzen können entweder auf physikalische Extremfälle hindeuten oder – vorsichtiger interpretiert – auf ein Versagen einer effektiven Beschreibung bei kleinen Skalen. Motiviert durch die Forderung, dass Übergänge über endliche Skalen erfolgen sollten, führen wir Dämpfungsskalen in die gravitative Kopplung ein und analysieren Kriterien geometrischer Regularisierung.

## 2 Baseline: Exponentieller Dämpfungsansatz

Wir betrachten ein statisches, sphärisch symmetrisches Linienelement

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

mit der exponentiellen Dämpfungsform

$$f_{\text{exp}}(r) = 1 - \frac{2GM}{r} e^{-r/r_s}, \quad r_s > 0, \quad (2)$$

wobei  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  ist.

### 2.1 Dämpfungsfaktor

Wir definieren

$$D_{\text{exp}}(r) = e^{-r/r_s}, \quad 0 < D_{\text{exp}}(r) \leq 1, \quad (3)$$

wodurch sich die effektive Kopplung wie folgt modifiziert:

$$\frac{2GM}{r} \longrightarrow \frac{2GM}{r} D_{\text{exp}}(r). \quad (4)$$

## 2.2 Entwicklung nahe dem Zentrum

Für  $r \rightarrow 0$  gilt

$$e^{-r/r_s} = 1 - \frac{r}{r_s} + \mathcal{O}(r^2), \quad (5)$$

und damit

$$\frac{2GM}{r} e^{-r/r_s} = \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_s} + \mathcal{O}(r). \quad (6)$$

## 2.3 Krümmungsvarianten: Was der Exponentialansatz *nicht* löst

Sei  $K(r) = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$  der Kretschmann-Skalar. Für die Schwarzschild-Lösung gilt

$$K_{\text{Schw}}(r) = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6}. \quad (7)$$

Da  $e^{-r/r_s} \rightarrow 1$  für  $r \rightarrow 0$ , entfernt der exponentielle Ansatz in Gl. (2) die Krümmungsdivergenz im Zentrum *nicht*. Seine Wirkung besteht vielmehr in einer strukturellen Modifikation der Kopplung außerhalb des strikten Kerns sowie in einer endlichen Skala  $r_s$  für großskalige Abschwächung.

## 3 Kern-regularisierte Vervollständigung (endliche Krümmung)

Um endliche Krümmungsvarianten im Zentrum zu erzwingen, ersetzen wir die singuläre Kopplung durch ein kern-regularisiertes Profil:

$$f_{\text{core}}(r) = 1 - \frac{2GM r^2}{r^3 + a^3}, \quad a > 0. \quad (8)$$

### 3.1 De-Sitter-Kern-Grenzfall

Für  $r \rightarrow 0$  ergibt sich

$$f_{\text{core}}(r) = 1 - \frac{2GM}{a^3} r^2 + \mathcal{O}(r^5), \quad (9)$$

was einem De-Sitter-artigen Kern mit

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{6GM}{a^3} \quad (10)$$

entspricht.

### 3.2 Kretschmann-Skalar des regularisierten Kerns

Für Metriken der Form  $ds^2 = -f c^2 dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$  kann geschrieben werden

$$K(r) = (f''(r))^2 + \left(\frac{2f'(r)}{r}\right)^2 + \left(\frac{2(1-f(r))}{r^2}\right)^2. \quad (11)$$

Einsetzen von Gl. (8) liefert

$$K_{\text{core}}(r) = \frac{48G^2M^2 (2a^{12} - 2a^9r^3 + 18a^6r^6 - 4a^3r^9 + r^{12})}{c^4 (r^3 + a^3)^6}, \quad (12)$$

und somit

$$\lim_{r \rightarrow 0} K_{\text{core}}(r) = \frac{96G^2M^2}{c^4 a^6} < \infty. \quad (13)$$

## 4 Hybrid: Regularer Kern und exponentielle Fernfeld-Dämpfung

Um die exponentielle Fernfeldstruktur zu erhalten und zugleich einen regulären Kern zu gewährleisten, definieren wir

$$f_{\text{hyb}}(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \frac{r^3}{r^3 + a^3} e^{-r/r_s}. \quad (14)$$

Diese Form ist für  $r \geq 0$  glatt, besitzt einen De-Sitter-artigen Kern und geht für  $r \gg a$  in den exponentiellen Dämpfungsansatz über.

## 5 Mathematische Definition des radikalen Bruchs“ und des $\phi$ -Übergangs

### 5.1 Mikroskopische Freiheitsgrade und Wirkung

Seien mikroskopische Freiheitsgrade  $\{q_i(t)\}_{i=1}^N$  durch

$$S[q] = \int dt \mathcal{L}(q, \dot{q}; \lambda(x)) \quad (15)$$

beschrieben, wobei  $\lambda(x)$  eine lokale Kopplungsfunktion ist.

### 5.2 Dämpfung als Regularisator

Wir führen einen Regularisator  $D_\ell(x)$  mit charakteristischer Skala  $\ell > 0$  ein:

$$\lambda(x) \mapsto \lambda_\ell(x) \equiv \lambda(x) D_\ell(x). \quad (16)$$

### 5.3 Definition: Radikaler Bruch

Der Stabilitäts- bzw. Kopplungsoperator (Hesse-Matrix) sei

$$H_{ij}(t) \equiv \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{(q(t), \dot{q}(t))}. \quad (17)$$

Ein radikaler Bruch liegt vor, wenn die mikroskopische Kopplung singulär oder degeneriert wird:

$$\exists t_* : \|H(t)\| \rightarrow \infty \text{ oder } \det H(t_*) = 0 \text{ oder } \text{spec}(H) \text{ instabil wird.} \quad (18)$$

### 5.4 Definition: $\phi$ -Regime

Sei  $\phi(x)$  ein Ordnungsparameter

$$\phi(x) = \Phi(\lambda_\ell(x), q(x), \text{Umweltkanäle}), \quad (19)$$

und definiere eine effektive Wirkung durch Integration über mikroskopische Freiheitsgrade:

$$S_{\text{eff}}[\phi] \equiv -i \ln \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \phi]}. \quad (20)$$

Ein  $\phi$ -dominiertes Regime ist operational gegeben, wenn in einem Gebiet  $\Omega$

$$\left\| \frac{\delta S}{\delta \phi} \right\| \gg \left\| \frac{\delta S}{\delta q} \right\| \quad (21)$$

gilt.

## 6 Das $\phi$ -Feld (Minimalform)

Wir definieren

$$\phi(t, r) = \left(1 - \frac{2GM}{r} e^{-r/r_s}\right) \sin\left(\frac{\pi r}{r_s}\right) \cos\left(\frac{2\pi ct}{r_s}\right), \quad (22)$$

als strukturierte effektive Antwort, nicht als Energieterm.

## 7 Falsifizierbarkeit

Der nächste notwendige Schritt ist die Ableitung parameterabhängiger Vorhersagen, die  $f_{\text{exp}}$ ,  $f_{\text{core}}$  und  $f_{\text{hyb}}$  von der Schwarzschild-Lösung unterscheiden, sowie die Definition ausgeschlossener Parameterbereiche für  $(a, r_s)$  anhand von Krümmungs invarianten, Linsenwirkung und Rotationsskurven.

## References

- [1] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik (1905).
- [2] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (1916).

## Reproduzierbarkeit und Dateiintegrität

Die in dieser Arbeit verwendeten Abbildungen wurden programmatisch erzeugt. Zur Reproduzierbarkeit und Integritätsprüfung sind die SHA-256-Prüfsummen der Plot-Dateien unten angegeben.

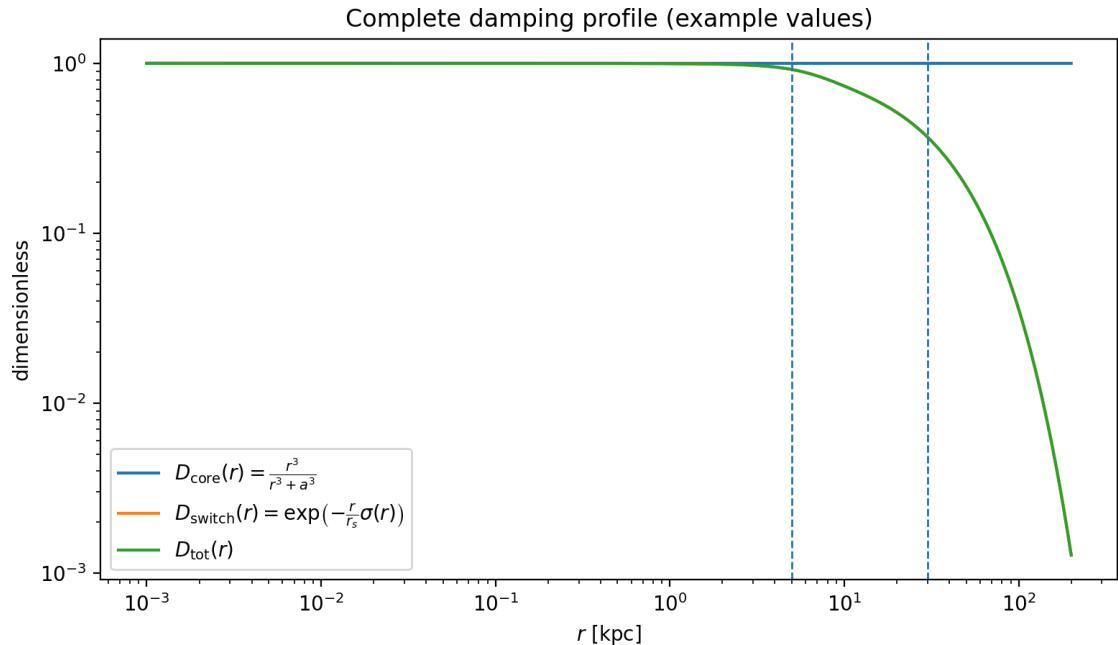


Figure 1: Complete damping structure  $D_{\text{tot}}(r)$  shown together with its individual components. The core factor  $D_{\text{core}}(r) = \frac{r^3}{r^3 + a^3}$  enforces curvature regularization at  $r \rightarrow 0$ , while the smoothly activated exponential factor controls large-scale attenuation. Vertical dashed lines indicate the activation radius  $R = 5$  kpc and the damping scale  $r_s = 30$  kpc.

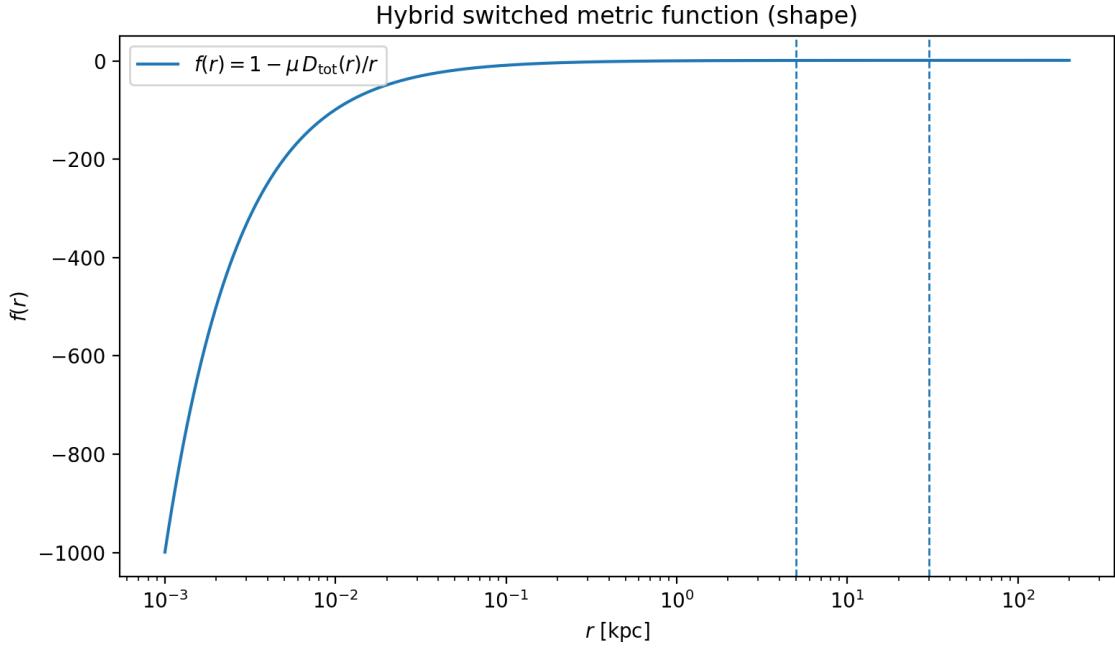


Figure 2: Qualitative shape of the hybrid metric function  $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}D_{\text{tot}}(r)$  (scaled units). The metric is Schwarzschild-like for  $r \ll R$ , transitions smoothly in the galactic regime, and exhibits exponential attenuation for  $r \gtrsim r_s$ . No discontinuities or singular features are introduced by construction.

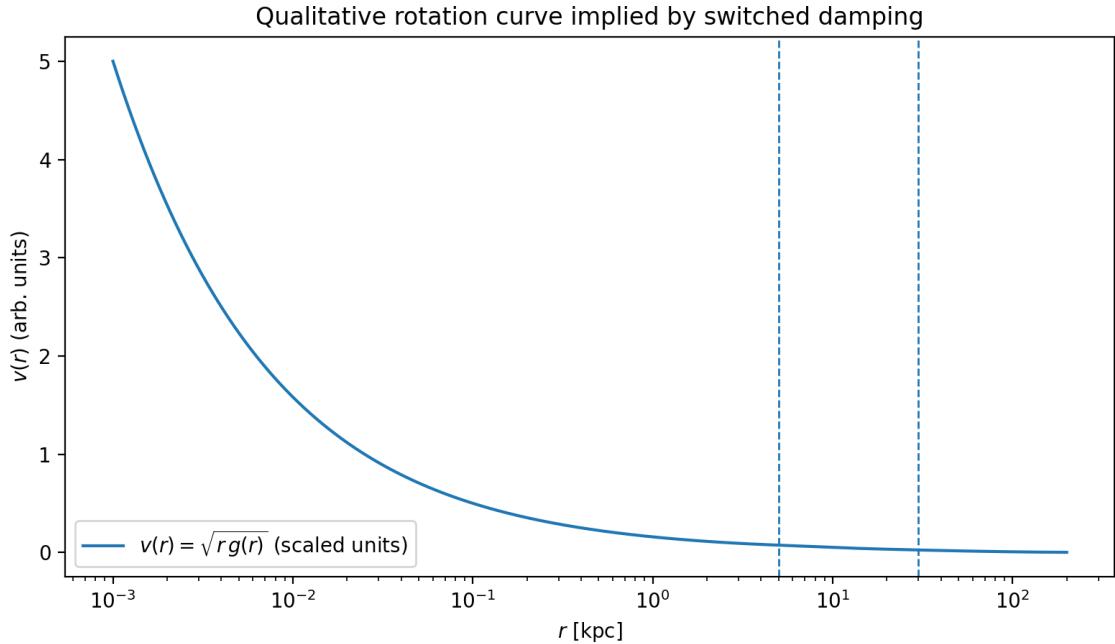


Figure 3: Qualitative circular velocity profile  $v(r) = \sqrt{r g(r)}$  implied by the damped metric (arbitrary units). Compared to the Keplerian decline of standard GR, the damping induces a slower fall-off in the intermediate regime  $R \lesssim r \lesssim r_s$ , followed by exponential suppression at larger radii. This constitutes a falsifiable galactic-scale signature of the model.