Matematika 4 — Logika pre informatikov
5. sada teoretických úloh

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **22. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu05[1].

Na riešenie sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[2]. Riešenia odovzdané po termíne sa považujú za opravy neodovzdaných riešení s príslušnými dôsledkami podľa pravidiel[2].

Detailnejšie inštrukcie sú na začiatku hodnotenej časti.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[3], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Svoje tablá môžete skontrolovať pomocou editora tabiel[4].

[1] https://forms.gle/aE1afvcobwW346Ck9
[2] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh
[3] https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf
[4] https://dai.fmph.uniba.sk/courses/lpi/tableauEditor/

Cvičenie 5.1. (5.1.2, 5.1.1) Dokážte, že $T \vDash_{\mathrm{p}} X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$, kde:

(A_1) (kino(Fero, Anka) ∨ (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∨ hra(Fero, FerovaPS)))

(A_2) (kapela(PinkFloyd) ∧ hraciaKonzola(FerovaPS))

(A_3) (¬frustrovany(Fero) → kino(Fero, Anka))

(A_4) (frustrovany(Fero) → (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∨ hra(Fero, FerovaPS)))

(A_5) ¬(kino(Fero, Anka) ∧ (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∧ hra(Fero, FerovaPS)))

(A_6) (hra(Fero, FerovaPS) → pocuva(Fero, PinkFloyd))

(A_7) (pocuva(Fero, PinkFloyd) → ¬frustrovany(Fero))

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) (¬hra(Fero, FerovaPS) → kino(Fero, Anka))

Preložte teóriu a formulu do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

> V tejto úlohe neodpovedáme na neformálnu otázku, ale riešime priamo iba formálny problém vyplývania. Preto netreba overovať splniteľnosť teórie T.
>
> Ak by T bola nesplniteľná, formula X by z nej vyplývala triviálne a nemalo by to praktické dôsledky. Uzavreté tablo by však existovalo aj v tomto prípade.

Cvičenie 5.2. (5.1.3, 5.1.1) Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) (mam(dazdnik, den) → ¬prsi(den))

(A_2) (mokry(cesta, den) → (prsi(den) ∨ preslo(umyvacieAuto, cesta, den)))

(A_3) (vikend(den) → ¬preslo(umyvacieAuto, cesta, den))

(A_4) ((utorok(den) → idemElektrickou(den))
∧ ((¬utorok(den) ∧ ¬vikend(den)) → ¬idemElektrickou(den)))

(A_5) (idemElektrickou(den) → ¬mam(dazdnik, den))

výrokovologicky vyplýva

(X) ((mam(dazdnik, den) ∧ mokry(cesta, den)) → ¬vikend(den))

Preložte teóriu a formulu do slovenčiny. Premyslite si, prečo je formula logickým dôsledkom, a snažte sa zostrojiť tablo tak, aby zodpovedalo vášmu zdôvodneniu.

Hodnotená časť

Riešenie **odovzdajte** najneskôr v pondelok **22. marca 2021 o 11:30** cez odovzdávací formulár pre tu05[1].

Odovzdávajte:

- **Jeden dokument vo formáte PDF** obsahujúci text **celého riešenia aj tablo**. Riešenie musí byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah.

  Tablo môžete vložiť ako screenshot z editora tabiel, musí však byť čitateľné.
- **Export z editora tabiel**[4] — povinne, ak ho pri riešení použijete.

Úloha 5.3. (5.1.5, 5.1.1) O trojici detí sme sa dozvedeli tieto informácie:

1. Janko sa hrá s autíčkom alebo s bábikou.
2. Ak by to, že sa nehrá s autíčkom znamenalo, že sa hrá s bábikou, tak sa určite nehrá s vláčikom.
3. Miško, ak sa hrá s autíčkom alebo s vláčikom, je šťastný.
4. Hanka je šťastná, ak je aspoň jeden z chlapcov šťastný.

Je na základe týchto informácií isté, že *ak sa Janko nehrá s vláčikom, len ak sa s ním hrá Miško, tak sú Miško aj Hanka šťastní*?

Na zodpovedanie otázky tvrdenia sformalizujte vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu a využite tablo.

⚠ Na rozdiel od úloh 5.1 a 5.2, v tejto odpovedáte na neformálnu otázku. Preto potrebujete overiť splniteľnosť.

⚠ Výroky **formalizujte verne**, zachovajte ich spojky, nevyužívajte ekvivalentné úpravy. Vybrali sme ich tak, aby vám umožnili precvičiť si tablové pravidlá pre rôzne spojky s rôznymi znamienkami.

⚠ Vaše tablo by malo mať **najviac 28 uzlov**. Za každý uzol navyše stratíte 0,1 boda.

Prémiová úloha 5.4. (1 b., 2.2.5) V 3. sade teoretických úloh ste zadefinovali verziu výrokovologickej časti logiky prvého rádu, ktorá namiesto štandardných spojok používala iba spojky $\to$ (implikácia) a $\veebar$ (exkluzívne alebo, XOR).

Zadefinujte pre túto verziu vzťah výrokovologická formula X je pravdivá v ohodnotení v, skrátene $v \models_p X$.

Zadefinujte skratky $\dot\neg$, $\dot\wedge$ a $\dot\vee$, teda funkcie na tejto verzii formúl, ktoré vrátia formulu zostavenú zo vstupných formúl a spojok $\to$ a $\veebar$, ktorá vyjadrí rovnaký význam ako príslušná štandardná spojka.

Dokážte, že vaše skratky skutočne majú požadované vlastnosti, teda že pre všetky výrokovologické formuly A a B v tejto verzii:

i. $v \models_p \dot\neg A$ vtt $v \not\models_p A$,

ii. $v \models_p (A \mathbin{\dot\wedge} B)$ vtt $v \models_p A$ a $v \models_p B$,

iii. $v \models_p (A \mathbin{\dot\vee} B)$ vtt $v \models_p A$ alebo $v \models_p B$.

🛟 **Pomôcka.** V štandardnej výrokovologickej časti logiky prvého rádu sme pre každý jazyk $\mathcal{L}$ ako skratku (funkciu na formulách) $\leftrightarrow : \mathcal{E}_\mathcal{L} \times \mathcal{E}_\mathcal{L} \to \mathcal{E}_\mathcal{L}$ zadefinovali ekvivalenciu rovnicou $(A \leftrightarrow B) = ((A \to B) \wedge (B \to A))$. Podobne by sme mohli napríklad zadefinovať ako skratku spojku NAND: $(A \barwedge B) = (\neg A \vee \neg B)$.