HeapSort

Estrutura de Dados II

Jairo Francisco de Souza

HeapSort

- Algoritmo criado por John Williams (1964)
- Complexidade O(NlogN) no pior e médio caso
- Mesmo tendo a mesma complexidade no caso médio que o QuickSort, o HeapSort acaba sendo mais lento que algumas boas implementações do QuickSort
- Porém, além de ser mais rápido no pior caso que o QuickSort, necessita de menos memória para executar
- QuickSort necessita de um vetor O(logN) para guardar as estruturas enquanto o HeapSort não necessita de um vetor auxiliar.

HeapSort

- Utiliza a abordagem proposta pelo SelectionSort
- O SelectionSort pesquisa entre os n elementos o que precede todos os outros n-1 elementos
- Para ordenar em ordem ascendente, o heapsort põe o maior elemento no final do array e o segundo maior antes dele, etc.
- O heapsort começa do final do array pesquisando os maiores elementos, enquanto o selectionsort começa do início do array pesquisando os menores.

HeapSort

Para ordenar, o heapsort usa um Heap

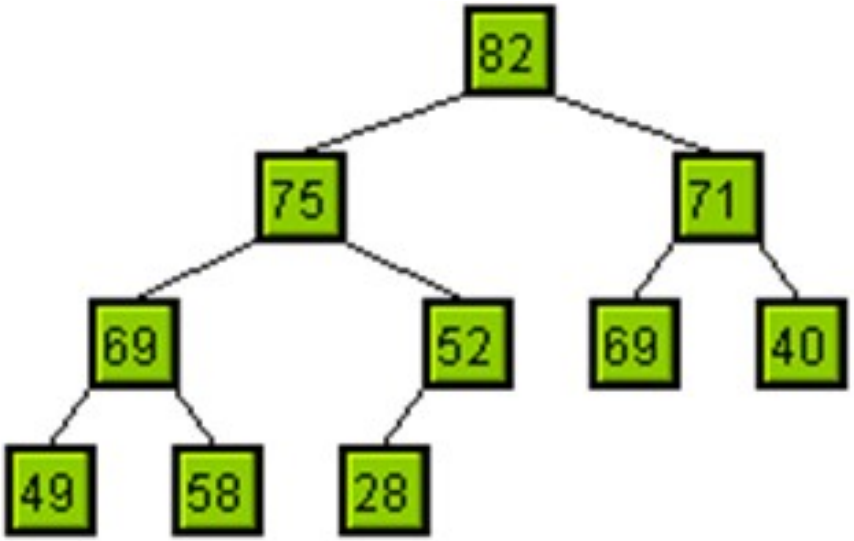
Heap é uma árvore binária com as seguintes propriedades:

O valor de cada nó não é menor que os valores armazenados em cada filho

A árvore é perfeitamente balanceada e as folhas no último nível estão todas nas posições mais a esquerda.

HeapSort

Exemplo de um heap:



HeapSort

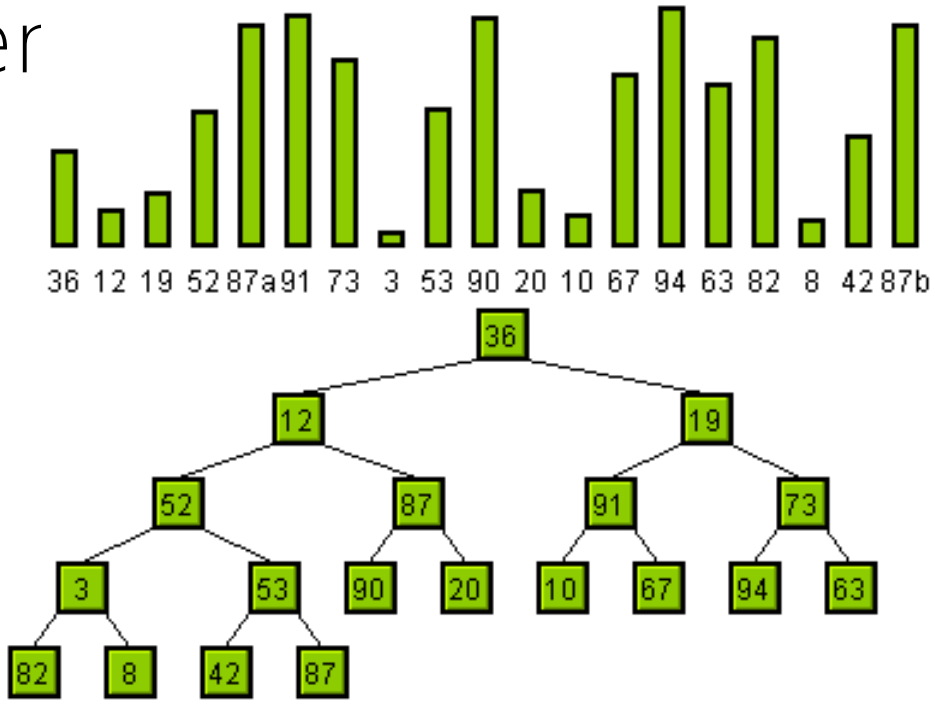
Elementos no heap não estão perfeitamente ordenados.

Apenas sabe-se que o maior elemento está no nó raiz e que, para cada nó, todos os seus descendentes não são maiores que os elementos na raiz.

HeapSort

Tenta-se evitar a utilização real de uma árvore.

A idéia é utilizar a abordagem de heap represer)mo um array:



HeapSort

- Por que usar um heap é importante?
  - a pergunta "qual o maior elemento de vetor?" pode ser respondida instantaneamente: o maior elemento do vetor é v[1];
  - se o valor de v[1] for alterado, o heap pode ser restabelecido muito rapidamente: a operação de *heapfy* não demora mais que lg(n) para fazer o serviço;

HeapSort

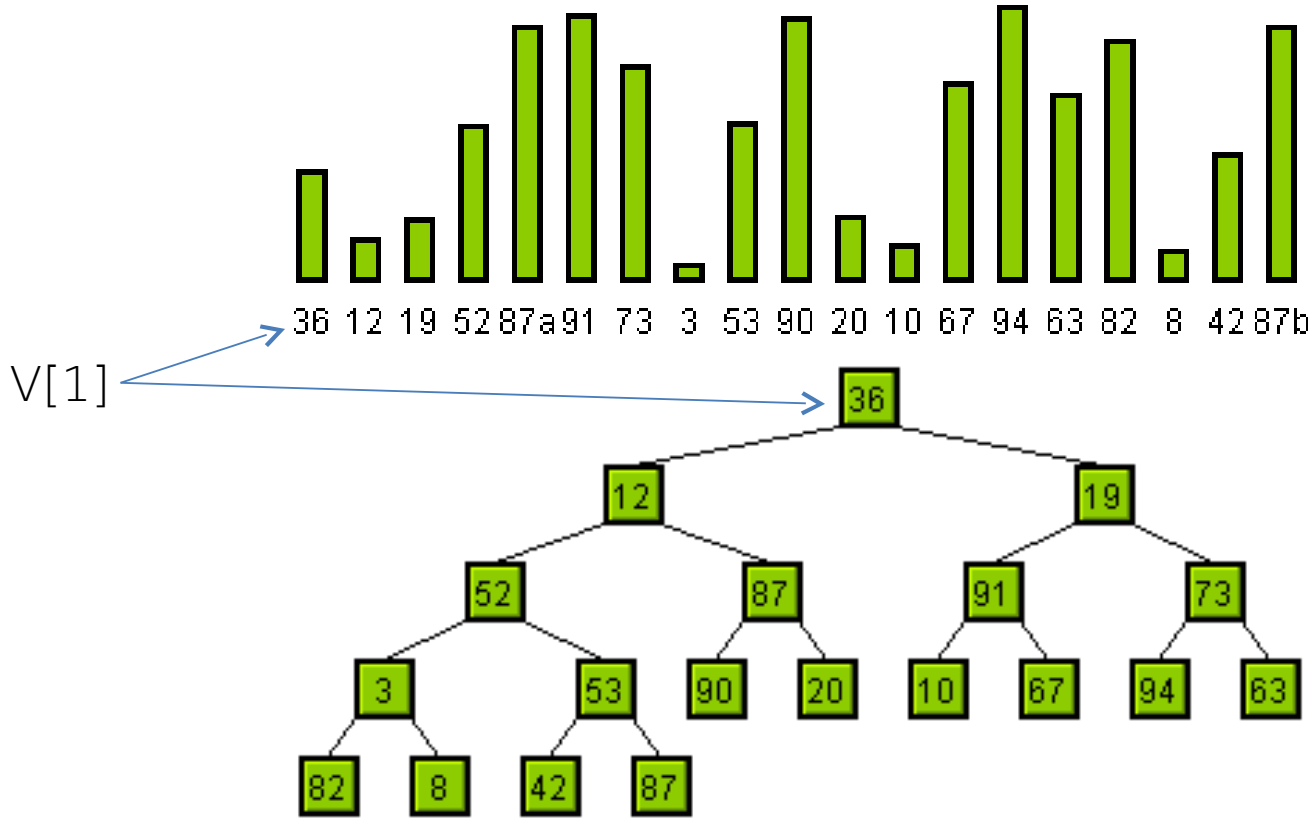
- Algoritmo
  - Dado um vetor V de n elementos, transformar o vetor em um heap
  - Pegar a posição V[1] (ou seja, o maior elemento) e trocar de posição com V[max].
  - Repetir o processo com um array formado pelos elementos V[1], ..., V[n-1]

HeapSort

- Primeiro passo:
  - Como transformar o array em um heap?
- Verifique que, caso o array represente uma árvore, então:
  - A raiz está em V[1]
  - O pai de um índice f é f div 2
  - O filho esquerdo de um índice p é 2p
  - O filho direito de um índice p é 2p+1

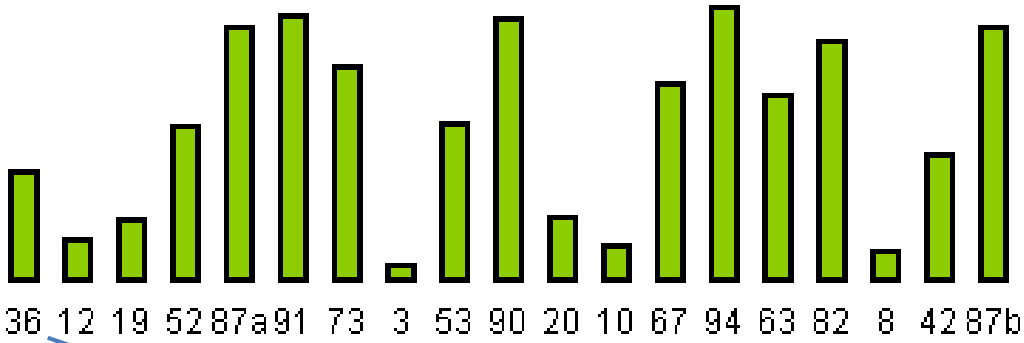
HeapSort

Exemplo:

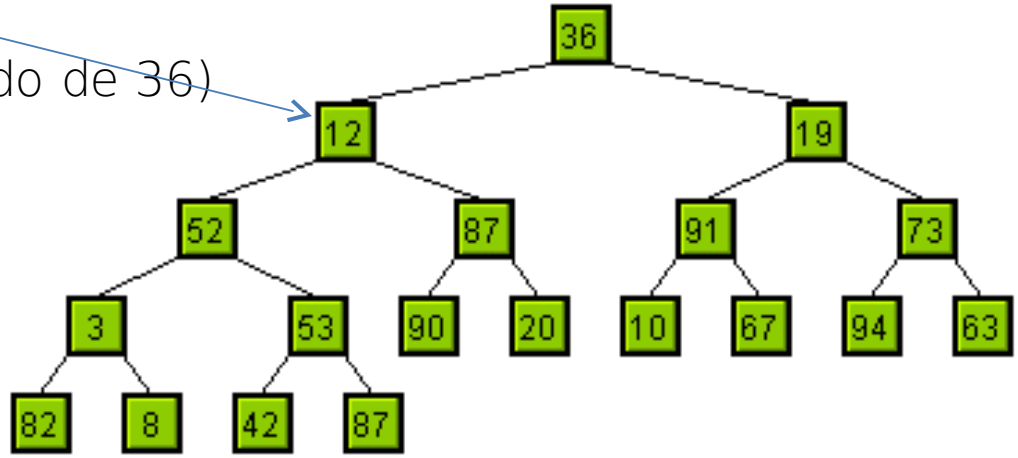


HeapSort

Exemplo:

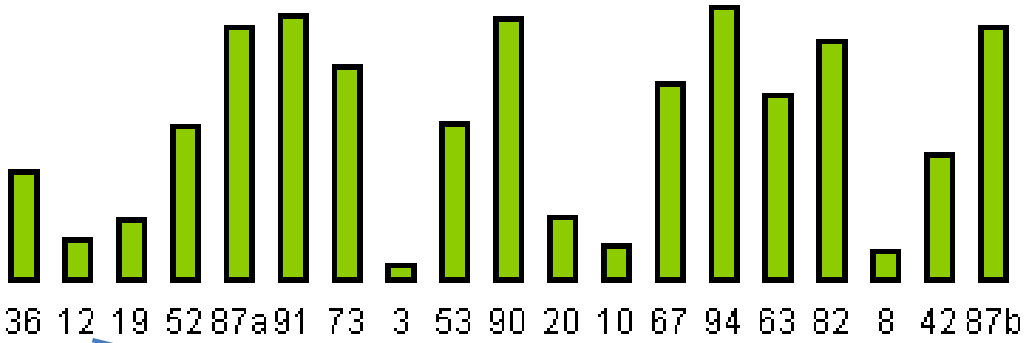


V[1*2]
(filho esquerdo de 36)

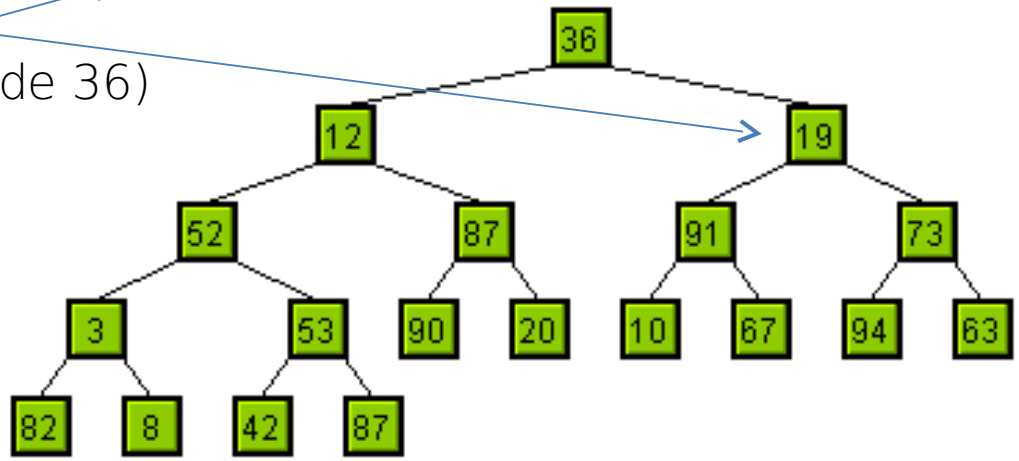


HeapSort

Exemplo:

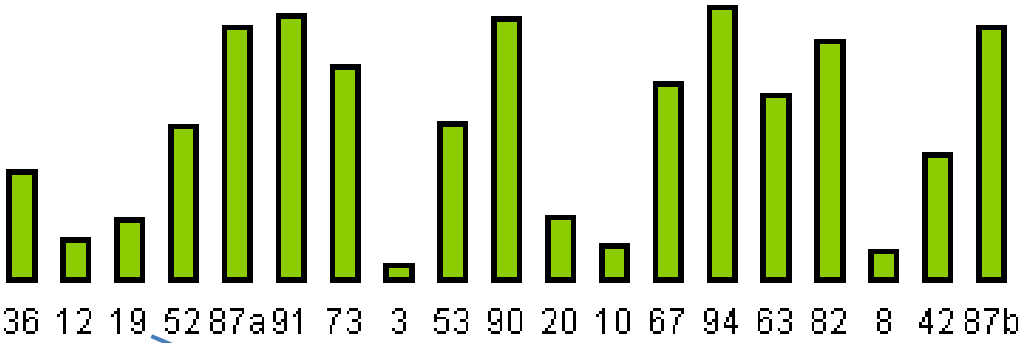


V[1*2 + 1]
(filho direito de 36)

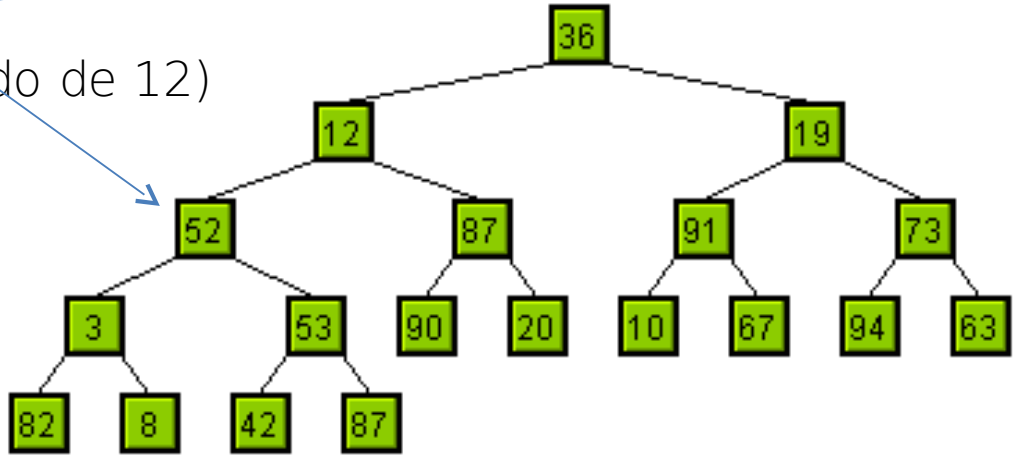


HeapSort

Exemplo:

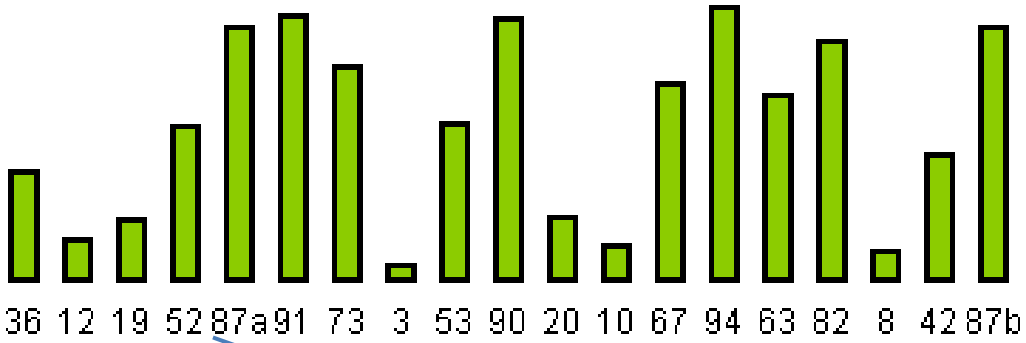


V[2*2]
(filho esquerdo de 12)

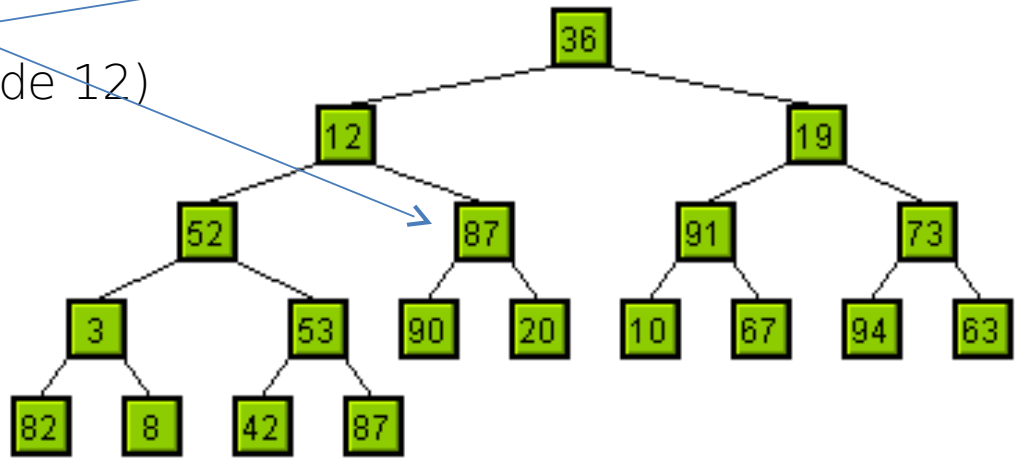


HeapSort

Exemplo:



V[2*2 + 1]
(filho direito de 12)

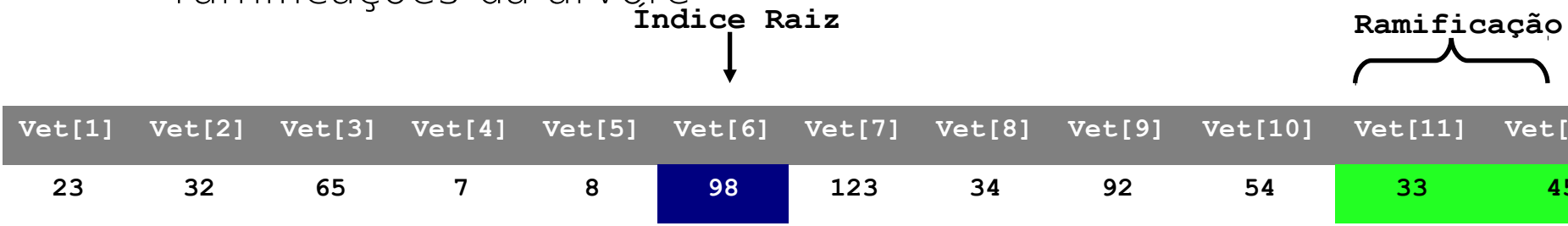


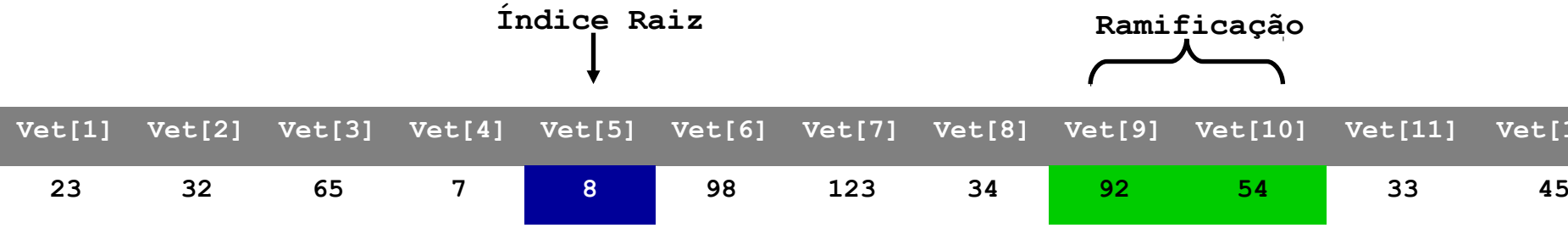
HeapSort

- Se as propriedades de um heap são:
  - O valor de cada nó não é menor que os valores armazenados em cada filho
- Então:
  - v[p] >= v[2p]
  - V[p] >= v[2p+1]
- Assim, para transformar o array em um heap, basta reposicionar as chaves utilizando a propriedade acima!

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

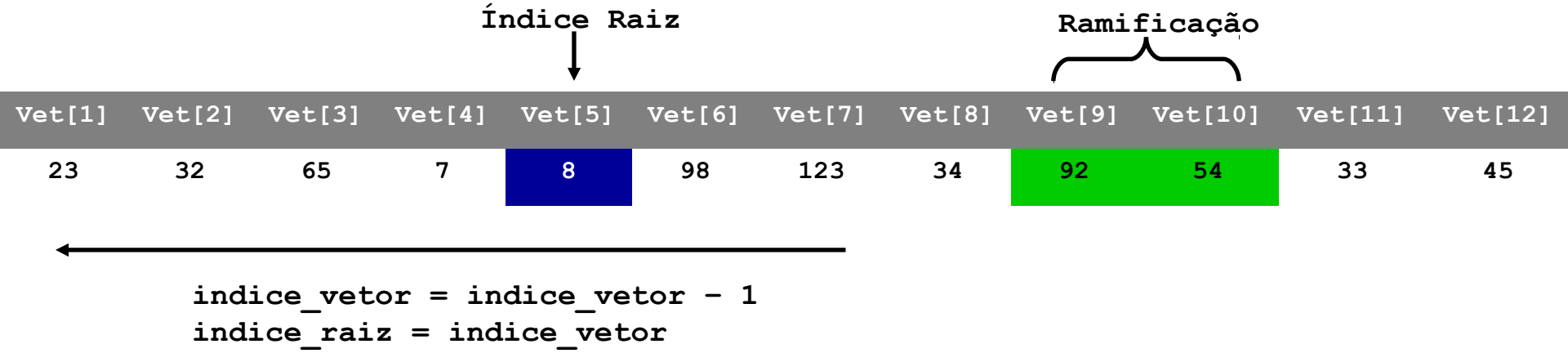
- Para construir um ***heap***, é necessário dividir o vetor em duas partes
- Na primeira parte do vetor devem ser considerados os elementos ***max-heap***
- Para isso, o algoritmo identifica um índice raiz e suas ramificações da árvore





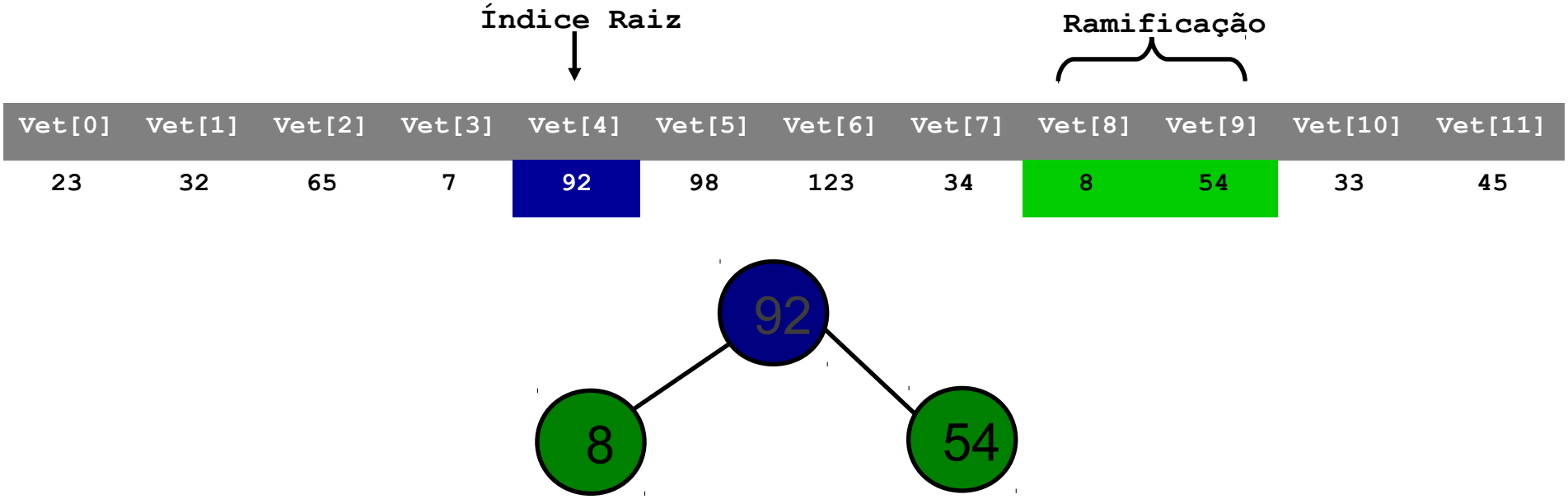
HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- O algoritmo localiza uma raiz no vetor, baseado no decremento da variável *índice*. Cada valor de índice corresponde a uma raiz (**indice_raiz**)
- O decremento acontece da metade do vetor para cima
- Para cada índice raiz as ramificações são calculadas da seguinte forma:
  - **ramificacao = 2 * indice_raiz**
- Por exemplo:



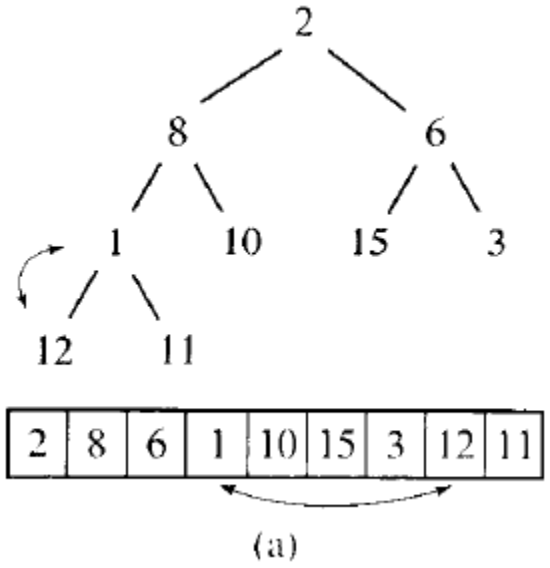
HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

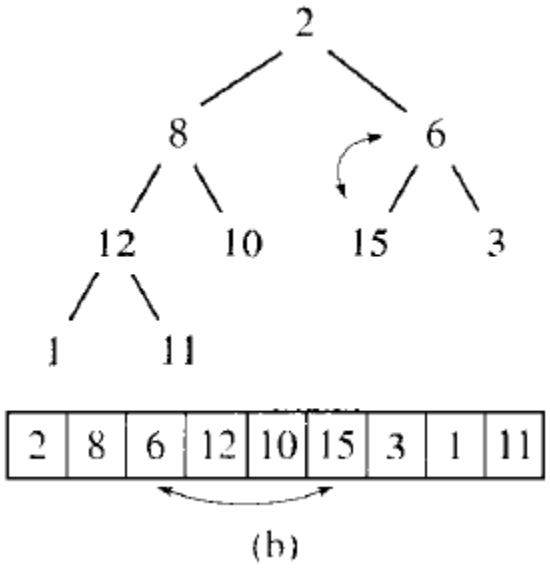
- Se o primeiro elemento ramificado for menor que o segundo, então o algoritmo caminha para a próxima ramificação
- A intenção é localizar o maior elemento (raiz *max-heap*) entre as ramificações. Caso alguma ramificação for maior que o índice raiz, então ocorre a troca entre estes elementos
- Por exemplo:

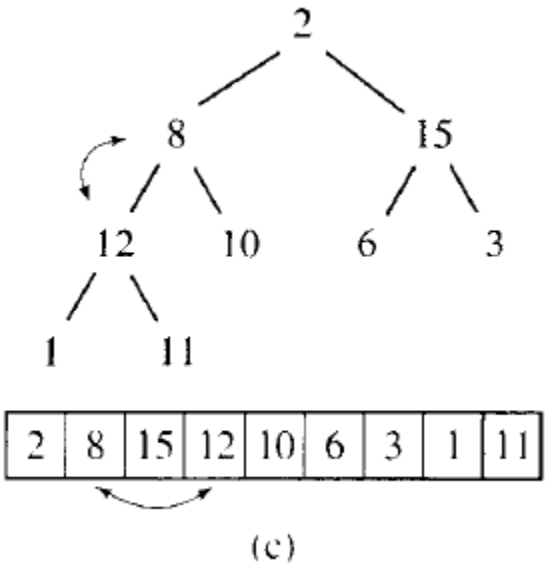


Algoritmo para criação do heap

[2 8 6 1 10 15 3 12 11]

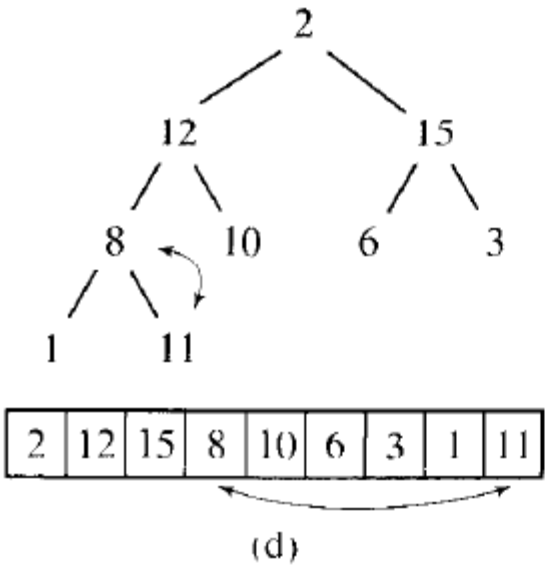


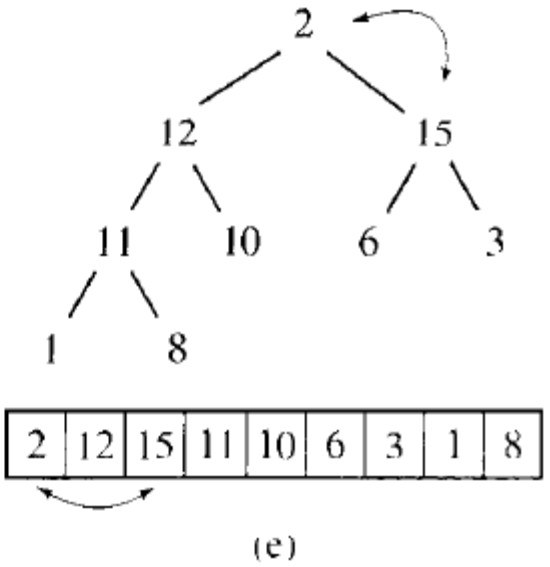




Algoritmo para criação do heap

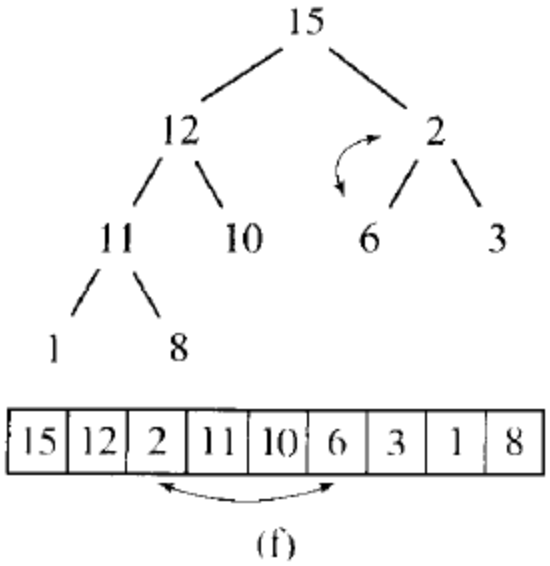
[2 8 6 1 10 15 3 12 11]



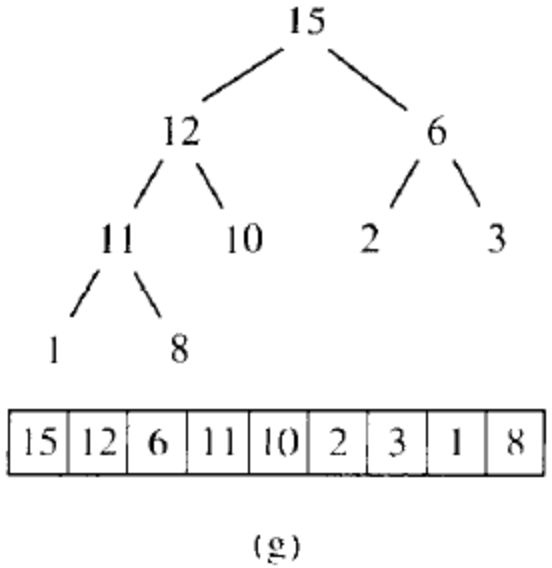


Algoritmo para criação do heap

[2 8 6 1 10 15 3 12 11]



(f)



(g)

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Código em C para seleção do ***max-heap***
- Complexidade O(logN)

```
void constroiHeap( int *p_vetor, int tamanho, int indice_raiz )
{
     int ramificacao, valor;
     valor = p_vetor[ indice_raiz ];

     while( indice_raiz <= tamanho/2 ){
        ramificacao = 2 * indice_raiz + 1;

       if( ramificacao < tamanho && p_vetor[ ramificacao ] < p_vetor[ ramificacao + 1 ] )
             ramificacao++;

       if( valor >= p_vetor[ ramificacao ] )//Identifica o max-heap
             break;

       p_vetor[ indice_raiz ] = p_vetor[ ramificacao ];
       indice_raiz = ramificacao;
     }
     p_vetor[ indice_raiz ] = valor;
}
```

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Aplicando o algoritmo no vetor ***vet***
- Indice_vetor = 7
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 123 não houve necessidade de calcular o ***heap-max***, pois não existe nenhum elemento para suas ramificações

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	8	98	123	34	92	54	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Indice_vetor = 6
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 98 não houve necessidade de calcular o ***heap-max***, os elementos de ramificação são menores que o indice_raiz

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	8	98	123	34	92	54	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	8	98	123	34	92	54	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- indice_vetor = 5
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 8 houve necessidade de calcular o ***heap-max***, onde o elemento 8 assume a posição do elemento 54, e vice-versa.

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	8	98	123	34	92	54	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	54	98	123	34	92	8	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- indice_vetor = 4
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 7 houve necessidade de calcular o ***heap-max***, onde o elemento 7 assume a posição do elemento 92 e vice-versa

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	7	54	98	123	34	92	8	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	92	54	98	123	34	7	8	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Indice_vetor = 3
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 65 houve necessidade de calcular o ***heap-max***, onde o elemento 65 assume a posição do elemento 123 e vice-versa

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	65	92	54	98	123	34	7	8	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	123	92	54	98	65	34	7	8	33	45

- O algoritmo continua verificando elementos (ramificações) que sejam maiores que 65, pois elemento também pode ser um ***heap-max***

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Indice_vetor = 1
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz
- Para o nó 32 houve necessidade de calcular o ***heap-max***, onde o elemento 32 assume a posição do elemento 92 e vice-versa.

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	123	92	54	98	65	34	7	8	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	32	123	92	54	98	65	34	7	8	33	45

- O algoritmo continua verificando elementos maiores que a ramificação 32, onde o indice raiz continuou com o valor 4. Neste caso, a verificação de um ***heap-max*** acontecerá entre as ramificações 34 e 7 (2*indice_raiz), e ocorre a troca entre os elementos 32 e 34.

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	92	123	32	54	98	65	34	7	8	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Indice_vetor = 1
  - tamanho = 12
  - indice_raiz = indice_vetor
  - ramificacao = 2 * indice_raiz

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	92	123	34	54	98	65	32	7	8	33	45

- Para o nó 23 houve necessidade de calcular o heap-max, onde o elemento 123 assume a posição de indice 1. O elemento 23 fica armazenado em memória

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
23	92	123	34	54	98	65	32	7	8	33	45

- O algoritmo se posiciona no índice 1 após a troca, e compara o elemento do mesmo índice com o próximo (indice 3), e efetua a troca de posição

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	23	34	54	98	65	32	7	8	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- O algoritmo executa novamente a comparação
- Após a troca anterior o vetor se posiciona no elemento 2
- Aplica-se novamente a fórmula **ramificacao = 2 * indice_raiz**
- Novas ramificações são encontradas, e novamente ocorre a comparação para encontrar um *heap-max*

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	23	34	54	98	65	32	7	8	33	45

- O elemento 98 ocupa a posição 3.

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	23	34	54	98	65	32	7	8	33	45

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- O algoritmo executa novamente a comparação
- Após a troca anterior o vetor se posiciona no elemento 2
- Aplica-se novamente a fórmula **ramificacao = 2 * indice_raiz**
- Novas ramificações são encontradas, e novamente ocorre a comparação para encontrar um *heap-max*

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	98	34	54	23	65	32	7	8	33	45

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	98	34	54	23	65	32	7	8	33	45

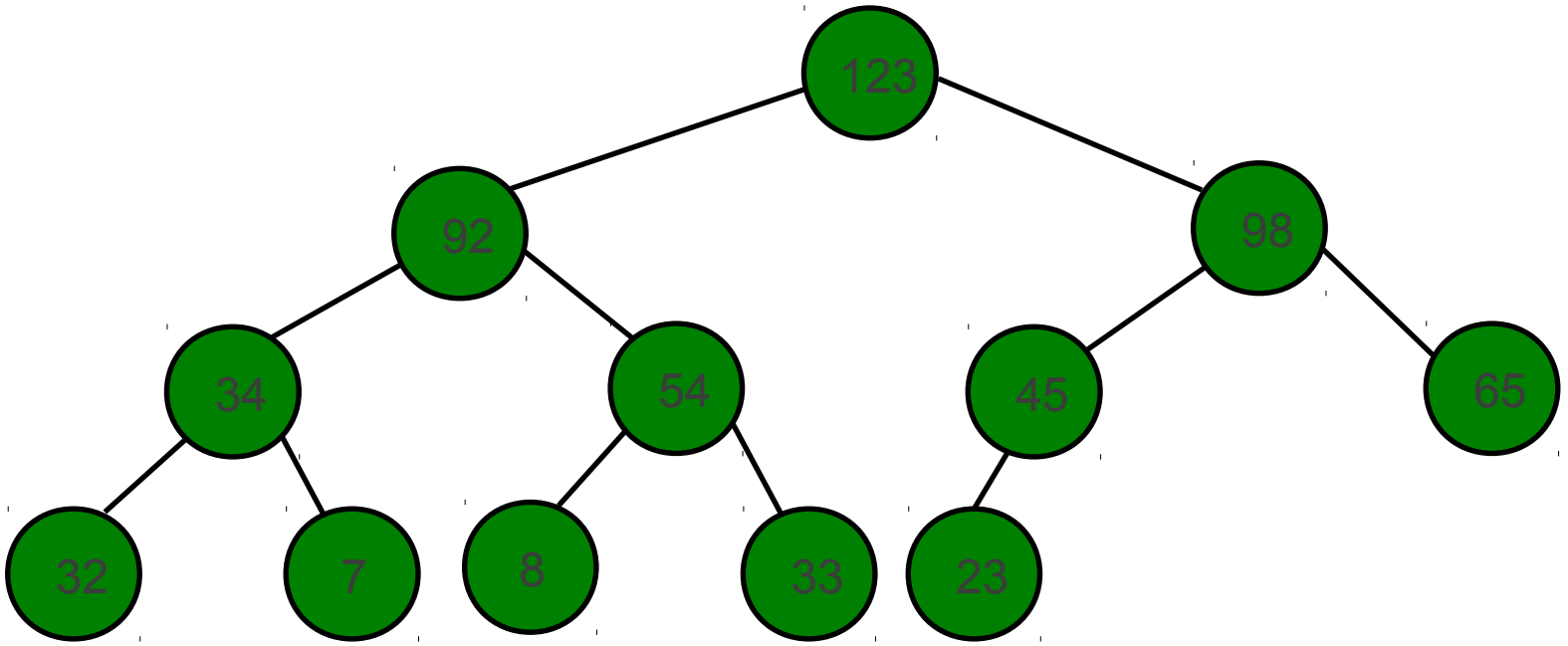
- O elemento 45 ocupa a posição 6, e finalmente o valor 23 ocupa a posição 12 do vetor

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	98	34	54	45	65	32	7	8	33	23

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- O vetor ***vet*** terá a seguinte sequência por ***max-heap***:

Vet[1]	Vet[2]	Vet[3]	Vet[4]	Vet[5]	Vet[6]	Vet[7]	Vet[8]	Vet[9]	Vet[10]	Vet[11]	Vet[12]
123	92	98	34	54	45	65	32	7	8	33	23



HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- Pode-se então aplicar um algoritmo para inverter os elementos da árvore, do maior elemento da árvore para o menor
  - Ou seja: V[1] ↔ V[n]
- Após a troca, o heap precisa ser refeito
- Em seguida, os passos serão reaplicados nos n-1 elementos restantes

HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

- O código abaixo apresenta como esta inversão pode acontecer

```
 void HeapSort( int *p_vetor, int tamanho )
{
     int indice, troca;
     for( indice = tamanho/2; indice >= 0; indice-- )
       constroiHeap( p_vetor, tamanho, indice );

     while( tamanho > 0 )
     {
       troca = p_vetor[ 0 ];
       p_vetor[ 0 ] = p_vetor[ tamanho-1 ];
       p_vetor[ tamanho ] = troca;
      constroiHeap( p_vetor, --tamanho, 0 );
     }

}
```

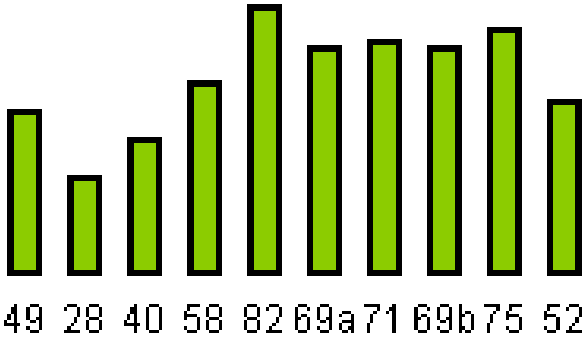
HeapSort (Ordenação por Árvore Binária)

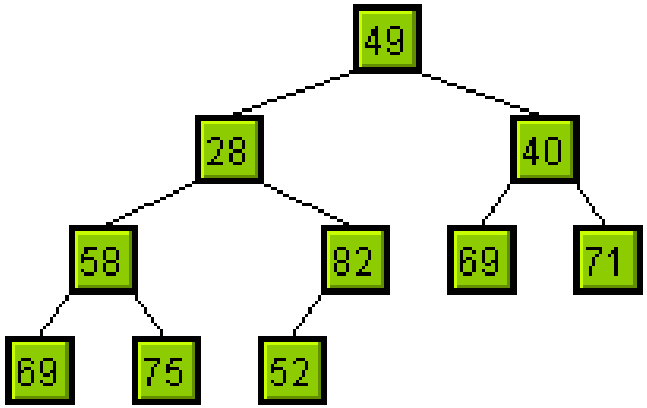
- O método ***main*** para execução do ***HeapSort***

```
int main(int argc, char *argv[]){

    int vetor[] = {23, 32, 65, 7, 8, 98, 123, 34, 92, 54, 33, 45};
    int tamanho = 12;
    int indice;

    HeapSort(vetor, tamanho);

    for (indice=0 ;indice <= tamanho-1 ;indice++){
        printf("O valor do indice %d ordenado e: %d \n", indice, vetor[indice]);
    }

    system("PAUSE");
    return 0;

}
```

Exemplo

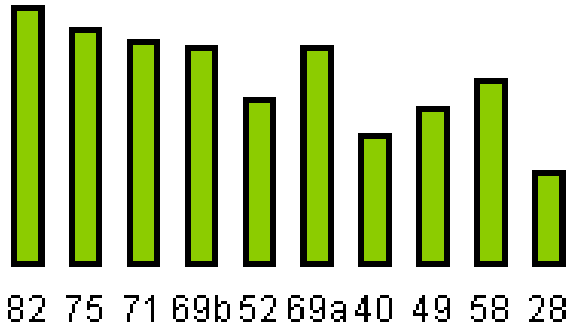
Vetor original

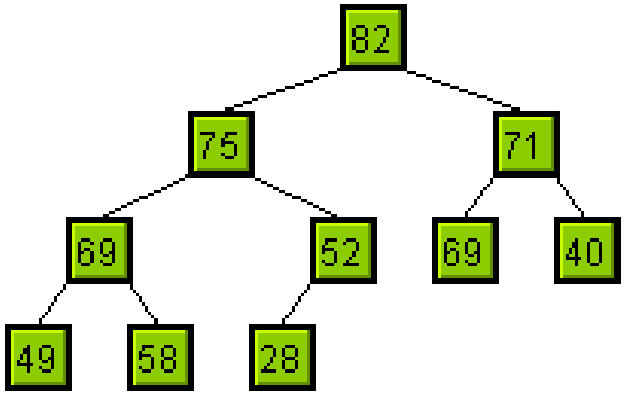




Exemplo

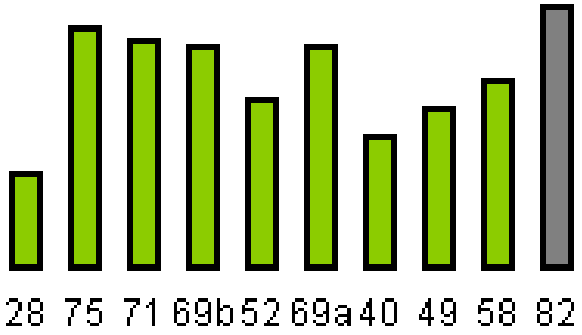
Transformando em um heap

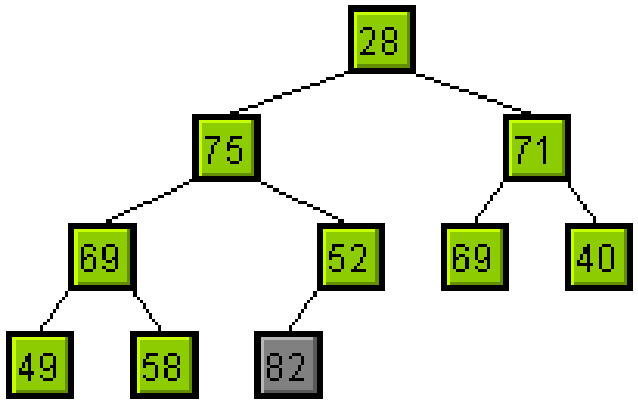




Exemplo

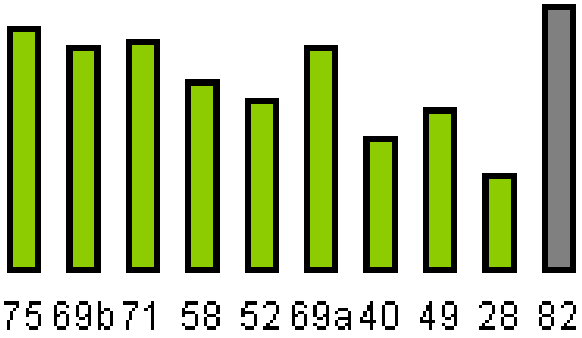
Colocando o maior va no final do vetor

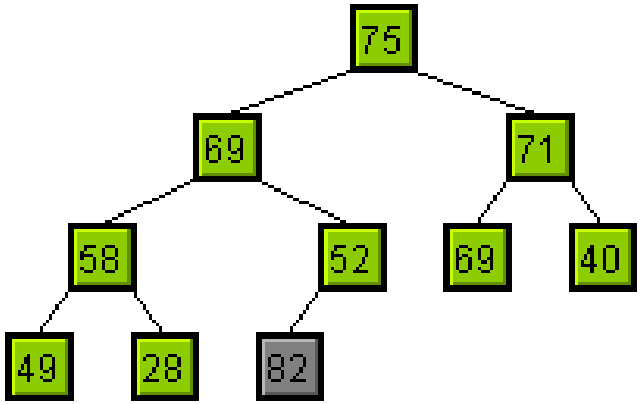




Exemplo

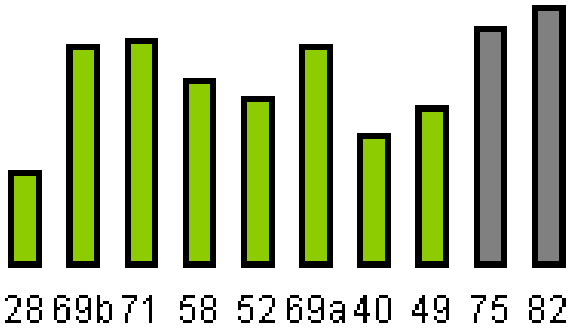
Refazendo o heap...

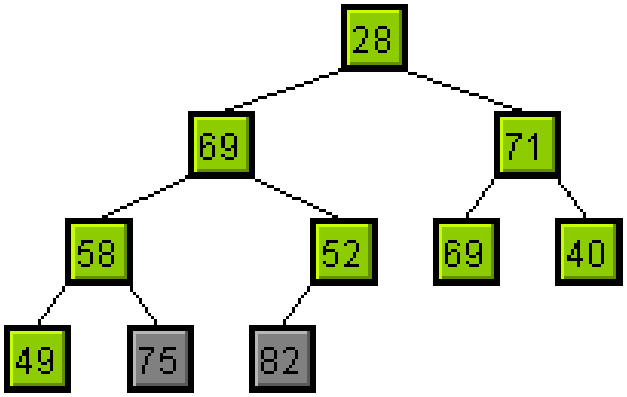




Exemplo

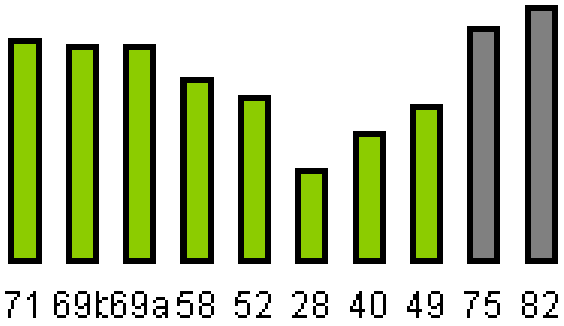
Colocando o maior va no final do subvetor

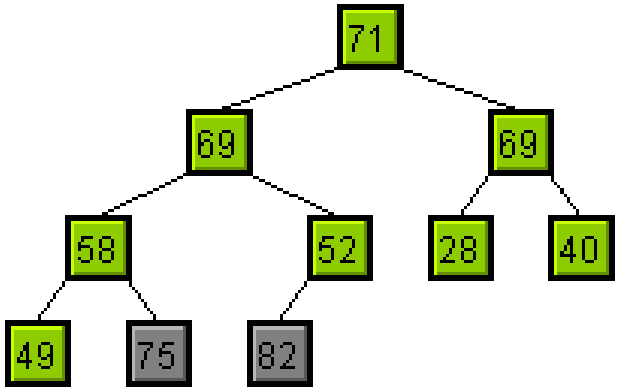




Exemplo

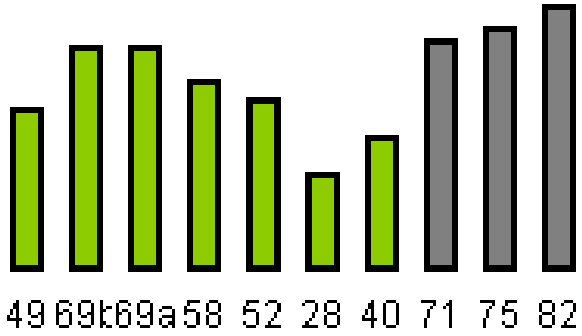
Refazendo o heap...

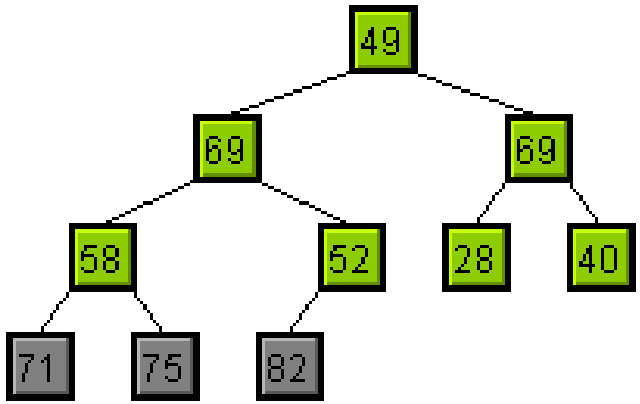




Exemplo

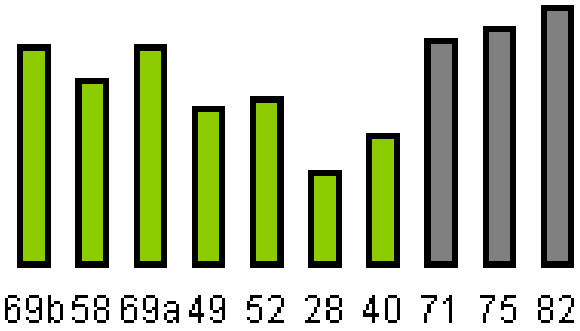
Colocando o maior va
no final do subvetor

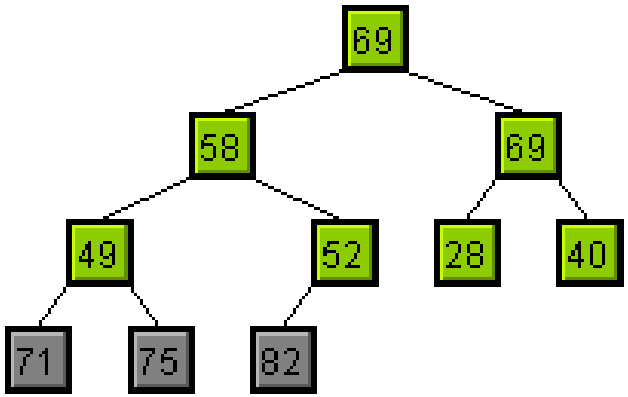




Exemplo

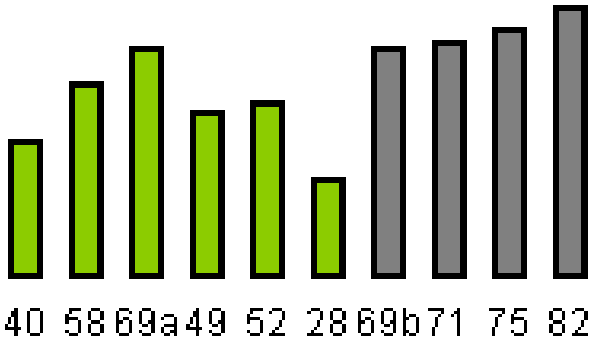
Refazendo o heap...

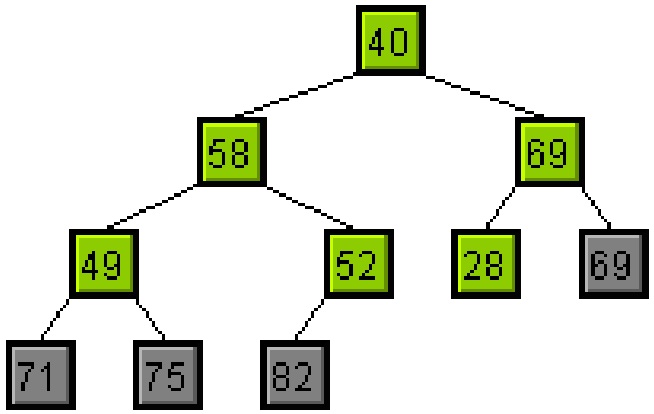




Exemplo

Colocando o maior va
no final do subvetor





Estudo da estabilidade

O algoritmo é considerado instável, pois há a possibilidade de elementos com mesma chave mudar de posição no processo de ordenação

Suponha v = $\{4^1, 4^2, 4^3\}$

Heapfy: v = $\{4^1, 4^2, 4^3\}$

Primeira iteração: v = $\{4^3, 4^2, 4^1\}$

Heapfy: v = $\{4^3, 4^2, 4^1\}$

Segunda iteração: v = $\{4^2, 4^3, 4^1\}$