ALGORITMOS

ORDEN DE CRECIMIENTO

Mauricio Alba Castro
ISyC (UniAndes), DEA, Máster Universitario y Ph.D. (UPV)

Fuentes:

THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON, RONALD L. RIVEST, CLIFORD STEIN Introduction to algorithms. Third Edition. Cambridge : MIT, 2009

[005.1 C675]

ANANY LEVITIN. Introduction to the design & analysis of algorithms /. —3rd ed. Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, 2012

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Teorema CORMEN

Theorem 3.1

For any two functions $f(n)$ and $g(n)$, we have $f(n) = \Theta(g(n))$ if and only if $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$. ■

TEOREMA LEVITIN

THEOREM If $t_1(n) \in O(g_1(n))$ and $t_2(n) \in O(g_2(n))$, then

$$t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{g_1(n), g_2(n)\}).$$

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

EJERCICIO

7. Prove the following assertions by using the definitions of the notations involved, or disprove them by giving a specific counterexample.

a. If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$.

b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$.

c. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

d. For any two nonnegative functions $t(n)$ and $g(n)$ defined on the set of nonnegative integers, either $t(n) \in O(g(n))$, or $t(n) \in \Omega(g(n))$, or both.

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Comparing functions

Many of the relational properties of real numbers apply to asymptotic comparisons as well. For the following, assume that $f(n)$ and $g(n)$ are asymptotically positive.

Transitivity:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ and } g(n) = \Theta(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \Theta(h(n)) ,$$
$$f(n) = O(g(n)) \text{ and } g(n) = O(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = O(h(n)) ,$$
$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ and } g(n) = \Omega(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \Omega(h(n)) ,$$
$$f(n) = o(g(n)) \text{ and } g(n) = o(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = o(h(n)) ,$$
$$f(n) = \omega(g(n)) \text{ and } g(n) = \omega(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \omega(h(n)) .$$

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Reflexivity:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \Theta(f(n)), \\
f(n) &= O(f(n)), \\
f(n) &= \Omega(f(n)).
\end{aligned}
$$

Symmetry:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ if and only if } g(n) = \Theta(f(n)).$$

Transpose symmetry:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(g(n)) \quad \text{if and only if} \quad g(n) = \Omega(f(n)), \\
f(n) &= o(g(n)) \quad \text{if and only if} \quad g(n) = \omega(f(n)).
\end{aligned}
$$

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Because these properties hold for asymptotic notations, we can draw an analogy between the asymptotic comparison of two functions f and g and the comparison of two real numbers a and b:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(g(n)) && \text{is like} \quad a \le b\ , \\
f(n) &= \Omega(g(n)) && \text{is like} \quad a \ge b\ , \\
f(n) &= \Theta(g(n)) && \text{is like} \quad a = b\ , \\
f(n) &= o(g(n)) && \text{is like} \quad a < b\ , \\
f(n) &= \omega(g(n)) && \text{is like} \quad a > b\ .
\end{aligned}
$$

We say that $f(n)$ is ***asymptotically smaller*** than $g(n)$ if $f(n) = o(g(n))$, and $f(n)$ is ***asymptotically larger*** than $g(n)$ if $f(n) = \omega(g(n))$.

One property of real numbers, however, does not carry over to asymptotic notation:

Trichotomy: For any two real numbers a and b, exactly one of the following must hold: $a < b$, $a = b$, or $a > b$.

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Exercises

3.1-1

Let $f(n)$ and $g(n)$ be asymptotically nonnegative functions. Using the basic definition of Θ-notation, prove that $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

3.1-2

Show that for any real constants a and b, where $b > 0$,

$$(n + a)^b = \Theta(n^b) . \tag{3.2}$$

3.1-4

Is $2^{n+1} = O(2^n)$? Is $2^{2n} = O(2^n)$?

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

1. For each of the following algorithms, indicate (i) a natural size metric for its inputs, (ii) its basic operation, and (iii) whether the basic operation count can be different for inputs of the same size:

a. computing the sum of n numbers

b. computing $n!$

c. finding the largest element in a list of n numbers

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

9. For each of the following pairs of functions, indicate whether the first function of each of the following pairs has a lower, same, or higher order of growth (to within a constant multiple) than the second function.

a. $n(n+1)$ and $2000n^2$ **b.** $100n^2$ and $0.01n^3$

c. $\log_2 n$ and $\ln n$ **d.** $\log_2^2 n$ and $\log_2 n^2$

e. 2^{n-1} and 2^n **f.** $(n-1)!$ and $n!$

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

Sección 1.5 Clasificación de funciones por su tasa de crecimiento asintótica

1.27 Suponga que el algoritmo 1 ejecuta $f(n) = n^2 + 4n$ pasos en el peor caso, y el algoritmo 2 ejecuta $g(n) = 29n + 3$ pasos en el peor caso, con entradas de tamaño n. ¿Con entradas de qué tamaño es más rápido el algoritmo 1 que el algoritmo 2 (en el peor caso)?

1.28 Sea $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ un polinomio en n de grado k con $a_k > 0$. Demuestre que $p(n)$ está en $\Theta(n^k)$.

1.29 Añada una fila a la tabla 1.1 que indique el tamaño máximo aproximado de las entradas que se pueden resolver en un día, para cada columna.

1.30 Sean α y β números reales tales que $0 < \alpha < \beta$. Demuestre que n^α está en $O(n^\beta)$ pero n^β no está en $O(n^\alpha)$.

PROPIEDADES Y EJERCICIOS ORDEN DE CRECIMIENTO

1.31 Haga una lista de las funciones siguientes, de la de más bajo orden asintótico a la de más alto orden asintótico. Si hay dos (o más) que tengan el mismo orden asintótico, indique cuáles.

a. Comience con estas funciones básicas:

n	2^n	$n \lg n$	n^3
n^2	$\lg n$	$n - n^3 + 7n^5$	$n^2 + \lg n$

***b.** Incorpore las funciones siguientes a su respuesta para la parte (a). Suponga $0 < \epsilon < 1$.

e^n	$\sqrt{n}$	2^{n-1}	$\lg \lg n$
$\ln n$	$(lg\ n)^2$	$n!$	$n^{1+\epsilon}$

***1.32** Demuestre o cite un contraejemplo: Para toda constante positiva c y toda función f de los enteros no negativos a los reales no negativos, $f(cn) \in \Theta(f(n))$. *Sugerencia:* Considere algunas de las funciones de crecimiento rápido de la lista del problema anterior.