Programowanie kwadratowe

Andrzej Łuczak, Michał Dulek, Marcel Bieżuński

Czym jest Programowanie Kwadratowe (QP)?

Definicja: Zadania programowania kwadratowego to specyficzny typ zadań optymalizacji z ograniczeniami.

Różnica względem programowania liniowego: Funkcja celu jest kwadratowa, a nie liniowa, chociaż ograniczenia pozostają liniowe.

Zastosowanie: Jest to drugi po programowaniu liniowym najczęściej spotykany typ zadań, dla którego opracowano wysoce efektywne metody rozwiązywania.

Sformułowanie matematyczne problemu

Zadanie definiuje się jako poszukiwanie minimum funkcji:

$$\min_{x} \frac{1}{2} x^T H x + f^T x$$

przy ograniczeniach liniowych

$$A \cdot x \leq b, \quad Aeq \cdot x = beq$$

oraz więzach nakładanych na zmienne

$$x_L \leq x \leq x_U$$

Ważne: Macierz H (Hesjan) powinna być symetryczna i dodatnio określona.

Strategie rozwiązywania w MATLAB (funkcja quadprog)

- Funkcja quadprog automatycznie dobiera algorytm w zależności od rodzaju wprowadzonych ograniczeń:

Rodzaj ograniczeń	**Wykorzystywana metoda**
Tylko górne/dolne ograniczenia (lb, ub) lub tylko równania liniowe	Metoda Newtona oraz Metoda Gradientów Sprzężonych
Ograniczenia ogólne (nierównościowe, mieszane)	Metoda Zbiorów Aktywnych

Metoda zbiorów aktywnych

- **Zastosowanie:** Używana, gdy występują ograniczenia nierównościowe.
- **Zasada działania:** Metoda jest zbliżona do metody SIMPLEX znanej z programowania liniowego.
- **Mechanizm:** Polega na iteracyjnym włączaniu i usuwaniu ograniczeń ze "zbioru ograniczeń aktywnych".
  - "Ograniczenie aktywne" to takie, na którego krawędzi leży aktualnie rozpatrywany punkt.
- **Wynik:** Generowany jest ciąg rozwiązań dopuszczalnych, który jest zbieżny do rozwiązania optymalnego.

Metoda gradientów sprzężonych

Cel: Wykorzystywana przez quadprog przy prostszych ograniczeniach. Jest skuteczniejsza niż metoda największego spadku dla funkcji kwadratowych.

Problem metody spadku: Zwykła metoda największego spadku może "zygzakować", jeśli poziomice funkcji są wydłużone.

Rozwiązanie: Metoda generuje kierunki poszukiwań, które są sprzężone względem macierzy H (lub A), a nie prostopadłe do poziomic.

Efektywność: Dla funkcji kwadratowej o n zmiennych metoda teoretycznie znajduje minimum w n krokach.

Metoda Newtona

- **Idea:** Zakłada, że funkcja celu w danym punkcie jest idealnie aproksymowana przez funkcję kwadratową.
- **Działanie:** Wykorzystuje hesjan (H) i jego odwrotność do wyznaczenia kierunku:

$$d^{(i)} = -H^{-1}(x^{(i)})\nabla f(x^{(i)})$$

- **Zaleta:** Dla funkcji ściśle kwadratowej (jak w QP) metoda Newtona potrafi znaleźć optimum w jednym kroku.
- **Wymaganie:** Wymaga obliczania gradientu i Hesjanu (w QP Hesjan jest stałą macierzą H).

Składnia funkcji quadprog w MATLAB

- Podstawowe wywołanie: x = quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
  - H, f: Współczynniki funkcji celu.
  - A, b: Ograniczenia nierównościowe $Ax \leq b$.
  - Aeq, beq: Ograniczenia równościowe $A_{eq}x = b_{eq}$.
  - lb, ub: Dolne i górne granice zmiennych.
  - x0: Punkt startowy (opcjonalny, ale wymagany dla metody zbiorów aktywnych, jeśli nie jest generowany automatycznie).

Przykład praktyczny – Gdzie jest błąd?

```
% Funkcja celu: x1^2 - 6x1 + 9 + x2^2 - 8x2 + 16
% Postać macierzowa 0.5*x^(T)*H*x + f^(T)*x
% Zauważ, że we wzorze jest 1/2, więc musimy pomnożyć współczynniki kwadratowe przez 2 w macierzy H.

% Macierze H - hesjan definiujący krzywiznę funkcji.
% Wartości na przekątnej są dodatnie, więc funkcja jest wypukła.
% Gwarantuje to istnienie minimum.
H = [2, 0; 0, 2];
% Wektor f - część liniowa odpowiadająca za przesunięcie "dna miski"
% względem punktu (0, 0).
f = [-6; -8];

% Ograniczenia nierównościowe A*x <= b
A = [1, 1];
b = [5];

% Ograniczenia brzegowe (x >= 0)
lb = [0; 0];
ub = []; % brak górnych ograniczeń

% Opcje (wymuszenie algorytmu active-set dla celów dydaktycznych)
options = optimoptions('quadprog', 'Algorithm', 'active-set', 'Display', 'iter');

[x, fval, exitflag, output] = quadprog(H, f, A, b, [], [], lb, ub, x0, options);

disp('Rozwiązanie:');
disp(x);
```

Zadanie 1

Przykład 5.1.
Znaleźć rozwiązanie zadania programowania kwadratowego

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2,$$

$$x_1 + x_2 \le 2,$$

$$-x_1 + x_2 \le 2,$$

$$2x_1 + x_2 \le 3,$$

$$0 \le x_1, 0 \le x_2.$$

W tym wypadku według wzoru (5.5)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

Zadanie 2

Przykład 5.3.
Znajdź minimum funkcji kwadratowej

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2,$$

która znajduje się w trójkącie, ograniczonym prostymi

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Z uwzględnieniem współczynnika 0.5 w funkcji celu (5.1) wprowadźmy macierz $\mathbf{H} = 2 * eye(2)$ i wektor f = zeros(2,1). Nierówności

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 2, \\ x_2 &\le 2, \end{aligned}\right\}$$

wprowadźmy jako ograniczenia na współrzędne, **ub** = [2;1], a nierówność $x_1 + 2x_2 \ge 2$ przedstawiamy w postaci $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b}$ z macierzą $\mathbf{A}$ = [-1 -2] i wektorem $\mathbf{b}$ = [-2].

Zastosowanie praktyczne – Optymalizacja portfela (Model Markowitza)

Polecenie: Jesteś analitykiem finansowym i masz do wyboru 3 spółki:

- **Oczekiwane zwroty** (wektor r): Spółka A: 10%, B: 20%, C: 15%.
- **Ryzyko** (macierz kowariancji H) - podana w kodzie macierz Cov.
- **Cel**: Znajdź taki podział portfela (x1, x2, x3), który minimalizuje ryzyko (wariancję), jednocześnie spełniając warunki.
- **Warunki**:
  - Oczekiwany zwrot z całego portfela musi wynosić przynajmniej 15%.
  - Suma udziałów musi wynosić 1 (100% kapitału).
  - Brak krótkiej sprzedaży - wagi muszą być nieujemne.

$$H = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.02 & 0.04 \\ 0.02 & 0.2 & 0.06 \\ 0.04 & 0.06 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

Podsumowanie

- Programowanie kwadratowe to optymalizacja funkcji kwadratowej z liniowymi ograniczeniami.
- MATLAB (funkcja `quadprog`) inteligentnie dobiera metodę:
  - Metoda zbiorów aktywnych dla skomplikowanych ograniczeń (iteracyjne poruszanie się po krawędziach).
  - Metoda Newtona lub Metoda gradientów sprzężonych dla prostych ograniczeń (szybkie metody oparte na drugiej pochodnej i kierunkach sprzężonych).
  - Zrozumienie tych metod pozwala lepiej interpretować komunikaty wyjściowe MATLABa (np. liczbę iteracji, typ algorytmu).

Dziękujemy za obejrzenie prezentacji!