



PÊNDULO **DUPLO**

SEMINÁRIO DE FÍSICA COMPUTACIONAL

The background of the slide is a dark blue gradient with a complex, glowing molecular structure. The structure consists of interconnected hexagonal and pentagonal rings, with some vertices highlighted by bright blue light points. The overall effect is a futuristic, scientific aesthetic.

Alunos:

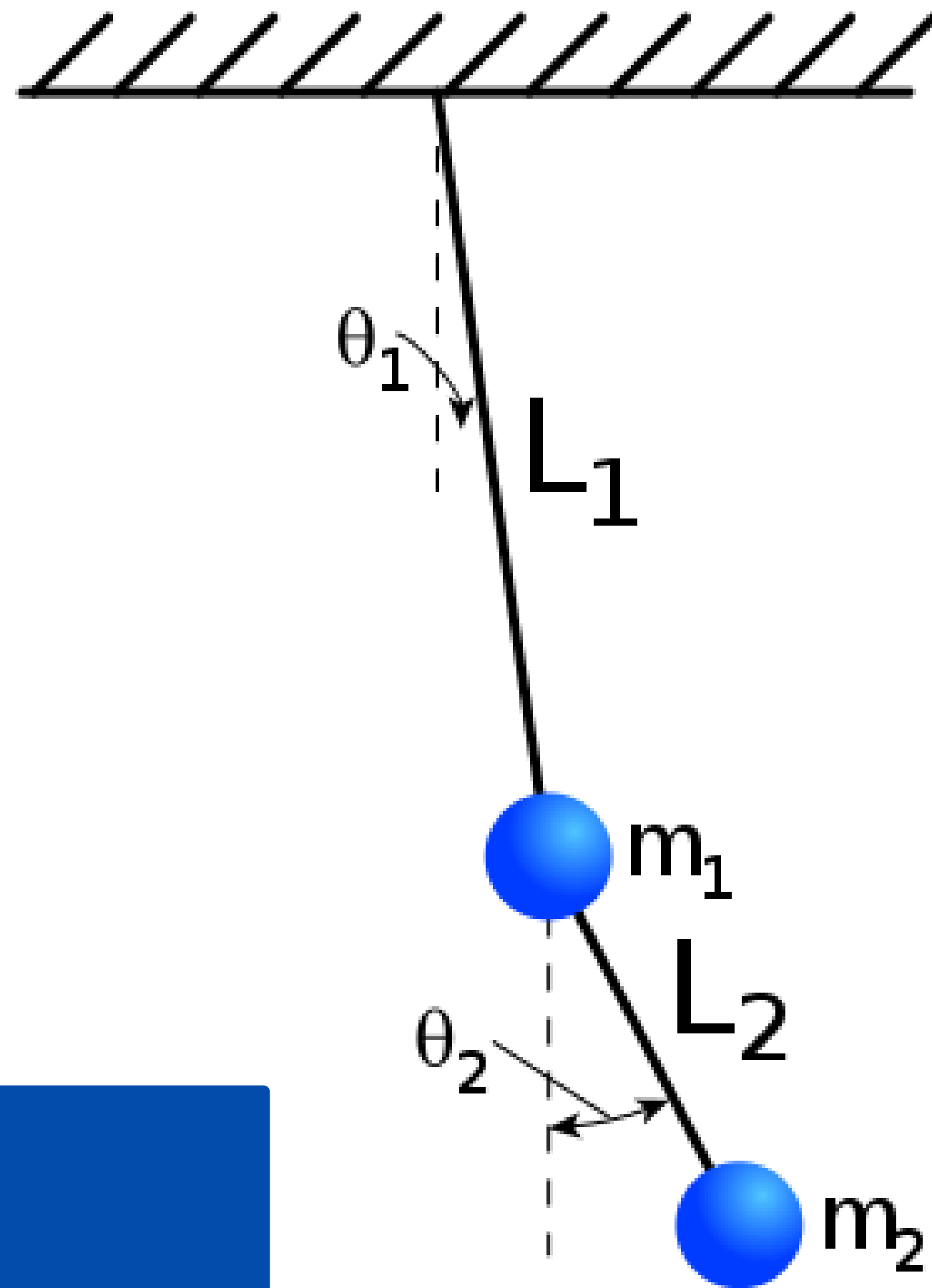
Marcelo Elias de Araújo Júnior

Isadora Caetano de Almeida

Professor:

Alberico Bloheim de Carvalho Junior

INTRODUÇÃO



O pêndulo duplo é um sistema em que um pêndulo tem outro pêndulo em sua extremidade, criando um sistema caótico.

PROPOSTA

Utilizando tanto métodos analíticos quanto o SciLab, iremos resolver as equações de movimento e energia do pêndulo duplo, além de plotar seus gráficos em relação ao tempo pelo SciLab.

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Equações da posição do pêndulo duplo:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Equação da energia potencial do pêndulo duplo:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Equação da energia cinética do pêndulo duplo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Equação de Lagrange do pêndulo duplo:

$$L \equiv T - V$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Equação de Euler-Lagrange simplificada do pêndulo duplo em relação a θ_1 :

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0$$

Equação de Euler-Lagrange simplificada do pêndulo duplo em relação a θ_2 :

$$m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g \sin \theta_2 = 0.$$

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

```
g = 9.8; // gravidade
M1 = 0.1; // massa 1
M2 = 0.2; // massa 2
R1 = 0.1; // comprimento da corda 1
R2 = 0.1; // comprimento da corda 2

theta1 = 35*%pi/180; // ângulo inicial 1
theta1dot = 0; // velocidade inicial 1
theta2 = 75*%pi/180; // ângulo inicial 2
theta2dot = 0; // velocidade inicial 2

t = 0; // tempo inicial
dt = 0.01; // incremento

Vtheta1 = []; // Vetor para armazenar os valores de theta1
Vtheta2 = []; // Vetor para armazenar os valores de theta2
VK = []; // Vetor para armazenar os valores da energia cinética
VU = []; // Vetor para armazenar os valores da energia potencial
Vt = []; // Vetor para armazenar os valores de t
```

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

```
while t<5 /* loop que utiliza o metodo de Euler
para resolver as equações de movimento do pêndulo duplo e
plota os gráficos de theta1, theta2, U e K em função de t */
    a = -(M1+M2)*g*R1*sin(theta1) - M2*R1*R2*(theta2dot**2)*sin(theta1-theta2);
    b = (M1 + M2)*R1**2;
    c = M2*R1*R2*cos(theta1-theta2);
    f = -M2*g*R2*sin(theta2)+M2*R1*R2*(theta1dot**2)*sin(theta1-theta2);
    k = M2*R2**2;
    w = M2*R1*R2*cos(theta1-theta2);
    theta2ddot = (f-((a*w)/b))/(k-((c*w)/b));
    theta1ddot = a/b - c*theta2ddot/b;
    theta2dot = theta2dot + theta2ddot*dt;
    theta1dot = theta1dot + theta1ddot*dt;
    theta1 = theta1 + theta1dot*dt;
    theta2 = theta2 + theta2dot*dt;

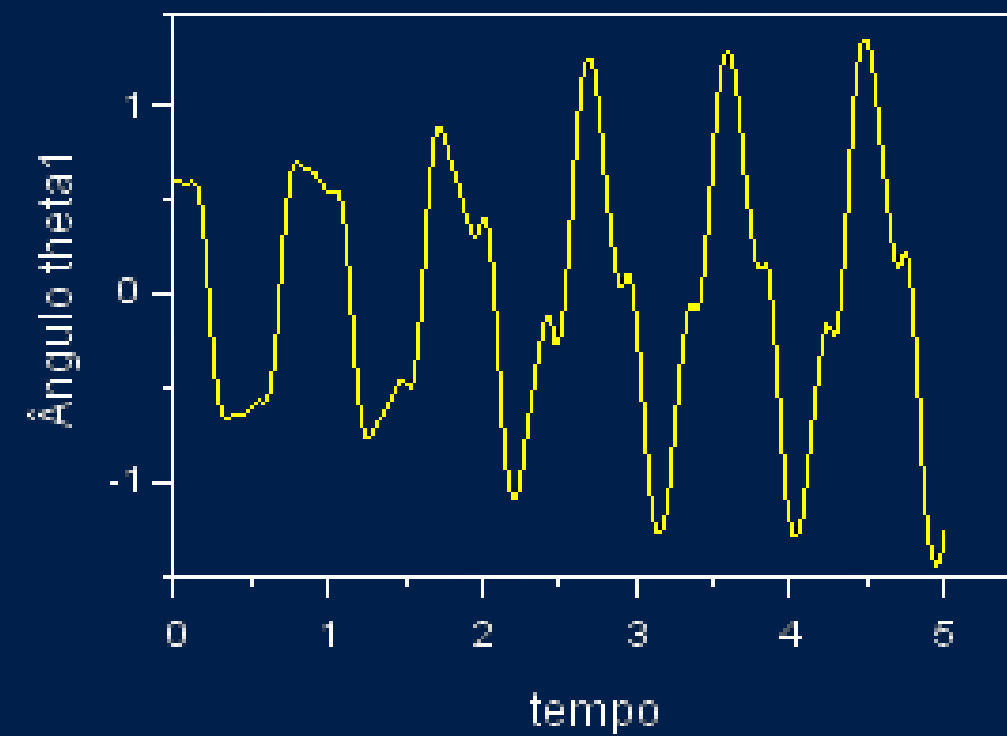
    K = 0.5*M1*R1**2*(theta1dot**2) + 0.5*M2*(R2**2*theta2dot**2+2*R1*R2*theta1dot*theta2dot*cos(theta1-theta2)+R1**2*theta1dot**2)
    U = -(M1+M2)*g*R1*cos(theta1)-M2*g*R2*cos(theta2)
```

SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

```
t = t + dt;
Vtheta1 = [Vtheta1 theta1];
Vtheta2 = [Vtheta2 theta2];
Vt = [Vt t];
VK = [VK K];
VU = [VU U];
subplot(2,2,1)
plot(Vt,Vtheta1,"b")
xlabel('theta1 em função de t','tempo', 'Ângulo theta1')
subplot(2,2,2)
plot(Vt,Vtheta2,"r")
xlabel('theta2 em função de t', 'tempo', 'Ângulo theta2')
subplot(2,2,3)
plot(Vt,VK,"g")
xlabel('Gráfico da energia cinética','tempo', 'Energia cinética')
subplot(2,2,4)
plot(Vt,VU,"k")
xlabel('Gráfico da energia potencial', 'tempo', 'energia potencial')
end
```

GRÁFICOS GERADOS PELO SCILAB

theta1 em função de t



theta2 em função de t

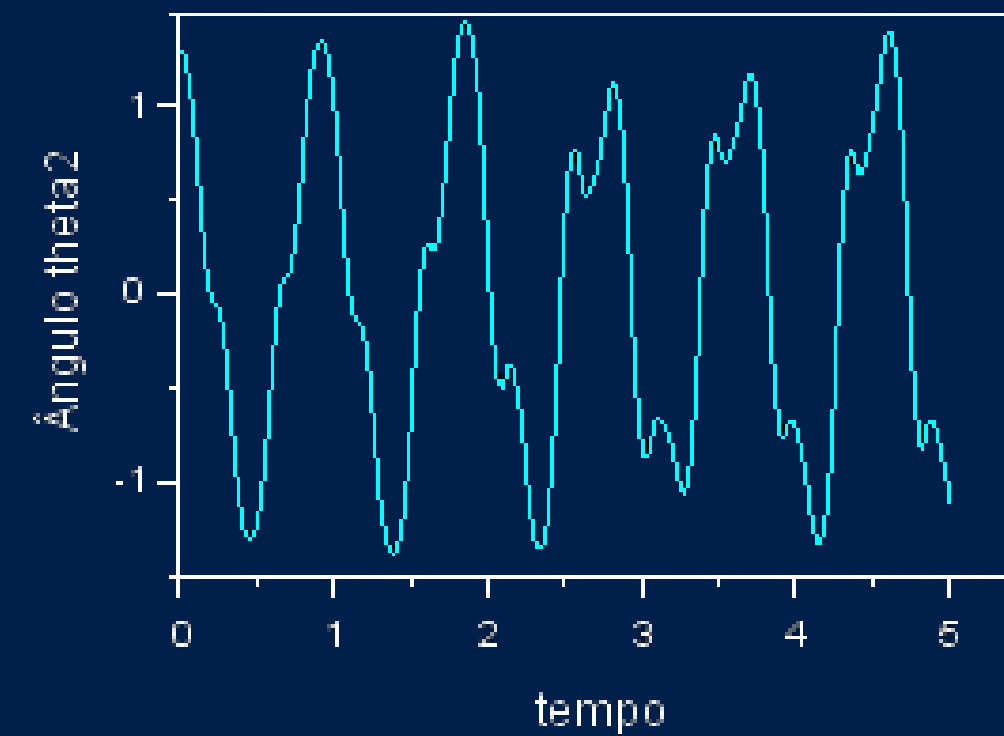


Gráfico da energia cinética

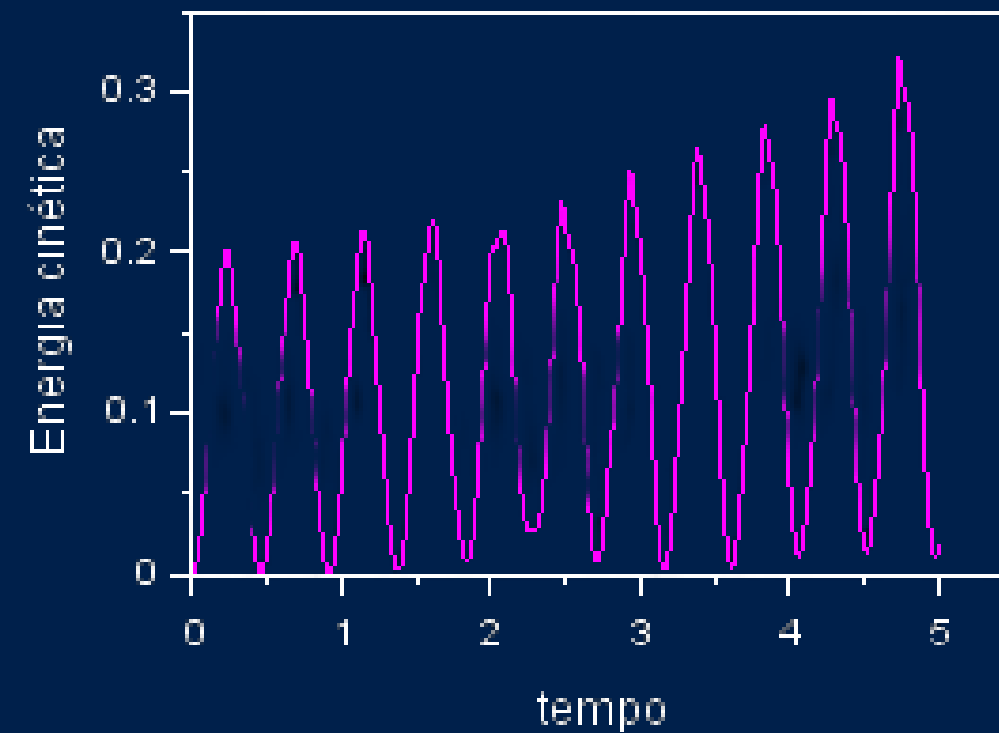
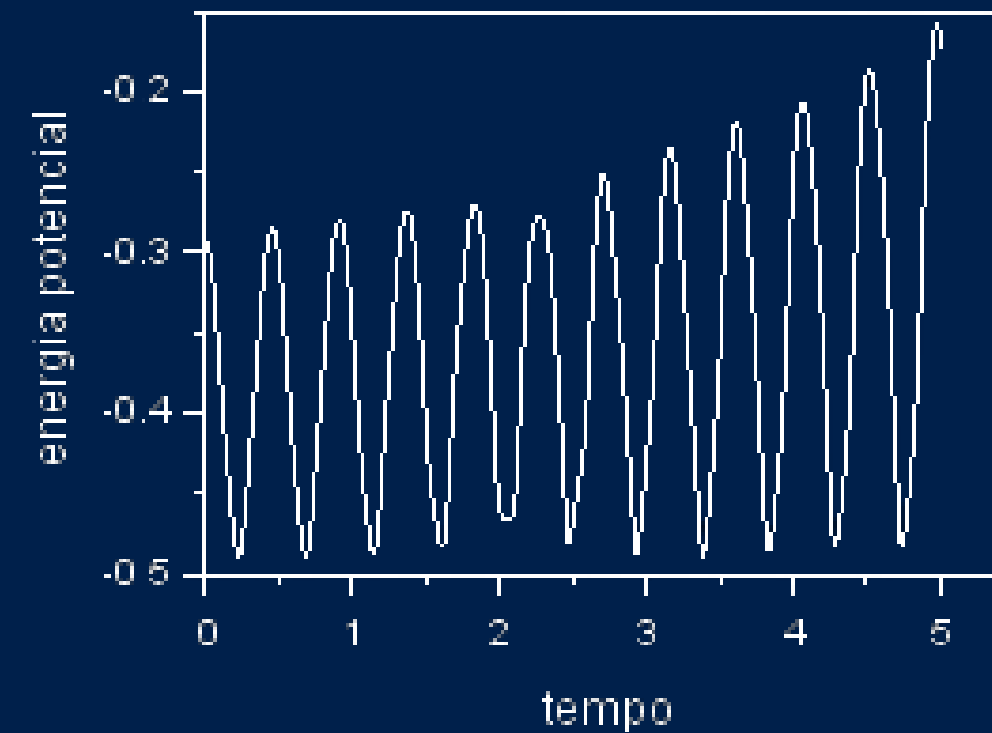


Gráfico da energia potencial



REFERÊNCIAS:

<https://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

<https://rjallain.medium.com/finding-the-equation-of-motion-for-a-double-pendulum-cff2635f99bd>

<https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/eulersmethod.aspx>

The background features a complex, glowing blue molecular or network structure. It consists of interconnected hexagonal and pentagonal shapes, some of which are highlighted with bright blue light points, creating a sense of depth and technological sophistication.

**OBRIGADO
PELA
ATENÇÃO!**