

# Curso de matemáticas de 2º de Bachillerato

Marcel Gisbert

## Contents

<b>1</b>	<b>Resolución de problemas</b>	<b>4</b>
1.1	Análisis de algunas estrategias . . . . .	4
1.1.1	Tantea, analiza sistemáticamente todos los casos . . . . .	4
1.1.2	Hacer un esquema, dibujo o diagrama . . . . .	5
1.2	El proceso deductivo . . . . .	6
1.3	Método de reducción al absurdo . . . . .	6
1.4	El método de inducción compleja . . . . .	6
1.5	Principio del palomar . . . . .	6
1.6	Problemas para practicar . . . . .	6
<b>2</b>	<b>I. Álgebra</b>	<b>6</b>
2.1	1. Álgebra de matrices . . . . .	6
2.1.1	1.1 Nomenclatura. Definiciones . . . . .	7
2.1.2	1.2 Operaciones con matrices . . . . .	8
2.1.3	1.3 Propiedades de las operaciones con matrices . . . . .	10
2.1.4	1.4 Matrices cuadradas . . . . .	13
2.1.5	1.5 Complementos teóricos para el estudio de matrices . . . . .	18
2.1.6	1.6 Rango de una matriz . . . . .	18
2.1.7	Ejercicios y problemas . . . . .	18
2.2	2. Determinantes . . . . .	18
2.2.1	2.1 Determinantes de orden dos . . . . .	18
2.2.2	2.2 Determinantes de orden tres . . . . .	18
2.2.3	2.3 Determinantes de orden cualquiera . . . . .	18
2.2.4	2.4 Menor complementario y adjunto . . . . .	18
2.2.5	2.5 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea . . . . .	18
2.2.6	2.6 Método para calcular determinantes de orden cualquiera . . . . .	18
2.2.7	2.7 El rango de una matriz a partir de sus menores . . . . .	18
2.2.8	2.8 Otro método para obtener la inversa de una matriz . . . . .	18
2.3	3. Sistemas de ecuaciones . . . . .	18
2.3.1	3.1 Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	18
2.3.2	3.2 Posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales . . . . .	18
2.3.3	3.3. Sistemas escalonados . . . . .	18
2.3.4	3.4 Método de Gauss . . . . .	18
2.3.5	3.5 Discusión de sistemas de ecuaciones . . . . .	18
2.3.6	3.6 Un nuevo criterio para saber si un sistema es compatible . . . . .	18
2.3.7	3.7 Regla de Cramer . . . . .	18
2.3.8	3.8 Aplicación de la regla de Cramer a sistemas cualesquiera . . . . .	18

2.3.9	3.9	Sistemas homogéneos . . . . .	18
2.3.10	3.10	Discusión de sistemas mediante determinantes . . . . .	18
2.3.11	3.11	Forma matricial de un sistema de ecuaciones . . . . .	18
2.3.12		Ejercicios y problemas . . . . .	18
<b>3</b>	<b>II.</b>	<b>Geometría</b>	<b>18</b>
3.1	4.	Vectores en el espacio . . . . .	18
3.1.1	4.1	Operaciones con vectores . . . . .	18
3.1.2	4.2	Expresión analítica de un vector . . . . .	18
3.1.3	4.3	Producto escalar de vectores . . . . .	18
3.1.4	4.4	Producto vectorial . . . . .	18
3.1.5	4.5	Producto mixto de tres vectores . . . . .	18
3.1.6		Ejercicios y problemas . . . . .	18
3.2	5.	Puntos, rectas y planos en el espacio . . . . .	18
3.2.1	5.1	Sistema de referencia en el espacio . . . . .	18
3.2.2	5.2	Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos . . . . .	18
3.2.3	5.3	Ecuaciones de la recta . . . . .	18
3.2.4	5.4	Posiciones relativas de dos rectas . . . . .	18
3.2.5	5.5	Ecuaciones del plano . . . . .	18
3.2.6	5.6	Posiciones relativas de planos y rectas . . . . .	18
3.2.7	5.7	El lenguaje de las ecuaciones: variables, parámetros. etc. . . . .	18
3.2.8		Ejercicios y problemas . . . . .	18
3.3	6.	Problemas métricos . . . . .	18
3.3.1	6.1	Direcciones de rectas y planos . . . . .	18
3.3.2	6.2	Medida de ángulos entre rectas y planos . . . . .	18
3.3.3	6.3	Distancias entre puntos, rectas y planos . . . . .	18
3.3.4	6.4	Medidas de áreas y volúmenes . . . . .	18
3.3.5	6.5	Lugares geométricos en el espacio . . . . .	18
3.3.6		Ejercicios y problemas . . . . .	18
<b>4</b>	<b>III.</b>	<b>Análisis</b>	<b>18</b>
4.1	7.	Límites de funciones. Continuidad . . . . .	18
4.1.1	7.1	Idea gráfica de los límites de funciones . . . . .	18
4.1.2	7.2	Un poco de teoría: aprendamos a definir los límites . . . . .	18
4.1.3	7.3	Sencillas operaciones con límites . . . . .	18
4.1.4	7.4	Indeterminaciones . . . . .	18
4.1.5	7.5	Comparación de infinitos. Aplicación a los límites cuando $x \rightarrow \pm \infty$ . . . . .	18
4.1.6	7.6	Cálculo de límites cuando $x \rightarrow + \infty$ . . . . .	18
4.1.7	7.7	Cálculo de límites cuando $x \rightarrow - \infty$ . . . . .	18
4.1.8	7.8	Límite de una función en un punto. Continuidad . . . . .	18
4.1.9	7.9	Cálculo de límites cuando $x \rightarrow c$ . . . . .	18
4.1.10	7.10	Una potente herramienta para el cálculo de límites . . . . .	18
4.1.11	7.11	Continuidad en un intervalo . . . . .	18
4.1.12		Ejercicios y problemas . . . . .	18
4.2	8.	Derivadas . . . . .	18
4.2.1	8.1	Derivada de una función en un punto . . . . .	18
4.2.2	8.2	Función derivada . . . . .	18
4.2.3	8.3	Reglas de derivación . . . . .	18

4.2.4	8.4 Derivada de una función conociendo la de su inversa .	18
4.2.5	8.5 Derivada de una función implícita . . . . .	18
4.2.6	8.6 Derivación logarítmica . . . . .	18
4.2.7	8.7 Obtención razonada de las fórmulas de derivación . .	18
4.2.8	8.8 Diferencial de una función . . . . .	18
4.2.9	8.9 Ejercicios y problemas . . . . .	18
4.3	9. Aplicaciones de las derivadas . . . . .	18
4.3.1	9.1 Recta tangente a una curva . . . . .	18
4.3.2	9.2 Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto	18
4.3.3	9.3 Máximos y mínimos relativos de una función . . . . .	18
4.3.4	9.4 Información extraída de la segunda derivada . . . . .	18
4.3.5	9.5 Optimización de funciones . . . . .	18
4.3.6	9.6 Dos importantes teoremas . . . . .	18
4.3.7	9.7 Aplicaciones teóricas del teorema del valor medio . . .	18
4.3.8	9.8 Teorema de Cauchy y regla de L'Hôpital . . . . .	18
4.3.9	Ejercicios y problemas . . . . .	18
4.4	10. Representación de funciones . . . . .	18
4.4.1	10.1 Elementos fundamentales para la construcción de curvas . . . . .	18
4.4.2	10.2 El valor absoluto en la representación de funciones . .	18
4.4.3	10.3 Representación de funciones polinómicas . . . . .	18
4.4.4	10.4 Representación de funciones racionales . . . . .	18
4.4.5	10.5 Representación de otros tipos de funciones . . . . .	18
4.4.6	Ejercicios y problemas . . . . .	18
4.5	11. Cálculo de primitivas . . . . .	18
4.5.1	11.1 Primitivas. Reglas básicas para su cálculo . . . . .	18
4.5.2	11.2 Expresión compuesta de integrales inmediatas . . . .	18
4.5.3	11.3 Integración "por partes" . . . . .	18
4.5.4	11.4 Integración de funciones racionales . . . . .	18
4.5.5	Ejercicios y problemas . . . . .	18
4.6	12. La integral definida . . . . .	18
4.6.1	12.1 Área bajo una curva . . . . .	18
4.6.2	12.2 Una condición para que una función sea integrable en $[a, b]$ . . . . .	18
4.6.3	12.3 Propiedades de la integral . . . . .	18
4.6.4	12.4 La integral y su relación con la derivada . . . . .	18
4.6.5	12.5 Regla de Barrow . . . . .	18
4.6.6	12.6 Cálculo de áreas mediante integrales . . . . .	18
4.6.7	12.7 Volumen de un cuerpo de revolución . . . . .	18
4.6.8	Ejercicios y problemas . . . . .	18
<b>5</b>	<b>IV. Probabilidad</b>	<b>18</b>
5.1	13. Azar y probabilidad . . . . .	18
5.1.1	13.1 Experiencias aleatorias. Sucesos . . . . .	18
5.1.2	13.2 Frecuencia y probabilidad . . . . .	18
5.1.3	13.3 Ley de Laplace . . . . .	18
5.1.4	13.4 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes .	18
5.1.5	13.5 Pruebas compuestas . . . . .	18
5.1.6	13.6 Probabilidad total . . . . .	18
5.1.7	13.7 Probabilidades "a posteriori". Fórmula de Bayes . .	18

5.1.8	Ejercicios y problemas . . . . .	18
5.2	14. Distribuciones de probabilidad . . . . .	18
5.2.1	14.1 Distribuciones estadísticas . . . . .	18
5.2.2	14.2 Distribuciones de probabilidad de variable discreta . . . . .	18
5.2.3	14.3 La distribución binomial . . . . .	18
5.2.4	14.4 Distribuciones de probabilidad de variable continua . . . . .	18
5.2.5	14.5 La distribución normal . . . . .	18
5.2.6	14.6 La distribución binomial se aproxima a la normal . . . . .	18
5.2.7	Ejercicios y problemas . . . . .	18
5.2.8	Soluciones a las autoevaluaciones . . . . .	18

## 1 Resolución de problemas

### 1.1 Análisis de algunas estrategias

#### 1.1.1 Tantea, analiza sistemáticamente todos los casos

- Problema resuelto *El primer dígito de un número de seis cifras es 1. Si se mueve al otro extremo, a la derecha, manteniendo el orden del resto de cifras, el nuevo número (también de seis cifras) es tres veces el primero. ¿Cuál es el número original?*

A es el número original  $\underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{e}$  y B es el nuevo número  $\underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{e} \underline{1}$   
 Tabla de múltiplos de 3:

Última cifra de A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Última cifra de B = 3A	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Si la última cifra de B es un 1, la última cifra de A sólo puede ser un 7.  
 La última cifra de A es e, por tanto la cifra e de B es 7 porque  $3 \cdot 7 = 21$

A:  $\underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{7}$

B:  $\underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{d} \underline{7} \underline{1}$

Si la penúltima cifra de B es un 7 y como nos llevamos 2 de la operación anterior, se lo restamos y localizamos el correspondiente al 5 en la tabla de equivalencias.

$$3 \cdot 5 + 2 = 17$$

La penúltima cifra de A es d, por tanto la cifra d de B es 5.

A:  $\underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{5} \underline{7}$

B:  $\underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

Continuando el razonamiento, c sería:  $3 \cdot 8 + 1$  (llevada) = 25

c es 8 y me llevo 2

A:  $\underline{1} \underline{a} \underline{b} \underline{8} \underline{5} \underline{7}$

B:  $\underline{a} \underline{b} \underline{8} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

El siguiente sería:  $3 \cdot 2 + 2 = 8$

b es 2 y no me llevo

A:  $\underline{1} \underline{a} \underline{2} \underline{8} \underline{5} \underline{7}$

B:  $\underline{a} \underline{2} \underline{8} \underline{5} \underline{7} \underline{1}$

Por último,  $3 \cdot 4 = 12$

a es 4

$$\begin{array}{r} \text{A: } \underline{1} \ \underline{4} \ \underline{2} \ \underline{8} \ \underline{5} \ \underline{7} \\ \text{B: } \underline{4} \ \underline{2} \ \underline{8} \ \underline{5} \ \underline{7} \ \underline{1} \end{array}$$

2. Aplica la estrategia y resuelve 1. *El matemático Hardy visitó en el hospital al matemático indio Ramanujan. Le comentó: "He venido en el taxi 1 729, un número muy soso". "De ninguna manera" - contestó Ramanujan -, "es un número muy interesante: es el menor que se puede expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes". Demuéstralo.*  
 $x^3 + y^3 = 1.729$
2. *El producto de cuatro enteros consecutivos es 7 590 024. ¿Qué números son?*
3. *Halla el mayor número entero n que cumpla esta desigualdad:  $n^{200} < 5^{300}$ .*
4. *¿Cuántos números de cuatro cifras terminados en 45 son múltiplos de 45? ¿Hay alguno que empiece por 45? Explica tu respuesta.*
5. *¿Cuál es la suma de todos los números capicúas comprendidos entre 60 000 y 70 000?*
6. *¿Cuántos números menores que 1 000 tienen la suma de sus dígitos igual a 7?*
7. *¿Cuál es el último dígito (cifra de unidades) de  $3\,857^{105}$ ?*

### 1.1.2 Hacer un esquema, dibujo o diagrama

1. Problema resuelto *Un grupo de soldados marcha marcando el paso y formando una hilera de 30m de largo. El sargento, que se encontraba a la altura del último, aligera el paso hasta alcanzar la cabecera de la fila y, en ese momento, se vuelve y retrocede sin variar su ritmo hasta situarse otra vez junto al último.*  
*¿Cuál ha sido la distancia recorrida por el sargento en ese espacio de tiempo, sabiendo que mientras tanto el pelotón ha progresado 20m?*

## 1.2 El proceso deductivo

## 1.3 Método de reducción al absurdo

## 1.4 El método de inducción compleja

## 1.5 Principio del palomar

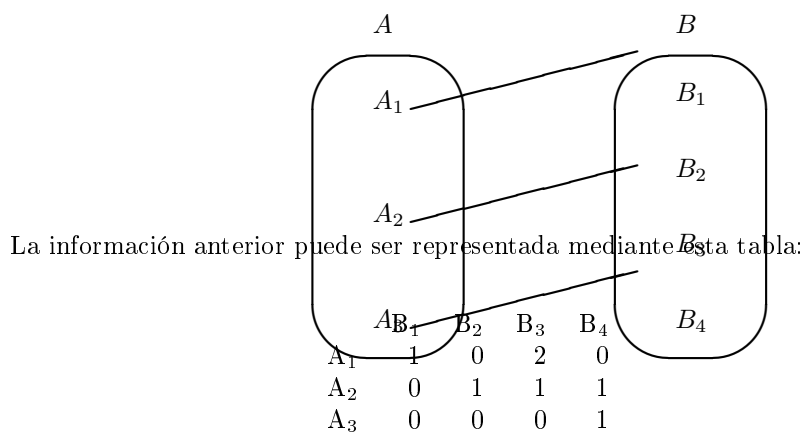
## 1.6 Problemas para practicar

# 2 I. Álgebra

## 2.1 1. Álgebra de matrices

En un país  $A$  hay tres aeropuertos internacionales,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , mientras que en otro país  $B$  hay cuatro,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ .

Una persona que quiera ir el lunes de  $A$  a  $B$  dispone de los siguientes vuelos:



Aquí tienes ahora, representados mediante flechas, los vuelos que permiten viajar el martes desde el país  $B$  anterior hasta otro país  $C$ :

Representa, mediante una tabla similar a la anteriormente descrita, la información recogida en el diagrama de vuelos entre los países  $B$  y  $C$ .

	$C_1$	$C_2$
$B_1$	3	2
$B_2$	1	0
$B_3$	1	0
$B_4$	0	2

### 2.1.1 1.1 Nomenclatura. Definiciones

Las siguientes tablas numéricas son matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 3 & 0.5 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(1 \quad 4 \quad 0 \quad \frac{2}{7} \quad 3) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 10 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

1. Ejercicios propuestos -1. Escribe las matrices traspuestas de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

-2. Escribe una matriz  $X$  tal que  $X^t = X$ ; esto es, que sea simétrica.  
**E**

-3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:  
 6 x 5

$$(a_{65}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

### 2.1.2 1.2 Operaciones con matrices

Suma de matrices:  $(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$

Producto de matrices:  $k \cdot (a_{ij})_{m,n} = (ka_{ij})_{m,n}$

Ejercicios propuestos

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$



$$D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

calcula  $E = 2A - 3B + C - 2D$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$2D = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n \quad (28)$$

Producto de matrices:  $A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}$

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (29)$$

Ejercicios propuestos

-2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$A \cdot B$  no se puede multiplicar

$$BA = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 0 \cdot -2 & 7 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot -2 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot -2 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot -5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot -2 & -2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot -5 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & 3 \\ 24 & -12 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (32)$$

C · A no se puede multiplicar

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot -1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot -3 \\ -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot -1 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix} \quad (33)$$

D · A no se puede multiplicar

B · C no se puede multiplicar

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 7 \cdot -1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \\ 6 \cdot 7 + 3 \cdot -1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 6 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ -2 \cdot 7 + -5 \cdot -1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & -2 \cdot 0 + -5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \quad (34)$$

B · D no se puede multiplicar

D · B no se puede multiplicar

C · D no se puede multiplicar

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + -1 \cdot 6 + 1 \cdot -2 & 1 \cdot 7 + -1 \cdot 3 + 1 \cdot -5 & 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot -2 & 0 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot -5 & 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + -3 \cdot -2 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + -3 \cdot -5 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 26 & 5 & 2 \\ 28 & 38 & -1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

-3. Intenta conseguir una matriz  $I_3$  de dimensión 3 x 3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada  $A(3 \times 3)$ , la deje igual.

Es decir:  $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

### 2.1.3 1.3 Propiedades de las operaciones con matrices

#### 1. Propiedades de la suma de matrices

(a) Asociativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

(b) Conmutativa:  $A + B = B + A$

(c) Elemento neutro:  $A + 0 = 0 + A = A$

(d) Toda matriz A, tiene una opuesta -A

#### 2. Propiedades del producto de números por matrices

(a) Asociativa:  $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$

(b) Distributiva I:  $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

(c) Distributiva II:  $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

(d) Producto por el número I:  $I \cdot A = A$

Ejercicios propuestos

-1 Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3, \quad b = 6 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (37)$$

2) Distributiva I:  $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

$$(3 + 6) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Resultado 1

$$9 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Resultado 2

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

(a) Distributiva II:  $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

$$3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \quad (43)$$

### 3. Propiedades del producto de matrices

(a) -1. Asociativa:  $(A_{m,n} \cdot B_{n,p}) \cdot C_{p,q} = A_{m,n} \cdot (B_{n,p} \cdot C_{p,q})$

(b) -2. El producto de matrices **no es conmutativo**

(c) -3. Propiedades distributivas. Si se permiten las operaciones, entonces  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  y también  $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

i. Ejercicios propuestos.

A. -2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (47)$$

Resultado de  $A \cdot (B + C)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right] = \quad (48)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \quad (49)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 12 + 4 \cdot 14 & 1 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 12 + 5 \cdot 14 & 0 \cdot 7 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 6 \cdot 3 & 1 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) & 1 \cdot 12 + 6 \cdot 14 & 1 \cdot 7 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Resultado de  $A \cdot B + A \cdot C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 6 + 5 \cdot 9 & 0 \cdot 7 + 5 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 6 \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 6 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 6 \cdot (-2) \end{pmatrix} + \quad (52)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 6 + 5 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 6 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) & 1 \cdot 6 + 6 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \quad (53)$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Resultado de  $(B + C) \cdot D$

$$\left[ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad (55)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 12 \cdot (-5) + 7 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 14 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Resultado de  $B \cdot D + C \cdot D$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-5) + 7 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 9 \cdot (-5) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -60 \end{pmatrix} \quad (60)$$

#### 2.1.4 1.4 Matrices cuadradas

1. Matriz unidad o Matriz identidad
2. Matriz inversa de otra
3. Inversa de una matriz por el método de Gauss

- (a) 1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices en el supuesto de que la tengan:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (63)$$

- Solución a a)

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \| & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \| & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 2^a \end{matrix} \quad (64)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \| & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \| & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

- Comprobación de a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

- Solución a b)

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 3 \cdot 1^a \\ 2^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \quad (68)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1^a : 3 \\ 2^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a + 2^a \\ 1^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a : 2 \end{array} \right\rangle \quad (69)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ -2^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (70)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (71)$$

- Comprobación de b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (1\frac{1}{2}) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

- Solución a c)

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a : 2 + 1^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \text{ No tiene inversa} \quad (74)$$

- (b) 2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

- Solución a a)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ 4 \cdot 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 2^a - 1^a - 3^a \end{array} \right\rangle \quad (78)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \text{ No tiene inversa} \quad (79)$$

• Solución a b)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (80)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (81)$$

Comprobación

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{ccc} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \quad (82)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (83)$$

• Solución a c)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \right\rangle \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (84)$$

No tiene inversa

(c) 3. Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

i. a)  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] + \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \quad (86)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \quad (88)$$

$$\text{ii. b) } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[ \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (89)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \quad (91)$$

$$\text{iii. c) } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (92)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (93)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \quad (94)$$





- 2.1.5 1.5 Complementos teóricos para el estudio de matrices
- 2.1.6 1.6 Rango de una matriz
- 2.1.7 Ejercicios y problemas
- 2.2 2. Determinantes
  - 2.2.1 2.1 Determinantes de orden dos
  - 2.2.2 2.2 Determinantes de orden tres
  - 2.2.3 2.3 Determinantes de orden cualquiera
  - 2.2.4 2.4 Menor complementario y adjunto
  - 2.2.5 2.5 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea
  - 2.2.6 2.6 Método para calcular determinantes de orden cualquiera
  - 2.2.7 2.7 El rango de una matriz a partir de sus menores
  - 2.2.8 2.8 Otro método para obtener la inversa de una matriz
- 2.3 3. Sistemas de ecuaciones
  - 2.3.1 3.1 Sistemas de ecuaciones lineales
  - 2.3.2 3.2 Posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales
  - 2.3.3 3.3. Sistemas escalonados
  - 2.3.4 3.4 Método de Gauss
  - 2.3.5 3.5 Discusión de sistemas de ecuaciones
  - 2.3.6 3.6 Un nuevo criterio para saber si un sistema es compatible
  - 2.3.7 3.7 Regla de Cramer
  - 2.3.8 3.8 Aplicación de la regla de Cramer a sistemas cualesquiera
  - 2.3.9 3.9 Sistemas homogéneos
  - 2.3.10 3.10 Discusión de sistemas mediante determinantes
  - 2.3.11 3.11 Forma matricial de un sistema de ecuaciones
  - 2.3.12 Ejercicios y problemas

## 3 II. Geometría

- 3.1 4. Vectores en el espacio
  - 3.1.1 4.1 Operaciones con vectores
  - 3.1.2 4.2 Expresión analítica de un vector
  - 3.1.3 4.3 Producto escalar de vectores
  - 3.1.4 4.4 Producto vectorial
  - 3.1.5 4.5 Producto mixto de tres vectores
  - 3.1.6 Ejercicios y problemas 18
- 3.2 5. Puntos, rectas y planos en el espacio
  - 3.2.1 5.1 Sistema de referencia en el espacio
  - 3.2.2 5.2 Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos
  - 3.2.3 5.3 Ecuaciones de la recta
  - 3.2.4 5.4 Posiciones relativas de dos rectas