Curso de matemáticas de $2^{\underline{o}}$ de Bachillerato

Marcel Gisbert

Contents

1 Resolución de problemas

1.1 Análisis de algunas estrategias

1.1.1 Tantea, analiza sistemáticamente todos los casos

1. Problema resuelto *El primer dígito de un número de seis cifras es 1. Si se mueve al otro extremo, a la derecha, manteniendo el orden del resto de cifras, el nuevo número (también de seis cifras) es tres veces el primero. ¿Cuál es el número original?*

   A es el número original $\underline{1}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}$ y B es el nuevo número $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}\ \underline{1}$
   Tabla de múltiplos de 3:

Última cifra de A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Última cifra de B = 3A	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

   Si la última cifra de B es un 1, la última cifra de A sólo puede ser un 7.
   La última cifra de A es $\underline{e}$, por tanto la cifra $\underline{e}$ de B es 7 porque $3 \cdot 7 = 21$
   A: $\underline{1}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{7}$
   B: $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{7}\ \underline{1}$
   Si la penúltima cifra de B es un 7 y como nos llevamos 2 de la operación anterior, se lo restamos y localizamos el correspondiente al 5 en la tabla de equivalencias.
   $3 \cdot 5 + 2 = 17$
   La penúltima cifra de A es $\underline{d}$, por tanto la cifra $\underline{d}$ de B es 5.
   A: $\underline{1}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{5}\ \underline{7}$
   B: $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{5}\ \underline{7}\ \underline{1}$
   Continuando el razonamiento, $\underline{c}$ sería: $3 \cdot 8 + 1$(llevada) $= 25$
   $\underline{c}$ es 8 y me llevo 2
   A: $\underline{1}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{8}\ \underline{5}\ \underline{7}$
   B: $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{8}\ \underline{5}\ \underline{7}\ \underline{1}$
   El siguiente sería: $3 \cdot 2 + 2 = 8$
   $\underline{b}$ es 2 y no me llevo
   A: $\underline{1}\ \underline{a}\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{5}\ \underline{7}$
   B: $\underline{a}\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{5}\ \underline{7}\ \underline{1}$
   Por último, $3 \cdot 4 = 12$
   $\underline{a}$ es 4

A: $\underline{1}$ $\underline{4}$ $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{5}$ $\underline{7}$
B: $\underline{4}$ $\underline{2}$ $\underline{8}$ $\underline{5}$ $\underline{7}$ $\underline{1}$

2. Aplica la estrategia y resuelve *1. El matemático Hardy visitó en el hospital al matemático indio Ramanujan. Le comentó: "He venido en el taxi 1 729, un número muy soso". "De ninguna manera" - contestó Ramanujan -, "es un número muy interesante: es el menor que se puede expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes". Demuéstralo.*
   $x^3 + y^3 = 1.729$

   2. El producto de cuatro enteros consecutivos es 7 590 024. ¿Qué números son?

   3. Halla el mayor número entero **n** *que cumpla esta desigualdad:* $n^{200} < 5^{300}$.

   4. ¿Cuántos números de cuatro cifras terminados en 45 son múltiplos de 45? ¿Hay alguno que empiece por 45? Explica tu respuesta.

   5. ¿Cuál es la suma de todos los números capicúas comprendidos entre 60 000 y 70 000?

   6. ¿Cuántos números menores que 1 000 tienen la suma de sus dígitos igual a 7?

   7. ¿Cuál es el último dígito (cifra de unidades) de $3\ 857^{105}$*?*

1.1.2 Hacer un esquema, dibujo o diagrama

1. Problema resuelto *Un grupo de soldados marcha marcando el paso y formando una hilera de 30m de largo. El sargento, que se encontraba a la altura del ultimo, aligera el paso hasta alcanzar la cabecera de la fila y, en ese momento, se vuelve y retrocede sin variar su ritmo hasta situarse otra vez junto al último.*
   ¿Cuál ha sido la distancia recorrida por el sargento en ese espacio de tiempo, sabiendo que mientras tanto el pelotón ha progresado 20m?

1.2 El proceso deductivo

1.3 Método de reducción al absurdo

1.4 El método de inducción compleja

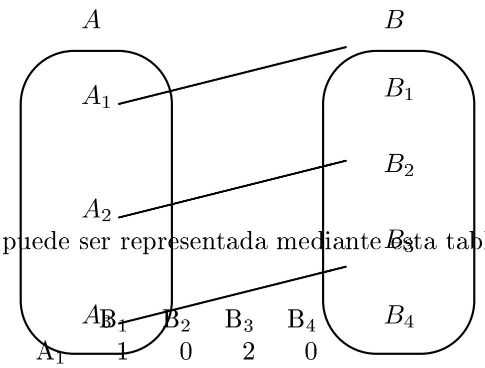
1.5 Principio del palomar

1.6 Problemas para practicar

2 I. Álgebra

2.1 1. Álgebra de matrices

En un país A hay tres aeropuertos internacionales, A_1, A_2, A_3, mientras que en otro país B hay cuatro, B_1, B_2, B_3, B_4.
Una persona que quiera ir el lunes de A a B dispone de los siguientes vuelos:



La información anterior puede ser representada mediante esta tabla:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	2	0
A_2	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1

Aquí tienes ahora, representados mediante flechas, los vuelos que permiten viajar el martes desde el país B anterior hasta otro país C:

Representa, mediante una tabla similar a la anteriormente descrita, la información recogida en el diagrama de vuelos entre los países B y C.

	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

2.1.1 1.1 Nomenclaruta. Definiciones

Las siguientes tablas numéricas son matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 3 & 0.5 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 4 & -5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{2}{7} & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 10 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

1. Ejercicios propuestos -1. Escribe las matrices traspuestas de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

-2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.
E

-3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:
6 x 5

$$(a_{65}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

2.1.2 1.2 Operaciones con matrices

Suma de matrices: $(\mathrm{a_{ij}})_{\mathrm{m,n}} + (\mathrm{b_{ij}})_{\mathrm{m,n}} = (\mathrm{a_{ij}} + \mathrm{b_{ij}})_{\mathrm{m,n}}$
Producto de matrices: $\mathrm{k} \cdot (\mathrm{a_{ij}})_{\mathrm{m,n}} = (\mathrm{ka_{ij}})_{\mathrm{m,n}}$

Ejercicios propuestos

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{22}$$

calcula *E = 2A - 3B + C - 2D*

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$2D = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Producto de una matriz fila por una matriz columna

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot b_n \tag{28}$$

Producto de matrices: $\mathrm{A_{m,n}} \cdot \mathrm{B_{n,p}} = \mathrm{C_{m,p}}$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \tag{29}$$

Ejercicios propuestos

-2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

A · B no se puede multiplicar

$$BA = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 0 \cdot -2 & 7 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot -2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot -2 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$A{\cdot}C = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 6+3\cdot -2 & 1\cdot 7+2\cdot 3+3\cdot -5 & 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot 0+3\cdot 0 \\ -2\cdot 2+5\cdot 6+1\cdot -2 & -2\cdot 7+5\cdot 3+1\cdot -5 & -2\cdot 1+5\cdot 0+1\cdot 1 & -2\cdot 5+5\cdot 0+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & - \\ 24 & - \end{pmatrix} \tag{32}$$

C · A no se puede multiplicar

$$A{\cdot}D = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot -1+2\cdot 5+3\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot -3 \\ -2\cdot 1+5\cdot 0+1\cdot 2 & -2\cdot -1+5\cdot 5+1\cdot 3 & -2\cdot 1+5\cdot 2+1\cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix} \tag{33}$$

D · A no se puede multiplicar
B · C no se puede multiplicar

$$C{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2\cdot 7+7\cdot -1+1\cdot 0+5\cdot 3 & 2\cdot 0+7\cdot 1+1\cdot 1+5\cdot 4 \\ 6\cdot 7+3\cdot -1+0\cdot 0+0\cdot 3 & 6\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 4 \\ -2\cdot 7+-5\cdot -1+1\cdot 0+0\cdot 3 & -2\cdot 0+-5\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \tag{34}$$

B · D no se puede multiplicar
D · B no se puede multiplicar
C · D no se puede multiplicar

$$D{\cdot}C = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+-1\cdot 6+1\cdot -2 & 1\cdot 7+-1\cdot 3+1\cdot -5 & 1\cdot 1+-1\cdot 0+1\cdot 1 \\ 0\cdot 2+5\cdot 6+2\cdot -2 & 0\cdot 7+5\cdot 3+2\cdot -5 & 0\cdot 1+5\cdot 0+2\cdot 1 \\ 2\cdot 2+3\cdot 6+-3\cdot -2 & 2\cdot 7+3\cdot 3+-3\cdot -5 & 2\cdot 1+3\cdot 0+-3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 26 & 5 & 2 \\ 28 & 38 & -1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

-3. Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3 x 3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada *A(3 x 3)*, la deje igual.
Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \tag{36}$$

2.1.3 1.3 Propiedades de las operaciones con matrices

1. Propiedades de la suma de matrices

   (a) Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C)

   (b) Conmutativa: A + B = B + A

   (c) Elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A

   (d) Toda matriz A, tiene una opuesta -A

2. Propiedades del producto de números por matrices

(a) Asociativa: a · (b · A) = (a · b) · A

(b) Distributiva I: (a + b) · A = a · A + b · A

(c) Distributiva II: a · (A · B) = a · A + a · B

(d) Producto por el número I: I · A = A

Ejercicios propuestos
-1 Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3, \quad b = 6 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{37}$$

2)Distributiva I: (a + b) · A = a · A + b · A

$$(3+6)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 6\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Resultado 1

$$9\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Resultado 2

$$3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

(a) Distributiva II: a · (A + B) = a · A + a · B

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \tag{43}$$

3. Propiedades del producto de matrices

   (a) -1. Asociativa: $(A_{m,n} \cdot B_{n,p}) \cdot C_{p,q} = A_{m,n} \cdot (B_{n,p} \cdot C_{p,q})$

   (b) -2. El producto de matrices **no es conmutativo**

   (c) -3. Propiedades distributivas. Si se permiten las operaciones, entonces A · (B + C) = A · B + A · C y también (B + C) · D = B · D + C · D

i. Ejercicios propuestos.

A. -2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Resultado de A · (B + C)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right] = \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \tag{49}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 4\cdot 3 & 1\cdot 6 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 12 + 4\cdot 14 & 1\cdot 7 + 4\cdot 3 \\ 0\cdot 3 + 5\cdot 3 & 0\cdot 6 + 5\cdot(-1) & 0\cdot 12 + 5\cdot 14 & 0\cdot 7 + 5\cdot 3 \\ 1\cdot 3 + 6\cdot 3 & 1\cdot 6 + 6\cdot(-1) & 1\cdot 12 + 6\cdot 14 & 1\cdot 7 + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Resultado de A · B + A · C

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 4\cdot 3 & 1\cdot 5 + 4\cdot 0 & 1\cdot 6 + 4\cdot 9 & 1\cdot 7 + 4\cdot(-2) \\ 0\cdot(-1) + 5\cdot 3 & 0\cdot 5 + 5\cdot 0 & 0\cdot 6 + 5\cdot 9 & 0\cdot 7 + 5\cdot(-2) \\ 1\cdot(-1) + 6\cdot 3 & 1\cdot 5 + 6\cdot 0 & 1\cdot 6 + 6\cdot 9 & 1\cdot 7 + 6\cdot(-2) \end{pmatrix} + \tag{52}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 4\cdot 0 & 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 6 + 4\cdot 5 & 1\cdot 0 + 4\cdot 5 \\ 0\cdot 4 + 5\cdot 0 & 0\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 0\cdot 6 + 5\cdot 5 & 0\cdot 0 + 5\cdot 5 \\ 1\cdot 4 + 6\cdot 0 & 1\cdot 1 + 6\cdot(-1) & 1\cdot 6 + 6\cdot 5 & 1\cdot 0 + 6\cdot 5 \end{pmatrix} = \tag{53}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Resultado de (B + C) · D

$$\left[\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 0 & 9 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}= \tag{55}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 6 & 12 & 7\\ 3 & -1 & 14 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}= \tag{56}$$

$$\begin{pmatrix}3\cdot 1+6\cdot 2+12\cdot(-5)+7\cdot 3\\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 2+14\cdot(-5)+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\ -60\end{pmatrix} \tag{57}$$

Resultado de B · D + C · D

$$\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 0 & 9 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}= \tag{58}$$

$$\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot(-5)+7\cdot 3\\ 3\cdot 1+0\cdot 2+9\cdot(-5)+(-2)\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\cdot 1+1\cdot 2+6\cdot(-5)+0\cdot 3\\ 0\cdot 1+(-1)\cdot 2+5\cdot(-5)+5\cdot 3\end{pmatrix}= \tag{59}$$

$$\begin{pmatrix}0\\ -48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26\\ -60\end{pmatrix} \tag{60}$$

2.1.4 1.4 Matrices cuadradas

1. Matriz unidad o Matriz identidad
2. Matriz inversa de otra
3. Inversa de una matriz por el método de Gauss

   (a) 1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices en el supuesto de que la tengan:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{61}$$

$$b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \tag{62}$$

$$c)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix} \tag{63}$$

- Solución a a)

$$a)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \| & 1 & 0\\ 0 & 1 & \| & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}1^a-2^a\\ 2^a\end{matrix} \tag{64}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \| & 1 & -1\\ 0 & 1 & \| & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{65}$$

- Comprobación de a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

- Solución a b)

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{67}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 3\cdot 1^a \\ 2^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \tag{68}$$

$$\left|\begin{array}{c} 1^a : 3 \\ 2^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a + 2^a \\ 1^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a : 2 \end{array}\right\rangle \tag{69}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a \\ -2^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \tag{70}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \tag{71}$$

- Comprobación de b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot(1\frac{1}{2}) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-\frac{1}{2}) \\ 3\cdot(-2)+4\cdot(1\frac{1}{2}) & 3\cdot 1 + 4\cdot(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

- Solución a c)

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a : 2 + 1^a \end{array}\right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{No tiene inversa} \tag{74}$$

(b) 2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

- Solución a a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a\\ 4\cdot 1^a-2^a\\ 2\cdot 2^a-1^a-3^a \end{array}\right\rangle \tag{78}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \text{ No tiene inversa} \tag{79}$$

- Solución a b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 1^a\\ 2^a\\ 3^a-1^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{80}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 1^a+3^a\\ 2^a\\ 3^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{81}$$

Comprobación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{82}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot 1\\ 0\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot(-1) & 0\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 1\\ 1\cdot 0+2\cdot 2+4\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

- Solución a c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} 2\cdot 1^a-2^a\\ 2^a-1^a\\ 3^a-2\cdot 2^a \end{array}\right\rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{84}$$

No tiene inversa

(c) 3. Para las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 4 & -1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{85}$$

i. a) A · (B + C) = (A · B) + (A · C)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]= \tag{86}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5\\ 26 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0\\ 15 & 7 \end{pmatrix} \tag{87}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 41 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 41 & 10 \end{pmatrix} \tag{88}$$

ii. b) (A + B) · C = (A · C) + (B · C)

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] \tag{89}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 15 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 5\\ 15 & -1\end{pmatrix} \tag{90}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 5\\ 30 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5\\ 30 & 6\end{pmatrix} \tag{91}$$

iii. c) A · (B · C) = (A · B) · C

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{92}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5\\ 15 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 26 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{93}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 107 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5\\ 107 & 3\end{pmatrix} \tag{94}$$

2.1.5 1.5 Complementos teóricos para el estudio de matrices

2.1.6 1.6 Rango de una matriz

2.1.7 Eercicios y problemas

2.2 2. Determinantes

2.2.1 2.1 Determinantes de orden dos

2.2.2 2.2 Determinantes de orden tres

2.2.3 2.3 Determinantes de orden cualquiera

2.2.4 2.4 Menor complementario y adjunto

2.2.5 2.5 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

2.2.6 2.6 Método para calcular determinantes de orden cualquiera

2.2.7 2.7 El rango de una matriz a partir de sus menores

2.2.8 2.8 Otro método para obtener la inversa de una matriz

2.3 3. Sistemas de ecuaciones

2.3.1 3.1 Sistemas de ecuaciones lineales

2.3.2 3.2 Posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

2.3.3 3.3. Sistemas escalonados

2.3.4 3.4 Método de Gauss

2.3.5 3.5 Discusión de sistemas de ecuaciones

2.3.6 3.6 Un nuevo criterio para saber si un sistema es compatible

2.3.7 3.7 Regla de Cramer

2.3.8 3.8 Aplicación de la regla de Cramer a sistemas cualesquiera

2.3.9 3.9 Sistemas homogéneos

2.3.10 3.10 Discusión de sistemas mediante determinantes

2.3.11 3.11 Forma matricial de un sistema de ecuaciones

2.3.12 Ejercicios y problemas

3 II. Geometría

3.1 4. Vectores en el espacio

3.1.1 4.1 Operaciones con vectores

3.1.2 4.2 Expresión analítica de un vector

3.1.3 4.3 Producto escalar de vectores

3.1.4 4.4 Producto vectorial

3.1.5 4.5 Producto mixto de tres vectores

3.1.6 Ejercicios y problemas 18

3.2 5. Puntos, rectas y planos en el espacio

3.2.1 5.1 Sistema de referencia en el espacio

3.2.2 5.2 Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos

3.2.3 5.3 Ecuaciones de la recta