<u>Lineare Algebra – Übungsblatt 4</u>

Bearbeitet von: Marcel Herd (1527440), Manuel Schwalm (1525044)

Abgabe: 20.04.2016

Dozent: Prof. Dr. Lutz Strüngmann

<u>Aufgabe 21:</u>

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto (x_1 - x_2, 2x_3 + x_2)^t$

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_3 + x_2 \end{pmatrix}$

Beweis für Lineare Abbildung:

$x \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$y \coloneqq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mid y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda * x + \mu * y) = \lambda * \varphi(x) + \mu * \varphi(y)$

Geben Sie hier eine Formel ein.

$$\varphi\left(\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda * \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu * \varphi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda * x_1 \\ \lambda * x_2 \\ \lambda * x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu * y_1 \\ \mu * y_2 \\ \mu * y_3 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} \lambda * x_1 + \mu * y_1 \\ \lambda * x_2 + \mu * y_2 \\ \lambda * x_3 + \mu * y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda * x_1 + \mu * y_1) - (\lambda * x_2 + \mu * y_2) \\ 2 * (\lambda * x_3 + \mu * y_3) + (\lambda * x_2 + \mu * y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda * x_1 + \mu * y_1 - \lambda * x_2 - \mu * y_2 \\ 2 * \lambda * x_3 + 2 * \mu * y_3 + \lambda * x_2 + \mu * y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda * x_1 - \lambda * x_2 + \mu * y_1 - \mu * y_2 \\ 2 * \lambda * x_3 + \lambda * x_2 + 2 * \mu * y_3 + \mu * y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda * (x_1 - x_2) + \mu * (y_1 - y_2) \\ 2 * \lambda * (x_3 + x_2) + 2 * \mu * (y_3 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\lambda * \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu * \varphi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2 * x_3 + x_2 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2 * y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda * (x_1 - x_2) \\ 2 * \lambda * (x_3 + x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu * (y_1 - y_2) \\ 2 * \mu * (y_3 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda * (x_1 - x_2) + \mu * (y_1 - y_2) \\ 2 * \lambda * (x_3 + x_2) + 2 * \mu * (y_3 + y_2) \end{pmatrix}$$

$Diese\ Abbildung\ ist\ linear, da\ \varphi(\lambda * x + \mu * y) = \lambda * \varphi(x) + \mu * \varphi(y)\ zutrifft.$

$Kern\ finden$:

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_3 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 - x_2 = 0 \quad | - x_2$

$x_1 = x_2$

$2x_3 + x_2 = 0 \quad | - x_2$

$2x_3 = -x_2 = -x_1$

$Kern(\varphi) = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} | 2x_3 = -x_2 = -x_1\}$

$= \left\{ \boldsymbol{\lambda} * \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} : \ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \right\}$

Hierraus ergibt sich gleichzeitig, dass die Dimension des Kernes $= 1$ *ist, da alle* 3 *Vektoren linear abhängig sind und man mithilfe eines einzigen Vektors bereits den Vektorraum bilden kann.*

$Bild\ finden$:

$\dim Kern(\varphi) + \dim Bild(\varphi) = \dim \mathbb{R}^3$

$\quad 1 \quad + \quad \mathrm{b} \quad = 3$

$=> b = 2 = \dim Bild(\varphi)$

$Bild(\varphi)$ *ist ein Unterraum von* $\mathbb{R}^2$. *Da aber* $\dim Bild(\varphi) = \dim \mathbb{R}^2$ *muss dies heißen, dass* $\boldsymbol{Bild(\varphi)} = \mathbb{R}^2$ *mit einer Dimension von* 1.