Lineare Algebra – Übungsblatt 5

Bearbeitet von: Marcel Herd (1527440), Manuel Schwalm (1525044)

Abgabe: 27.04.2016

Dozent: Prof. Dr. Lutz Strüngmann

Aufgabe 27:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A * A^T; A^T * A; \frac{1}{2} * (B + B^T); B - B^T$

$$A * A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2*2+1*1+1*1+0*0 & 2*0+1*(-1)+1*2+0*1 & 2*1+1*2+1*4+0*(-1) \\ 0*2-1*1+2*1+1*0 & 0*0-1*(-1)+2*2+1*1 & 0*1-1*2+2*4+1*(-1) \\ 1*2+2*1+4*1-1*0 & 1*0+2*(-1)+4*2-1*1 & 1*1+2*2+4*4-1*(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1+1+0 & 0-1+2+0 & 2+2+4-0 \\ 0-1+2+0 & 0+1+4+1 & 0-2+8-1 \\ 2+2+4-0 & 0-2+8-1 & 1+4+16+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^T * A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2*2+0*0+1*1 & 2*1+0*(-1)+1*2 & 2*1+0*2+1*4 & 2*0+0*1+1*(-1) \\ 1*2-1*0+2*1 & 1*1-1*(-1)+2*2 & 1*1-1*2+2*4 & 1*0-1*1+2*(-1) \\ 1*2+2*0+4*1 & 1*1+2*(-1)+4*2 & 1*1+2*2+4*4 & 1*0+2*1+4*(-1) \\ 0*2+1*0-1*1 & 0*1+1*(-1)-1*2 & 0*1+1*2-1*4 & 0*0+1*1-1*(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+0+1 & 2-0+2 & 2+0+4 & 0+0-1 \\ 2-0+2 & 1+1+4 & 1-2+8 & 0-1-2 \\ 2+0+4 & 1-2+8 & 1+4+16 & 0+2-4 \\ 0+0-1 & 0-1-2 & 0+2-4 & 0+1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 7 & -3 \\ 6 & 7 & 21 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} * (B + B^T) = \frac{1}{2} * \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} * \left(\begin{pmatrix}1+1 & 0+0 & 0+0\\0+0 & 0+0 & 0+1\\0+0 & 1+0 & 0+0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0{,}5\\0 & 0{,}5 & 0\end{pmatrix}$$

$$B - B^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1 & 0-0 & 0-0\\0-0 & 0-0 & 0-1\\0-0 & 1-0 & 0-0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 29:

$S := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $D(\varphi) := \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

a) S* $D(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 * \cos\varphi + 0 * \sin\varphi & 1 * (-\sin\varphi) + 0 * \cos\varphi\\0 * \cos\varphi - 1 * \sin\varphi & 0 * (-\sin\varphi) - 1 * \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi + 0 & -\sin\varphi + 0\\0 - \sin\varphi & 0 - \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\-\sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$D(-\varphi) * S = \begin{pmatrix}\cos -\varphi & -\sin -\varphi\\\sin -\varphi & \cos -\varphi\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos -\varphi * 1 - \sin -\varphi * 0 & \cos -\varphi * 0 - \sin -\varphi * (-1)\\\sin -\varphi * 1 + \cos -\varphi * 0 & \sin -\varphi * 0 + \cos -\varphi * (-1)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos -\varphi & \sin -\varphi\\\sin -\varphi & -\cos -\varphi\end{pmatrix}$$

$$D(\varphi) + S = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi + 1 & -\sin\varphi + 0\\\sin\varphi + 0 & \cos\varphi - 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi + 1 & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi - 1\end{pmatrix}$$

---

b) $F\ddot{u}r\ welche\ \varphi\ ist\ D(\varphi)\ symmetrisch?$

$$D(\varphi)^T := \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$D(\varphi) = D(\varphi)^T$$

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$Genau\ dann\ wenn, \sin\varphi = -\sin\varphi = \sin -\varphi\ \ ist.$

$A := \{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda * \pi) \in A\}$ $\qquad$ $D(\varphi) = D(\varphi)^T : \varphi \in A$

$I\colon\ a * \cos\varphi - \mathrm{b} * \sin\varphi = 0$

$II\colon\ \mathrm{a} * \sin\varphi + \mathrm{b} * \cos\varphi = 0 \quad | - \mathrm{a} * \sin\varphi$

$\cos\varphi = \ -a * \sin\varphi \quad |: -\sin\varphi$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = a$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = a\ \ in\ I$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} * \cos\varphi - \mathrm{b} * \sin\varphi = 0$$

$$-\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} - \mathrm{b} * \sin\varphi = 0 \quad | + b * \sin\varphi$$

$$-\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} = \mathrm{b} * \sin\varphi \qquad |: \sin\varphi$$

$$b = -\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^{\,2}}$$

Probe:

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} * \cos\varphi + \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2} * \sin\varphi = 0$$

$$= \ -\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi^2 * \sin\varphi}{\sin\varphi^2} = 0$$

$$= \ -\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} = 0$$

$$= 0 = 0$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} * \sin\varphi - \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^{\,2}} * \cos\varphi = 0$$

$$= -\cos\varphi - \frac{\cos\varphi^3}{\sin\varphi^2} = 0$$

$$-\cos\varphi * (1 + \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}) \neq 0$$

Da die Matrix 2 linear unabhängige Spaltenvektoren enthält, ist die Dimension $\dim\big(D(\varphi)\big) = 2$.