Lineare Algebra – Übungsblatt 3

Bearbeitet von: Marcel Herd (1527440), Manuel Schwalm (1525044)

Abgabe: 14.04.2016

Dozent: Prof. Dr. Lutz Strüngmann

Aufgabe 15:

Die angegebenen Vektoren sind die Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $linear\ unabhängig\ sind.$

$Prüfen\ auf\ lineare\ Unabhängigkeit:$

$I: \quad 4a = -2$
$II: \ 2a + 2b = -2$
$III: \ -3a + b = 1$

$I': a = -0{,}5$
$a = -0{,}5\ in\ II:$
$2 * (-0{,}5) + 2b = -2$
$-1 + 2b = -2 \ \ | + 1$
$2b = -1 \qquad |: 2$
$b = -0{,}5$

$Prüfen: a = -0{,}5\ und\ b = -0{,}5\ in\ I, II\ und\ III$
$I: 4 * (-0{,}5) = -2$
$-2 = -2$ ✓

$\text{II}: 2 * (-0{,}5) + 2 * (-0{,}5) = -2$
$-1 - 1 = -2$
$-2 = -2$ ✓

$\text{III}: -3 * (-0{,}5) + 1 * (-0{,}5) = 1$
$1{,}5 - 0{,}5 = 1$
$1 = 1$ ✓

$Da\ die\ Vektoren\ linear\ unabhängig\ sind, bilden\ sie\ die\ Basis\ des\ \mathbb{R}^3!$

Aufgabe 17:

$U_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$

Vektor: $\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ kann gebildet werden durch: $x_1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dies ist damit sowohl Erzeugendensystem und Basis.

Beweis: zeige auf lineare Unabhängigkeit.

$I: 2x_1 = 0$

$II: 3x_2 = 0$

$III: 0 = -x_3$

Da alle 3 Gleichungen nur durch setzen von $x_1 = x_2 = x_3$= 0 gelöst werden kann, sind die 3 Funktionen linear unabhängig!

Da die Basis der Vektorengleichung aus 3 Basisvektoren besteht, ist die Dimension $\dim(U_1) = 3$.