

# Lineare Algebra – Übungsblatt 1

---

**Bearbeitet von:** Marcel Herd (1527440), Manuel Schwalm (1525044)

**Abgabe:** 17.03.2016

**Dozent:** Prof. Dr. Lutz Strüngmann

---

## Aufgabe 1:

### 1.1:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 3 * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 * 1 \\ 3 * 3 \\ 3 * 2 \\ 3 * 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 * 2 \\ 2 * 1 \\ 2 * 2 \\ 2 * 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-1) * 2 \\ (-1) * 2 \\ (-1) * 2 \\ (-1) * -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3+4-2 \\ 9+2-2 \\ 6+4-2 \\ 6+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 1.2:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 8 * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 8 * 3 \\ 8 * 2 \\ 8 * 3 \\ 8 * -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 * 9 \\ 3 * 1 \\ 3 * 1 \\ 3 * 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 * 2 \\ 4 * 5 \\ 4 * 5 \\ 4 * -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 24 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \\ 3 \\ 51 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \\ -24 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 24-27+8 \\ 16-3+20 \\ 24-3+20 \\ -16-51-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 41 \\ -91 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 1.3:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= b * \begin{pmatrix} a \\ 3+a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} ab \\ 1 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} b * a \\ b * (3+a) \\ b * 2 \\ b * 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a * b \\ a * 1 \\ a * 0 \\ a * 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 * ab \\ 3 * 1 \\ 3 * 2 \\ 3 * (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ 3b+ab \\ 2b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab \\ a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3ab \\ 3 \\ 2 \\ -3a \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} ab+ab-3ab \\ 3b+ab+a-3 \\ 2b+0-2 \\ b+a+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab \\ 3b+ab+a-3 \\ 2b-2 \\ b+4a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**3:**

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Linear abhängig, wenn  $a * \vec{v}_1 + b * \vec{v}_2 = \vec{v}_3$

$$a * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} ? \rightarrow \begin{array}{|l|} \hline \text{I: } a + 2b = 3 \\ \hline \text{II: } -2a + 3b = 8 \\ \hline \text{III: } 5a + b = -3 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 3 - 2b$$

$$\text{Einsetzen in II: } -2 * (3 - 2b) + 3b = 8$$

$$-6 + 4b + 3b = 8$$

$$7b - 6 = 8$$

$$7b = 14$$

$$b = 2$$

$$b = 2 \text{ Einsetzen in III: } 5a + 2 = -3$$

$$5a = -5$$

$$a = -1$$

Probe:

$$-1 * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Damit sind die 3 Vektoren linear abhängig!

---

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Linear abhängig, wenn  $a * \vec{v}_1 + b * \vec{v}_2 = \vec{v}_3$

$$a * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} ? \rightarrow \begin{array}{|l|} \hline \text{I: } a + 2b = 2 \\ \hline \text{II: } a + 3b = 4 \\ \hline \text{III: } -b = -2 \\ \hline \end{array}$$

$$b = 2$$

$$\text{Einsetzen in I: } a + 4 = 2$$

$$a = -2$$

Probe:

$$-2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit sind die 3 Vektoren linear unabhängig!

**4:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 * 6 + (-4) * 3 + 0 * 4 = 12 - 12 + 0 = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) * 4 - 0 * 3 \\ 0 * 6 - 2 * 4 \\ 2 * 3 - (-4) * 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 - 0 \\ 0 - 8 \\ 6 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{a}) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 * 0 - 4 * (-4) \\ 4 * 2 - 6 * 0 \\ 6 * (-4) - 3 * 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 + 16 \\ 8 - 0 \\ -24 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -30 \end{pmatrix} = 2 * 16 + (-4) * 8 + 0 * (-30) = 32 - 32 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 * 1 - 4 * 0 \\ 4 * 1 - 6 * 1 \\ 6 * 0 - 3 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 4 - 6 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 * (-3) - 0 * (-2) \\ 0 * 3 - 2 * (-3) \\ 2 * (-3) - (-4) * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 0 \\ 0 + 6 \\ -6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$