Projeto de Filtros Digitais para Imagens

Marcelino Andrade

Pedro Berger

Tópicos

- Introdução;
- Fundamentos Matemáticos;
- Filtros FIR;
- Filtros IIR;
- Exemplos de Aplicações.

Introdução

- A Imagem Digital

AMOSTRAGEM
&
QUANTIZAÇÃO

Digital ou Analógica

Digital

- Aplicações de Filtros em Imagens:
  - Realce: suavização, bordas...
  - Restauração: ruído branco, ruído de quantização...

Fundamentos Matemáticos

- Operador de Adição: $y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + w(n_1, n_2)$
- Operador de Multiplicação: $y(n_1, n_2) = c \cdot x(n_1, n_2)$
- Operador de Deslocamento: $y(n_1, n_2) = x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$

Seqüência Bidimensional

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2)\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

Fundamentos Matemáticos

- Sistemas Lineares e Invariantes ao Deslocamento - SLID
  - Linearidade:
    - seja $y_1 = T[\, x_1 \,]$ e $y_2 = T[\, x_2 \,]$
    - se $ay_1 + by_2 = T\,[ax_1 + bx_2]$
  - Invariância ao Deslocamento:
    - seja $y_1(n_1,n_2) = T[\, x(n_1,n_2) \,]$
    - se $y_1(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = T[\, x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \,]$

Fundamentos Matemáticos

- Convolução Linear no Espaço 2-D

- Aplicando o Operador L|·| na Seqüência Bidimensional *x:*

$$y(n_1,n_2) = L\left[\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1,k_2)\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)\right]$$

- Linearidade:

$$y(n_1,n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1,k_2)L[\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)]$$

$$y(n_1,n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1,k_2)h_{k_1k_2}(n_1,n_2)$$

- Invariância ao Deslocamento:

$$y(n_1,n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

Fundamentos Matemáticos

- Transformadas de Fourier do SLID:

$$H(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} h(n_1,n_2)\exp[-j\omega_1 n_1 - j\omega_2 n_2]$$

$$h(n_1,n_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1,\omega_2)\cdot\exp(j\omega_1 n_1 + j\omega_2 n_2)d\omega_1 d\omega_2$$

- Estabilidade BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*):

  <u>Definição</u>: quando a entrada do sistema é limitada, a saída também deverá ser limitada. Os SLID são BIBO, condição necessária, se:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\left|h(n_1,n_2)\right| = S_1 < \infty$$

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*)

- Representação Espacial:

$$h(n_1,n_2) = \sum_{(k_1,k_2)} \sum_{=R_h} h(k_1,k_2)\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

- Processo de Filtragem Espacial:

$$y(n_1,n_2) = \sum_{(k_1,k_2)} \sum_{=R_h} x(k_1,k_2)h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

- Implementação com Fase-Zero:

$$h(-n_1,-n_2) = h^*(n_1,n_2) \Rightarrow \textit{caso complexo}$$

$$h(n_1,n_2) = h(-n_1,-n_2) \Rightarrow \textit{caso real}$$

Projetos de Filtros FIR
Método da Janela

- Seja $i(n_1,n_2)$ e $I(\omega_1,\omega_2)$ a resposta impulsional e freqüêncial de um filtro ideal desejado,
- Seja $w(n_1,n_2)$ uma janela espacial finita,
- O método da janela consiste na formação de $h(n_1,n_2)$ através da multiplicação espacial:

$$h(n_1,n_2)= i(n_1,n_2) \cdot w(n_1,n_2)$$

Projetos de Filtros FIR
Método da Janela

- Representação em Freqüência - Convolução:

$$H(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\cdot\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(\Omega_1,\Omega_2)\cdot W(\omega_1 - \Omega_1,\omega_2 - \Omega_2)\,d\Omega_1 d\Omega_2$$

- Definição da Janela 2_D a Partir da Janela 1-D:

  - $$W(n_1,n_2) = W(n_1)\cdot W(n_2)$$
  - $$W(n_1,n_2) = W(\sqrt{n_1^{\,2} + n_2^{\,2}})$$

Rectangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \le n \le M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \le M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Projetos de Filtros FIR
Método da Janela

- Escolha da Janela - Filtro FIR de Fase-Zero:
  - A janela deve possuir uma região R finita;
  - Para $H(\omega_1,\omega_2)$ aproximar-se de $I(\omega_1,\omega_2)$, $W(\omega_1,\omega_2)$ deve se aproximar de uma função impulso 2-D;
  - Para $h(n_1,n_2)$ possuir fase-zero, a janela $w(n_1,n_2)$ tem que satisfazer a relação $w(n_1,n_2)=w^*(-n_1,-n_2)$;

Projetos de Filtros FIR
Método da Transformação

- **Suponha um filtro 1-D com suporte [-N,N] e fase-zero, então:**

$$H(\omega) = h(0) + \sum_{n=1}^{N} h(n)\left(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a(n)\cos\omega n$$

$$\begin{cases} a(n) = h(0), & n = 0 \\ a(n) = 2h(n), & n > 0 \end{cases}$$

- **Podemos usar os polinômios de Chebyshev para expressar cosωn como um polinômio de grau n em cosω:**

$$\cos\omega n = T_n\left[\cos\omega\right]$$

Projetos de Filtros FIR
Método da Transformação

- **Substituindo na função de transferência do filtro 1-D:**

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N} a(n) T_n[\cos\omega]$$

- **Podemos cosω por uma Função de Transformação em 2-D, de forma que:**

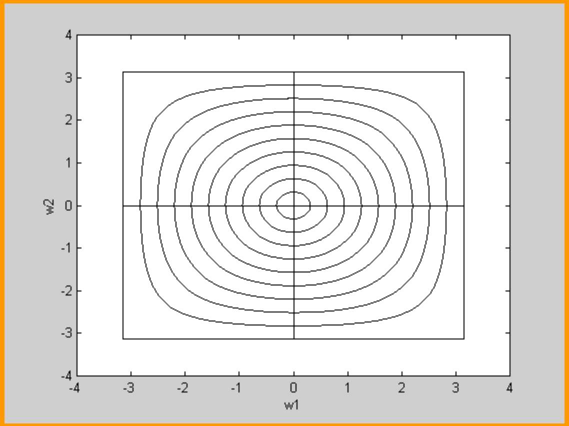
$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^{N} a(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)]$$

Projetos de Filtros FIR
Método da Transformação

- **Uma escolha simples para F(ω_1,ω_2) proposta por (McClellan,1972) é:**

$$F(\omega_1,\omega_2) = A + B\cos\omega_1 + C\cos\omega_2 + D\cos(\omega_1 - \omega_2) + E\cos(\omega_1 + \omega_2)$$

- **Se fizermos A=B=-1/2, C=D=1/2 e E=1/4 e plotarmos os contornos de F(ω_1,ω_2) , teremos:**



Projetos de Filtros FIR
Método Ótimo

- **Suponha que desejamos aproximar um filtro ideal com sua DFT dada por:**

$$H(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}h(n_1,n_2)\exp[-j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1-j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2]$$

- **fazendo $h(n_1,n_2)$ igual a zero para $n_1<\alpha$ e $n_2<\alpha$ com $\alpha<N$, teremos uma máscara de convolução de tamanho α x α e transformada discreta de Fourier:**

$$\hat{H}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{\alpha-1}\sum_{n_2=0}^{\alpha-1}\hat{h}(n_1,n_2)\exp[-j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1-j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2]$$

Projetos de Filtros FIR
Método Ótimo

- **Devemos então encontrar os coeficientes h(n_1,n_2) de forma que minimize alguma função de erro, como por exemplo:**

$$E_2 = \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\hat{H}(k_1,k_2) - H(k_1,k_2)\right|^2$$

- **Se fizermos:**

$$\vec{H} = C\vec{h} \quad \text{, onde} \quad C(i,j) = \frac{1}{N}\exp[-j2\pi(k_1n_1 + k_2n_2)/N]$$

Projetos de Filtros FIR
Método Ótimo

- **Podemos escrever a equação do erro da seguinte forma:**

$$E_2 = \left\| \tilde{H} - H \right\|^2 = \left\| C\tilde{h} - H \right\|^2$$

- **Derivando e igualando a zero, teremos:**

$$\frac{\partial E_2}{\partial \tilde{h}} = 2C^H \left(C\tilde{h} - H \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{h} = \left(C^H C \right)^{-1} C^H H$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{h} = C^{\#} H$$

Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- **A equação da diferença que descreve filtros do tipo IIR, é da forma:**

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_A}\sum a(k_1,k_2)y(n_1-k_1,n_2-k_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in R_B}\sum b(k_1,k_2)x(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- **se fizermos $x(n_1,n_2)=\delta(n_1,n_2)$ e $y(n_1,n_2)=h(n_1,n_2)$ na equação (3.32), teremos:**

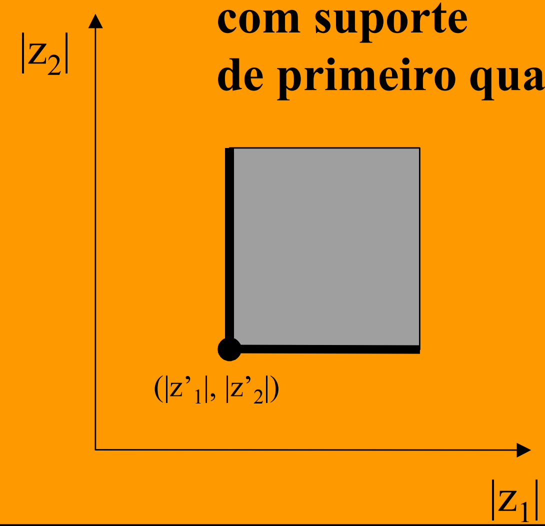
$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_A}\sum a(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in R_B}\sum b(k_1,k_2)\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- **Teorema de Shaks:**
  - **O teorema de Shanks estabelece que o sistema, na forma da equação abaixo, será estável, se e somente se, $A(z_1,z_2)\neq 0$ para qualquer $|z_1|, |z_2| \geq 1$**

$$\boxed{H(z_1,z_2) = \frac{1}{A(z_1,z_2)}}$$

ROC de um sistema com suporte de primeiro quadrante



Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- se substituirmos $h(n_1,n_2)$ por $h_d(n_1,n_2)$ na equação anterior, podemos fazer:

$$E_2 = \left[\sum\sum_{(k_1,k_2)\in R_A} a(k_1,k_2)h_d(n_1 - k_1, n_2 - k_2) - \sum\sum_{(k_1,k_2)\in R_B} b(k_1,k_2)\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \right]^2$$

- Algoritmo para minimizar o erro:

  - Definimos o vetor de parâmetros p formado pelos coeficientes do filtro $\{a(n_1, n_2), b(n_1, n_2)\}$. Definimos também Δp, como sendo perturbações do vetor de parâmetros p

Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- **Podemos expressar a dependência do erro com o vetor de parâmetros como $E_2(p)$. Então a cada interação buscamos incrementar o vetor Δp de forma que:**

$$\left\{ E_2(p+\Delta p) \right\}_{n+1} < \left\{ E_2(p) \right\}_n$$

  - Começamos com um valor inicial p_0, para o vetor de coeficientes, que fornece um chute inicial de onde o ponto de mínimo está localizado na superfície.
  - Usando este chute inicial, calculamos o vetor gradiente do erro médio quadrático $E_2(p)$.

Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- Então, o próximo chute é calculado fazendo-se uma mudança no chute inicial na direção oposta do gradiente de erro, calculado no passo anterior. Ou seja, devemos encontrar o vetor de perturbações Δp que somado ao vetor de prâmetros p, resultará num novo vetor de parâmetros que apresenta um erro E_2 menor do que o anterior.

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p = p_k + \frac{1}{2}\mu\left[-\nabla E_2(p)\right]$$

Projetos de Filtros IIR
Método Direto

- logo,

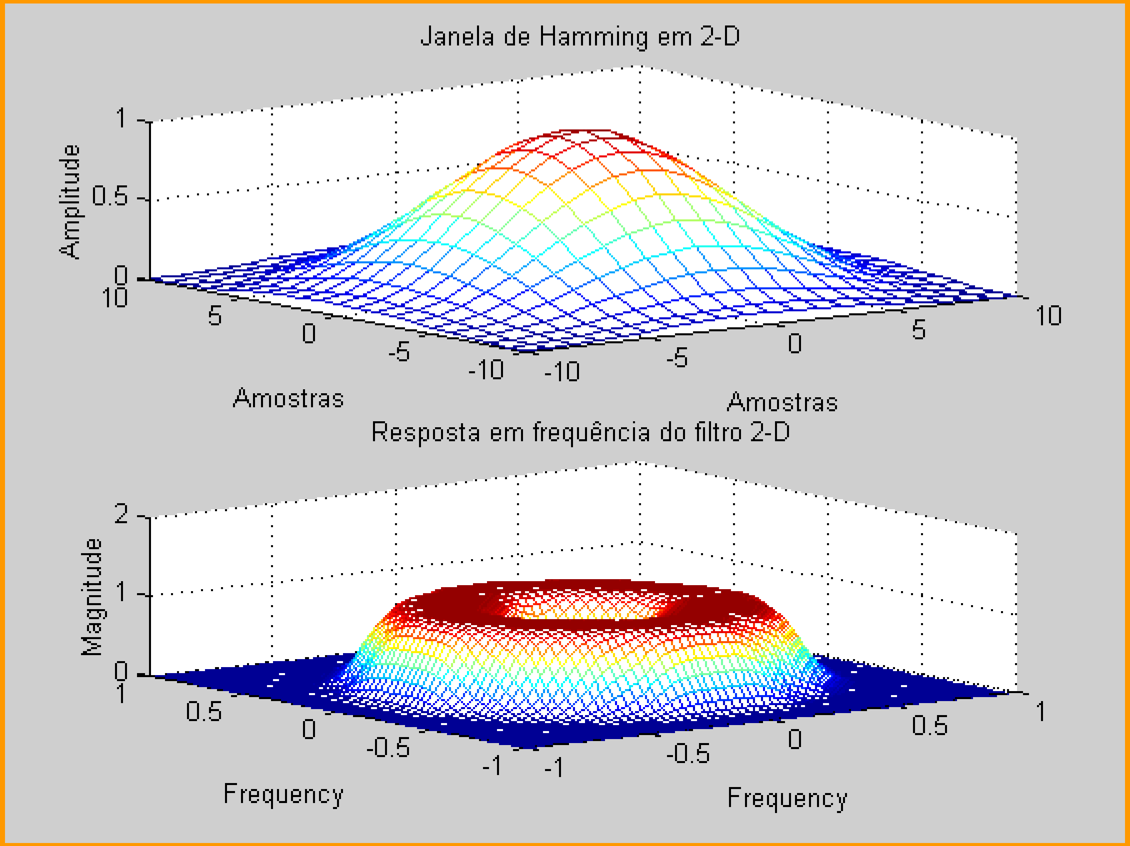
$$\Delta p = -\nabla E_2(p)$$

$$= \left[-\frac{\partial E_2}{\partial a(n_1, n_2)}, \cdots, -\frac{\partial E_2}{\partial b(n_1, n_2)}, \cdots \right]$$

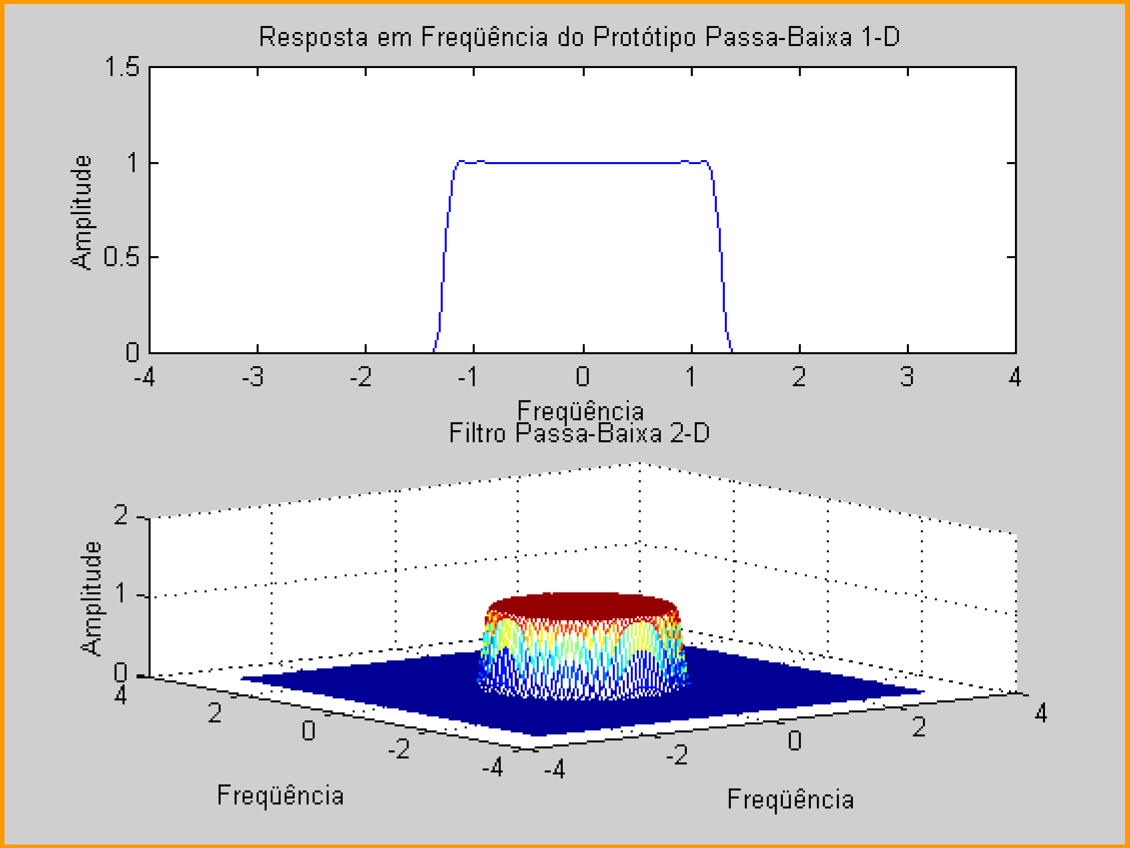
- onde μ, é um fator de passo usado para calcular a convergência.

- Voltamos ao passo 2, com o novo vetor de parâmetro p_{k+1} e começamos tudo de novo

Exemplo Filtro Passa-Banda projetado usando o método da Janela



Exemplo Filtro Passa-Baixa projetado usando o método da Transformação



Exemplo de Aplicação de Filtros Digitais no Processamento de Imagens