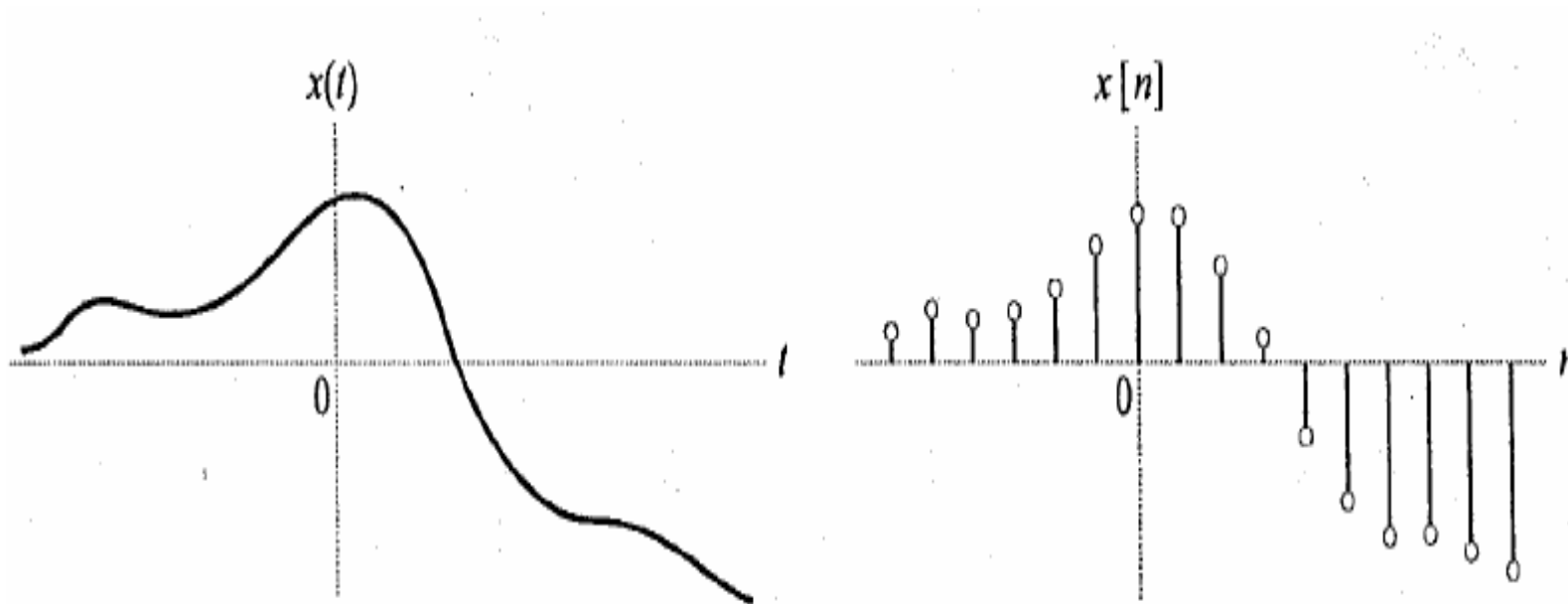


Processamento de Sinais



Professor: Marcelino Andrade

Módulos		Conteúdos Teóricos
5º	A amostragem	<ul style="list-style-type: none">- O teorema da amostragem- Reconstrução de sinais a partir de amostras- O efeito da subamostragem: <i>aliasing</i>- Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo
6º	Filtros e Equalizadores	<ul style="list-style-type: none">- Projeto de Filtros- Filtros FIR- Filtros IIR- Equalização

Representações de Fourier

<i>Domínio Tempo</i>	<i>Periódico</i>	<i>Não – Periódico</i>	
<i>C</i> <i>O</i> <i>N</i> <i>T</i> <i>I</i> <i>N</i> <i>U</i> <i>O</i>	<i>Série de Fourier</i> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$ $X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <i>x(t) tem período T, $\omega_0 = 2\pi / T$</i>	<i>Transformada de Fourier</i> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	<i>N</i> <i>Ã</i> <i>O</i> <i>P</i> <i>E</i> <i>R.</i>
<i>D</i> <i>I</i> <i>S</i> <i>C</i> <i>R</i> <i>E</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>DTFS</i> $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X(k) e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ <i>x[n] e X[k] tem período N, $\Omega_0 = 2\pi / N$</i>	<i>DTFT</i> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ <i>X(e^{jΩ}) tem período 2π</i>	<i>P</i> <i>E</i> <i>R</i> <i>I</i> <i>Ó</i> <i>D</i> <i>I</i> <i>C</i> <i>O</i>
	<i>DISCRETO</i>	<i>CONTÍNUO</i>	<i>Domínio Frequência</i>

Amostragem

■ RELACIONANDO A FT COM A FS

A representação por FS de um sinal periódico $x(t)$ é $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_o t}$

Agora, FT inversa de um impulso deslocado é $\frac{1}{2\pi} e^{jk\omega_o t} \xleftrightarrow{FT} \delta(\omega - k\omega_o)$

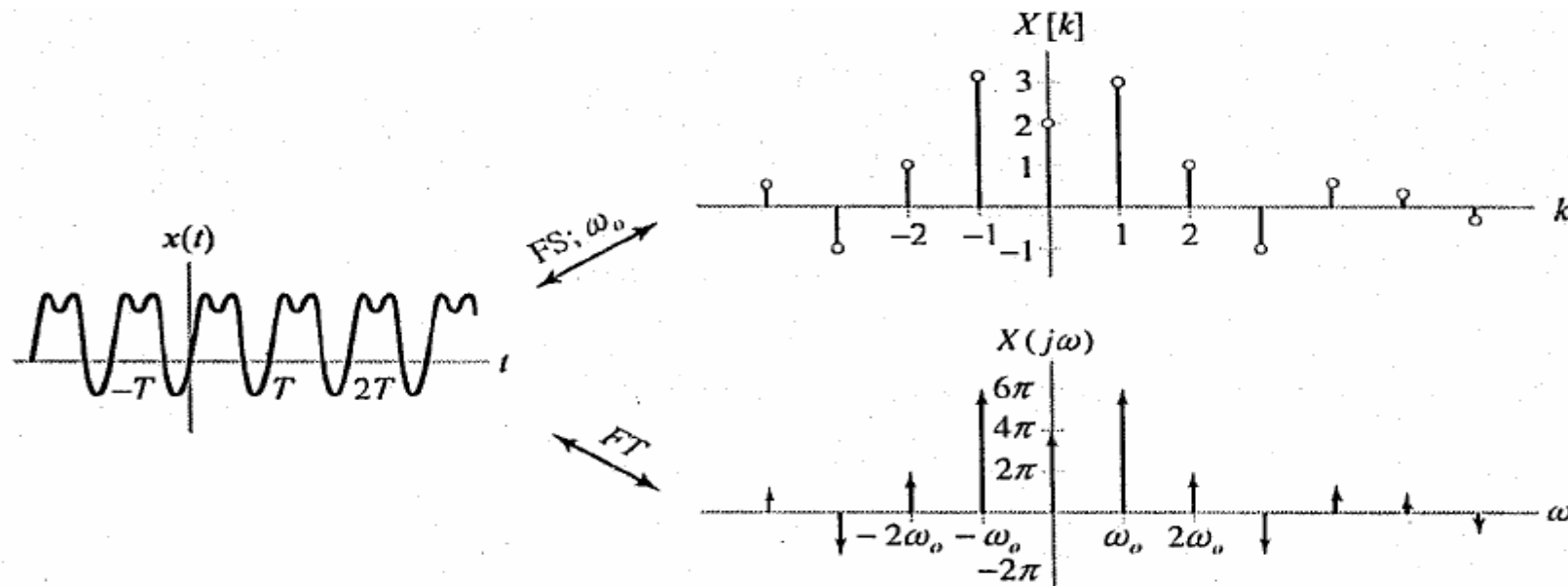
Conseqüentemente, a FT de um sinal periódico é uma série de impulsos espaçados pela frequência fundamental ω_o . O k -ésimo impulso tem força $2\pi X[k]$, em que $X[k]$ é o k -ésimo coeficiente da FS.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_o t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_o)$$

Amostragem

■ RELACIONANDO A FT COM A FS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$



Representações por FS e FT de um sinal periódico de tempo contínuo.

Amostragem

■ RELACIONANDO A FT COM A FS

EXEMPLO Encontre a representação por FT para $x(t) = \cos(\omega_n t)$

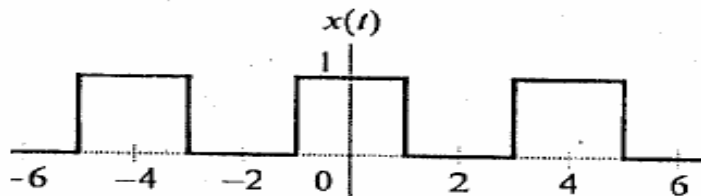
$$\cos(\omega_n t) \xleftrightarrow{FS; \omega_n} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

EXEMPLO Encontre a FT do *trem de impulsos*

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_n)$$

► **EXERCÍCIO** Determine a representação por FT para a onda quadrada periódica



$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(k\pi/2)}{k} \delta\left(\omega - k \frac{\pi}{2}\right)$$

Amostragem

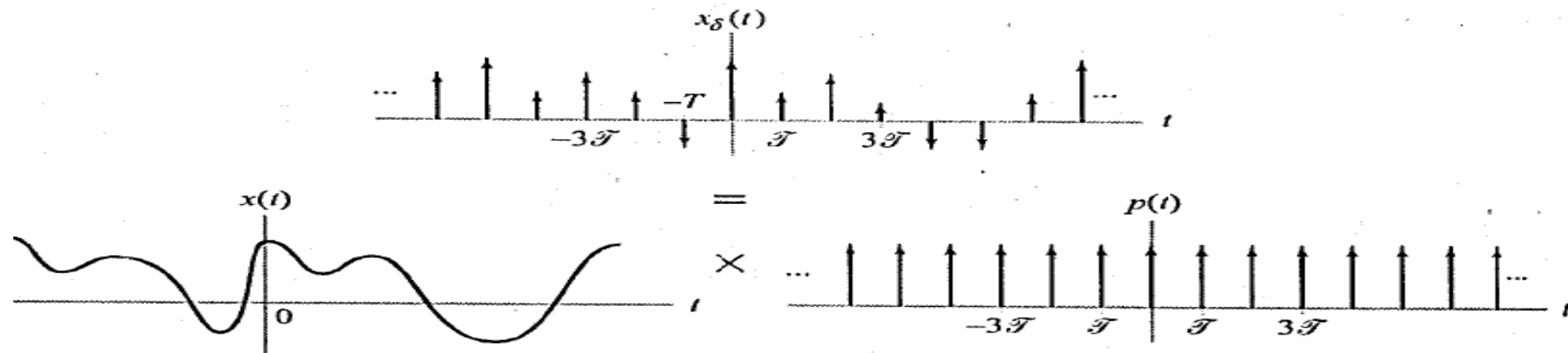
■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

Inicie com a representação em tempo contínuo do sinal de tempo discreto $x[n]$ dado na equação

$$x[n] = x(n\tilde{T}).$$

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - n\tilde{T}) \quad \text{Agora, substitua } x[n\tilde{T}] \text{ em } x[n] \text{ para obter } x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tilde{T})\delta(t - n\tilde{T})$$

$$\text{Uma vez que } x(t)\delta(t - n\tilde{T}) = x(n\tilde{T})\delta(t - n\tilde{T}), \quad x_{\delta}(t) = x(t)p(t) \quad \text{em que} \quad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tilde{T})$$

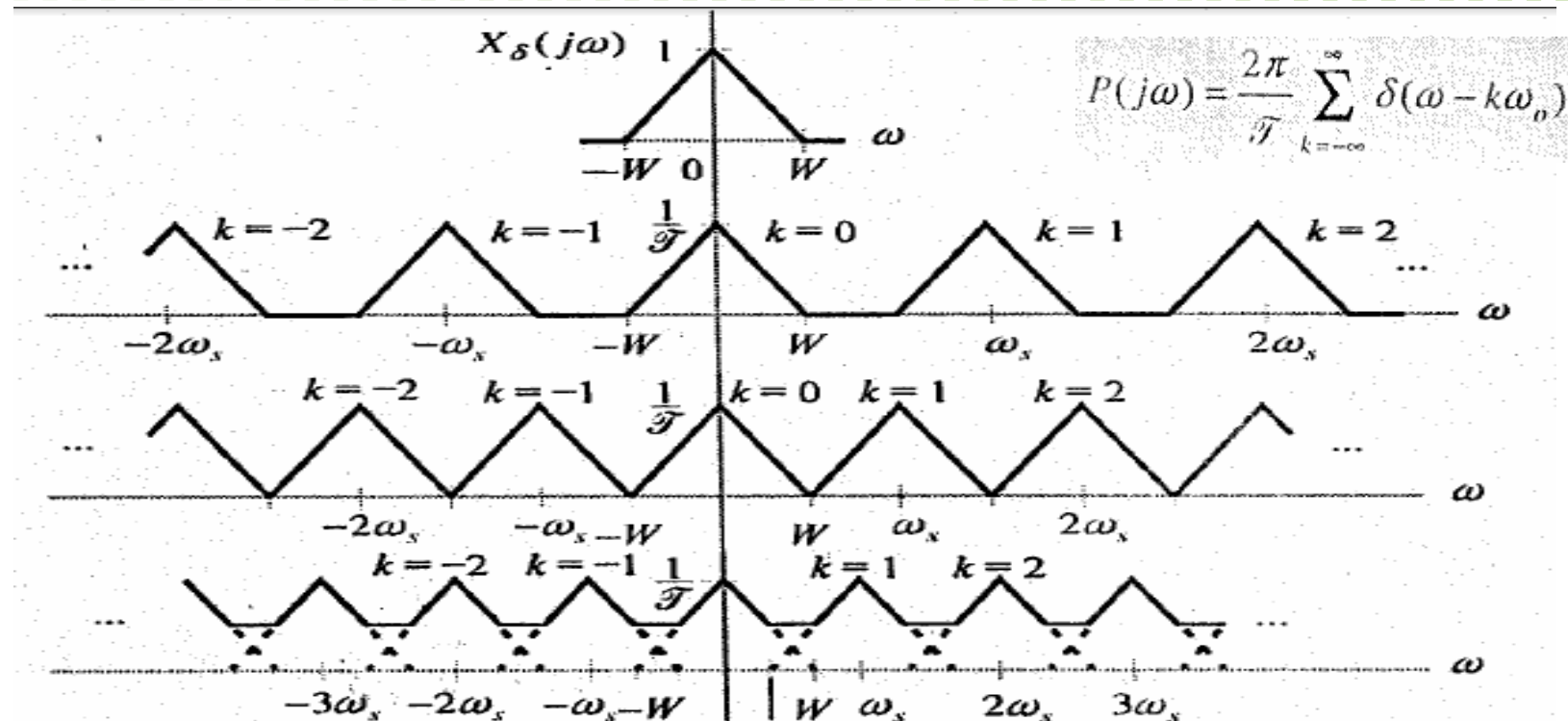


Esta representação comumente é denominada *amostragem por impulsos*.

Amostragem

■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

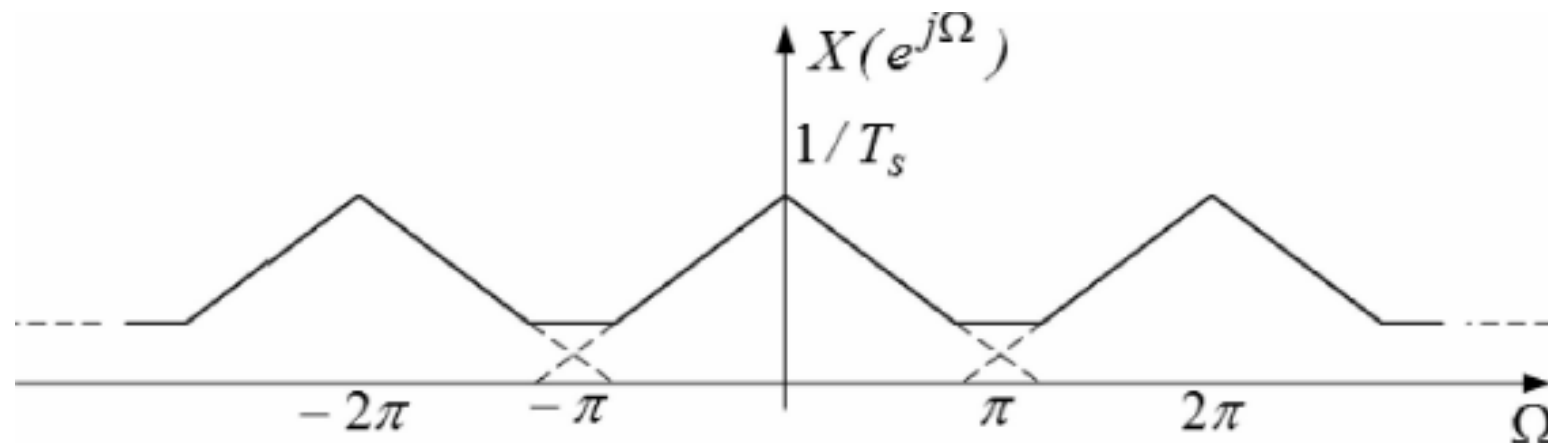
$$X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\omega}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



Amostragem

■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

A superposição das réplicas deslocadas do espectro original é denominada de *aliasing*, que se refere ao fenômeno de um componente de alta frequência assumir a identidade de um de baixa frequência.



Amostragem

■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

Exemplo Considere o efeito de extrair amostras do sinal senoidal

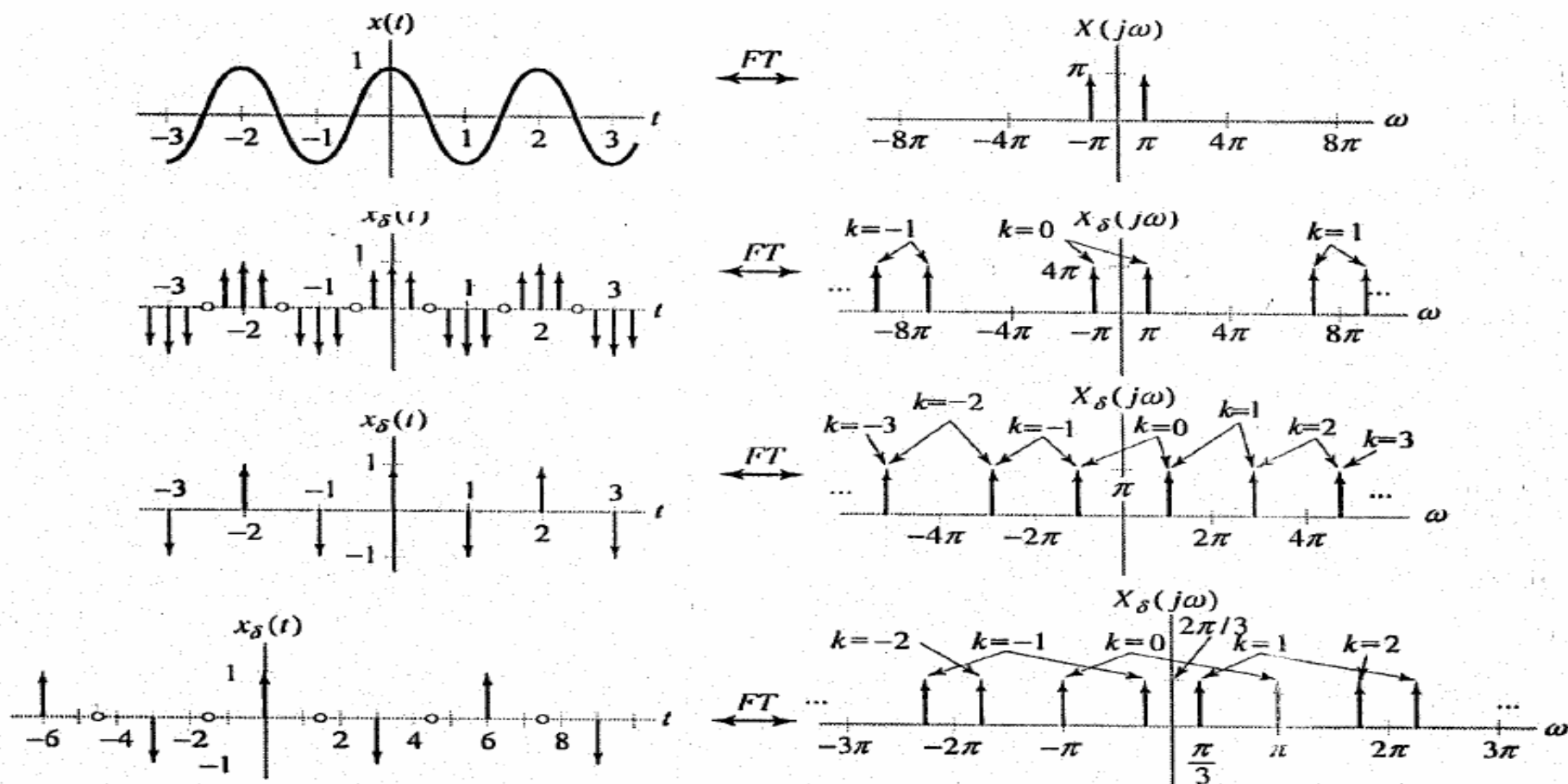
$$x(t) = \cos(\pi t)$$

Determinar a *FT* do sinal amostrado para os seguintes períodos de amostragem:

$$(a)T_s = 1/4 \text{ s}, (b)T_s = 1 \text{ s}, (c)T_s = 3/2 \text{ s}$$

Amostragem

■ AMOSTRANDO SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

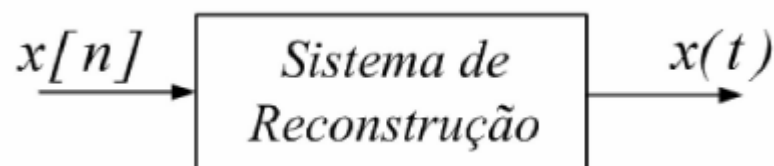


Módulos		Conteúdos Teóricos
5º	A amostragem	<ul style="list-style-type: none">- O teorema da amostragem- <u>Reconstrução de sinais a partir de amostras</u>- O efeito da subamostragem: <i>aliasing</i>- <u>Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo</u>
6º	Filtros e Equalizadores	<ul style="list-style-type: none">- Projeto de Filtros- Filtros FIR- Filtros IIR- Equalização

Amostragem

Reconstrução de sinais a partir de amostras

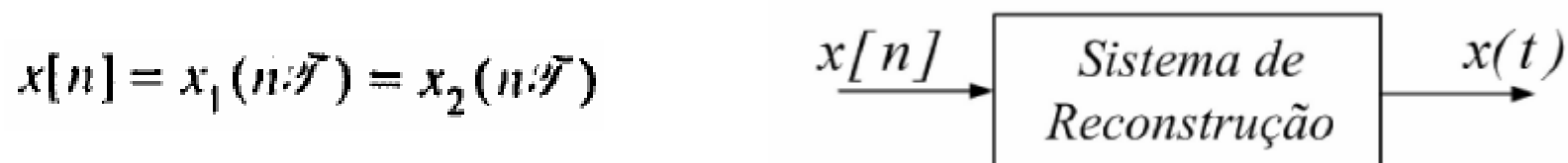
O problema de se reconstruir um sinal de tempo contínuo a partir de amostras envolve uma combinação de sinais de tempo contínuo e discreto. Um sistema que executa esta operação tem um sinal de entrada de tempo discreto e um sinal de saída de tempo contínuo.



A FT é uma ferramenta ideal para analisar este problema de reconstrução, uma vez que ela pode ser usada para representar tanto sinais de tempo contínuo como de tempo discreto.

Amostragem

Reconstrução de sinais a partir de amostras

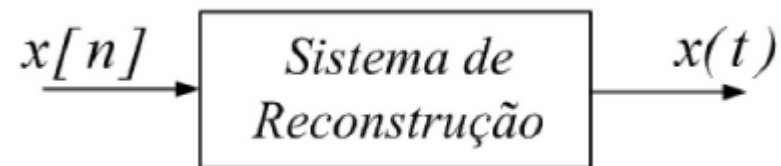


Há uma correspondência biunívoca entre as representações de domínio de tempo e de domínio de frequência de um sinal. Dessa forma, também podemos ver o problema de reconstruirmos o sinal de tempo contínuo no domínio de frequência. Para reconstruirmos de maneira única um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras deve haver uma correspondência única entre as FTs do sinal de tempo contínuo e o de sinal amostrado.

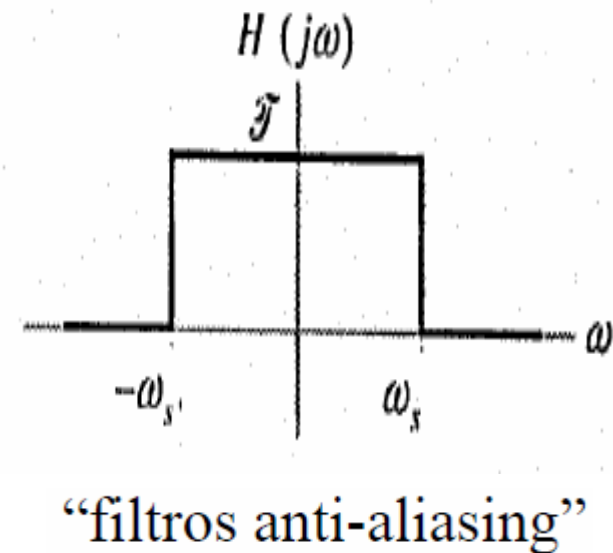
Teorema da Amostragem Admitamos que $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$ represente um sinal de faixa limitada, de forma que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_m$. Se $\omega_s > 2\omega_m$, em que $\omega_s = 2\pi/\mathcal{T}$ é a frequência de amostragem, então $x(t)$ é determinado de maneira única por suas amostras $x(n\mathcal{T})$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Amostragem

Reconstrução de sinais a partir de amostras



No caso em que existe o interesse somente em componentes de baixas frequências do sinal, pode-se empregar um filtro passa baixas de tempo contínuo antes de amostrar o sinal. Tais filtros são denominados de “filtros anti-aliasing” e são determinados com base nas frequências de interesse do sinal e na frequência com que se pretende amostrar o sinal.



Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO IDEAL

1) Considera-se reconstruir o sinal $X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$

2) Tal operação pode ser realizada por $X_{\delta}(j\omega) \times H_r(j\omega)$,

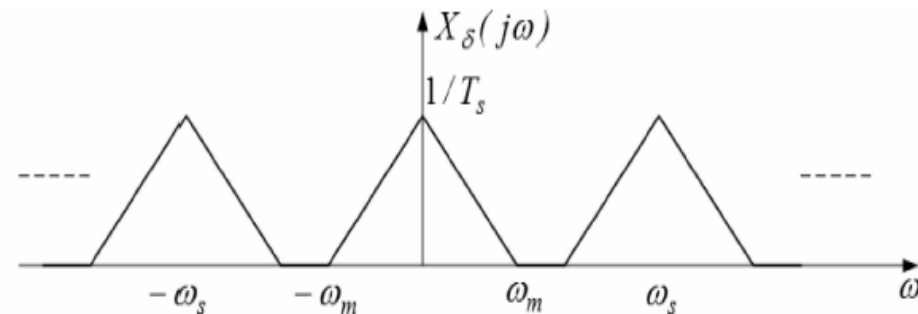
em que
$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}.$$

3) Temos agora $X(j\omega) = X_{\delta}(j\omega)H_r(j\omega)$

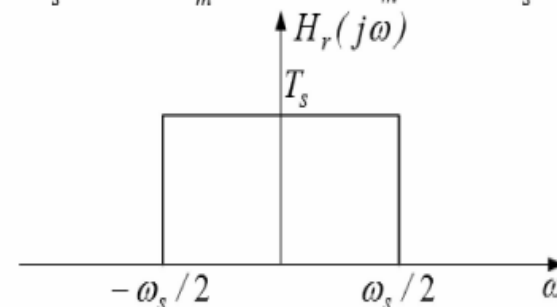
Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO IDEAL

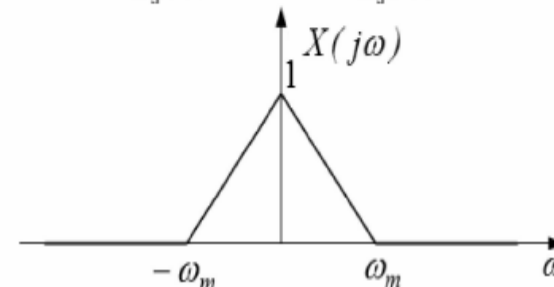
$$X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$



$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$



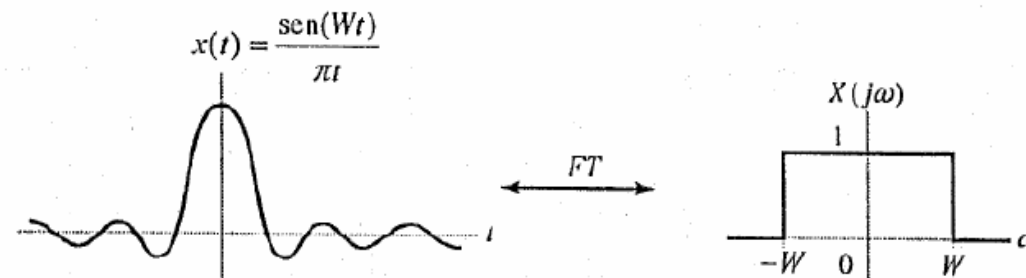
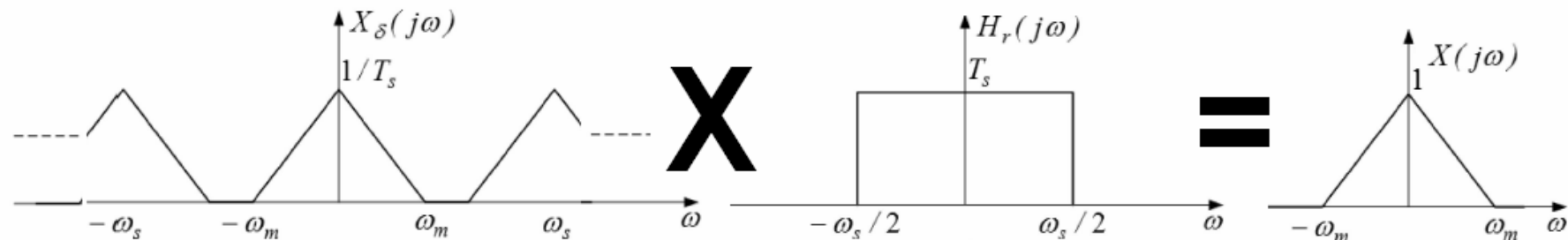
$$X(j\omega) = X_{\delta}(j\omega)H_r(j\omega)$$



Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO IDEAL

Observa-se que as condições do Teorema da Amostragem devem ser satisfeitas para que possa ocorrer a recuperação do sinal $X(j\omega)$.



Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO IDEAL

$$X(j\omega) = X_{\delta}(j\omega)H_r(j\omega) \Rightarrow x(t) = x_{\delta}(t) * h_r(t)$$

Logo:

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT_s)$$

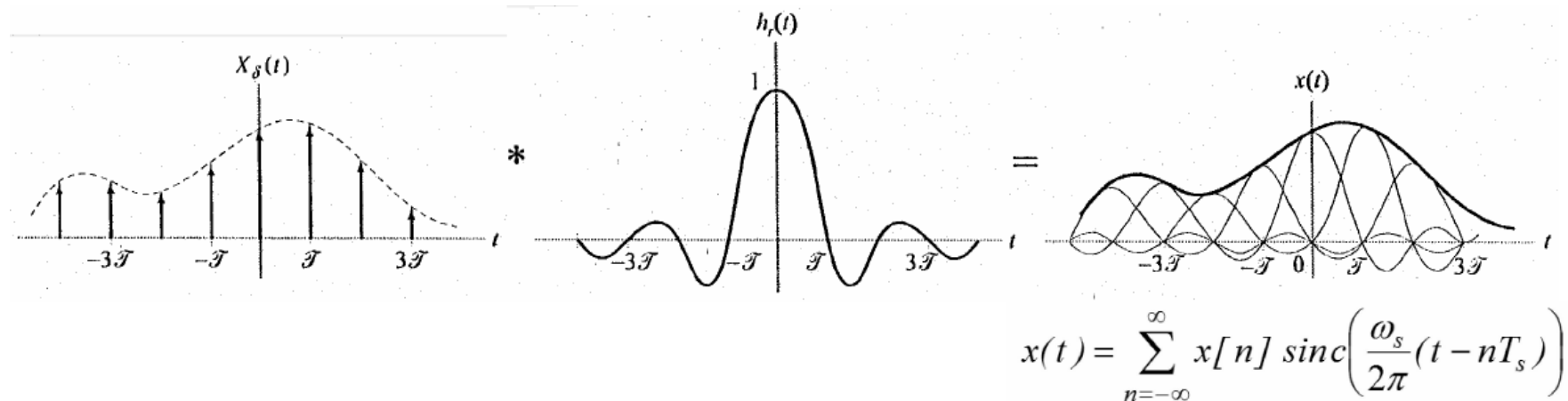
Uma vez que $h_r(t) = \frac{T_s \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\pi t}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

Amostragem

RECONSTRUÇÃO IDEAL

No domínio de tempo, reconstruímos $x(t)$ como uma soma ponderada de funções sinc deslocadas pelo intervalo de amostragem. Os pesos correspondem aos valores da sequência de tempo discreto.

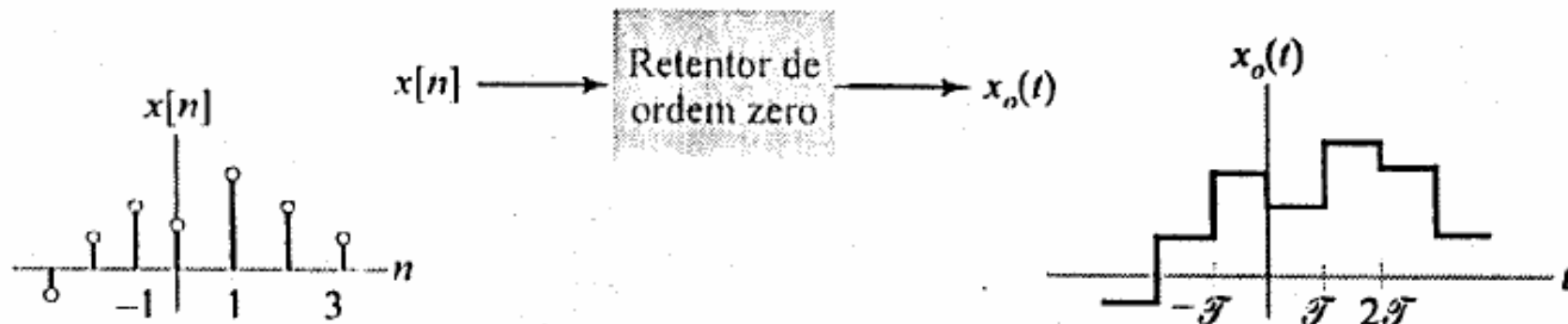


Na prática, esta equação não pode ser implementada. Primeiro, ela representa um sistema não causal. A saída, $x(t)$, depende dos valores passados e futuros da entrada, $x[n]$. Segundo, a influência de cada amostra se estende ao longo de um intervalo infinito de tempo porque $h_r(t)$ tem duração de tempo finita.

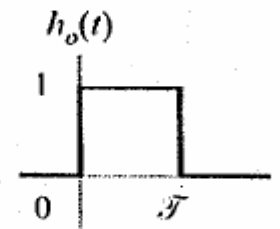
Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO

A reconstrução prática de sinais de tempo contínuo muitas vezes é implementada com um dispositivo conhecido como *retentor de ordem zero**, o qual mantém ou retém o valor $x[n]$ durante T segundos.

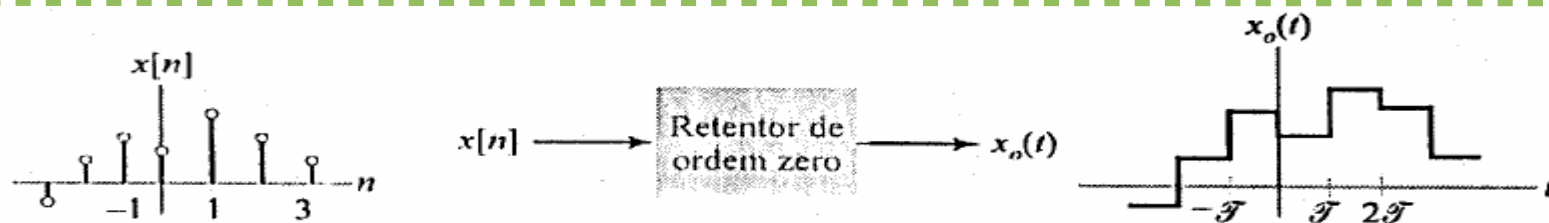


$$h_o(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



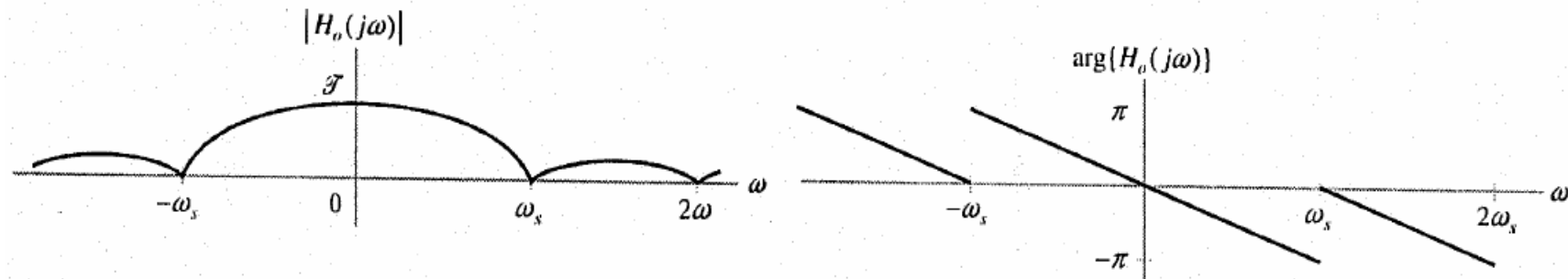
Amostragem

RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO



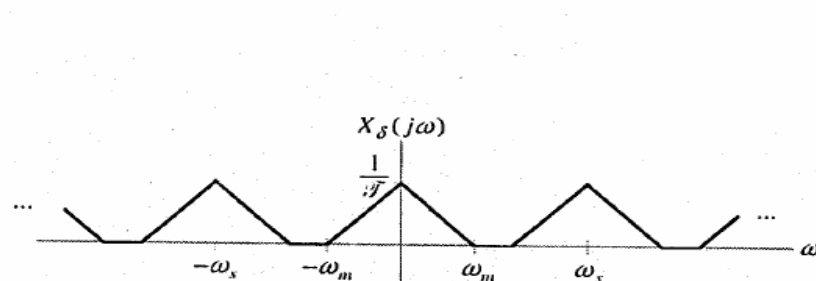
$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_o(t - nT) = h_o(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) = h_o(t) * x_\delta(t)$$

$$X_o(j\omega) = H_o(j\omega) X_\delta(j\omega) \quad \text{em que} \quad h_o(t) \xleftrightarrow{FT} H_o(j\omega) = 2e^{-j\omega T/2} \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega}$$

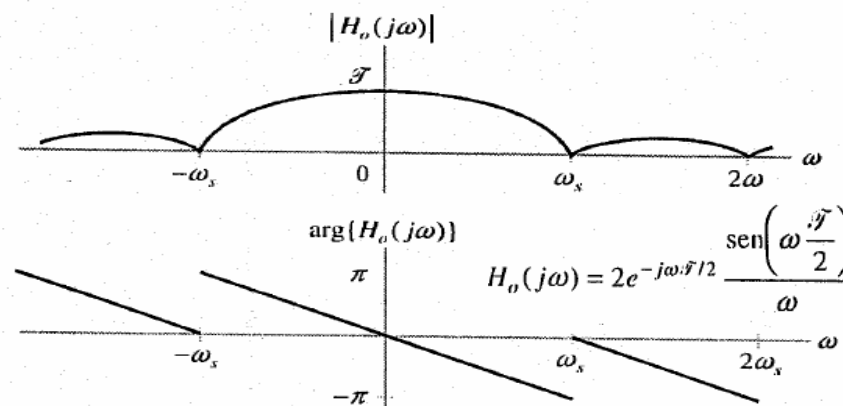


Amostragem

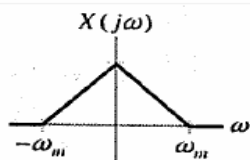
RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO



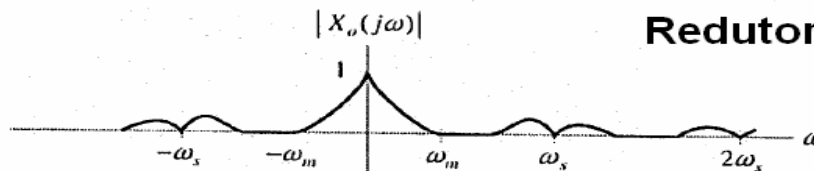
Sinal Amostrado



Redutor de Ordem Zero



Ideal



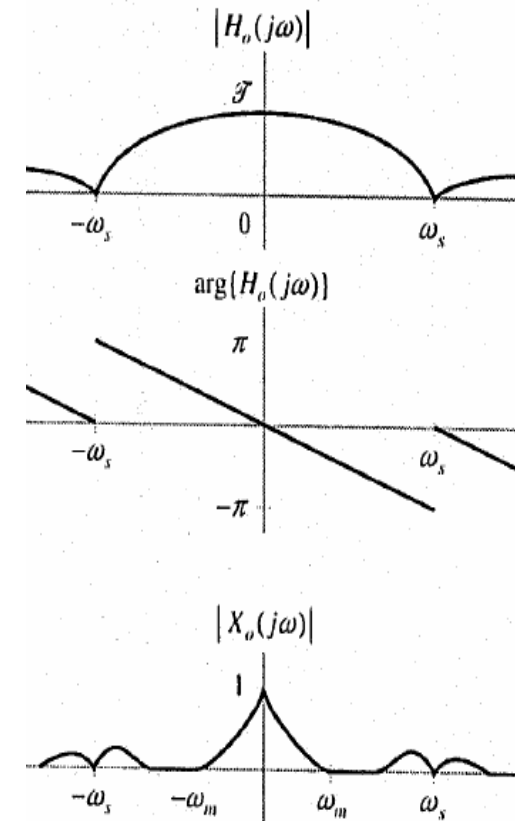
real

Amostragem

■ RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO

Efeitos da Retenção de Ordem Zero

1. Defasamento linear correspondente ao atraso de $T_s/2$ segundos;
2. A parte de $X_\delta(j\omega)$ entre $-\omega_m$ e ω_m é distorcida pela curvatura do lóbulo principal de $H_0(j\omega)$;
3. Versões distorcidas e atenuadas de $X(j\omega)$ permanecem centralizadas em múltiplos diferentes de zero de ω_s .

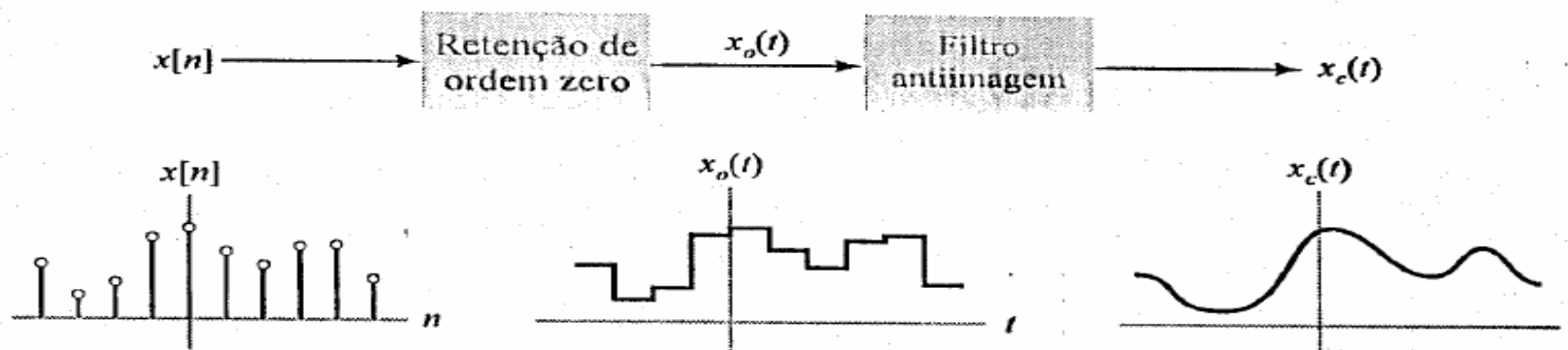


Amostragem

RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO

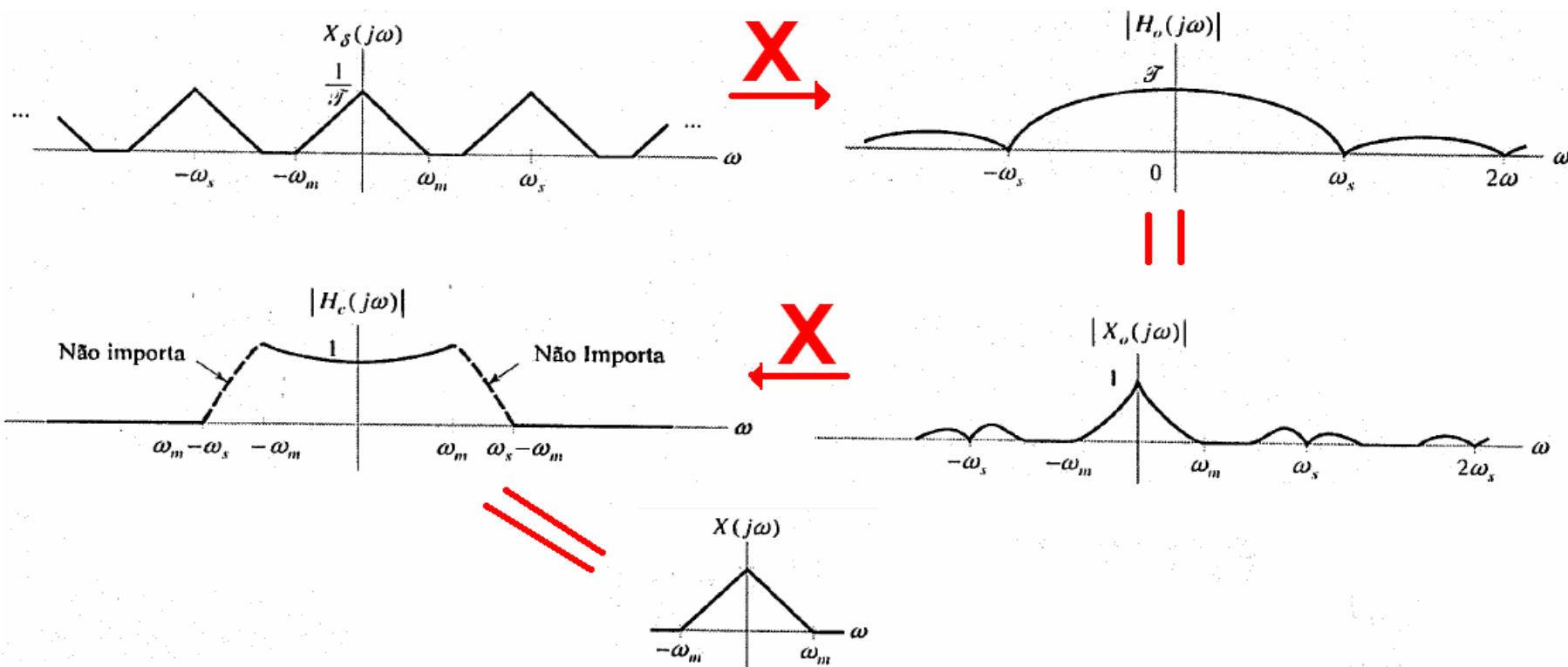
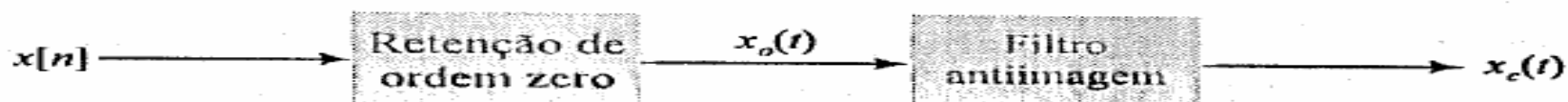
Em algumas aplicações, as modificações associadas com a retenção de ordem zero podem ser aceitáveis. Em outras, um processamento adicional de $x_o(t)$ pode ser desejável para reduzir a distorção associada com as modificações 2 e 3. Geralmente, um retardo de $T/2$ segundos não tem nenhuma consequência real. A segunda e terceira modificações listadas acima são eliminadas passando-se $x_o(t)$ por um filtro de compensação de tempo contínuo com resposta em frequência

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega T}{2 \sin(\omega T / 2)}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_s - \omega_m \end{cases}$$



Amostragem

RECONSTRUÇÃO PRÁTICA – O RETENTOR DE ORDEM ZERO



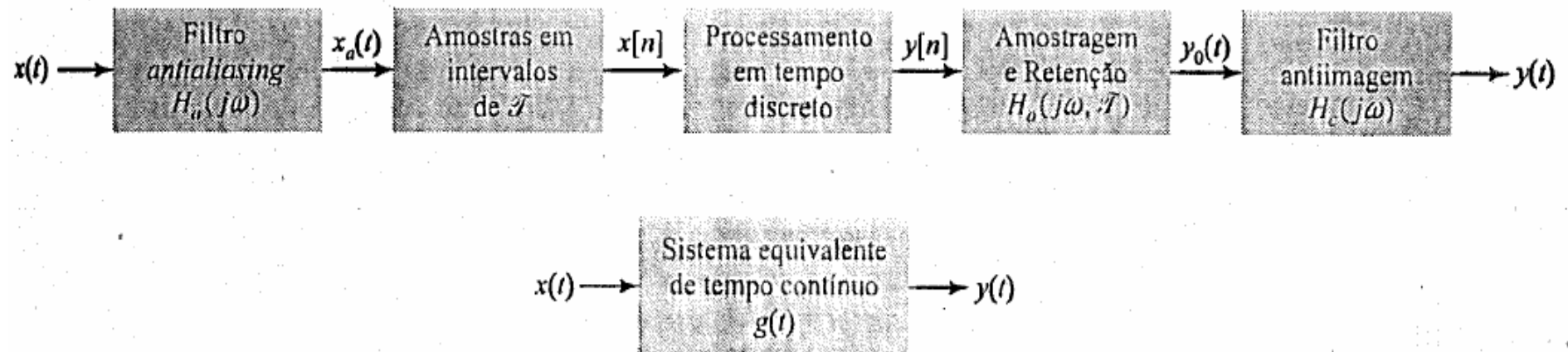
Processamento Digital e Analógico de Sinais

■ SISTEMA BÁSICO DE PROCESSAMENTO DE SINAIS EM TEMPO DISCRETO

Primeiro, uma classe ampla de manipulações de sinais é mais facilmente realizada usando-se as operações aritméticas de um computador do que usando-se componentes analógicos.

Segundo, a implementação de um sistema num computador envolve somente escrever um conjunto de instruções ou programa para que o computador execute.

Terceiro, o sistema de tempo discreto é facilmente mudado modificando-se o programa.

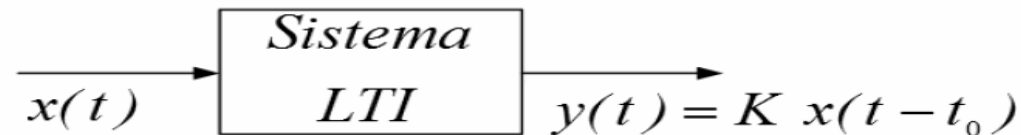


Módulos		Conteúdos Teóricos
5º	A amostragem	<ul style="list-style-type: none">- O teorema da amostragem- Reconstrução de sinais a partir de amostras- O efeito da subamostragem: <i>aliasing</i>- Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo
6º	Filtros e Equalizadores	<ul style="list-style-type: none">- <u>Projeto de Filtros</u>- Filtros FIR- Filtros IIR- Equalização

Filtros de Sinais

- O projeto de um filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo contínuo, em cujo caso, falamos de *filtros analógicos*. Alternativamente, o projeto do filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo discreto, em cujo caso falamos de *filtros digitais*.

Transmissão sem Distorções



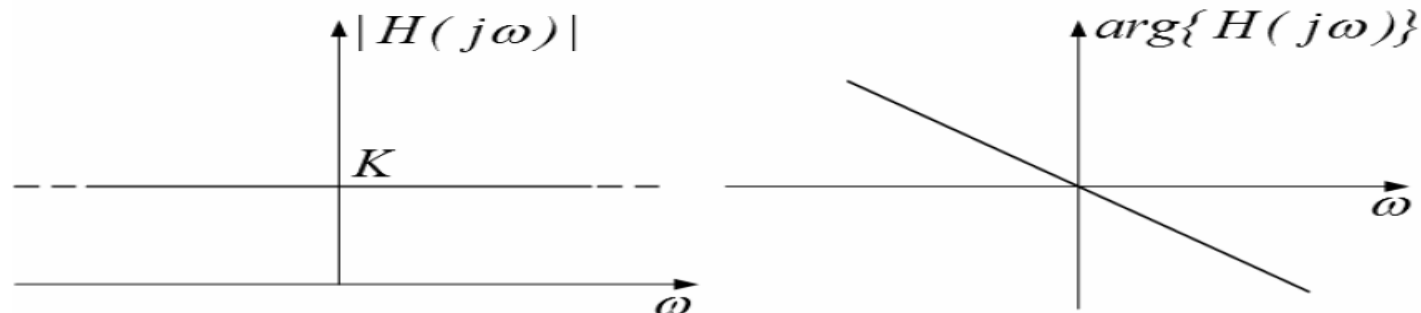
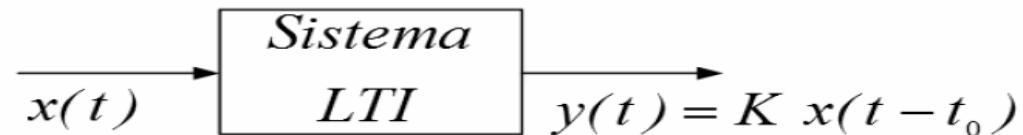
Aplicando a transformada de Fourier

$$Y(j\omega) = K X(j\omega) e^{-j\omega t_0} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K e^{-j\omega t_0}$$

Filtros de Sinais

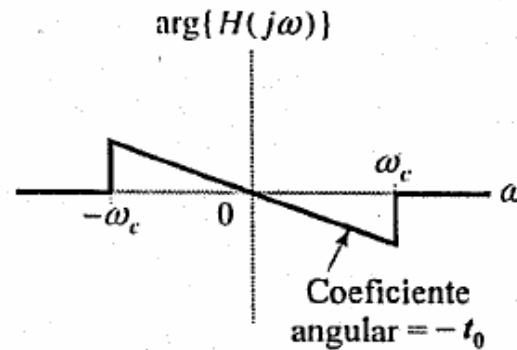
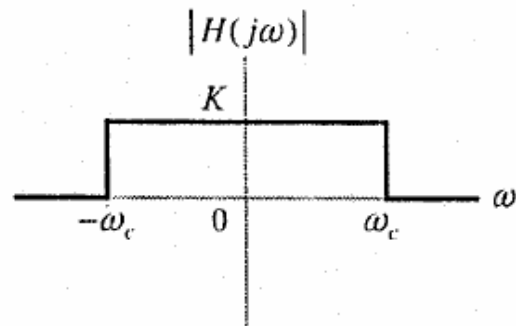
- O projeto de um filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo contínuo, em cujo caso, falamos de *filtros analógicos*. Alternativamente, o projeto do filtro pode ser realizado usando-se conceitos de tempo discreto, em cujo caso falamos de *filtros digitais*.

Transmissão sem Distorções



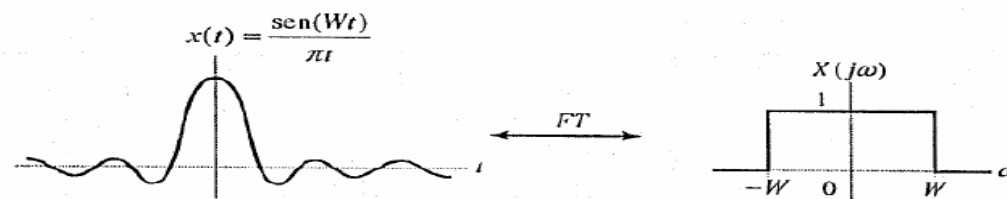
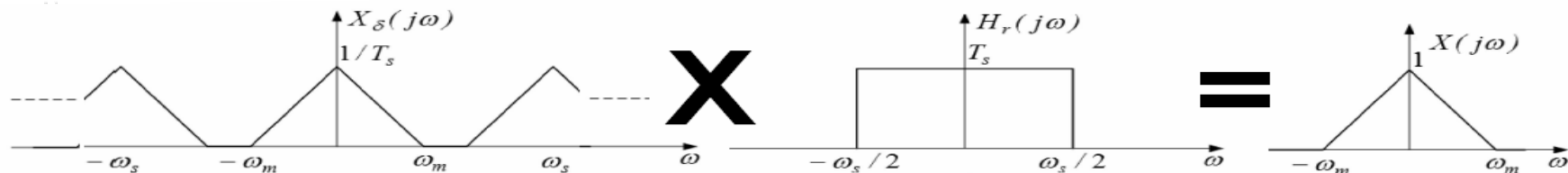
Filtros de Sinais

Filtros Passa-Baixas Ideais



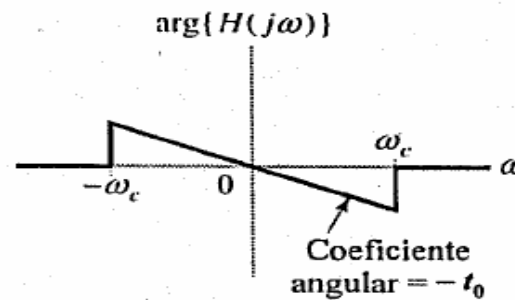
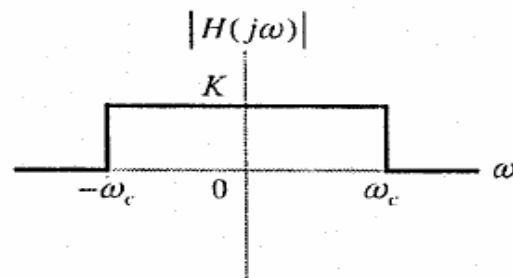
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

RECONSTRUÇÃO IDEAL



Filtros de Sinais

Filtros Passa-Baixas Ideais



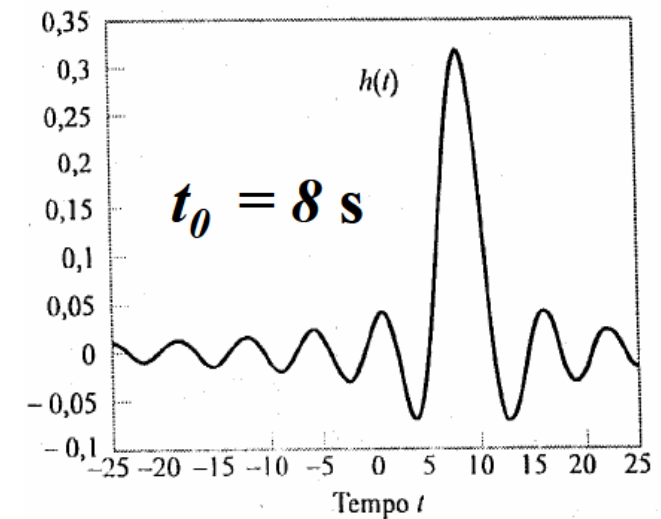
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Para avaliar $h(t)$, tomamos a transformada de Fourier inversa

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad \text{e} \quad \text{sinc}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

Conseqüentemente,

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right)$$



Filtros de Sinais

Projeto de Filtros

- ▶ Dentro da faixa de passagem, a resposta em módulo do filtro deve situar-se entre 1 e $1 - \epsilon$:

$$1 - \epsilon \leq |H(j\omega)| \leq 1 \quad \text{para } 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

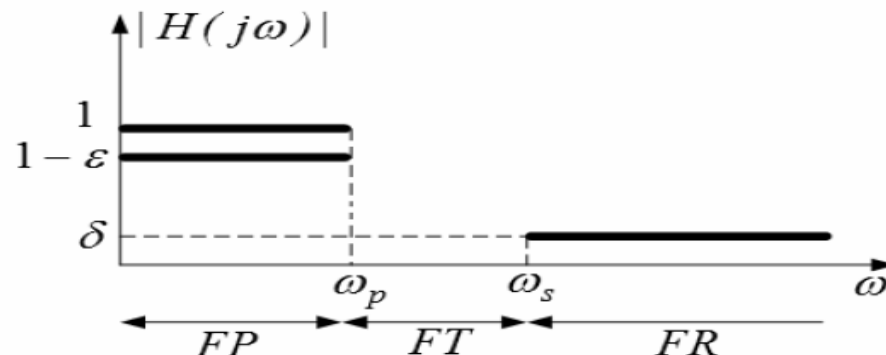
em que ω_p é a *freqüência de corte da faixa de passagem* e ϵ é um *parâmetro de tolerância*.

- ▶ Dentro da faixa de rejeição, a resposta em módulo do filtro não deve ultrapassar δ :

$$|H(j\omega)| \leq \delta \quad \text{para } |\omega| \geq \omega_s$$

em que ω_s é a *freqüência de corte da faixa de rejeição* * e δ é outro *parâmetro de tolerância*.

- ▶ A largura da faixa de transição tem uma largura finita igual a $\omega_s - \omega_p$.



FP := Faixa de Passagem

FT := Faixa de Transição

FR := Faixa de Rejeição

Filtros de Sinais

Projeto de Filtros

Tendo formulado um conjunto de especificações que descrevem as propriedades desejadas do filtro seletivo de frequências, há dois passos distintos envolvidos no projeto do filtro, os quais são executados na seguinte ordem:

1. A *aproximação* de uma resposta em frequência prescrita (isto é, a resposta em módulo, a resposta em fase, ou ambas) por uma função de transferência racional que representa um sistema que é tanto causal como estável.
2. A *realização* da função de transferência aproximada por um sistema físico.

Todavia, podemos mencionar três diferentes abordagens para o projeto de filtros analógicos e digitais, como resumimos aqui:

1. *Abordagem analógica*, a qual se aplica à classe de filtros analógicos.
2. *Abordagem de analógico para digital*, em que a motivação é projetar um filtro digital lançando mão de um projeto de filtro analógico.
3. *Abordagem digital direta*, a qual se aplica à classe de filtros digitais.

Filtros de Sinais

Projeto de Filtros

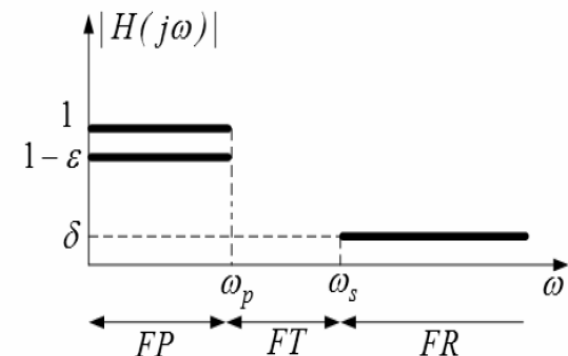
Funções de Aproximação

1. *Resposta em módulo maximamente plana.*
2. *Resposta equiripple em módulo*

■ FILTROS DE BUTTERWORTH

Uma função de Butterworth de ordem N é definida por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$



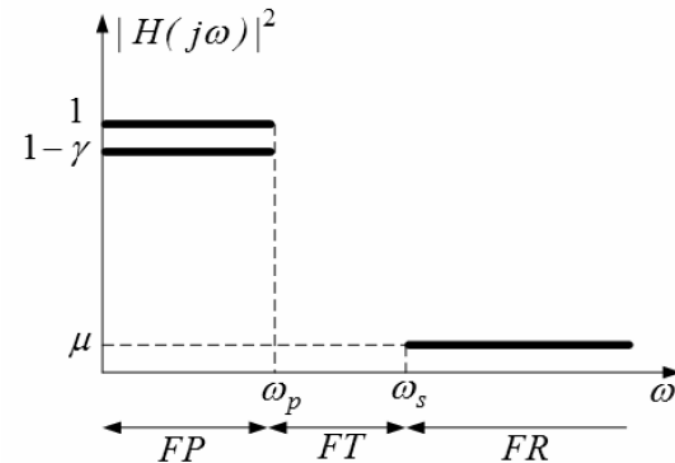
e um filtro assim projetado é chamado de *filtro de Butterworth de ordem N* .

Filtros de Sinais

FILTROS DE BUTTERWORTH

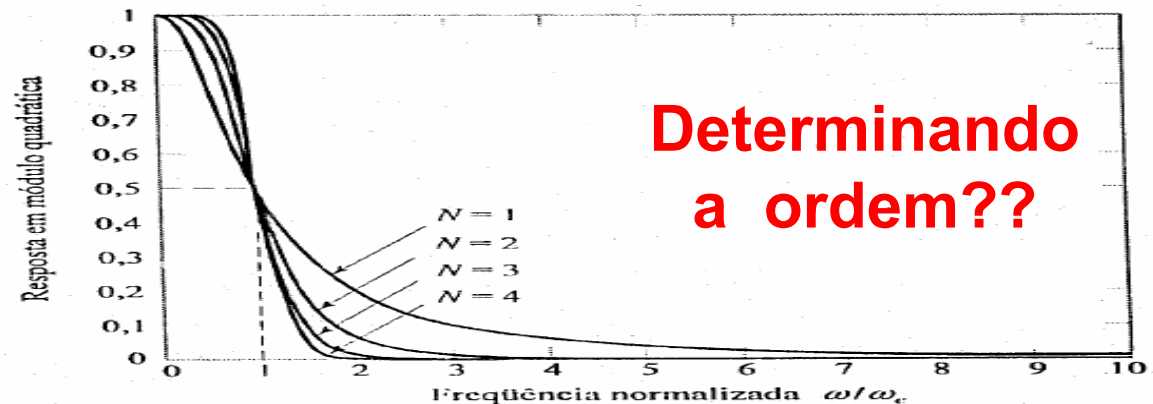
Uma função de Butterworth de ordem N é definida por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$



$$\omega_s = \omega_c \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right)^{1/2N}$$

$$\omega_p = \omega_c \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{1/2N}$$



**Determinando
a ordem??**

Filtros de Sinais

■ FILTROS DE BUTTERWORTH

Uma função de Butterworth é monotônica ao longo da faixa de passagem e da faixa de rejeição. Em especial, nas vizinhanças de $\omega = 0$, podemos expandir o módulo de $H(j\omega)$ como uma série de potências da seguinte maneira:

$$|H(j\omega)| = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{4N} - \frac{5}{16} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{6N} + \dots$$

o que implica que as primeiras $2N - 1$ derivadas de $|H(j\omega)|$ com respeito a ω são nulas na origem. Conclui-se, portanto, que a função de Butterworth é, de fato, *maximamente plana* em $\omega = 0$.

Projeto

Para projetar um filtro analógico, precisamos conhecer a função de transferência $H(s)$, expressa como uma função da variável complexa s .

Filtros de Sinais

■ FILTROS DE BUTTERWORTH

Projeto

Dada a função de Butterworth $|H(j\omega)|^2$, fazemos $j\omega = s$ e temos que

$$H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

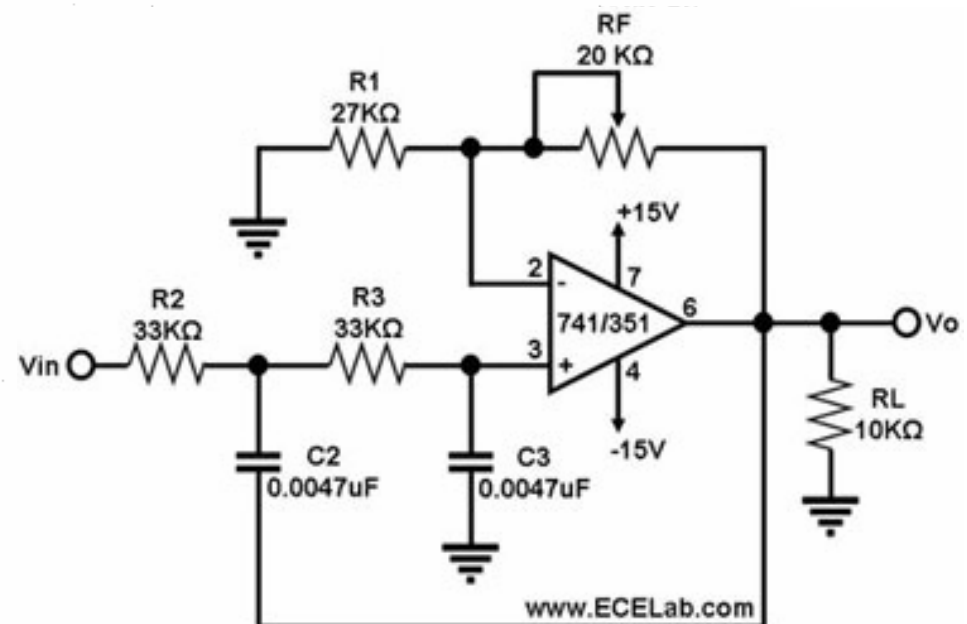
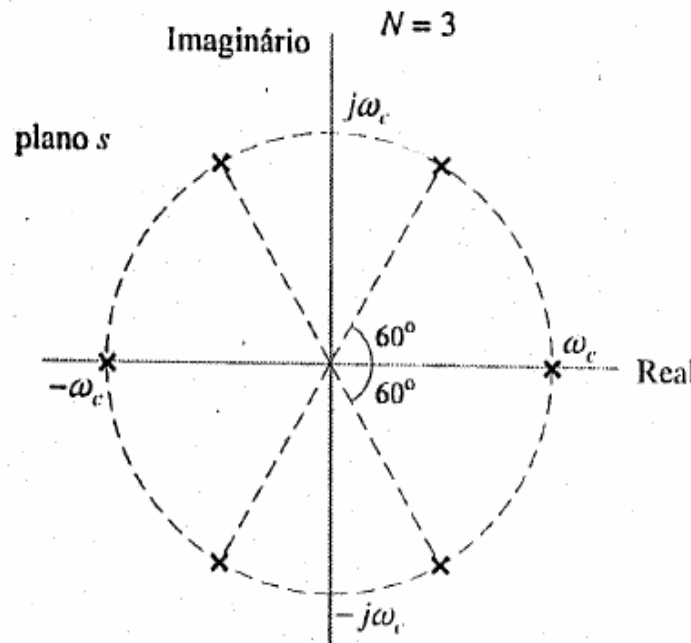
As raízes do polinômio do denominador no plano s : $s = j\omega_c(-1)^{1/2N} = \omega_c e^{j\pi(2k+N-1)/2N}$
para $k = 0, 1, \dots, 2N-1$

Filtros de Sinais

FILTROS DE BUTTERWORTH

Projeto

As raízes do polinômio do denominador no plano s : $s = j\omega_c(-1)^{1/2N} = \omega_c e^{j\pi(2k+N-1)/2N}$
para $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$

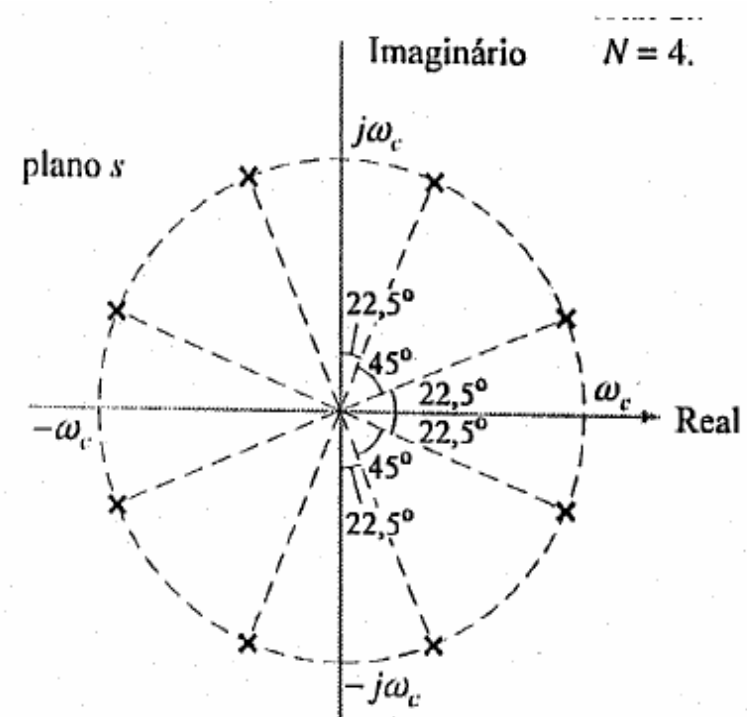
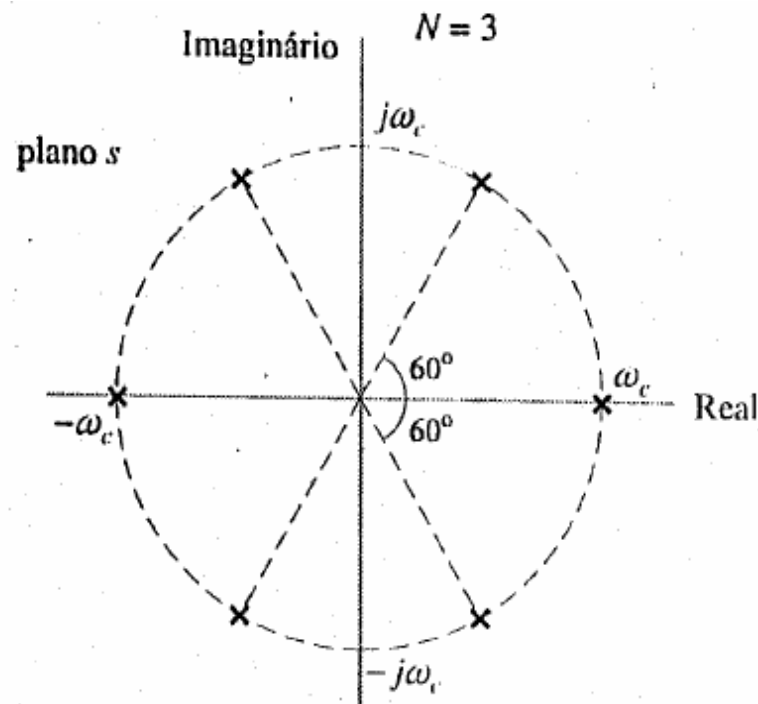


Filtros de Sinais

FILTROS DE BUTTERWORTH

Projeto

Quais destes $2N$ pólos pertencem a $H(s)$?



Filtros de Sinais

Resumo dos filtros de Butterworth

$$H(s) = \frac{1}{Q(s)}$$

Ordem N do Filtro	Polinômio $Q(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
4	$s^4 + 2,6131s^3 + 3,4142s^2 + 2,6131s + 1$
5	$s^5 + 3,2361s^4 + 5,2361s^3 + 5,2361s^2 + 3,2361s + 1$
6	$s^6 + 3,8637s^5 + 7,4641s^4 + 9,1416s^3 + 7,4641s^2 + 3,8637s + 1$

Filtros de Sinais

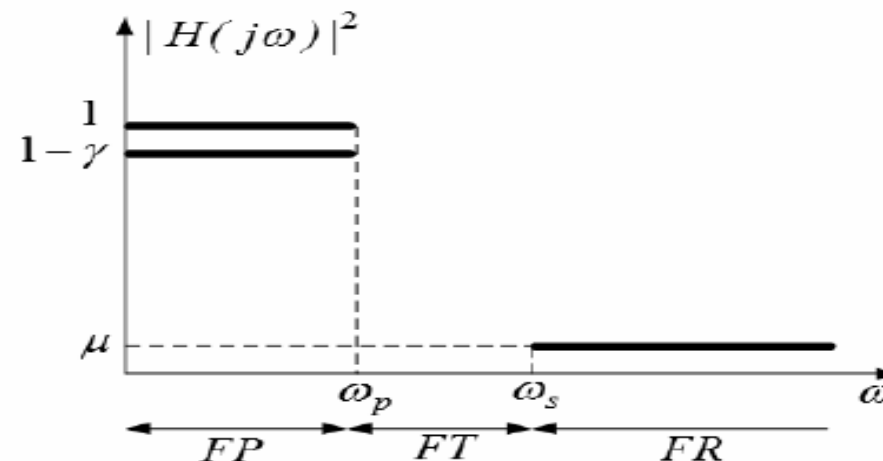
FILTROS DE BUTTERWORTH

Exemplo : Determinar a função de transferência de um filtro passa baixas de Butterworth de ordem 3, com $\omega_c = 1.0 \text{ rad/s}$.

Projete um filtro passa baixas de Butterworth que satisfaça as seguintes especificações:

$$\omega_p = 10\text{kHz}, \gamma = 5\%$$

$$\omega_s = 40\text{kHz}, \mu = 5\%$$



Filtros de Sinais

■ TRANSFORMAÇÃO PASSA-BAIXAS PARA PASSA-ALTAS

Os pontos $s = 0$ e $s = \infty$ no plano s são de especial interesse aqui. No caso de um filtro passa-baixas, $s = 0$ define o ponto médio da faixa de passagem (definida tanto para frequências positivas como para frequências negativas), e $s = \infty$ define a vizinhança onde a função de transferência do filtro se comporta assintoticamente. Os papéis destes dois pontos são intercambiados num filtro passa-altas. Conseqüentemente, a transformação passa-baixas para passa-altas é descrita por

$$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s} \quad \text{em que } \omega_c \text{ é a frequência de corte desejada do filtro de passa-altas.}$$

► **EXERCÍCIO** Dada a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

pertencente a um filtro passa-baixas de Butterworth, encontre a função de transferência do filtro passa-altas correspondente com frequência de corte ω_c .

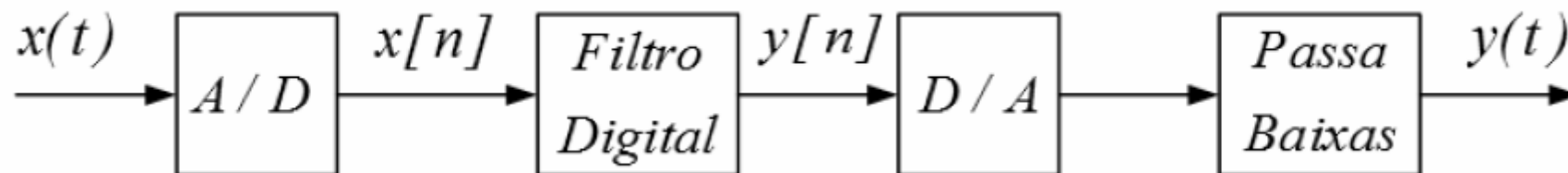
Módulos		Conteúdos Teóricos
5º	A amostragem	<ul style="list-style-type: none">- O teorema da amostragem- Reconstrução de sinais a partir de amostras- O efeito da subamostragem: <i>aliasing</i>- Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo
6º	Filtros e Equalizadores	<ul style="list-style-type: none">- Projeto de Filtros- Filtros FIR- Filtros IIR- Equalização

Representações de Fourier

<i>Domínio Tempo</i>	<i>Periódico</i>	<i>Não – Periódico</i>	
<i>C</i> <i>O</i> <i>N</i> <i>T</i> <i>I</i> <i>N</i> <i>U</i> <i>O</i>	<i>Série de Fourier</i> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$ $X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <i>x(t) tem período T, $\omega_0 = 2\pi / T$</i>	<i>Transformada de Fourier</i> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	<i>N</i> <i>Ã</i> <i>O</i> <i>P</i> <i>E</i> <i>R.</i>
<i>D</i> <i>I</i> <i>S</i> <i>C</i> <i>R</i> <i>E</i> <i>T</i> <i>O</i>	<i>DTFS</i> $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X(k) e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ <i>x[n] e X[k] tem período N, $\Omega_0 = 2\pi / N$</i>	<i>DTFT</i> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ <i>X(e^{jΩ}) tem período 2π</i>	<i>P</i> <i>E</i> <i>R</i> <i>I</i> <i>Ó</i> <i>D</i> <i>I</i> <i>C</i> <i>O</i>
	<i>DISCRETO</i>	<i>CONTÍNUO</i>	<i>Domínio Frequência</i>

Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR



Admitamos que $h[n]$ denote a resposta ao impulso de um filtro digital FIR, definida como a transformada inversa de Fourier de tempo discreto da resposta em frequência $H(e^{j\Omega})$. Admitamos que M denote a ordem de filtro, correspondente a um comprimento de filtro $M + 1$. Para projetar o filtro é necessário que determinemos os coeficientes de filtro, $h[n]$, $n = 0, 1, \dots, M$, de forma que a resposta em frequência real do filtro, a saber, $H(e^{j\Omega})$, forneça uma boa aproximação para uma resposta em frequência $H_d(e^{j\Omega})$ desejada ao longo do intervalo de frequência $-\pi < \Omega \leq \pi$.

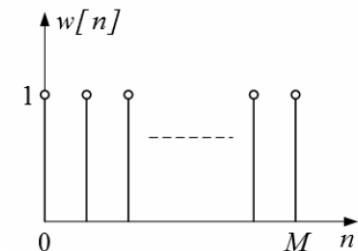
Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR

Uma vez que a multiplicação de duas seqüências é equivalente à convolução de suas DTFTs, podemos expressar a resposta em frequência do filtro FIR com resposta ao impulso $h[n]$ da seguinte maneira:

$$h[n] = w[n]h_d[n]$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^M h[n]e^{-jn\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\Omega})H_d(e^{j(\Omega-\Lambda)}) d\Lambda$$



A função $W(e^{j\Omega})$ é a resposta em frequência da janela retangular $w[n]$; ela é definida por

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\text{sen}[\Omega(M+1)/2]}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-j\Omega(M+1)/2}, \quad -\pi < \Omega \leq \pi$$

Filtros de Sinais

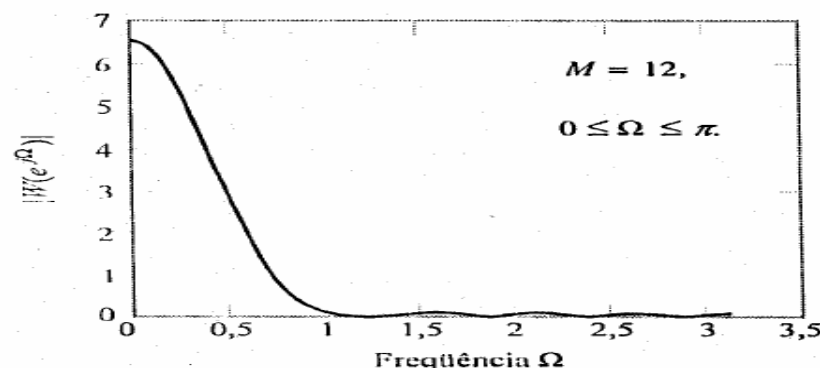
Filtros Digitais FIR

$$h[n] = w[n]h_d[n]$$

janela retangular $w[n]$;

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\text{sen}[\Omega(M+1)/2]}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-j\Omega(M+1)/2},$$

$$-\pi < \Omega \leq \pi$$



O *lóculo principal* de uma janela $w[n]$ é definido como a faixa de frequência entre o primeiro cruzamento por zero de sua resposta em frequência $W(e^{j\Omega})$ nos dois lados da origem. As regiões de transição individuais que se situam nos dois lados do lóbulo principal são chamadas *lóbulos laterais*. A largura do lóbulo principal e as amplitudes dos lóbulos laterais fornecem medidas da extensão pela qual a resposta em frequência $W(e^{j\Omega})$ se desvia de uma função impulso.

Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR

a medida de erro é minimizada fazendo

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A aproximação é equivalente

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

janela retangular

$$h[n] = w[n]h_d[n]$$

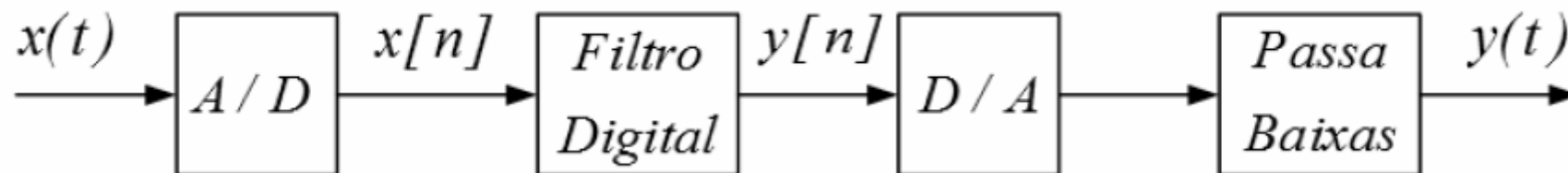
O erro médio quadrático resultante do uso do método de janela é

$$E = \sum_{n=-\infty}^{-1} h_d^2[n] + \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d^2[n]$$

método de janela.

Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR



Especificamente, o projeto simplifica-se num de se aproximar a resposta em módulo desejada.

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\Omega}) - H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2$$

erro médio E equivalente

Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR

Considere a resposta em frequência desejada

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-jM\Omega/2}, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

que representa a função resposta em frequência de um filtro passa baixas ideal, com fase linear. Avaliar a resposta em frequência para $M=12$, $\Omega_c=0.2\pi$, sendo:

(a) janela retangular e (b) janela de Hamming.

janela retangular

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

janela de Hamming,

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR

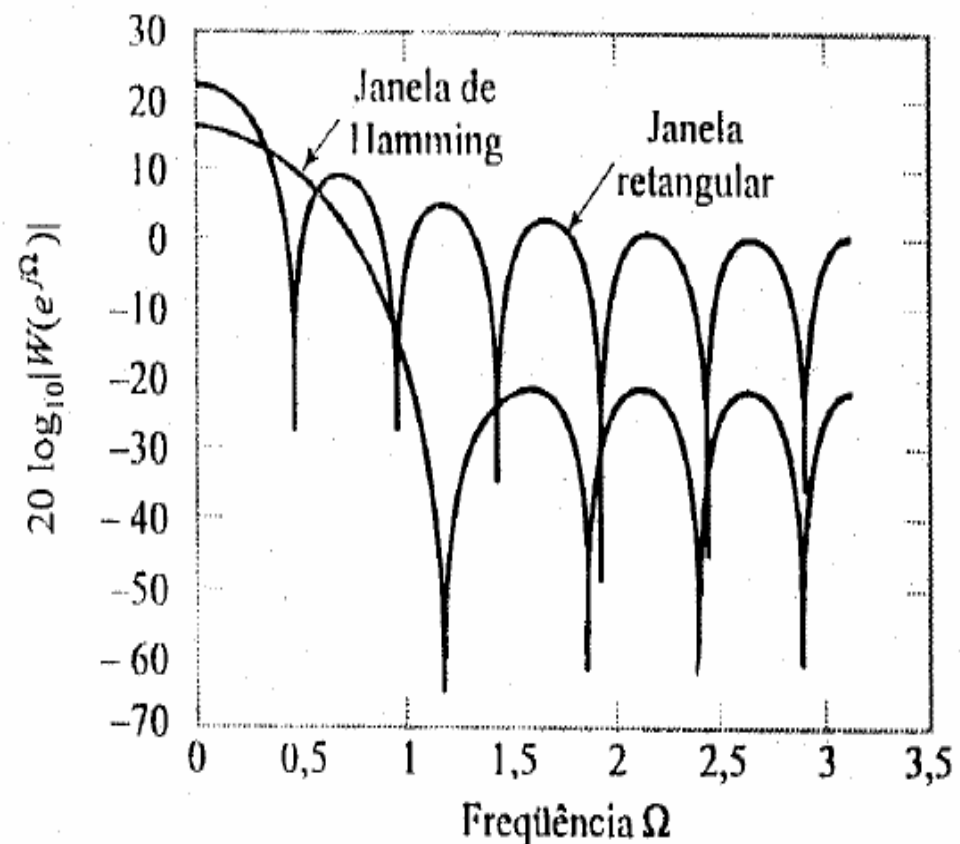
janela retangular

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

janela de Hamming,

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ordem de $M = 12$,

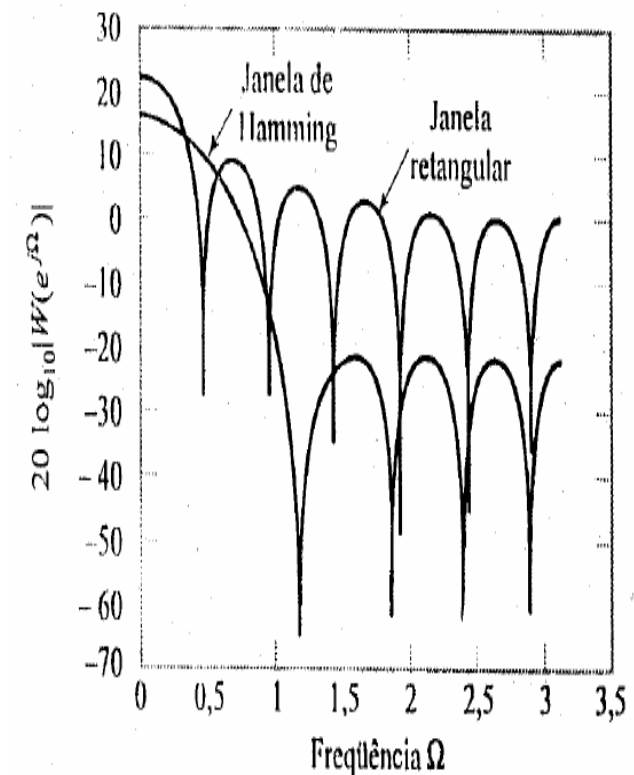


Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR

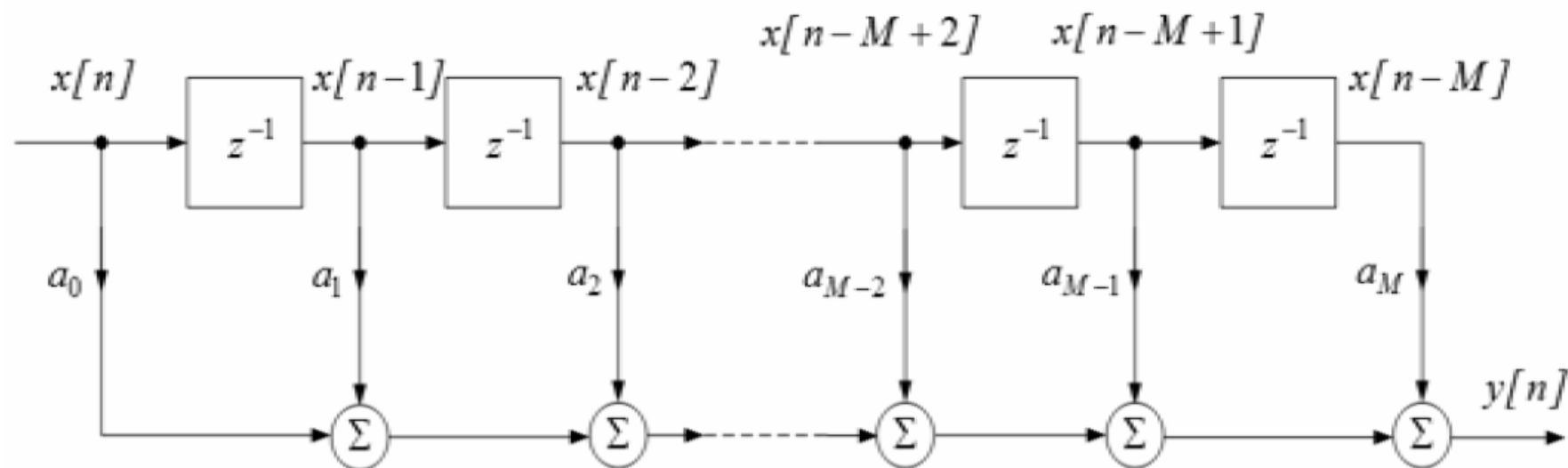
- ✓ o lóbulo principal da janela retangular tem aproximadamente a metade da largura do lóbulo principal da janela de Hamming;
- ✓ a magnitude dos lóbulos laterais da janela de Hamming são bem mais reduzidos se comparados com o da janela retangular.

ordem de $M = 12$,



Filtros de Sinais

Filtros Digitais FIR



função de transferência discreta:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{(M-k)}}{z^M}$$

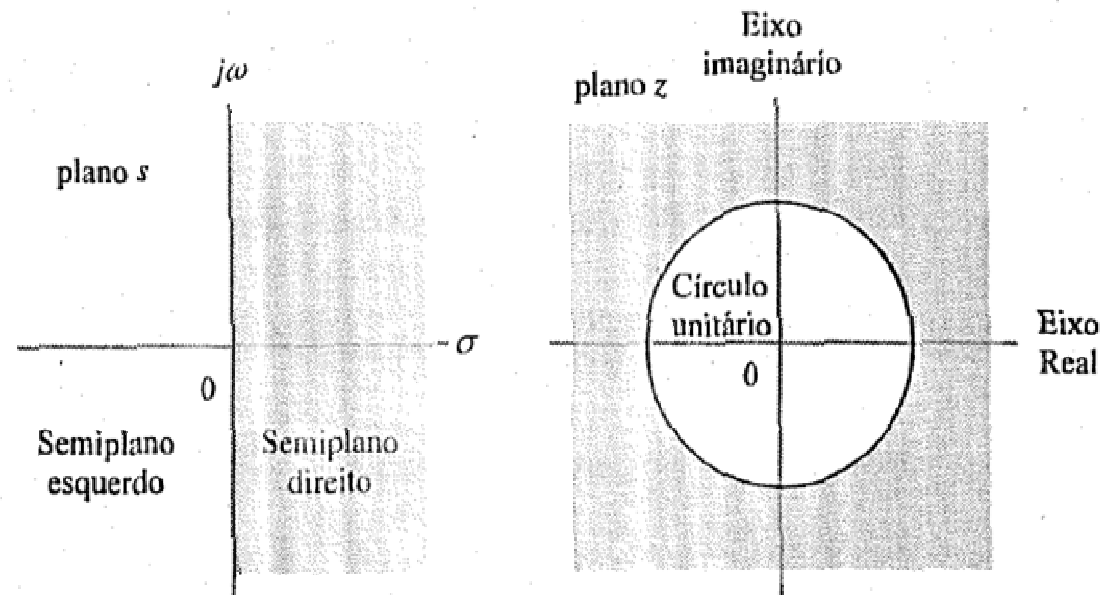
Módulos		Conteúdos Teóricos
5º	A amostragem	<ul style="list-style-type: none">- O teorema da amostragem- Reconstrução de sinais a partir de amostras- O efeito da subamostragem: <i>aliasing</i>- Processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo
6º	Filtros e Equalizadores	<ul style="list-style-type: none">- Projeto de Filtros- Filtros FIR- Filtros IIR- Equalização

Filtros de Sinais

Mapeando S em Z

$$z = e^{st_s}$$

Plano s	Plano z
$s = 0$	$z = 1$
$s = j\omega$	$z = e^{j\omega t_s}$
$s = j\omega_s / 2$	$z = -1$
$\text{Re}(s) > 0$	$ z > 1$
$\text{Re}(s) < 0$	$ z < 1$



Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

Várias técnicas foram desenvolvidas para o projeto de filtros digitais IIR. Nesta seção, descreveremos um método popular para convertermos funções de transferência analógicas em funções de transferência digitais. O método se baseia na *transformada bilinear*, a qual fornece uma correspondência única entre pontos no plano s com os do plano z :

$$z = e^{sT} \qquad s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

$$s = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^7 + \dots \right]$$

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = H_a \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right).$$

Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

O que podemos dizer acerca das propriedades da função de transferência $H(z)$?

Para responder esta pergunta, $z = \frac{1+s}{1-s}$ (com $\mathcal{F}=2$)

Colocando $s = \sigma + j\omega$ nesta equação, podemos expressar a variável complexa z na forma polar em que o raio r e o ângulo θ são definidos, respectivamente, por $z = re^{j\theta}$

$$r = |z| = \left[\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2}$$

$$\theta = \arg(z) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{1+\sigma} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{1-\sigma} \right)$$

Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

$$r = |z| = \left[\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} \right]^{1/2} \quad \theta = \arg(z) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1+\sigma}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{1-\sigma}\right)$$

A partir das equações vemos imediatamente que

- ▶ $r < 1$ para $\sigma < 0$. ▶ $r = 1$ para $\sigma = 0$.
- ▶ $r > 1$ para $\sigma > 0$. ▶ $\theta = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$ para $\sigma = 0$.

Conseqüentemente:

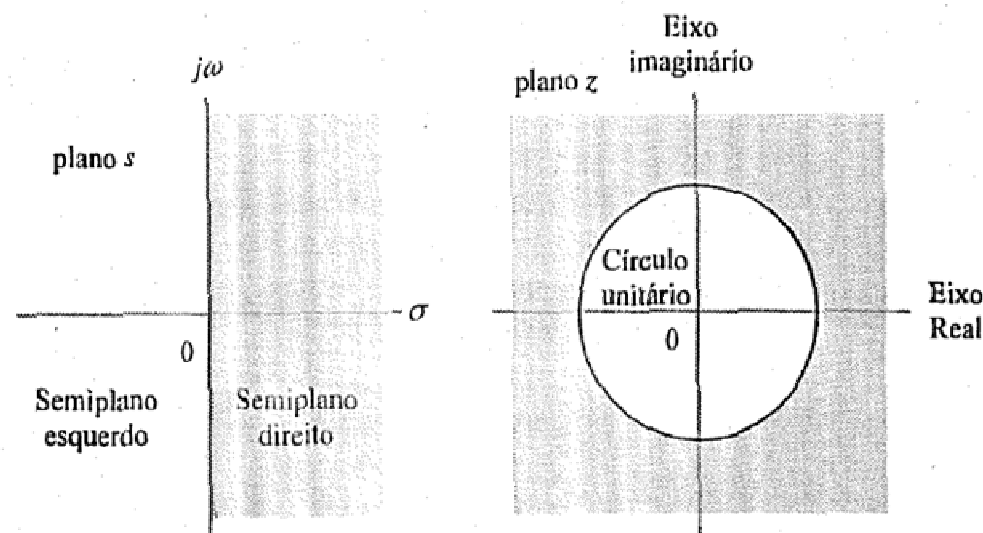
1. O semiplano esquerdo do plano s é mapeado no interior do círculo unitário no plano z .
2. O eixo $j\omega$ inteiro é mapeado numa revolução completa do círculo unitário no plano z .
3. O semiplano direito do plano s é mapeado no exterior do círculo unitário no plano z .

Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

Uma implicação imediata da propriedade 1 é que se o filtro analógico representado pela função de transferência $H_a(s)$ for estável e causal, o filtro digital dele derivado usando-se a transformada bilinear terá a garantia de ser também estável e causal. Uma vez que a transformada bilinear tem coeficientes reais, segue-se que $H(z)$ terá coeficientes reais se $H_a(s)$ tiver coeficientes reais. Conseqüentemente, a função de transferência $H(z)$ resultante é, de fato, fisicamente realizável.

- ▶ $r < 1$ para $\sigma < 0$.
- ▶ $r > 1$ para $\sigma > 0$.
- ▶ $r = 1$ para $\sigma = 0$.
- ▶ $\theta = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$ para $\sigma = 0$.



Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

► EXERCÍCIO Qual é a correspondência dos pontos $s = 0$ e $s = \pm j\infty$ no plano s com o plano z usando-se a transformada bilinear?

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

warping.

Para $\sigma = 0$ e $\theta = \Omega$, $\Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$

A faixa infinitamente longa de frequência $-\infty < \omega < \infty$ de um filtro analógico (tempo contínuo) é comprimida não linearmente na faixa de frequência finita $-\pi < \Omega < \pi$ de um filtro digital (tempo discreto).

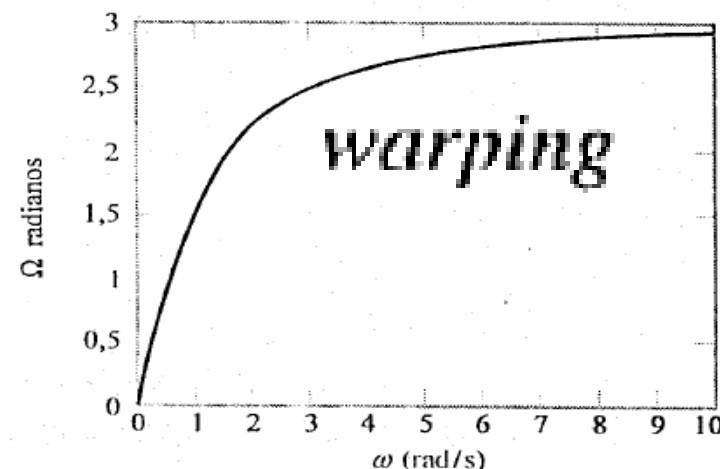
Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

Especificamente, as frequências críticas (isto é, as frequências da corte de faixa de passagem e as frequências de corte da faixa de rejeição) prescritas sofrem *pré-warping* de acordo com a fórmula

$$\text{pré-warping} \quad \omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\text{warping} \quad \Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$$



Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

Para ilustrar o procedimento de pré-*warping*, façamos com que Ω'_k , $k = 1, 2, \dots$, denotem as frequências críticas que se exige que um filtro digital realize. Antes de aplicarmos a transformada bilinear, as frequências críticas correspondentes do filtro de tempo contínuo sofrem pré-*warping* usando-se a equação para se obter

$$\omega_k = \text{tg}\left(\frac{\Omega'_k}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

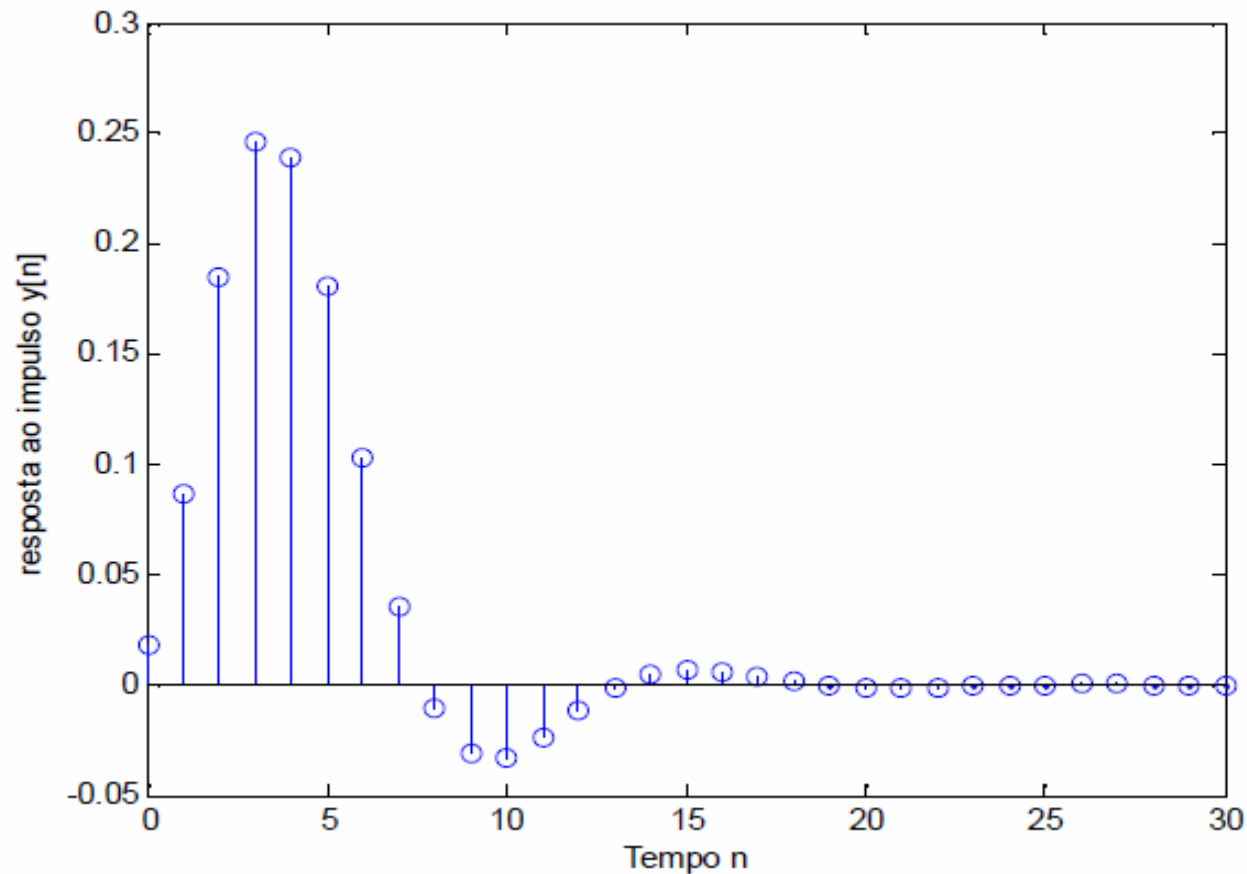
Então, quando a transformada bilinear é aplicada à função de transferência do filtro analógico. O procedimento de pré-*warping* assegura que o filtro digital atenderá as exigências de projeto exatamente.

Exemplo : Usando um filtro analógico com uma função de transferência de Butterworth de ordem 3, projetar um filtro IIR passa baixas com frequência de corte $\Omega_c = 0.2\pi$.

$$\omega_c = \text{tg}(0,1\pi) = 0,3429$$

Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

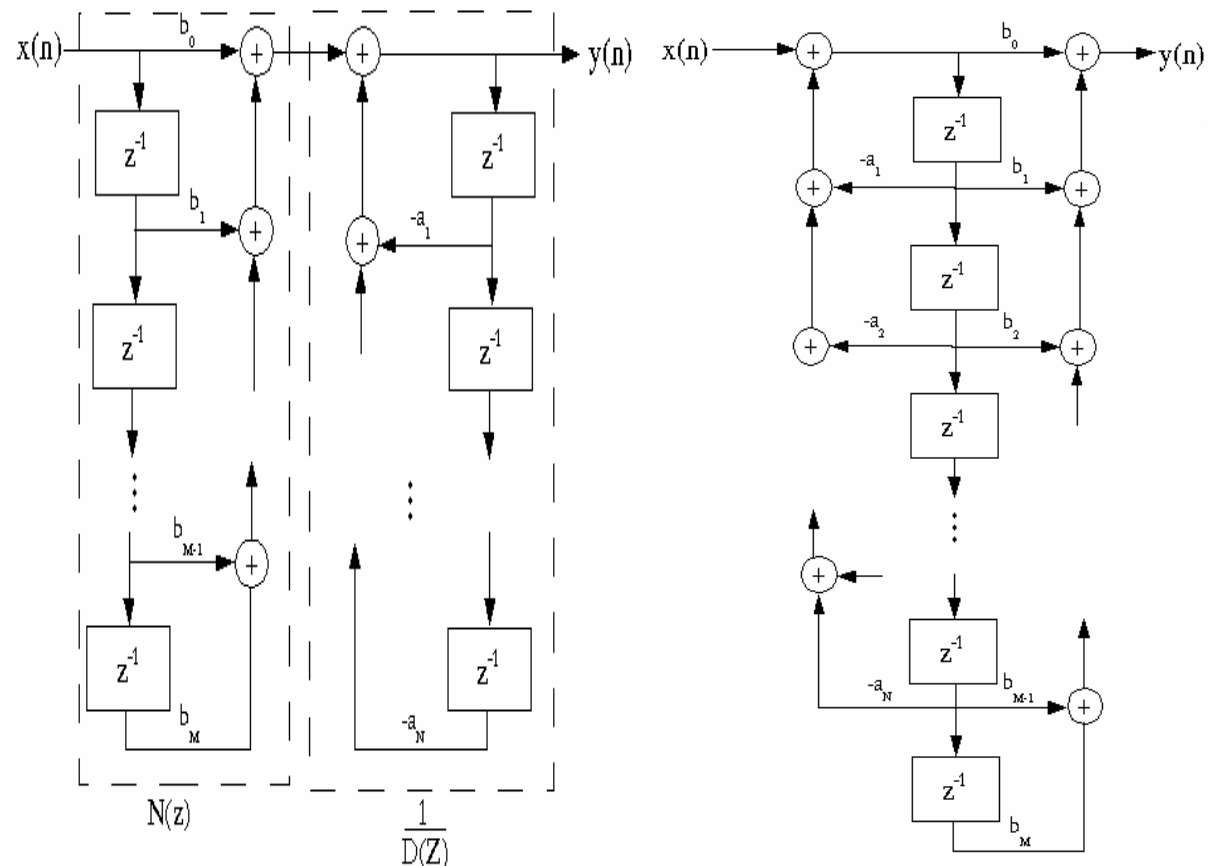


Filtros de Sinais

Filtros Digitais IIR

função de transferência

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$



Filtros de Sinais

Distorção Linear

1. *Distorção de amplitude.* Quando a resposta em módulo do sistema não é constante dentro da faixa de frequência de interesse, os componentes de frequência do sinal de entrada são transmitidos através do sistema com diferentes valores de ganho ou atenuação.
2. *Distorção de fase.* A segunda forma de distorção linear surge quando a resposta em fase do sistema não é linear, em frequências dentro da faixa de frequências de interesse.

Enfatizamos a distinção entre um retardo constante e um deslocamento de fase constante. No caso de um sistema LTI de tempo contínuo, um retardo constante significa uma resposta em fase linear, ou seja, $\arg\{H(j\omega)\} = -t_0\omega$, em que t_0 é o retardo constante. Por outro lado, deslocamento de fase constante significa que $\arg\{H(j\omega)\}$ é igual a alguma constante para todo ω .

Filtros de Sinais

Equalização

Para compensar a distorção linear, podemos usar uma rede conhecida como *equalizador*.

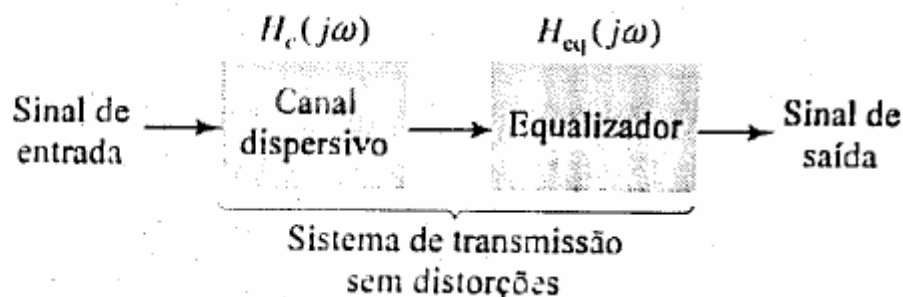
Considere, por exemplo, um canal de comunicação com resposta em frequência $H_c(j\omega)$. Digamos que um equalizador de resposta em frequência $H_{eq}(j\omega)$ esteja conectado em cascata com o canal,

A resposta em frequência global desta combinação é igual a $H_c(j\omega)H_{eq}(j\omega)$.

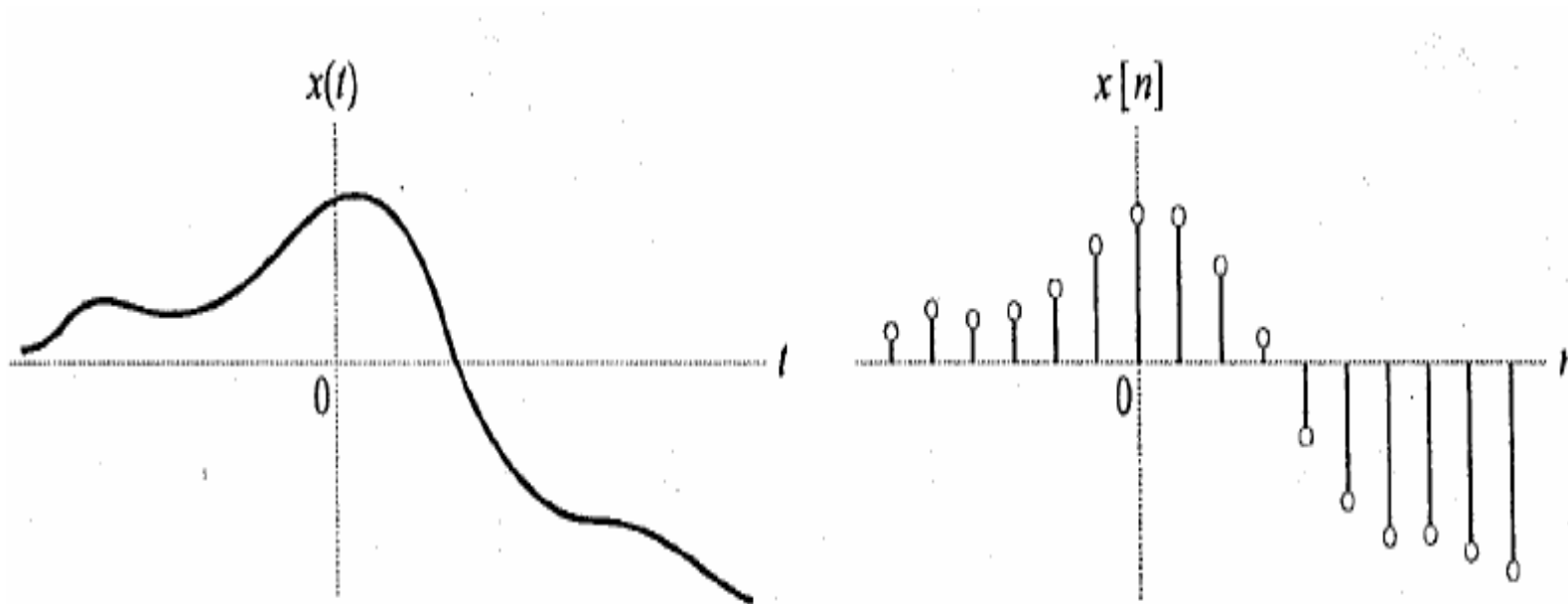
$$H_c(j\omega)H_{eq}(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

equalizador é *inversamente relacionada* com a do canal,

$$H_{eq}(j\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{H_c(j\omega)}$$



Processamento de Sinais



Professor: Marcelino Andrade