Das propriedades de operações de matrizes:

$L_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av = L_A(u) + L_A(v)$ e $L_A(ku) = A(ku) = k(Au) = kL_A(u)$, e portanto L_A é uma transformação linear.

Como caso particular suponhamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$L_A: R^2 \to R^3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Então $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$.
Surpresa! Esta é a aplicação linear do Exemplo 4.

Seria interessante que você também notasse o relacionamento que existe entre o Exemplo 1, e o Exemplo 7.

5.2 TRANSFORMAÇÕES DO PLANO NO PLANO

Agora iremos apresentar uma visão geométrica das transformações lineares, dando alguns exemplos de transformações do plano (R^2) no plano. Você verá assim, que, por exemplo uma expansão, uma rotação e certas deformações podem ser descritas por transformações lineares.

5.2.1 Expansão (ou Contração) Uniforme:

$T: R^2 \to R^2$, $\alpha \in R$

$v \mapsto \alpha \cdot v$

Por exemplo: $T: R^2 \to R^2$

$v \mapsto 2v$, ou $T(x, y) = 2(x, y)$

Esta função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior.

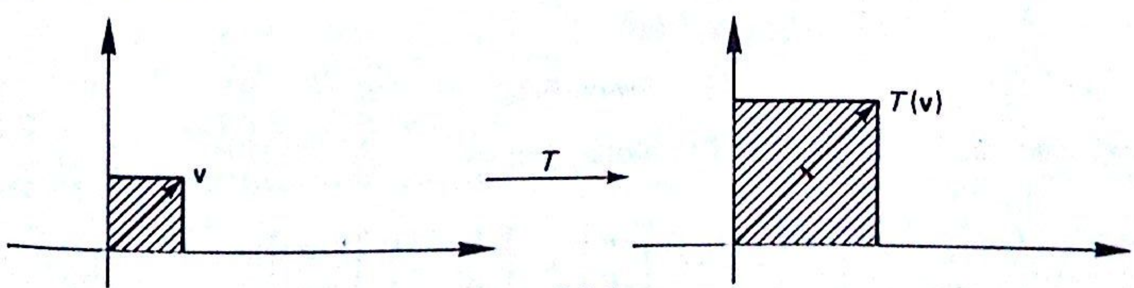

Figura 5.2.1

Observe que, escrevendo na forma de vetores-coluna,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se tomássemos $F:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $F(x, y) = \dfrac{1}{2}(x, y)$, F seria uma contração.

5.2.2 Reflexão em Torno do Eixo-x:

$F:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

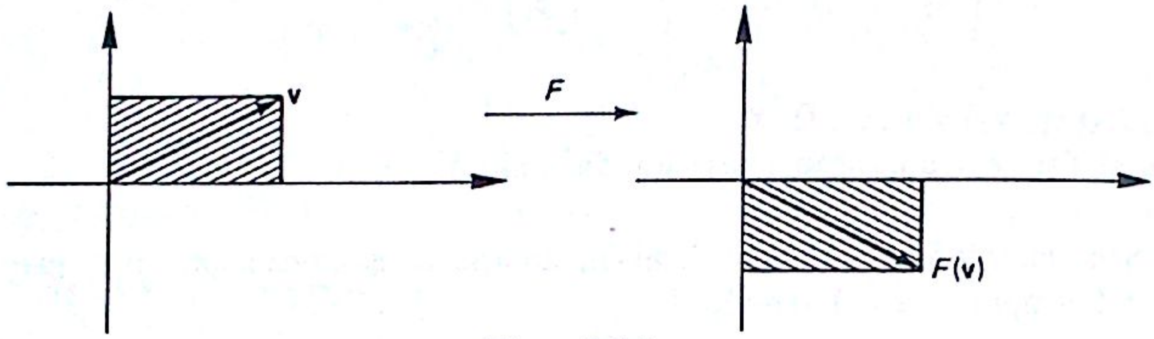

Figura 5.2.2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5.2.3 Reflexão na Origem:

$T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$, ou seja, $T(x, y) = (-x, -y)$

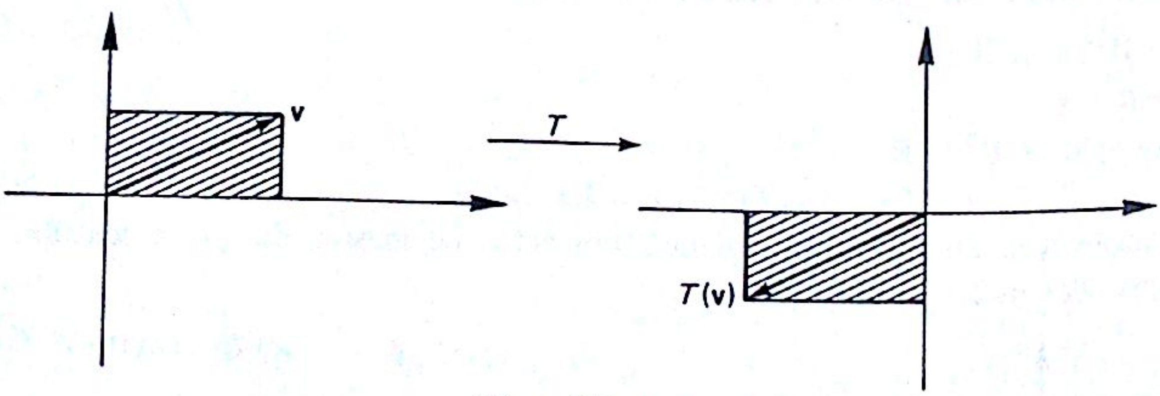

Figura 5.2.3

Escrevendo na forma de vetores-coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5.2.4 Rotação de um Ângulo θ: (no sentido anti-horário)

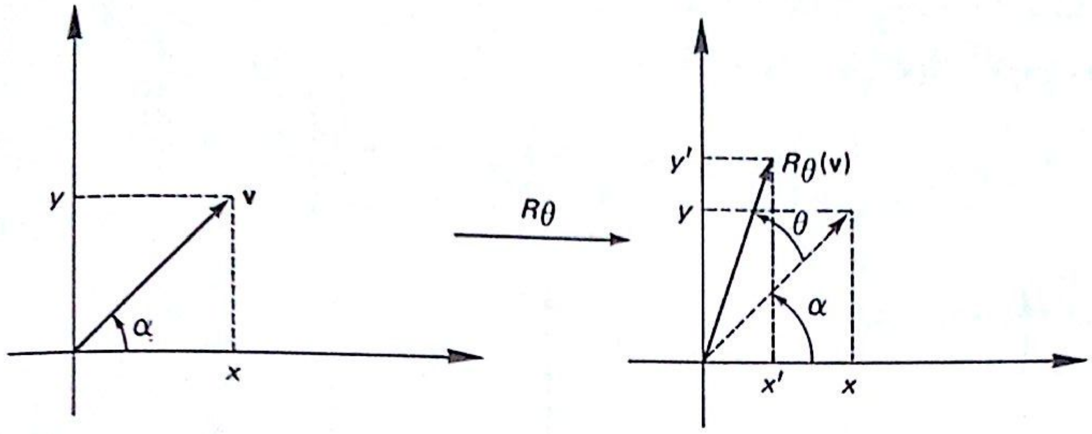

Figura 5.2.4

$x' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\,\cos\theta - r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta$
Mas $r\cos\theta = x$ e $r\,\text{sen}\,\theta = y$.
Então $x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta$.
Analogamente, $y' = r\,\text{sen}(\alpha + \theta) = r(\text{sen}\,\alpha\,\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\theta) = y\cos\theta +$ $+\, x\,\text{sen}\,\theta$.
Assim $R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ y\cos\theta + x\,\text{sen}\,\theta)$ ou na forma coluna,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y\cos\theta + x\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Consideremos o caso particular onde $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta = 0$ e $\text{sen}\,\theta = 1$.

Então, $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

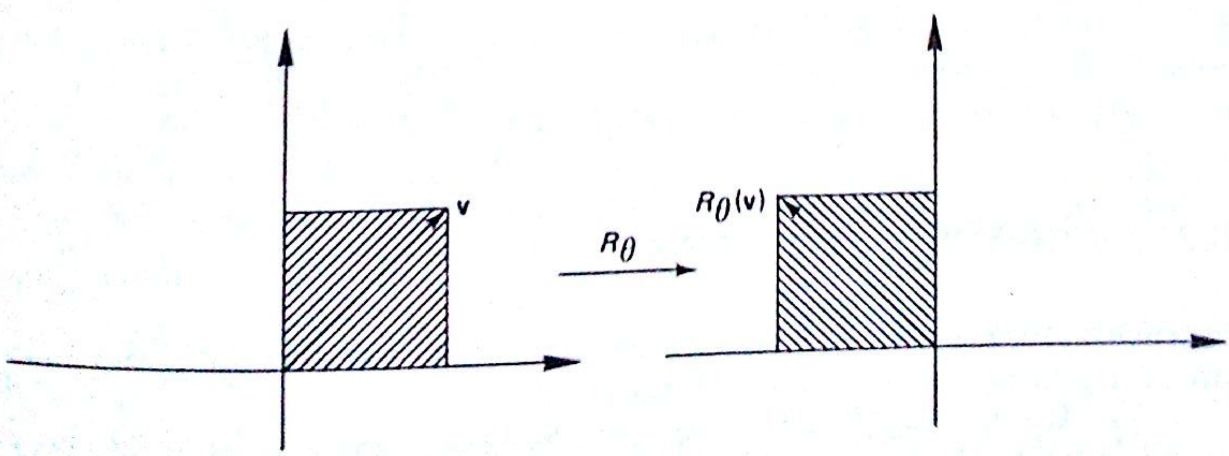

Figura 5.2.5

5.2.5 Cisalhamento horizontal:

$T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \in \mathbb{R}$

Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

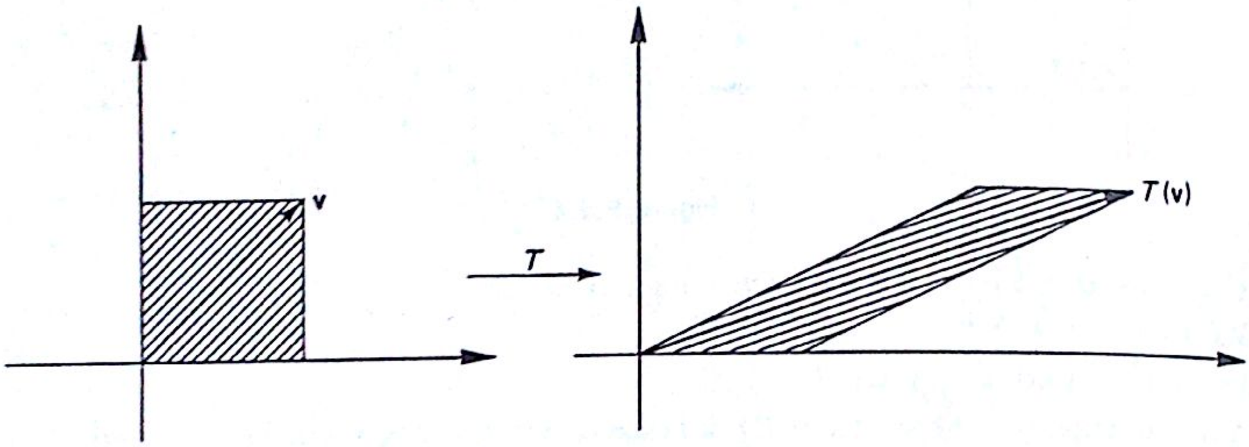

Figura 5.2.6

Como já ressaltamos, as transformações do plano no plano apresentadas através dos exemplos anteriores são lineares, pois são dadas por $v \mapsto A \cdot v$ onde A é uma matriz 2×2. A aplicação a seguir não é linear.

5.2.6 Translação:

$T(x, y) = (x + a, y + b)$

ou $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Esta é uma translação do plano segundo o vetor (a, b) e, a menos que $a = b = 0$, T *não é linear*. Por quê?

(Veja a observação depois do Exemplo 4.)

5.3 CONCEITOS E TEOREMAS

Separamos nesta secção os resultados que darão uma estrutura para um estudo mais fecundo das transformações lineares.

Um fato importante sobre aplicações lineares é que elas são perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.