Diferencijalne jednadžbe

Zvonimir Šikić

Sadržaj

1 Uvodni primjeri

Diferencijalna jednadžba ona je jednadžba koja nepoznatu funkciju y povezuje s njezinim derivacijama y', y'', ... Problem postavljanja i rješavanja diferencijalnih jednadžbi, čije nepoznate funkcije opisuju veze među fizikalnim veličinama koje nas zanimaju, jedan je od najčešćih problema matematičkog modeliranja u prirodnim znanostima i tehnici. U uvodnom poglavlju ilustrirat ćemo ga s nekoliko jednostavnijih primjera, a potom ćemo se sustavno pozabaviti striktno matematičkim problemom rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Najjednostavnije diferencijalne jednadžbe oblika

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

rješavamo neposrednom integracijom

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Zbog toga i rješavanje mnogo složenijih diferencijalnih jednadžbi često zovemo integracijom tih jednadžbi.

Osim ovih najjednostavnijih diferencijalnih jednadžbi vjerojatno poznajete i neke složenije. Ako je brzina rasta veličine y, koja ovisi o veličini t, proporcionalna samoj veličini y, onda ona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dt} = ky. \tag{1.1}$$

Lako se provjerava da je rješenje te jednadžbe

$$y = y(t_0)e^{k(t-t_0)} \quad \text{ili} \quad y = y(0)e^{kt} \quad \text{ako je} \quad t_0 = 0. \tag{1.2}$$

Primijetimo da za svaku veličinu y, koja eksponencijalno ovisi o t, vrijedi

$$\frac{y(t+s)}{y(t)} = \frac{y(0)e^{k(t+s)}}{y(0)e^{kt}} = e^{ks}, \quad \text{tj.} \quad \frac{y(t+s)}{y(t)} = \frac{y(s)}{y(0)}.$$

To znači da postotak porasta (ili pada) veličine y na intervalu duljine s ne ovisi o početku tog intervala t. Taj tip rasta zovemo uniformnim, pa slijedi da je svaki eksponencijalni rast ujedno i uniformni. Vrijedi i obratno: svaki uniformni rast nužno je i eksponencijalni. Naime, iz uvjeta uniformnosti $y(t+s)/y(t) = y(s)/y(0)$ nakon deriviranja po s slijedi

$$y'(t+s) = \frac{y(t)y'(s)}{y(0)},$$

pa uvrštavanjem $s = 0$ i uvođenjem pokrate $k = y'(0)/y(0)$, dobivamo

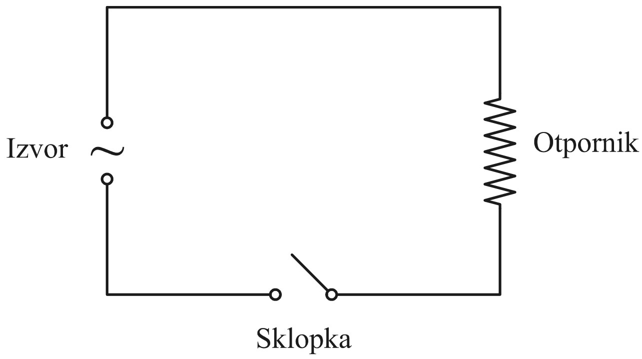
$$y'(t) = ky(t),$$

što znači da y eksponencijalno ovisi o t.

Mnoge fizikalne veličine y zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (1.1), stoga eksponencijalno (uniformno) rastu u odnosu na t ako je $k > 0$, odnosno eksponencijalno (uniformno) padaju u odnosu na t ako je $k < 0$. S nekim fenomenima opisanim ovom diferencijalnom jednadžbom vjerojatno ste se susreli. Jedan od njih koji se također svodi na rješavanje diferencijalne jednadžbe (1.1), obrađujemo u slijedećem primjeru.

(A) **Jednadžba strujnog kruga**

Najjednostavniji strujni krug sadrži izvor električne energije, npr. generator ili bateriju te otpornik koji se koristi tom energijom, npr. žarulju.



Zatvorimo li sklopku, struja J poteći će otpornikom, što će uzrokovati pad napona (tj. električni potencijali na krajevima otpornika bit će različiti). Eksperimentalno se pokazuje da vrijedi Ohmov zakon:

$$U_R = RJ,$$

tj. pad napona duž otpornika proporcionalan je trenutnoj struji J. Konstanta proporcionalnosti R zove se otporom otpornika.

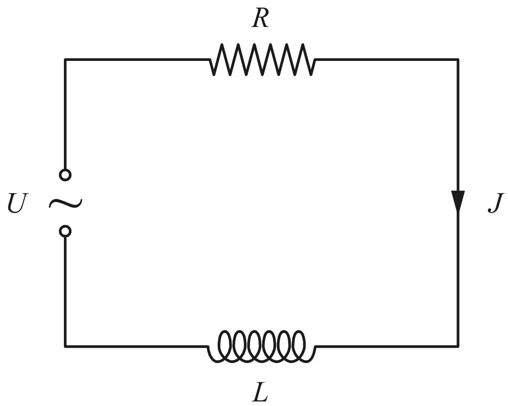
Važan element strujnog kruga može biti induktor. On se opire promjeni struje, analogno masi koja se opire promjeni gibanja. Eksperimentom se pokazuje da vrijedi sljedeći zakon:

$$U_L = L\frac{dJ}{dt},$$

tj. pad napona duž induktora proporcionalan je trenutnoj brzini promjene struje J. Konstanta proporcionalnosti L zove se indukcijom induktora.

Drugi Kirchhoffov zakon (o naponima) ustvrđuje da je ukupni pad napona duž zatvorenog strujnog kruga jednak nuli, tj. da je napon izvora kojim se napaja strujni krug jednak zbroju padova napona po ostalim elementima strujnoga kruga. Dakle, tok struje J u strujnom krugu s otporom R, indukcijom L i izvorom konstantnog napona U određen je diferencijalnom jednadžbom

$$U = L\frac{dJ}{dt} + RJ.$$



Ta se diferencijalna jednadžba razlikuje od diferencijalne jednadžbe (1.1), ali uz supstituciju $h = RJ - U$ ona će, zbog $\dfrac{dh}{dt} = R\dfrac{dJ}{dt}$, prijeći u jednadžbu

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{L}h,$$

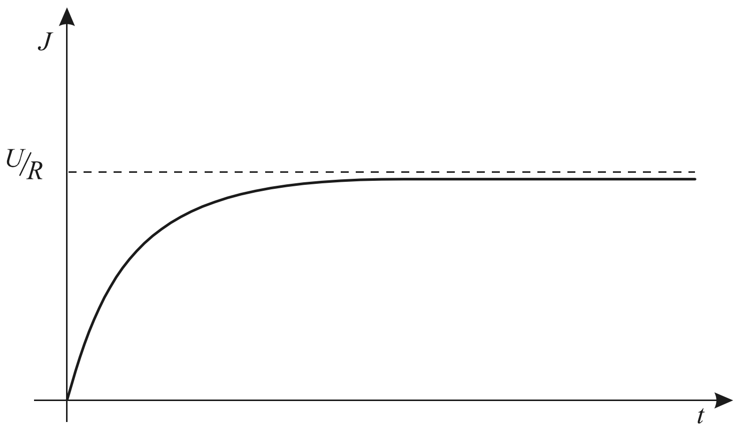
koja je oblika (1.1), uz $k = -\dfrac{R}{L}$. Njezino je rješenje oblika (1.2)

$$h = h(0)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ako strujni krug priključujemo na izvor u trenutku $t = 0$, onda je $J(0) = 0$, tj. $h(0) = -U$, pa je

$$h = -Ue^{-\frac{R}{L}t}, \quad RJ - U = -Ue^{-\frac{R}{L}t}, \;\; \text{tj.} \;\; J = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Graf funkcije $J(t)$ prikazan je na slici:



Ako je strujni krug priključen na izvor izmjeničnog napona $U = U_0 \cos \omega t$, onda $J(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t.$$

Ona je nešto složenija, ali se može riješiti upotrebom kompleksnih funkcija realnoga argumenta. Naime, stvarni napon $U_0 \cos \omega t$ možemo shvatiti kao realni dio kompleksnoga "napona"

$$\overline{U} = U_0 e^{i\omega t} = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$

a stvarnu struju J kao realni dio kompleksne struje

$$\overline{J} = J + iH.$$

Ako je $\overline{J}$ rješenje kompleksne diferencijalne jednadžbe

$$L\frac{d\overline{J}}{dt} + R\overline{J} = \overline{U},$$

onda je

$$L\frac{d(J+iH)}{dt} + R(J+iH) = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$

$$\left(L\frac{dJ}{dt} + RJ\right) + i\left(L\frac{dH}{dt} + RH\right) = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$

odakle slijedi

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t.$$

Realni dio rješenja kompleksne diferencijalne jednadžbe jest rješenje naše početne realne diferencijalne jednadžbe. Dakle, riješimo li kompleksnu diferencijalnu jednadžbu, riješili smo naš problem. No, lako vidimo da je funkcija $\overline{J} = J_0 e^{i(\omega t+\beta)}$ (s još neodređenim realnim parametrima J_0 i β) jedno rješenje naše kompleksne diferencijalne jednadžbe ako je

$$Liw\overline{J} + R\overline{J} = \overline{U}, \quad \text{tj. ako je } \overline{J} = \frac{\overline{U}}{R + iLw}.$$

To će biti ispunjeno ako je

$$|\overline{J}| = \left|\frac{\overline{U}}{R + iLw}\right| = \frac{|\overline{U}|}{|R + iLw|}, \quad \text{tj. } J_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 w^2}}$$

i ako je

$$\arg \overline{J} = \arg \frac{\overline{U}}{R + iLw} = \arg \overline{U} - \arg(R + iLw),$$

tj.

$$\omega t + \beta = \omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}, \quad \beta = -\operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}.$$

Dakle, jedno kompleksno rješenje naše kompleksne diferencijalne jednadžbe je

$$\overline{J} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{i\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}\right)},$$

odakle slijedi da je i jedno rješenje polazne realne diferencijalne jednadžbe njegov realni dio

$$J = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}\right).$$

Sva ostala rješenja te diferencijalne jednadžbe naći ćemo sustavnim postupkom u sljedećem poglavlju. Ovdje smo samo željeli prikazati prijelaz u kompleksno područje kao značajnu tehniku za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. S njom ćemo se sustavno koristiti u jednom od sljedećih poglavlja.

(B) **Jednažba kosog hica**

Newtonov drugi zakon gibanja

$$\overrightarrow{F} = m\vec{a},$$

koji matematički modelira gibanje čestice u polju sile $\overrightarrow{F}$, sustav je triju diferencijalnih jednadžbi. Naime, razložimo li vektor sile $\overrightarrow{F}$ na njegove Kartezijeve komponente

$$F_x, F_y, F_z,$$

a vektor akceleracije na njegove Kartezijeve komponente

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

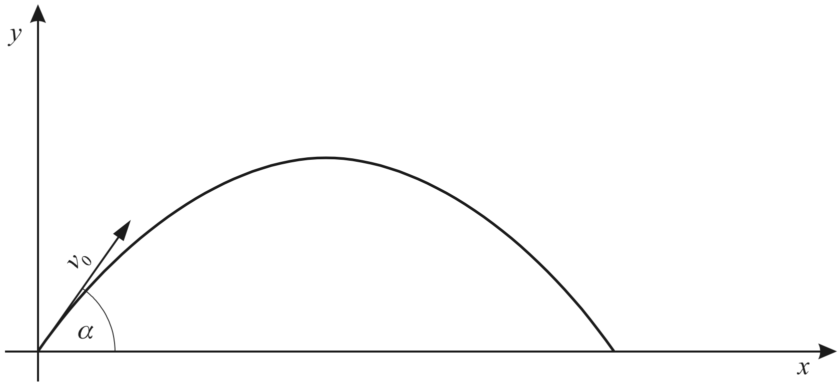
onda iz $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ dobijemo tri diferencijalne jednadžbe

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

koje opisuju kako položaj čestice $((x(t), y(t), z(t))$ ovisi o vremenu t u polju sile (F_x, F_y, F_z). Riješiti problem gibanja čestice u zadanom polju sile $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$, znači riješiti gornji sustav od tri diferencijalne jednadžbe.

Jednadžba kosog hica je dobro poznat primjer. Smjestimo koordinatni sustav tako da je os y paralelna sa silom teže mg, dok je os x vodoravna i s osi y tvori ravninu u kojoj se ispaljuje projektil. Ako se on ispaljuje pod kutom α i s početnom brzinom v_0 (za $t = 0$), onda diferencijalne jednadžbe njegova gibanja izgledaju ovako:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \quad \text{tj.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$



Rješenje tih jednadžbi

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha,$$

koje zadovoljava uvjete $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$, opisuje gibanje projektila. Njegova putanja parametarski je određena tim jednadžbama. Izračunamo li parametar t iz prve jednadžbe i uvrstimo ga u drugu, dobit ćemo eksplicitnu jednadžbu putanje

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x,$$

koja je oblika $y = ax^2 + b$, dakle parabola.

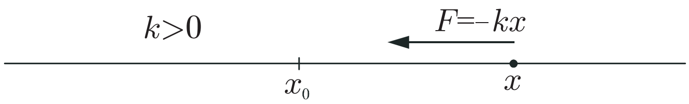
Treća diferencijalna jednadžba za z nije se pojavila u prethodnom slučaju jer je gibanje ravninsko, pa smo koordinatne osi x, y i z mogli postaviti tako da se ravnina xy poklapa s ravninom gibanja, što znači da je $z(t) = 0$. Ako istražujemo pravocrtno gibanje, onda koordinatnu os x možemo postaviti u pravac gibanja, pa u tom slučaju samo jedna diferencijalna jednadžba

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

opisuje gibanje jer je tada $y(t) = z(t) = 0$. Ako intenzitet kojim sila djeluje na česticu ovisi samo o položaju čestice x, a ne ovisi o vremenu t, onda je F funkcija jedne varijable x. Jednostavan slučaj, u kojem je $F = -kx$ ($k > 0$), dobro je poznat:

(C) **Jednadžba harmonijskog oscilatora**

Gibanje harmonijskog oscilatora (npr. opruge) jest gibanje pod utjecajem sile koja je proporcionalna otklonu od ravnotežnog položaja $x = 0$, a usmjerena je prema tom položaju.



Harmonijske oscilacije opisane su stoga jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ (k > 0)$$

ili, uz uobičajenu pokratu $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, jednažbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x. \tag{1.3}$$

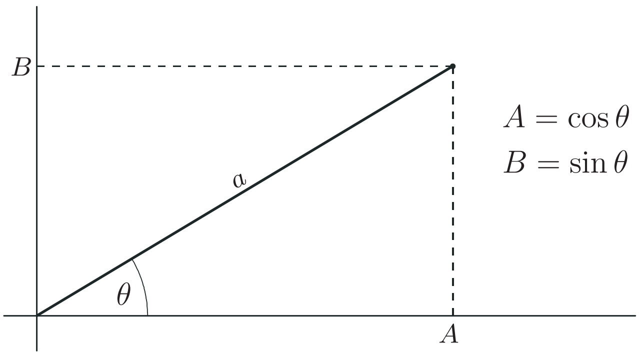
Poznato je da svako rješenje ove jednadžbe ima oblik

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{1.4}$$

gdje su A i B proizvoljne konstante. Rješenja se mogu zapisati i u obliku

$$x = a\cos(\omega t - \vartheta), \tag{1.5}$$

gdje su (a, ϑ) polarne koordinate od (A, B):



Uz početne uvjete $x(0) = x_0$ i $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ imamo jedinstveno rješenje

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{1.6}$$

Fizičari očekuju da je gibanje čestice u zadanom polju sile potpuno determinirano ako su određeni početni položaj i početna brzina čestice. Jedinstvenost rješenja (1.6) pokazuje da je taj zahtjev zadovoljen.

Diferencijalnu jednadžbu harmonijskog oscilatora možemo riješiti i na sljedeći način. Napišemo li jednadžbu (1.3) u obliku

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x = 0$$

i pomnožimo je s $\frac{dx}{dt}$, dobit ćemo

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x\frac{dx}{dt} = 0.$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}x^2 = 2x\frac{dx}{dt},$$

slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)=0,$$

tj.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E, \tag{1.7}$$

gdje je E (kao zbroj kvadrata) pozitivna konstanta. Jednadžbu (1.7), koju smo izveli iz jednadžbe harmonijskog oscilatora (1.3), zovemo jednadžbom energije harmonijskog oscilatora. Naime,

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{i} \quad E_p=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

jesu kinetička i potencijalna energija harmonijskog oscilatora, pa jednadžba (1.7) znači da se ukupna energija harmonijskog oscilatora ne mijenja, $E_k+E_p=E=konstanta$. Zapamtimo da se jednadžba energije (1.7) izvodi iz Newtonove jednadžbe gibanja (1.3) množenjem sa $\frac{dx}{dt}$ te da se gledano matematički radi o svođenju jednadžbe drugog reda (u kojoj se pojavljuje druga derivacija) na jednostavniju jednadžbu prvog reda (u kojoj se pojavljuje samo prva derivacija). Jednadžbu prvoga reda (1.7) lako je riješiti. Iz nje slijedi:

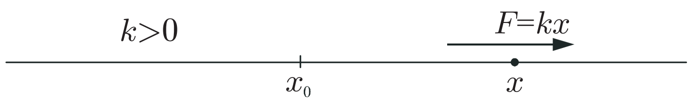
$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{2E}{m}-\omega^2x^2=\omega^2\left(\frac{2E}{\omega^2m}-x^2\right),\\
\frac{dx}{dt} &= \omega\sqrt{\frac{2E}{\omega^2m}-x^2},\\
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \text{uz} \quad a^2=\frac{2E}{\omega^2m}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
t=\frac{1}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{a}+c,\\
\omega(t-c) &= \arcsin\frac{x}{a},\\
\frac{x}{a} &= \sin(\omega t-\omega c),\\
x &= a\sin(\omega t-\gamma),
\end{aligned}$$

uz $\gamma=\omega c$ i $a^2=\dfrac{2E}{\omega^2m}$. Naravno, to je poznato rješenje (1.5), uz $\gamma=\vartheta-\dfrac{\pi}{2}$. Uočimo da je kvadrat amplitude oscilacija a^2 proporcionalan energiji harmonijskog oscilatora E.

Na sličan način mogli bismo istražiti gibanje čestice pod utjecajem sile, čiji je iznos proporcionalan otklonu od ravnotežnog položaja $x=0$, a koja je usmjerena nasuprot tom položaju.



Gibanje je opisano jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx \quad (k > 0)$$

ili, uz uobičajenu pokratu $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m\omega^2 x = 0. \tag{1.8}$$

Jednadžba (1.8) razlikuje se od jednadžbe harmonijskog oscilatora samo u predznaku uz drugi član i može se riješiti na isti način. Množenjem s $\frac{dx}{dt}$ dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - m\omega^2 x\frac{dx}{dt} &= 0,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) &= 0,\\
\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 &= E,
\end{aligned}$$

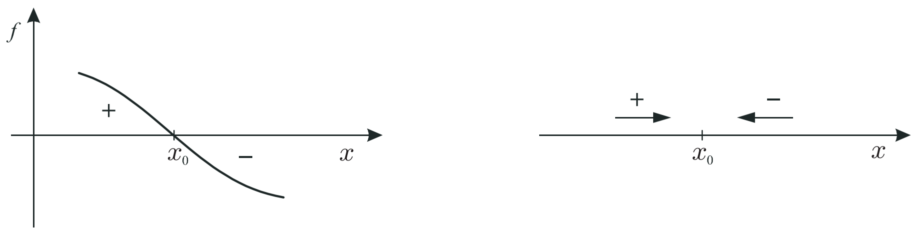
$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{2E}{m} + \omega^2x^2 = \omega^2\left(\frac{2E}{\omega^2 m} + x^2\right),\\
\frac{dx}{dt} &= \omega\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m} + x^2},\\
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \text{uz} \quad a^2 = \frac{2E}{\omega^2 m},\\
t &= \frac{1}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + c,\\
\omega(t-c) &= \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a},\\
\frac{x}{a} &= \operatorname{sh}(\omega t - \omega c),\\
x &= a\operatorname{sh}(\omega t - \gamma), \quad \text{uz} \quad \gamma = \omega c \quad \text{i} \quad a^2 = \frac{2E}{\omega^2 m}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(D) **Linearizirana jednadžba gibanja u točki stabilne ravnoteže**

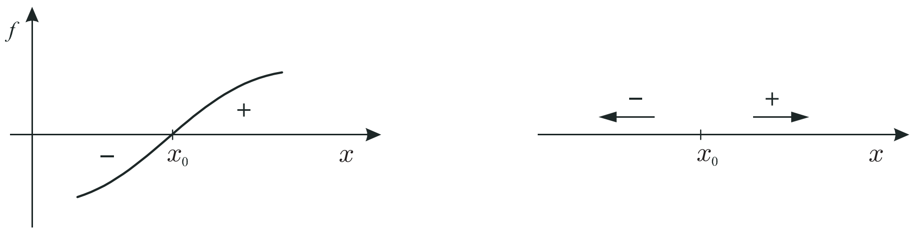
Opći slučaj pravocrtnog gibanja, u polju sile čiji intenzitet ne ovisi o vremenu, matematički se modelira diferencijalnom jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x). \tag{1.10}$$

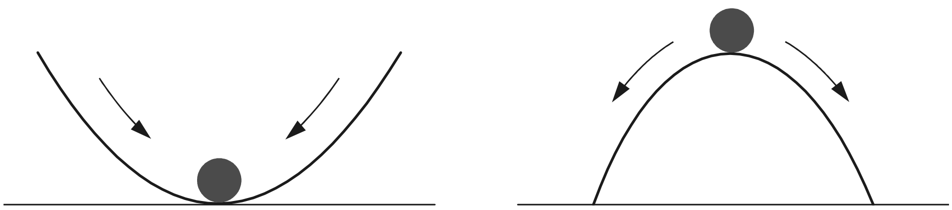
Ako funkcija sile $f(x)$ iščezava u točki x_0, $f(x_0) = 0$, onda tu točku zovemo **ravnotežnim položajem** gibanja. Naime, tada konstantna funkcija $x = x_0$ zadovoljava jednadžbu gibanja, pa u takvom polju sile čestica može mirovati u položaju x_0. Ako je k tome $f'(x_0) < 0$ (f pada u x_0), radi se o **stabilnom ravnotežnom položaju** jer je sila pozitivna za x blizu x_0 i $x < x_0$, dok je negativna za x blizu x_0 i $x > x_0$. Stoga sila gura česticu prema položaju x_0, čim je čestica u blizini tog položaja:



Ako je $f'(x_0) > 0$ (f raste u x_0), radi se o **nestabilnom položaju ravnoteže**, jer sila u tom slučaju gura česticu od položaja x_0, čim se ona imalo odmakne od tog položaja:



Ove dvije mogućnosti lijepo ilustrira čestica na dnu udoline i na vrhu brijega, u polju sile teže.



Jednadžbu (1.10) u općem slučaju nije lako riješiti. Aproksimativno se rješenje može naći tako da funkciju $f(x)$, u ravnotežnom položaju x_0, zamijenimo njezinom linearnom aproksimacijom $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. njezinim Taylorovim polinomom prvoga reda. U ravnotežnom je položaju $f'(x_0) = 0$, pa iz jednadžbe (1.10) dobijamo jednadžbu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.11}$$

koju zovemo linearnom aproksimacijom jednadžbe (1.10) oko ravnotežnog položaja x_0. Ako je x_0 položaj stabilne ravnoteže, onda je $f'(x_0) < 0$, pa uvrštavanjem $y = x - x_0$ uz pokratu $k = -f'(x_0) > 0$, dobijamo poznatu jednadžbu harmonijskih oscilacija

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \quad k > 0.$$

Dakle, u onoj mjeri u kojoj je točna linearna aproksimacija sile, čestica harmonijski oscilira oko položaja stabilne ravnoteže, u skladu s rješenjem (1.4) linearizirane jednadžbe. Vremenski period jedne linearizirane oscilacije iznosi $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-f'(x_0)/m}}$. Čestica koja se giba po točnom zakonu (1.10) također oscilira oko položaja stabilne ravnoteže x_0, ali s vremenskim periodom koji ovisi o amplitudi oscilacija (kao što ćemo vidjeti na primjeru njihala). Kako amplitude postaju sve manje i teže prema nuli, tako i period teži prema periodu lineariziranih oscilacija.

U slučaju da je ravnotežni položaj x_0 nestabilan, tj. $f'(x_0) > 0$, uvrštavanjem $y = x - x_0$ uz pokratu $k = f'(x_0) > 0$, dobivamo jednadžbu

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ky, \quad k > 0,$$

čije je rješenje (usp. (1.9))

$$y = x - x_0 = a\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{f'(x_0)/m}(t-c)\right). \tag{1.12}$$

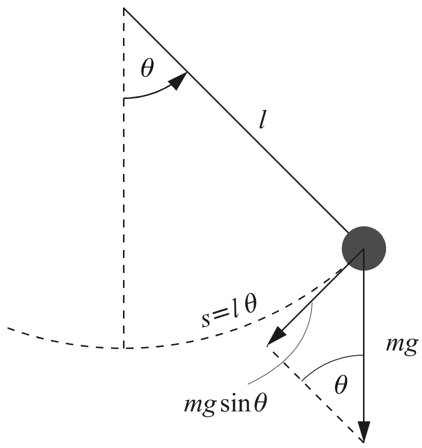
Za većinu početnih uvjeta bit će $a \neq 0$ i rješenje (1.12) težit će k $\pm\infty$, za $t \to \infty$. To pokazuje nestabilnost ravnotežnog položaja $x = x_0$ (tj. $y = 0$). Dakle, linearizacija u slučaju nestabilne ravnoteže nije naročito korisna jer gotovo sva rješenja (1.12) na kraju napuste područje oko x_0 u kojem je linearna aproksimacija valjana.

Ova opća razmatranja ilustrirat ćemo na primjeru jednostavnog njihala.

(E) **Linearizirana jednadžba njihala**

Pretpostavimo da na klatnu duljine l (i zanemarive mase) visi čestica mase m. Gibajući se po kružnici radijusa l, čestica prevaljuje put $s = l\vartheta$. Tangencijalna komponenta sile teže, koja jedina utječe na gibanje po kružnoj putanji, iznosi $mg\sin\vartheta$, pa iz Newtonovog zakona slijedi diferencijalna jednadžba njihala

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mg\sin\vartheta \tag{1.13}$$



(minus zbog suprotne usmjerenosti tangencijalne komponente i kuta ϑ). Funkcija sile $f(\vartheta) = -mg\sin\vartheta$ određuje ravnotežni položaj $\vartheta = 0$, jer je $f(0) = 0$. Radi se o položaju stabilne ravnoteže jer je $f'(0) = -mg < 0$. Linearizirana jednadžba njihala glasi

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\vartheta,$$

a njezino je rješenje oblika (1.6)

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + v_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

gdje je ϑ_0 početni otklon njihala, a v_0 njegova početna brzina. (Ukoliko je početna brzina $v_0 = 0$, tj. ukoliko je klatno slobodno ispušteno iz početnog položaja $\vartheta = \vartheta_0$, gibanje je opisano funkcijom $\vartheta = \vartheta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$.) Dakle, vremenski period jednog punog lineariziranog titraja iznosi

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Gornje jednadžbe za ϑ i T_0 dobro opisuju gibanje njihala i periode njihovih oscilacija, ako je otklon od ravnotežnog položaja malen. Stari zidni satovi s klatnom imaju male otklone klatna upravo zato da bi periodi oscilacija T, koji su vremenske jedinice, bili približno jednaki (konstanti T_0 dakle i međusobno). Ukratko, uz male otklone njihalo može poslužiti kao dobar mehanički sat.

Primijetimo da funkcija sile $f(\vartheta) = -mg\sin\vartheta$ ima još jedan ravnotežni položaj $\vartheta = \pi$. Radi se o položaju nestabilne ravnoteže jer je $f'(\pi) = mg > 0$. Linearizirana jednadžba njihala oko nestabilnog položaja ravnoteže na vrhu glasi

$$\frac{d^2(\vartheta - \pi)}{dt^2} = \frac{g}{l}(\vartheta - \pi),$$

a njezina su rješenja oblika (1.12)

$$\vartheta - \pi = a\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{g}{l}}(t - c), \quad \text{tj.}$$

$$\vartheta = \pi + a\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{g}{l}}(t - c).$$

Za većinu početnih uvjeta bit će $a \neq 0$, pa će njihalo napustiti položaj nestabilne ravnoteže na vrhu ($\vartheta = \pi$), odlazeći u područje u kojem ova aproksimacija nije valjana.

(F) **Jednadžba njihala**

Pokušat ćemo riješiti (nelineariziranu) jednadžbu njihala (1.13)

$$m\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -m\frac{g}{l}\sin\vartheta.$$

Primijenit ćemo standardni postupak množenja s $\dfrac{d\vartheta}{dt}$ kojim snizujemo red diferencijalne jednadžbe, izvodeći odgovarajuću jednadžbu energije njihala (prvoga reda):

$$\begin{aligned}
m\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= -\frac{mg}{l}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{mg}{l}\cos\vartheta\right) &= 0,\\
\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{mg}{l}\cos\vartheta &= E.
\end{aligned}$$

Prvi član lijeve strane kinetička je energija kružnoga gibanja njihala, dok je drugi član njegova potencijalna energija. Pretpostavimo li da je njihalo slobodno ispušteno iz početnog položaja ϑ_0 bez početne brzine, slijedi da je $\dfrac{d\vartheta}{dt}(\vartheta_0) = 0$, pa je $E = -\dfrac{mg}{l}\cos\vartheta_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 &= \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),\\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0},\\
\frac{dt}{d\vartheta} &= \frac{\pm\sqrt{\frac{l}{2g}}}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}},\\
t &= \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.
\end{aligned}$$

Neodređeni integral podintegralne funkcije $(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)^{-\frac{1}{2}}$ nije moguće izraziti uz pomoć elementarnih funkcija, pa ćemo se pri izračunavanju poslužiti beskonačnim redovima. Ograničimo se pritom na izračunavanje četvrtine perioda jedne pune oscilacije T, koja je jednaka vremenu potrebnom da njihalo iz početnog položaja $\vartheta = \vartheta_0$ dođe u ravnotežni položaj $\vartheta = 0$:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Iz poznatih identiteta

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta &= 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2},\\
\cos\vartheta_0 &= 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2},
\end{aligned}$$

slijedi

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Provedemo li supstituciju

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\sin\varphi,$$

tj.

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = k\sin\varphi, \quad k = \sin\frac{\vartheta_0}{2},$$

lako nalazimo da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\frac{d\vartheta}{d\varphi} &= k\cos\varphi,\\ d\vartheta &= \frac{2k\cos\varphi}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\,d\varphi,\\ d\vartheta &= \frac{2k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.\end{aligned}$$

pa naš integral postaje

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{k^2-k^2\sin^2\varphi}}\frac{2k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi =\\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k\cos\varphi}\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi =\\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k = \sin\frac{\vartheta_0}{2}.\end{aligned}$$

Primjenom Newtonove binomne formule nalazimo

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi + \ldots$$

Taj red konvergira za $k^2\sin^2\varphi < 1$, dakle za svaki $\varphi \in [0, 2\pi]$, jer je $k^2 < 1$. Integracijom nalazimo:

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi =\\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi\,d\varphi + \right.\\ &\qquad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi\,d\varphi + \ldots\right]\\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^2\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2} + \ldots\right],\end{aligned}$$

zato što je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\frac{\pi}{2}.$$

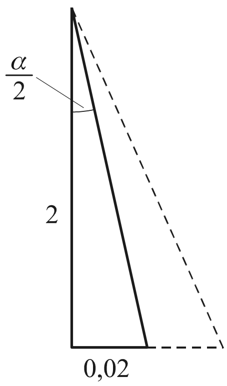
Dakle

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots\right].$$

To je točna vrijednost vremenskog perioda njihala, odnosno jedinica vremena zidnog sata s klatnom. Vidimo da ona ovisi o $k = \sin\dfrac{\vartheta_0}{2}$, tj. o amplitudi njihala ϑ_0. Kako se smanjuje amplituda, smanjuje se i jedinica vremena, što znači da sat nije savršeno precizan. Ako je maksimalni otklon njihala α, onda je njegov maksimalni period upravo gore izračunati T uz $k = \sin\frac{\alpha}{2}$. Minimalni period jest granični period, koji se realizira kada otklon njihala teži prema nuli, tj. kada k teži prema nuli. On je jednak lineariziranom periodu $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. To znači da je razlika najveće i najmanje jedinice vremena, koju realizira njihalo s maksimalnim otklonom α, jednaka $T_\alpha - T_0$. Maksimalna relativna promjena, u odnosu na standardnu lineariziranu jedinicu T_0, iznosi:

$$\begin{aligned}
\frac{T_\alpha - T_0}{T_0} &= \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right] - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \\
&= \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots\right]}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots < \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^6 + \dots = \frac{\frac{1}{4}k^2}{1 - k^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da zidni sat s klatnom duljine 2 m, koje se odmiče od ravnotežnog položaja za ± 4 cm, što približno odgovara vrijednosti $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = 0.01$ (vidi sliku), ima relativnu pogrešku koja iznosi $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}0.01^2 = \dfrac{1}{40000}$. To znači da je njegova pogreška u toku 1 sata, tj. 3600 sekundi, manja od $\dfrac{1}{40000}\cdot 4000 = \dfrac{1}{10}$ sekunde.

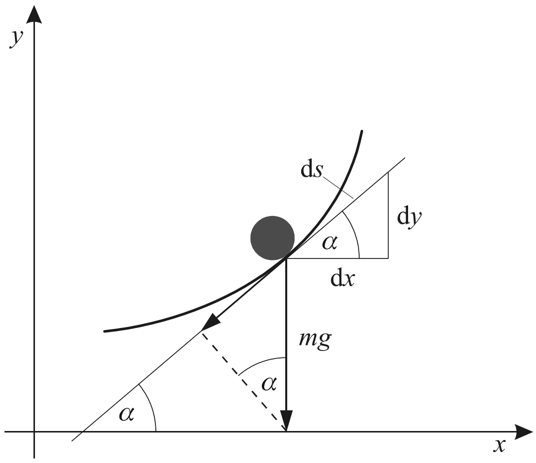


$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

(G) **Jednadžba gibanja u polju sile teže (po zadanoj krivulji)**

Gibanje čestice njihala po kružnoj putanji samo je jedan posebni slučaj gibanja čestice po zadanoj krivulji u polju sile teže. Mjerimo li duljinu luka krivulje s tako da je $s > 0$ za $x > 0$, opću jednadžbu gibanja izvodimo ovako:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\alpha = -mg\frac{dy}{ds}. \tag{1.14}$$



Standardnim postupkom izvest ćemo iz jednadžbe (1.14) odgovarajuću jednadžbu energije:

$$m\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = -mg\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy\right) = 0,$$
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy = E.$$

Prvi je član kinetička energija dok je drugi član potencijalna energija u polju sile teže $\vec{g}$. Iz jednadžbe energije lako ćemo izračunati brzinu čestice, $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy}$. Ako je čestica ispuštena s visine y_0 bez početne brzine, $\frac{ds}{dt}(y_0) = 0$, onda je $\frac{E}{m} = gy_0$, pa je

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{y_0 - y}. \tag{1.15}$$

Primijetimo da brzina čestice ne ovisi o putanji nego samo o visinskoj razlici $y_0 - y$. Daljnje rješavanje jednadžbe (1.15) ovisi o zadanoj krivulji $y = y(x)$.

U slučaju njihala vrijedi $s = l\vartheta$ i $\alpha = \vartheta$, pa imamo jednadžbu njihala (1.13) kao posebni slučaj opće jednadžbe (1.14).

(H) **Jednadžba tautohrone**

Njihalo možemo koristiti kao sat zato što je jednadžba gibanja po kružnoj putanji

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\vartheta,$$

za male ϑ, dobro aproksimirana jednadžbom harmonijskih oscilacija

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -m\frac{g}{l}l\vartheta = -m\frac{g}{l}s,$$

koja ima konstantne vremenske periode, neovisne o amplitudi oscilacija. Za razliku od kružne putanje koja ima **približno** jednake vremenske periode, putanja $y = y(x)$ imat će uistinu jednake periode ako se njena jednadžba

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\frac{dy}{ds}$$

točno poklapa s jednadžbom harmonijskog oscilatora

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s.$$

Takva se putanja zove tautohrona (grč. "isto vrijeme") i usporedbom gornjih jednadžbi vidimo da je to svaka krivulja $y = y(x)$ koja zadovoljava jednadžbu

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{a}s$$

za neku pozitivnu konstantu $\frac{1}{a}$. Zbog $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, iz te jednadžbe slijedi i odgovarajuća jednadžba za x:

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - s^2}.$$

Integriramo li jednadžbe za x i y po s, dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}\int \sqrt{a^2-s^2}ds = \frac{1}{a}\left(\frac{s}{2}\sqrt{a^2-s^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{s}{a}\right) + c_1 = \\ &= \frac{a}{2}\frac{s}{a}\sqrt{1-\left(\frac{s}{a}\right)^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{s}{a} + c_1, \\ y &= \frac{1}{2a}s^2 + c_2. \end{aligned}$$

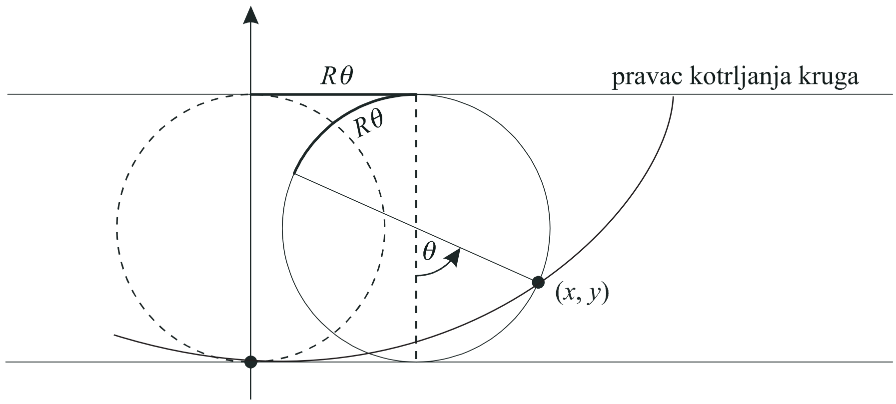
To su parametarske jednadžbe tautohrone (s parametrom s). Pređemo li na novi parametar ϑ, supstitucijom $\frac{s}{a} = \sin\frac{\vartheta}{2}$, dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{a}{2}\frac{\vartheta}{2} + c_1 = \frac{a}{4}(sin\vartheta + \vartheta) + c_1, \\ y &= \frac{a}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} + c_2 = \frac{a}{4}(1-\cos\vartheta) + c_2, \end{aligned}$$

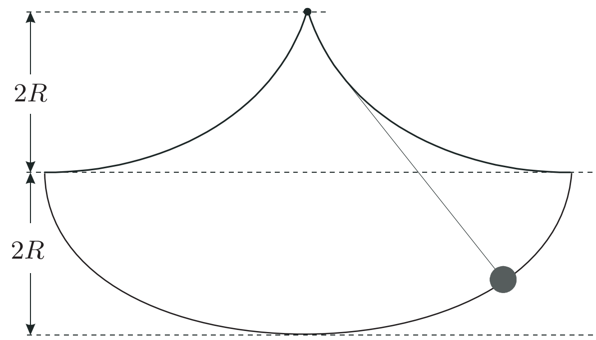
jer je $\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin\vartheta}{2}$ i $\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1-\cos\vartheta}{2}$.

Uvedemo li pokratu $R = \frac{a}{4}$ i postavimo točku s parametrom $\vartheta = 0$ u ishodište (tako da je $c_1 = c_2 = 0$), vidimo da je tautohrona zapravo cikloida (usp. sliku):

$$x = R\vartheta + R\sin\vartheta, \quad y = R - R\cos\vartheta.$$

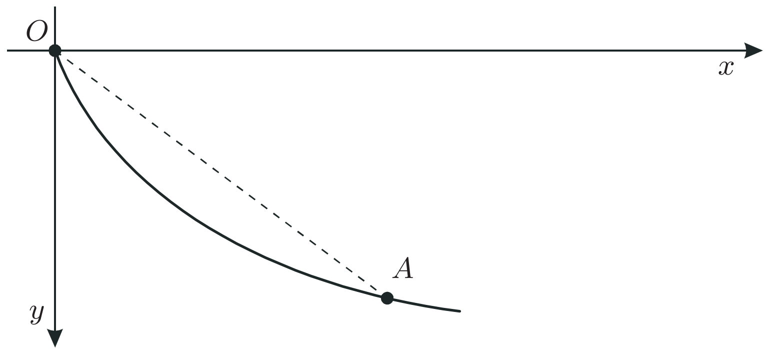


Dakle, teorijski savršen sat realizira se gibanjem čestice po cikloidi. Zanimljiva je Huygensova konstrukcija njihala, čiji se uteg giba točno po cikloidi. Uteg pričvrstimo na kraj uzice duljine $4R$, a nju objesimo o spojnicu dvaju krutih cikloida S, kao na donjoj slici. Dok se njihalo klati lijevo-desno, uzica će se priljubljivati uz lijevu i desnu cikloidu. Huygens je pokazao da se uteg pritom giba po trećoj cikloidi, pa takvo cikloidno njihalo predstavlja teorijski savršen sat.



(I) **Jednadžba brahistohrone**

Pretpostavimo da česticu ispustimo u točki O te da ona pod utjecajem sile teže klizi po zadanoj krivulji od točke O do točke A. Kakva mora biti zadana krivulja da čestica najbrže stigne od točke O do točke A? Traženu krivulju zovemo brahistohrona (grč. "najkraće vrijeme").



Prva je misao da bi to trebala biti najkraća krivulja koja spaja O i A, dakle dužina OA. Međutim, mi želimo postići najkraće vrijeme, a moguće je da se najkraće vrijeme ne postiže na najkraćem putu. Naime, upotrijebimo li put koji kreće iz O strmije od spojnice OA, čestica će zbog visinske razlike postići veću brzinu (usp. (1.15)) od one na spojnici OA, barem u početku, pa će možda zakrivljeni put prijeći brže no kraći nezakrivljeni.

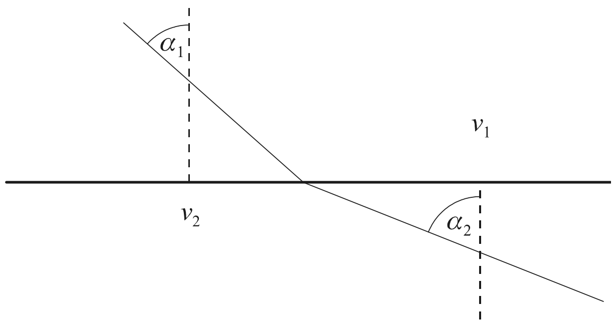
Razmotrimo dakle putanju od O do A. Odabrali smo koordinatni sustav s ishodištem u početnoj točki gibanja O i sa osi y u smjeru sile teže. Iz (1.15) slijedi da je brzina čestice u točki s koordinatama (x, y)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{y}. \tag{1.16}$$

jer je $y_0 = 0$, a y mijenja predznak u odnosu na (1.15) zbog suprotne usmjerenosti osi y. To vrijedi za svaku krivulju. Što je karakteristika brahistohrone, vremenski najkraće krivulje? Brzina čestice mijenja se na svakoj razini y prema zakonu (1.16). No poznato je (Snellov zakon loma) da čestica koja na određenoj razini promijeni brzinu v_1 u v_2 ide vremenski najkraćom putanjom ako je

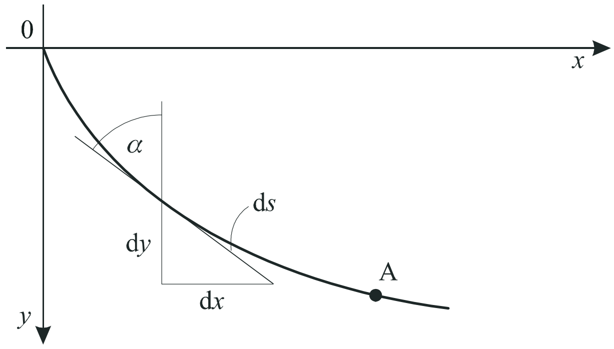
$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

$$\frac{\sin a_1}{v_1} = \frac{\sin a_2}{v_2}$$



tj. ako se omjer $\frac{\sin\alpha}{v}$ ne promijeni s promjenom brzine v i kuta α. To znači da na vremenski najkraćoj putanji, brahistohroni, vrijedi

$$\frac{\sin\alpha}{v} = k,$$



gdje je k neka konstanta. Budući da je

$$\sin\alpha = \frac{dx}{ds} \ \text{ i } \ v = \frac{ds}{dt}$$

slijedi da brahistohrona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dx}{ds} = k\frac{ds}{dt}, \ \text{ tj. } \ \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = k\frac{ds}{dt}.$$

Iz (1.16) i činjenice da je $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = k\sqrt{2g}\sqrt{y},$$

što uz pokratu $K = \frac{1}{2k^2g}$ daje

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{K}{y}}.$$

Riješimo li jednadžbu po $\dfrac{dx}{dy}$, dobit ćemo

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{K}{y},$$
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{K}{y} - 1} = \sqrt{\frac{K - y}{y}}$$

ili

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{K - y}}.$$

Integracijom po y lako nalazimo kako x ovisi o y:

$$x = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{K - y}} dy.$$

Taj ćemo integral najlakše riješiti supstitucijom

$$y = K \sin^2 u.$$

Tada je

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\sqrt{K}\sin u}{\sqrt{K}\sqrt{1 - \sin^2 u}} 2K \sin u \cos u du = \\ &= \int 2K \sin^2 u du = \int 2K \frac{1}{2}(1 - \cos 2u) du = \\ &= K \int (1 - \cos 2u) du = \frac{K}{2}(2u - \sin 2u) + c. \end{aligned}$$

Budući da je $x = 0$ za $y = 0$ (tj. za $u = 0$), slijedi da je $c = 0$, pa je

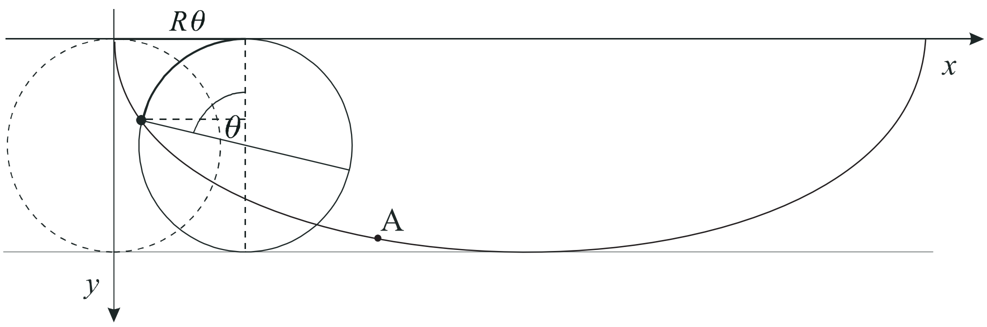
$$x = \frac{K}{2}(2u - \sin 2u),$$

uz

$$y = K \sin^2 u = \frac{K}{2}(1 - \cos 2u).$$

To su parametarske jednadžbe tražene krivulje. Prijeđemo li na novi parametar $\vartheta = 2u$, uz pokratu $\dfrac{K}{2} = R$, vidimo da je brahistohrona zapravo cikloida (usp. sliku)

$$x = R\vartheta - R \sin \vartheta, \quad y = R - R \cos \vartheta.$$



Konstanta R određena je točkom A. Naime, ako su (x_1, y_1) koordinate od A, onda je

$$x_1 = R(\vartheta_1 - \sin\vartheta_1),$$
$$y_1 = R(1 - \cos\vartheta_1)$$

za neki parametar ϑ_1. Ove dvije jednadžbe određuju kako parametar ϑ_1, tako i konstantu R.

2

Separabilna i linearna jednadžba prvog reda

U prethodnom poglavlju pokazali smo da su matematički modeli mnogih fizikalnih sustava diferencijalne jednadžbe. Rješavajući ih, ustanovili smo kako se ponašaju ti sustavi. U ovom poglavlju posvetit ćemo se striktnije matematičkom problemu nalaženja općih metoda za rješavanje nekih jednostavnijih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda.

Redom diferencijalne jednadžbe zovemo red najviše derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi. Dakle, diferencijalna jednadžba prvoga reda, uz poznate funkcije od x i nepoznatu funkciju y, koja ovisi o x, sadrži samo njezinu prvu derivaciju y', pa se može zapisati u obliku

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

a katkada i u jednostavnijem obliku

$$y' = f(x, y).$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (2.1) na intervalu (a, b) svaka je funkcija $y = h(x)$ koja je derivabilna na tom intervalu i koja zadovoljava jednadžbu (2.1) za svaki $x \in (a, b)$. To znači da (2.1) postaje identitet na intervalu (a, b) ako nepoznanicu y zamijenimo sa $h(x)$, a y' sa $h'(x)$. Rješenje može biti zadano i implicitno, jednadžbom $H(x, y) = 0$, koju tada zovemo implicitnim rješenjem diferencijalne jednadžbe (2.1) (za razliku od eksplicitnoga rješenja $h(x)$).

Primjer 2.1.

a) Provjerimo da je $y = x^3$ rješenje jednadžbe $xy' = 3y$ na čitavom području realnih brojeva.

b) Provjerimo da je $x^2 + y^2 = 1$ implicitno rješenje jednadžbe $yy' = -x$ na intervalu $(-1, 1)$.

Rješenje:

a) Uvrštavanjem $y = x^3$ i $y' = 3x^2$ u jednadžbu $xy' = 3y$ dobijamo identitet $3x^3 = 3x^3$ na cijelom području $\mathbb{R}$.

b) Jednadžba $x^2 + y^2 = 1$ implicitno definira dvije neprekinute funkcije $y(x)$ na intervalu $(-1, 1)$. Implicitnim deriviranjem nalazimo

$$2x + 2yy' = 0,$$

tj.

$$yy' = -x \text{ za svaki } x \in (-1, 1).$$

Slijedi da obje funkcije $y(x)$, implicitno zadane s $x^2 + y^2 = 1$, zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu $yy' = -x$ na intervalu $(-1, 1)$ što znači da je $x^2 + y^2 = 1$ implicitno rješenje te jednadžbe na tom intervalu.

□

Primjer 2.2.

Nađimo sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = \cos x$ na $\mathbb{R}$.

Rješenje:

Sve antiderivacije funkcije $\cos x$ razlikuju se za konstantu, pa je svako rješenje naše jednadžbe oblika $y = \sin x + c$. Za svaki $c \in \mathbb{R}$ dobivamo po jedno rješenje, a time su ujedno obuhvaćena i sva rješenja naše jednadžbe. □

Prethodni primjer tipičan je za većinu diferencijalnih jednadžbi prvoga reda. Sva rješenja takve jednadžbe čine jednoparametarski skup funkcija koji se može predstaviti jedinstvenom formulom koja sadrži proizvoljnu konstantu c. Uvrštavanjem raznih vrijednosti za c dobijamo razna rješenja diferencijalne jednadžbe. Uobičajeno je da se takav jednoparametarski skup funkcija, zadan jedinstvenom formulom s jednim parametrom c, zove **općim rješenjem** diferencijalne jednadžbe čak i onda ako ne obuhvaća sva njezina rješenja. Opće rješenje koje obuhvaća sva rješenja zovemo **potpunim općim rješenjem**.

Ona rješenja koja nisu obuhvaćena općim rješenjem zovu se **singularna rješenja**. Pojedini primjerci općeg rješenja, koji se dobivaju uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za c, zovu se **partikularna rješenja**. Dakle, $\sin x + c$ opće je rješenje jednadžbe $y' = \cos x$, koje je i potpuno. Neka njezina partikularna rješenja jesu $\sin x + 2$, $\sin x - 10$ i $\sin x + 5$ dok singularnih rješenja nema. Ako je uz diferencijalnu jednadžbu zadan i tzv. **početni** ili, ovisno o interpretaciji, **rubni uvjet**, $y(x_0) = y_0$, onda je njime određena konstanta c, tj. njime je određeno partikularno rješenje koje zadovoljava jednadžbu i početni (rubni) uvjet.

Primjer 2.3. Provjerimo uvrštavanjem da je $y = cx - c^2$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(y')^2 - xy' + y = 0$ te da je $y = \frac{x^2}{4}$ njezino singularno rješenje. Nađimo partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$.

Rješenje: Iz $y = cx - c^2$ slijedi $y' = c$ pa uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $c^2 - xc + cx - c^2 = 0$, što je identitet $0 = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki c. Dakle, $y = cx - c^2$ opće je rješenje zadane jednadžbe.

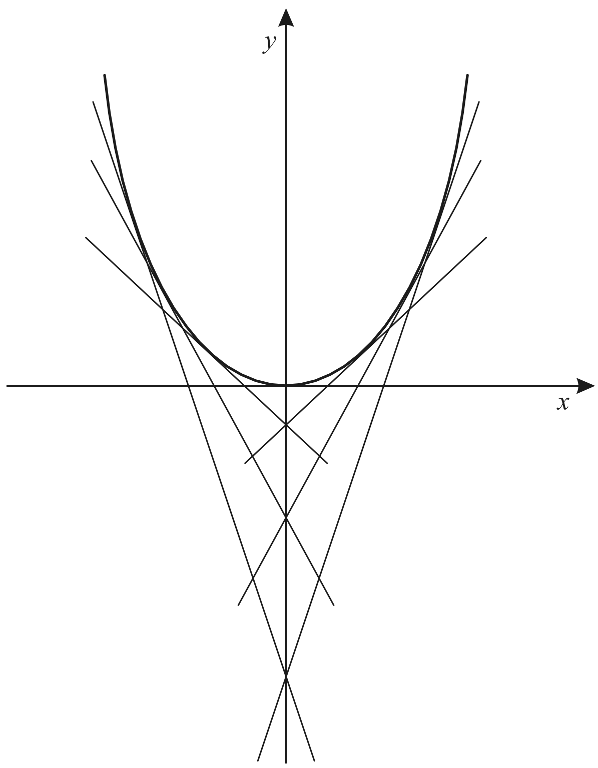
Uvrštavanjem $y = \dfrac{x^2}{4}$ i iz njega dobivenog $y' = \dfrac{x}{2}$ dobivamo

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = 0,$$

tj. $0 = 0$, što dokazuje da je i $y = \dfrac{x^2}{4}$ rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Budući da se ono ni za jednu vrijednost od c ne može dobiti kao partikularno rješenje općeg rješenja

$y = cx - c^2$, radi se o singularnom rješenju. Iz $y(1) = 0$ slijedi $0 = c \cdot 1 - c^2$, tj. $c = 0$ ili $c = 1$. Dakle, $y = 0$ i $y = x - 1$ partikularna su rješenja koja zadovoljavaju početni uvjet $y(1) = 0$.

Uočimo da opće rješenje $y = cx - c^2$ predstavlja skup pravaca tangencijalnih na singularno rješenje $y = \dfrac{x^2}{4}$. Naime, pravac $y = cx - c^2$ siječe (zapravo, pokazat ćemo, dodiruje) parabolu $y = \dfrac{x^2}{4}$ u točki čija je x koordinata određena jednadžbom $cx - c^2 = \dfrac{x^2}{4}$, tj. $\dfrac{x^2}{4} - cx + c^2 = 0$. Dakle, $x_{1,2} = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - c^2}}{1/2} = 2c$. Nagib parabole u toj točki $y'(2c) = x/2|_{(2c)} = c$ jednak je nagibu pravca c, što znači da pravac $y = cx - c^2$ tangira parabolu $y = \dfrac{x^2}{4}$ u dodirnoj točki.



□

Najjednostavnije diferencijalne jednadžbe prvoga reda, čija opća rješenja nemaju singularnih rješenja, a možemo ih naći neposrednom integracijom, jesu tzv. separabilne diferencijalne jednadžbe oblika

$$g(y)y' = f(x). \tag{2.2}$$

Iz jednakosti lijeve i desne strane slijedi da se integrali lijeve i desne strane po x razlikuju samo za konstantu

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + c.$$

Upotrebom pravila za supstituciju u lijevom integralu nalazimo da je

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Ova jednadžba nakon što izračunamo integrale daje implicitnu vezu x i y, tj. implicitno zadaje y kao funkciju od x. Ona je implicitno rješenje jednadžbe (2.2). Riješimo li je po y (ako je moguće), dobit ćemo i eksplicitno rješenje jednadžbe (2.2).

Uobičajeno je da se jednadžba (2.2) odmah napiše u obliku

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x),$$

pa se množenjem s dx "separiraju varijable"

$$g(y)dy = f(x)dx$$

te integriranjem dođe do rješenja

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Naše obrazloženje uz pomoć pravila supstitucije dokazuje da je taj postupak korektan.

SEPARABILNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Separabilnu jednadžbu oblika

$$g(y)y' = f(x)$$

rješavamo na sljedeći način:

1. Separiramo (razdvojimo) varijable:

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

2. Integriramo obje strane jednadžbe:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

3. Riješimo dobivenu jednadžbu po y i tako nađemo eksplicitno opće rješenje. Ako to nije moguće, 2. daje implicitno opće rješenje.

4. Partikularno rješenje, koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, nalazimo uvrštavanjem toga uvjeta u opće rješenje.

Primjer 2.4. Nađimo opće rješenje diferencijalne jednadžbe

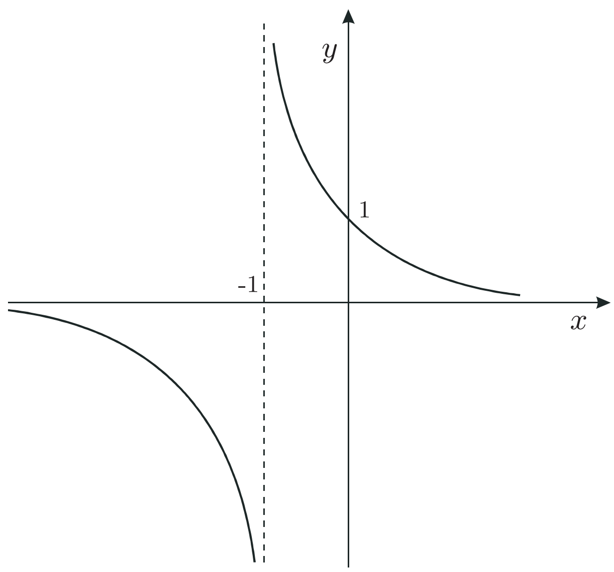
$$y' + 5x^4y^2 = 0$$

te partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$.

Rješenje:

1. Separiramo varijable
$$\frac{dy}{dx} = -5x^4y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = -5x^4dx,$$
2. integriramo
$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int 5x^4dx + c, \quad -\frac{1}{y} = -x^5 + c,$$
3. te riješimo po y
$$y = \frac{1}{x^5 - c}.$$
To je opće rješenje zadane jednadžbe.
4. Uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0) = 1$ nalazimo
$$\frac{1}{0-c} = 1, \quad \text{tj.} \quad c = -1,$$
pa je traženo partikularno rješenje
$$y = \frac{1}{x^5+1}.$$

Graf te funkcije skiciran je na sljedećoj slici.



□

Primjer 2.5. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $9yy' + 4x = 0$.

Rješenje: Iz $9ydy = -4xdx$ integracijom nalazimo opće rješenje $\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \overline{c}$, tj. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c$ (uz pokratu $c = \overline{c}/18$). Opće rješenje predstavlja familiju (konfokalnih) elipsa. □

Primjer 2.6. Riješimo jednadžbu $y' = 1 + y^2$.

Rješenje: Iz $dy/(1+y)^2 = dx$ integracijom nalazimo opće rješenje

$$\operatorname{arctg} y = x + c.$$

Odavde lako nalazimo

$$y = \operatorname{tg}(x + c).$$

(Primijetimo koliko je važno odmah pri integraciji uvesti konstantu c. Da smo to učinili kasnije, dobili bismo **pogrešno** $y = \operatorname{tg} x + c$.) $\square$

Primjer 2.7. Riješimo

a) $yy' = \cos 2x, \quad y(0) = 1;$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y + yx^2}, \quad y(0) = -1;$

c) $y' = x^2y^2 + x^2 - y^2 - 1, \quad y(0) = 0.$

Rješenje:

a) $$y\,dy = \cos 2x dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \overline{c}, \quad y = \pm\sqrt{\sin 2x + c} \quad (c = 2\overline{c});$$

$$y(0) = \sqrt{\sin 0 + c} = 1, \quad \sqrt{c} = 1, \quad c = 1, \quad y = \sqrt{\sin 2x + 1}.$$

b) $$y\,dx = \frac{x\,dx}{1+x^2}, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \overline{c}, \quad y = \pm\sqrt{\ln(1+x^2) + c} \quad (c = 2\overline{c});$$

$$y(0) = -\sqrt{\ln 1 + c} = -1, \quad -\sqrt{c} = -1, \quad c = 1, \quad y = -\sqrt{\ln(1+x^2) + 1}.$$

c) $$y' = (x^2-1)(y^2+1), \quad \frac{dy}{1+y^2} = (x^2-1)dx, \quad \operatorname{arctg} y = \frac{x^3}{3} - x + c,$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3} - x + c\right); y(0) = \operatorname{tg}(c) = 0, \quad c = 0,$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

$\square$

Neke od diferencijalnih jednadžbi koje smo ranije razmatrali zapravo su separabilne. Takva je npr. jednadžba eksponencijalnoga rasta

$$y' = ky.$$

Dakle, možemo je riješiti ovako:

$$\frac{dy}{y} = kdx, \quad \ln|y| = kx + \overline{c},$$

$$|y| = e^{kx+\overline{c}} = e^{kx}e^{\overline{c}}, \quad y = ce^{kx},$$

gdje je $c = +e^{\overline{c}}$ za $y > 0$ i $c = -e^{\overline{c}}$ za $y < 0$. Možemo dopustiti i $c = 0$ jer to daje trivijalno rješenje jednadžbe eksponencijalnoga rasta $y = 0$.

Jednadžba strujnoga kruga s konstantnim naponom (primjer A iz prethodnog poglavlja)

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U$$

također je separabilna, pa je možemo riješiti ovako:

$$\begin{aligned} L\frac{dJ}{dt} &= U - RJ, \quad \frac{L}{U-RJ}dJ = dt, \\ \int \frac{LdJ}{U-RJ} &= \int dt + c, \quad -\frac{L}{R}\ln|U - RJ| = t + c, \\ |U - RJ| &= e^{-\frac{R}{L}(t+c)}, \quad U - RJ = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \end{aligned}$$

gdje je $A = \pm e^{-\frac{R}{L}c}$. Ako je $J = J_0$ u početnom trenutku $t = 0$, onda je $A = U - RJ_0$, pa nakon uvrštavanja te vrijednosti i sređivanja dobivenoga izraza nalazimo rješenje jednadžbe u obliku

$$J = \frac{U}{R} + \left(J_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

U sljedećim primjerima pozabavit ćemo se s još nekoliko problema čiji je matematički model separabilna diferencijalna jednadžba.

Primjer 2.8. Olovna kugla malih dimenzija zagrijana je na 100 °C. U trenutku $t = 0$ uronimo je u vodenu kupku velikih dimenzija čiju temperaturu konstantno održavamo na 30 °C. Toplinska vodljivost olova izuzetno je velika, pa možemo pretpostaviti da je temperatura kugle jednaka u svim njezinim točkama u svakom pojedinom trenutku. Prema Newtonovom zakonu hlađenja brzina promjene temperature uronjene kugle proporcionalna je razlici temperatura kugle i vodene kupke u kojoj se ona hladi. Na kraju treće minute hlađenja temperatura kugle smanjena je na 70 °C. Koliko će vremena proći dok se ona smanji na 31 °C?

Rješenje: Matematički model procesa hlađenja prema Newtonovom zakonu predstavlja separabilna diferencijalna jednadžba

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 30).$$

Separacija varijabli i neposredna integracija dovode nas do njezinoga općeg rješenja

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T-30} &= kdt, \quad \ln|T - 30| = kt - \overline{c}, \\ T(t) &= ce^{kt} + 30, \end{aligned}$$

gdje je $c = +e^{\overline{c}}$ (jer je $T > 0$). Iz početnog uvjeta $T(0) = 100$ odredit ćemo vrijednost nepoznatog parametra c:

$$T(0) = ce^0 + 30 = 100, \quad c = 70.$$

Dakle,

$$T(t) = 70e^{kt} + 30.$$

Konstantu k odredit ćemo iz poznatog podatka da je $T(3) = 70$:

$$T(3) = 70e^{k\cdot 3} + 30 = 70, \quad k = \frac{1}{3}\ln\frac{70-30}{70} = -0.1865.$$

Dakle,

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30.$$

Odavde lako slijedi odgovor na naše pitanje:

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30 = 31,$$
$$-0.1865t = \ln(1/70), \quad t = 22.78.$$

Temperatura će se smanjiti na 31° C za nešto manje od 23 minute. □

Primjer 2.9. Padobranac otvara svoj padobran u trenutku $t = 0$, kada je dosegao brzinu v_0. Njegovu masu, zajedno s opremom, označimo s m. Otpor kojim se zrak opire njegovom padu proporcionalan je kvadratu brzine, $F_{otp} = kv^2$ (konstanta k ovisi o veličini i obliku padobrana). Kako se mijenja brzina padobranca ovisno o vremenu proteklom nakon otvaranja padobrana?

Rješenje: Prema drugom Newtonovom zakonu

$$F = ma = m\frac{dv}{dt},$$

No, ukupna sila F koja djeluje na padobranca jednaka je razlici sile težine mg i njoj suprotno usmjerene sile otpora $F_{otp} = kv^2$. Dakle,

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt},$$

odnosno, nakon dijeljenja s m i uz pokratu $b^2 = mg/k$,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v^2 - b^2).$$

Ova separabilna diferencijalna jednadžba matematički je model našega problema. Riješimo je.

$$\frac{dv}{v^2 - b^2} = -\frac{k}{m}\,dt,$$
$$\int \frac{dv}{v^2 - b^2} = -\frac{k}{m}t + \overline{c}.$$

Iz poznatog nam rastava na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{v^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{v-b} - \frac{1}{v+b}\right)$$

lako nalazimo

$$\int \frac{dv}{v^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{v-b}{v+b} \right| = -\frac{k}{m} t + \overline{c}.$$

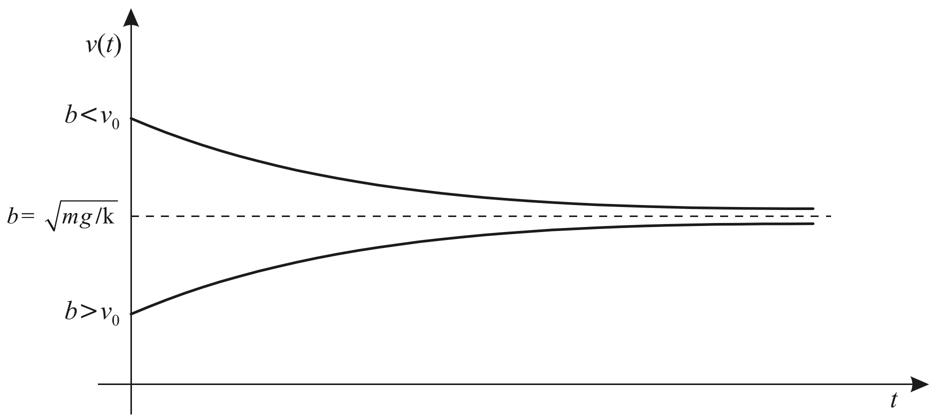
Uz pokratu $p = 2kb/m$ slijedi

$$\frac{v-b}{v+b} = ce^{-pt},$$

gdje je $c = +e^{2b\overline{c}}$ ili $c = -e^{2b\overline{c}}$ ovisno o tome je li gornji razlomak pozitivan ili negativan. Uvrštavanjem početnog uvjeta $v(0) = v_0$ u gornju jednadžbu, nalazimo da je $c = (v_0 - b)/(v_0 + b)$. Riješimo li gornju jednadžbu po v, naći ćemo

$$v(t) = b\frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}},$$

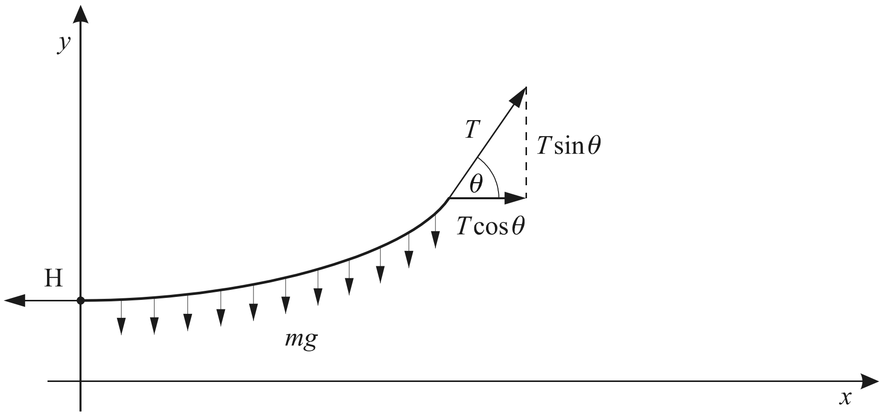
gdje je $b = \sqrt{mg/k}$, $p = 2\sqrt{kg/m}$ i $c = (v_0 - \sqrt{mg/k})/(v_0 + \sqrt{mg/k})$. Primijetimo da je $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = b = \sqrt{mg/k}$. To znači da se brzina padobranca nakon otvaranja padobrana smanjuje, težeći prema graničnoj vrijednosti $\sqrt{mg/k}$ koja ne ovisi (!) o brzini v_0 pri kojoj je otvoren padobran. Dva tipična grafa brzine $v(t)$, za $v_0 > \sqrt{mg/k}$ i $v_0 < \sqrt{mg/k}$, prikazana su na sljedećoj slici



□

Primjer 2.10. Odredimo ravnotežni oblik koji u polju sile teže poprima na dva kraja obješeni lanac specifične duljinske mase m (za koji pretpostavljamo da je idealno savitljiv). Krivulju toga oblika zovemo lančanicom.

Rješenje: Lanac očito leži u vertikalnoj ravnini i osno je simetričan u odnosu na vertikalu koja prolazi njegovom najnižom točkom. Promotrimo desnu polovicu lančanice:



Sila napetosti lanca T mora izbalansirati horizontalnu silu napetosti H i vertikalnu težinu lanca mgs, gdje je s duljina lanca od najniže točke, u kojoj djeluje H, do točke u kojoj djeluje T. Dakle,

$$T\cos\vartheta = H,$$
$$T\sin\vartheta = mgs,$$

odakle dijeljenjem dobivamo

$$\frac{T\sin\vartheta}{T\cos\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{mg}{H}s.$$

S druge strane, $tg\vartheta$ nagib je lančanice $y = y(x)$, tj. $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{dy}{dx}$. Slijedi da lančanica zadovoljava jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{H}s.$$

Budući da je

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

slijedi da lančanica $y = y(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{mg}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

To je diferencijalna jednadžba drugoga reda za y, ali prvoga reda (i to separabilna) za $u = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{mg}{H}\sqrt{1+u^2},$$
$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{mg}{H}dx,$$

čije je rješenje

$$\operatorname{Ar}\operatorname{sh} u = \frac{mg}{H}x + c.$$

Lančanica je horizontalna za $x = 0$, tj. $\frac{dy}{dx}(0) = u(0) = 0$, što znači da je $c = 0$. Dakle,

$$\operatorname{Ar\,sh} u = \frac{mg}{H}x, \quad u = \operatorname{sh}\frac{mg}{H}x,$$
$$u = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\frac{mg}{H}x, \quad y = \frac{H}{mg}ch\frac{mg}{H}x.$$

Lančanica je graf dobro nam poznatog kosinusa hiperbolnog. □

Neke diferencijalne jednadžbe, iako nisu separabilne, mogu to postati primjenom jednostavnih supstitucija. Takve su sve jednadžbe oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdje je f proizvoljna funkcija od y/x, npr. $(y/x)^2$, $\sin(y/x)$, $e^{y/x}$, itd. Uvedemo li supstituciju

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{tj.} \quad y = xu,$$

slijedi da je

$$y' = u + xu',$$

pa naša polazna jednadžba prelazi u separabilnu jednadžbu

$$u + xu' = f(u),$$
$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Nju rješavamo na poznati način, a kada nađemo funkciju u, uvrstimo je u jednadžbu naše supstitucije, $y = xu$, i tako nađemo traženu funkciju y. Evo jednog konkretnog primjera.

Primjer 2.11. Riješimo jednadžbu $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$.

Rješenje: Dijeljenjem s x^2 dobijemo

$$2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Uz supstituciju $y = xu$, $y' = u + xu'$ jednadžba prelazi u separabilnu jednadžbu

$$2u(u + xu') - u^2 + 1 = 0.$$

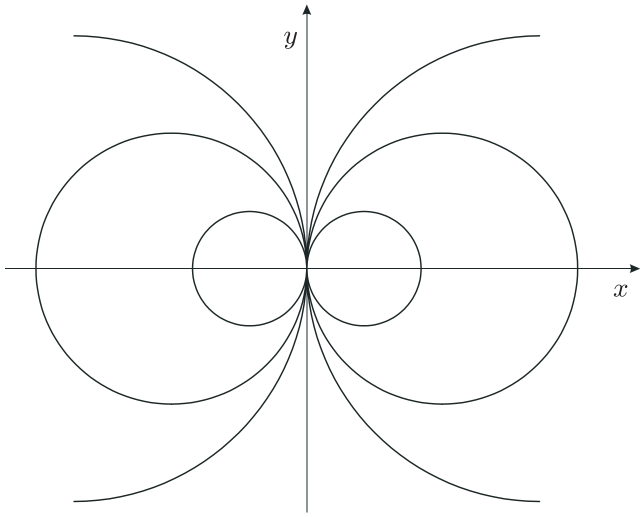
Riješimo je za u:

$$2xu\frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0, \qquad \frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x},$$
$$\ln(1+u^2) = -\ln x + \overline{c}, \qquad \ln(1+u^2) = \ln\frac{c}{x},$$
$$1 + u^2 = \frac{c}{x},$$

gdje je $c = e^{\overline{c}}$. Uvrštavanjem $u = \dfrac{y}{x}$ dolazimo do (implicitno zadanog) općeg rješenja polazne jednadžbe:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x}, \quad x^2 + y^2 = cx,$$
$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Opće rješenje predstavlja familiju kružnica kojima je središte na osi x, a sve prolaze ishodištem.



□

Oblik diferencijalne jednadžbe katkada sugerira neku drugu jednostavnu supstituciju, što ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 2.12. Riješimo jednadžbu

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

Rješenje: Supstituiramo li $x - 2y = v$, slijedi $y' = \dfrac{1}{2}(1 - v')$, što dovodi do separabilne jednadžbe koju lako rješavamo:

$$(2v + 5)\frac{1}{2}(1 - v') + v + 3 = 0,$$
$$4v + 11 = (2v + 5)v',$$
$$\frac{2v + 5}{4v + 11}\, dv = dx, \quad \frac{4v + 10}{4v + 11}\, dv = 2\, dx,$$
$$\left(1 - \frac{1}{4v + 11}\right) dv = 2\, dx,$$
$$v - \frac{1}{4} \ln |4v + 11| = 2x + \overline{c}.$$

Uvrštavanjem $v = x - 2y$ nalazimo opće (implicitno) rješenje polazne jednadžbe,

$$4x + 8y + \ln |4x - 8y + 11| = c.$$

□

Separabilne diferencijalne jednadžbe uspijevamo rješiti običnom integracijom. Rješavanje nekih drugih tipova diferencijalnih jednadžbi može se svesti na običnu integraciju upotrebom odgovarajućih transformacija. Sada ćemo se pozabaviti takvim tipom jednadžbi.

Diferencijalnu jednadžbu zovemo linearnom ako predstavlja linearnu vezu nepoznate funkcije y i njezinih derivacija, s koeficijentima koji su zadane funkcije od x. Dakle, linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda ima oblik

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.3}$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ zadane funkcije.

Pomnožimo jednadžbu (2.3) zasad još neodređenom funkcijom $z = z(x)$:

$$y'z + p(x)yz = q(x)z.$$

Lijeva strana dobivene jednadžbe bit će integrabilna ako je

$$y'z + yp(x)z = \frac{d}{dx}(yz) = y'z + yz',$$

tj. ako je $p(x)z = z'$. No ta je jednadžba separabilna, pa lako nalazimo jedan takav integrirajući faktor z:

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dx} = p(x)z, \quad \frac{dz}{z} = p(x)dx, \\ \ln|z| = \int p(x)dx, \quad z = e^{P(x)},\end{gathered}$$

gdje je $P(x) = \int p(x)dx$. Uvrstimo li integrirajući faktor $z = e^{P(x)}$ u početnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned}y'e^{P(x)} + yp(x)e^{P(x)} &= q(x)e^{P(x)} \\ \frac{d}{dx}\left(ye^{P(x)}\right) &= q(x)e^{P(x)}, \\ ye^{P(x)} &= c + \int q(x)e^{P(x)}dx, \\ y &= e^{-P(x)}\left(c + \int q(x)e^{P(x)}dx\right),\end{aligned}$$

gdje je c proizvoljna konstanta integracije.

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Linearnu jednadžbu oblika

$$y' + p(x)y = q(x)$$

rješavamo na sljedeći način:

1. Izračunamo integrirajući faktor z

$$z = e^{P(x)}, \quad P(x) = \int p(x)dx.$$

2. Pomnožimo jednadžbu s tim faktorom i zatim integriramo, koristeći se činjenicom da je integral lijeve strane **uvijek** $ye^{P(x)}$.
   Dobiveno je opće rješenje

$$y = e^{-P(x)} \left(c + \int q(x)e^{P(x)}dx \right).$$

3. Partikularno rješenje, koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, nalazimo uvrštavanjem toga uvjeta u opće rješenje.

Primjer 2.13. Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + xy = x,$$

uz početni uvjet $y(0) = 3$.

Rješenje:

1. Nađimo integrirajući faktor z:

$$P(x) = \int p(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2},$$
$$z = e^{x^2/2.}$$

2. Pomnožimo jednadžbu s tim faktorom:

$$y'e^{x^2/2} + yxe^{x^2/2} = xe^{x^2/2},$$
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2/2}\right) = xe^{x^2/2},$$

pa zatim integriramo

$$ye^{x^2/2} = \int xe^{x^2/2}dx = e^{x^2/2} + c.$$

Slijedi da je opće rješenje naše jednadžbe

$$y = 1 + ce^{-x^2/2}.$$

3. Iz početnog uvjeta, $y(0) = 3$, uvrštavanjem slijedi

$$y(0) = 1 + c = 3, \quad c = 2,$$

pa je traženo partikularno rješenje

$$y = 1 + 2e^{-x^2/2}.$$

□

Neke diferencijalne jednadžbe, koje smo riješili drugim metodama, linearne su, pa ih sada možemo riješiti kao takve. Na primjer, jednadžba RL-strujnoga kruga s izmjeničnim naponom (primjer A iz prethodnog poglavlja)

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t,$$

linearna je. Napišemo li je u obliku

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L}J = \frac{U_0}{L}\cos \omega t,$$

vidimo da je u tom slučaju $p(t) = \frac{R}{L}$, tj. $P(t) = \frac{R}{L}t$ i $q(t) = \frac{U_0}{L}\cos \omega t$, pa je njezino opće rješenje

$$J = e^{-\frac{R}{L}t}\left(c + \frac{U_0}{L}\int \cos \omega t e^{\frac{R}{L}t}dt\right).$$

Dvostrukom parcijalnom integracijom možemo izračunati

$$\int \cos \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{Le^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2\omega^2}(R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t),$$

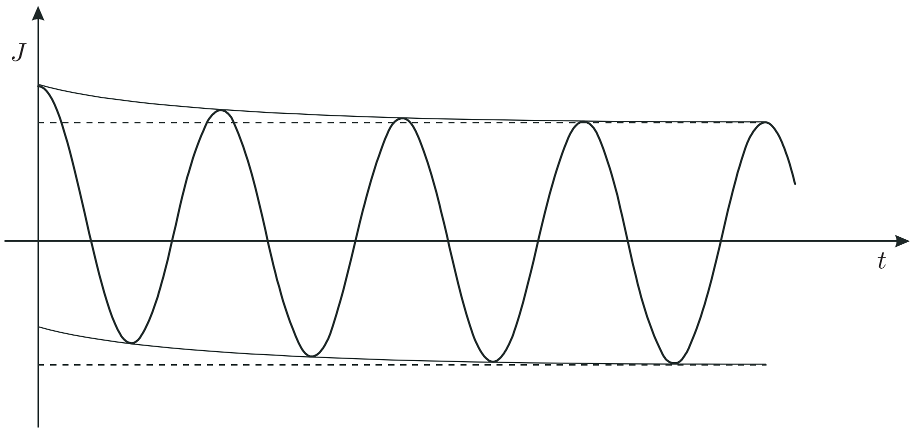
odakle slijedi

$$J = \frac{U_0}{R^2 + L^2\omega^2}(R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t) + ce^{-\frac{R}{L}t},$$

odnosno, uz $\vartheta = \operatorname{arctg} L\omega/R$ (prema pravilu za superponiranja oscilacije iste frekvencije),

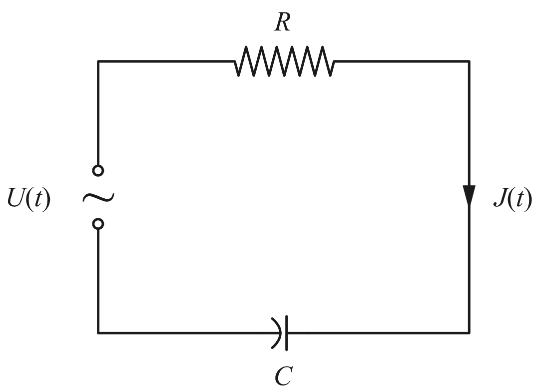
$$J = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \vartheta) + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Vrijednost konstante c određena je jakošću struje J u trenutku $t = 0$. Primijetimo da J sadrži oscilatorni, stacionarni dio, čija je frekvencija ω jednaka frekvenciji izvora kojim se napaja strujni krug (usp. primjer u prethodnom poglavlju) i prelazni, nestacionarni dio $ce^{-\frac{R}{L}t}$ koji s vremenom nestaje.



Ako je $c = 0$, dobivamo partikularno stacionarno rješenje, koje smo našli u prethodnom odjeljku, prijelazom u kompleksno područje. Oscilacija struje i napona bit će u fazi ako je $\vartheta = \operatorname{arctg} L\omega/R = 0$, tj. ako je $L = 0$.

Linearna diferencijalna jednadžba modelira i RC-strujni krug, s otpornikom otpora R i kondenzatorom kapaciteta C.



Već smo spomenuli da je pad napona duž otpornika proporcionalan trenutnoj struji J (Ohmov zakon)

$$U_R = RJ,$$

a eksperimentalno se također pokazuje da je pad napona na kondenzatoru proporcionalan trenutnom naboju Q kondenzatora

$$U_C = \frac{1}{C}Q,$$

gdje je C kapacitet kondenzatora. Budući da je $J(t) = \dfrac{dQ}{dt}$, to možemo zapisati i u obliku

$$U_C = \frac{1}{C}\int J(t)dt,$$

pa iz drugog Kirchhoffovog zakona (o naponima) slijedi

$$U = RJ + \frac{1}{C}\int J(t)dt.$$

Nakon deriviranja lijeve i desne strane dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu RC - kruga:

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= R\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}J,\\ \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{RC}J &= \frac{1}{R}\frac{dU}{dt}.\end{aligned}$$

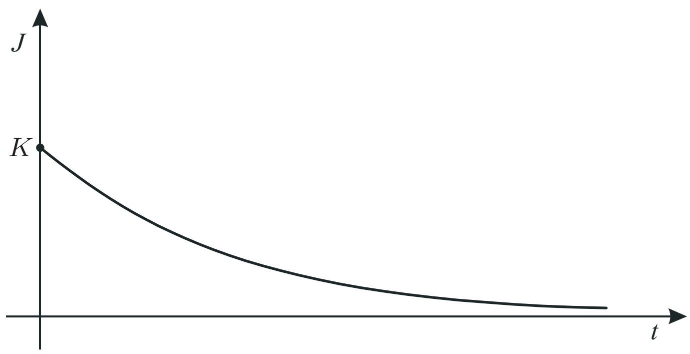
u kojoj je $p(t) = 1/RC$, tj. $P(t) = t/RC$ i $q(t) = (1/R)dU/dt$.

Njezino opće rješenje je

$$J(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left(K + \frac{1}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\frac{dU}{dt}dt\right).$$

Konstantu integracije označili smo s K da je razlikujemo od kapaciteta C. Ako je strujni krug priključen na izvor konstantnog napona U, onda je $\dfrac{dU}{dt} = 0$, pa je jakost struje u tom slučaju

$$J(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$



Ako je strujni krug priključen na izvor izmjeničnog napona $U(t) = U_0 \sin \omega t$, onda je $\dfrac{dU}{dt} = \omega U_0 \cos \omega t$, pa je jakost struje u tom slučaju

$$\begin{aligned} J(t) &= Ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega U_0 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}(\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t) = \\ &= Ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega U_0 C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \vartheta), \end{aligned}$$

gdje je $\vartheta = \operatorname{arctg} \omega RC$ (prema pravilu za superponiranje oscilacija). Jakost struje J opet se sastoji od stacionarnog dijela frekvencije ω i nestacionarnog dijela $Ke^{-\frac{t}{RC}}$, koji s vremenom nestaje.

RLC - strujni krugovi koji sadrže sve tri komponente, otpornik, induktor i kondenzator, matematički se modeliraju linearnom diferencijalnom jednadžbom drugoga reda. Naime, iz drugog Kirchhoffova zakona (o naponima) slijedi

$$RJ + L\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}\int J(t)dt = U,$$

pa deriviranjem dobivamo linearnu jednadžbu drugog reda

$$L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}J = \frac{dU}{dt}.$$

Takve ćemo jednadžbe rješavati u sljedećem poglavlju.

U primjerima 2.14, 2.15 i 2.16 pozabavit ćemo se s još nekoliko problema čiji je matematički model linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda.

Primjer 2.14. Sila teže, koja djeluje na tijelo mase m što slobodno pada kroz zrak, iznosi mg, gdje je g gravitacijska konstanta. Pretpostavit ćemo da je sila kojom se zrak opire padu proporcionalna ϑ brzini tijela, γv, gdje je γ konstanta proporcionalnosti. Nađimo ovisnost brzine tijela o vremenu t (prije no što tijelo udari u tlo).

Rješenje: Iz drugog Newtonovog zakona slijedi

$$\begin{aligned} ma = m\frac{dv}{dt} &= mg - \gamma v, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v &= g, \end{aligned}$$

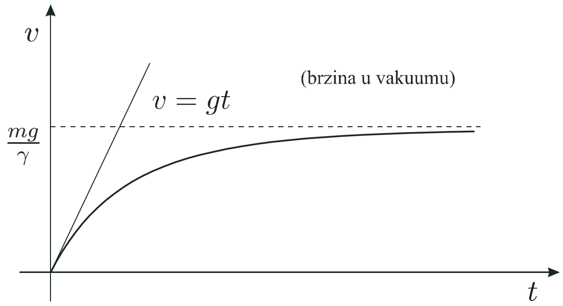
što je linearna jednadžba s $p(t) = \gamma/m$, $P(t) = \gamma t/m$ i $q(t) = g$, pa je njezino rješenje

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\gamma t/m}\left(K + \int g e^{\gamma t/m} dt\right) = \\ &= e^{-\gamma t/m}\left(K + \frac{mg}{\gamma}e^{\gamma t/m}\right). \end{aligned}$$

Ako je $v = 0$ u trenutku ispuštanja $t = 0$, onda je $K = -mg/\gamma$, pa je

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t/m}).$$

Za $t \to \infty$, $e^{-\gamma t/m} \to 0$, što znači da je brzina tijela omeđena graničnom brzinom mg/γ.



Za male t vrijedi $e^{-\gamma t/m} \approx 1 - \gamma t/m$. Tada je $v(t) \approx gt$, što je iznos brzine u vakuumu (dakle, bez otpora zraka). Kako t raste, otpor zraka usporava rast brzine tijela do granične brzine mg/γ. □

Nešto općenitiji od prethodnog problema jest problem kosoga hica u mediju koji se opire gibanju projektila (npr. u zraku).

Primjer 2.15. Nađimo parametarske jednadžbe gibanja projektila u polju sile teže (kroz zrak koji se opire gibanju silom koja je proporcionalna brzini gibanja).

Rješenje: Projektil se giba u vertikalnoj ravnini xy. Pretpostavimo da je iz početnog položaja (0,0) ispaljen brzinom v_0 pod kutom α.

U horizontalnom smjeru x na projektil djeluje samo sila zračnoga otpora, koja je proporcionalna brzini, pa je prema drugom Newtonovom zakonu

$$m\ddot{x} = -K\dot{x}, \quad \ddot{x} = -k\dot{x}, \quad (k = K/m).$$

U vertikalnom smjeru y na projektil djeluje sila teže i sila otpora, pa je

$$m\ddot{y} = -mg - K\dot{y}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y} \quad (k = K/m).$$

(minus mg, jer je y os usmjerena **gore**, u smjeru suprotnom sili teže).

Prva, x-jednadžba, linearna je za $v_x = \dot{x}$ ($\dot{v}_x = -kv_x$) i njezino nam je rješenje dobro poznato:

$$\dot{x} = v_x = Ce^{-kt}.$$

Iz početnog uvjeta $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ slijedi $C = v_0 \cos\alpha$, pa je

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos\alpha e^{-kt}.$$

Integracijom nalazimo

$$x = -\frac{v_0 \cos\alpha}{k} e^{-kt} + D,$$

a iz početnog uvjeta $x(0) = 0$ slijedi $D = v_0 \cos\alpha / k$, tj.

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \tag{i}$$

Druga, y-jednadžba, linearna je za $\dot{y} = v_y$, $\dot{v}_y + kv_y = -g$ i njezino je rješenje

$$\dot{y} = v_y = \frac{1}{k}(Ce^{-kt} - g).$$

Iz početnog uvjeta $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$ slijedi $C = kv_0 \sin\alpha + g$ pa je

$$\dot{y} = v_y = v_0 \sin\alpha e^{-kt} + \frac{g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Integracijom nalazimo

$$y = -\frac{v_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + D.$$

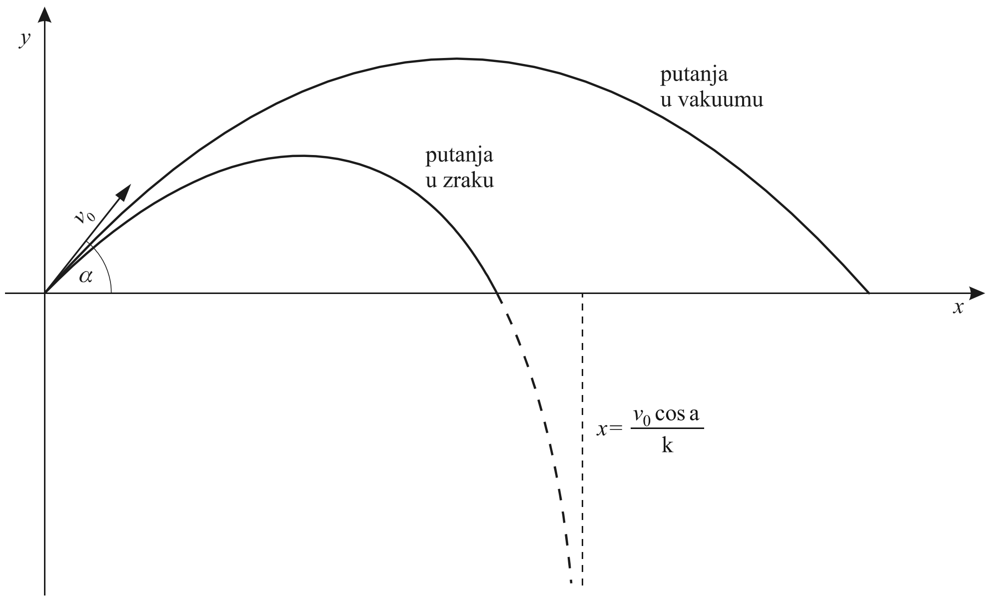
Iz početnog uvjeta $y(0) = 0$ slijedi

$$D = (v_0 \sin\alpha / k) + (g/k^2),$$

tj.

$$y = -\frac{gt}{k} + \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}). \tag{ii}$$

Graf putanje projektila, koji je određen parametarskim jednadžbama putanje (i) i (ii), dan je na sljedećoj slici. Radi usporedbe dan je i graf parabolične putanje u vakuumu (usp. primjer B u prethodnom poglavlju).



U prvom dijelu putanja u zraku položenija je od putanje u vakuumu, dok je u drugom dijelu strmija od one u vakuumu. Projektil udara u zemlju pod oštrijim kutom i s manjom brzinom od one pod kojom je ispaljen. Variranjem kuta ispaljivanja lako bismo ustanovili da se uz zadanu početnu brzinu maksimalni doseg projektila postiže uz kut ispaljivanja manji od 45° (što je kut maksimalnog dosega u vakuumu). ☐

Primjer 2.16. Bure početno sadrži 100 l vode u kojoj je otopljeno 50 dag soli. U njega brzinom od 10 l/min utječe slana voda s koncentracijom 2 dag/l, ali voda iz njega i istječe jednakom brzinom. (Miješanjem se održava jednolika koncentracija soli u buretu.) Nađimo kako se koncentracija soli u buretu mijenja s vremenom.

Rješenje: Trenutnu količinu soli u buretu označimo s $y(t)$. Brzina kojom se ona mijenja jednaka je brzini ulaza soli, $10 \cdot 2 = 20$ dag/min, umanjenoj za brzinu izlaza soli, $(10/100)y = 0.1y$ dag/min (y je ukupna količina soli u buretu, a 10/100 dio je slane vode koji izlazi iz bureta u jednoj minuti). Dakle,

$$y' = 20 - 0.1y,$$

uz početni uvjet

$$y(0) = 50.$$

Opće rješenje linearne jednadžbe koja modelira naš problem glasi:

$$\begin{aligned} y &= e^{-0.1t}\left(C + \int e^{0.1t} 20 dt\right) = \\ &= e^{-0.1t}\left(C + \frac{20}{0.1}e^{0.1t}\right) = \\ &= Ce^{-0.1t} + 200. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta nalazimo

$$y(0) = C + 200 = 50, \quad C = -150,$$

pa je trenutna količina soli u buretu

$$y(t) = 200 - 150e^{-0.1t} \text{ dag} .$$

Koncentraciju $\gamma(t)$ dobijemo dijeljenjem sa 100 (količina je vode u buretu 100 l):

$$\gamma(t) = 2 - 1.5e^{-0.1t} \text{ dag/l}.$$

Vidimo da koncentracija soli u buretu monotono raste prema koncentraciji soli u vodi koja ulazi u bure, što i očekujemo. ☐

Neke nelinearne diferencijalne jednadžbe mogu se svesti na linearne. Najpoznatija je među njima Bernoullijeva jednadžba

$$y' = p(x)y + q(x)y^a, \tag{2.4}$$

gdje je eksponent a bilo koji realan broj. Ako je $a = 0$ ili $a = 1$, jednadžba je linearna. Ako nije, uvodimo supstituciju

$$u = y^{1-a}.$$

Deriviranjem i uvrštavanjem y' iz (2.4) dolazimo do linearne jednadžbe za u:

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' = (1-a)y^{-a}(py+qy^a) = \\ &= (1-a)(py^{1-a}+q) = (1-a)(pu+q), \\ u' &= (1-a)pu + (1-a)q. \end{aligned}$$

Ovu jednadžbu riješimo na uobičajeni način, pa kada smo našli u, lako nalazimo i y iz $u = y^{1-a}$.

BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA

Bernoullijeva jednadžba, oblika

$$y' = p(x)y + q(x)y^a,$$

svodi se supstitucijom $u = y^{1-a}$ na linearnu jednadžbu za u.

Primjer 2.17. Riješimo Bernoullijevu jednadžbu

$$y' = y + y^2.$$

Rješenje: Supstitucija $u = y^{1-2} = y^{-1}$ daje

$$\begin{aligned} u' &= -y^{-2}y' = -y^{-2}(y+y^2) = -y^{-1} - 1 = -u - 1, \\ u' &= -u - 1 \end{aligned}$$

Rješenje je ove linearne jednadžbe

$$u = e^{-x}\left(C - \int e^x\,dx\right) = Ce^{-x} - 1.$$

Iz $u = y^{-1}$ slijedi $y = u^{-1} = 1/u$, pa je traženo opće rješenje zadane Bernoullijeve jednadžbe

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{-x}}.$$

□

Primjer 2.18. Mnoge populacije rastu po tzv. logističkom zakonu; brzina rasta populacije proporcionalna je veličini same populacije (npr. zbog razmnožavanja), dok je brzina njezinoga opadanja proporcionalna kvadratu njezine veličine (npr. zbog smrtnosti uvjetovane ograničenim količinama hrane). Dakle,

$$y' = Ay - By^2,$$

što je Bernoullijeva jednadžba. Izračunajmo kakav je rast populacije po logističkom zakonu.

Rješenje: Uvedemo li supstituciju $u = y^{1-2} = y^{-1}$, Bernoullijeva jednadžba za y svodi se na linearnu za u:

$$\begin{aligned} u' &= -y^{-2}y' = -y^{-2}(Ay - By^2) = B - Ay^{-1}, \\ u' &= -Au + B. \end{aligned}$$

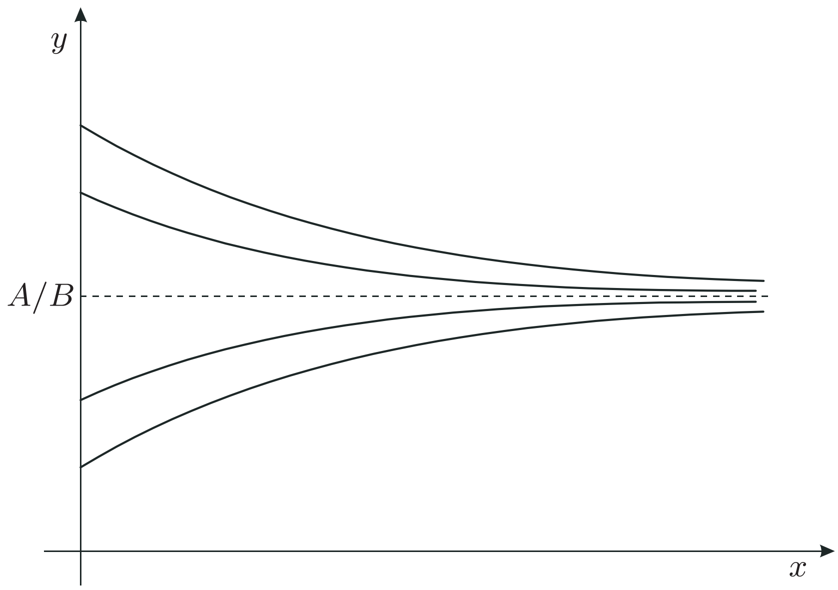
Njezino je opće rješenje

$$u = e^{-Ax}\left(C + \int Be^{Ax}dx\right) = e^{-Ax}\left(C + \frac{B}{A}e^{Ax}\right) = \frac{B}{A} + Ce^{-Ax},$$

pa je opće rješenje zadane Bernoullijeve jednadžbe

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{(B/A) + Ce^{-Ax}}.$$

To nam rješenje pokazuje da početno male populacije $(y(0) < A/B)$ monotono rastu prema A/B, dok početno velike populacije $(y(0) > A/B)$ monotono padaju prema istom ravnotežnom stanju.



$\square$

Kazalo

serif normal

ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ

sans serif

ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ

sans serif bold

ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ

ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ

teletype

`ČčĆćĐđŠšŽž Đ`

serif md

ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ ČčĆćĐđŠšŽž Đ