UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Nakladnik: TIVA Tiskara Varaždin

Sunakladnik: Fakultet organizacije i informatike Varaždin

Za nakladnika: Zvonimir Kušter

Za sunakladnika: Prof.dr.sc. Željko Hutinski

Recenzenti: Prof.dr.sc. Ivan Lončar
Doc.dr.sc. Željka Milin-Šipuš
Prof.dr.sc. Nikola Sarapa

Lektura: Renata Horvatek, prof.

Prijelom (LaTeX): Marcel Maretić

Design i priprema naslovne stranice: Veljko Popović, ak. slik.

Korektura: Autori

Naklada: 1500 primjeraka

Ova knjiga rezultat je istraživanja na projektu Tempus "*Aspects of Organization and Information Systems: Curriculum Development* (CD_JEP-16086-2001)", prihvaćenog i financiranog od Europske komisije.

Rješenjem Povjerenstva za znanstveno-nastavnu literaturu Sveučilišta u Zagrebu, br. 02-1320/3-2004 od 13.07.2004. ova je knjiga prihvaćena kao sveučilišni udžbenik.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

ISBN XXX-XXXX-XX-X

Education and Culture
Tempus

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak
Prof.dr.sc. Tihomir Hunjak

Matematika za informatičare

Sadržaj

Predgovor

Ovaj udžbenik prvenstveno je namijenjen studentima kojima matematika nije primarno područje izučavanja, već im služi kao alat za opis i razumijevanje problema iz drugih znanstvenih područja. Također se očekuje da savladavanje izloženog gradiva doprinese njihovoj sposobnosti logičkog i kreativnog mišljenja te sustavnog pristupa u rješavanju problema.
U skladu s tim ciljevima izabrane su teme koje se prvenstveno odnose na studij informatike i ostalih društvenih znanosti.
Da bi se studentima omogućilo lakše čitanje i usvajanje znanja, svaka tema popraćena je riješenim primjerima i dodatnim objašnjenjima.
Svako poglavlje započinje kraćim tekstom u kojem bi studentima trebali pronaći motivaciju i opravdanje za izučavanje određenih matematičkih tema.
Na kraju svakog poglavlja nalazi se **dodatak**, koji se najčešće sastoji od tri dijela. U prvom dijelu nalaze se **naprednije teme** ili dokazi tvrdnji povezani s tim poglavljem, koji su stavljeni u dodatak jer nisu nužni za razumijevanje iznesenog gradiva, pa njihovo izdvajanje omogućava jednostavnije iznošenje i razumijevanje gradiva. S druge strane, zbog matematičke korektnosti treba ih staviti u udžbenik.
Svakodnevno iskustvo pokazalo je da je u gotovo svakom poslu koji zahtjeva visoku stručnu spremu, važno znati pravilno govoriti i pisati, uvažavajući logičku argumentaciju. To zahtjeva poznavanje metoda istraživanja podataka, prikaza podataka u matematički ispravnom obliku, te kreativnost u njihovoj upotrebi i interpretaciji. Zbog toga u udžbeniku posebnu važnost posvećujemo rješavanju problema i matematičkoj pismenosti. Stoga na kraju svakog poglavlja dajemo nekoliko prijedloga za **pismene radove iz matematike** u obliku eseja ili problemskih tema. U prvom dijelu udžbenika uglavnom se predlažu jednostavnije teme, narativnog karaktera, koje dopunjuju ili proširuju izloženo gradivo. Time se žele postići sljedeći ciljevi: da student nauči pronalaziti primjerenu literaturu, da se zna njome služiti, da razumije (matematički) tekst, da zna razlučiti bitno od nebitnog, te da rad formulira gramatički, stilski i matematički ispravno na dvije A4 stranice teksta (maksimalno 6000 karaktera brojeći i razmake). Nasuprot tome, u drugom dijelu udžbenika idemo korak dalje pa pretpostavljamo da je student savladao nabrojene ciljeve i da je spreman rješavati problemske zadaće.

Student radi na rješavanju specifičnog problema te njegovoj obradi i prikazu u obliku kraćeg eseja, kao i u prvom dijelu knjige. Ovdje je naglasak na kreativnom radu i istraživanju primjerenom određenom stupnju stečenog znanja.
U dodatku se nalaze i **zadaci za ponavljanje** gradiva iznesenog u poglavlju. Rješenja zadataka nalaze se na kraju knjige.

Zahvaljujemo recenzentima što su nam ukazali na nedostatke u knjizi i sugerirali nam poboljšanja.
Posebno zahvaljujemo našim suradnicima Damiru Horvatu i mr. Zlatku Erjavcu koji su pažljivo pročitali tekst i pomagali u njegovom uređivanju.
Također zahvaljujemo i Marcelu Maretiću koji je uređivao tekst i načinio veći dio slika u knjizi.

U Varaždinu, lipnja 2004. Autori

I

Diskretna matematika

1

Matematički modeli i struktura matematike

"Inteligencija ne može biti prisutna bez razumijevanja. Računalo nema svijest o tome što radi"

Roger Penrose[1]

1.1 Matematički modeli

1.1.1 Modeli

Osnova za razumijevanje svijeta je promatranje. Promatranjem prikupljamo informacije. Na temelju pojedinačnih informacija radimo generalizacije, najprije jednostavne, a onda dolazimo do razumijevanja na temelju principa. Princip je poopćenje ili apstraktna tvrdnja.
Jedan od načina da se odgovori na pitanja koja se postavljaju u različitim znanstvenim područjima ili da se riješi neki problem, je konstrukcija odgovarajućeg modela. Zbog toga se znanstvena metoda u proučavanju različitih fenomena u suštini svodi na kreiranje, verifikaciju i stalno modificiranje različitih modela s ciljem da se pojednostavni i objasni kompleksnost onoga što se promatra i na temelju toga kao konačan cilj predvide i kontroliraju različiti procesi.

Pojam model koristi se u različitim kontekstima tako da ponekad i gubi svoj izvorni smisao (npr. kada se govori o fotomodelu, ili se govori o modelu automobila i sl.). Suština pojma model je ta da on predstavlja zamjenu za neki realni objekt ili pojavu. Možemo reći, model je analogija s nekim objektom ili drugim interesantnim modelom, a koristi se za objašnjenje nekog procesa ili predviđanje događaja.

[1]Roger Penrose (r. 1931.) - poznati engleski matematičar sa značajnim radovima u kozmologiji, algebri i geometriji

1.1.2 Svrha modela

Modeli imaju različitu namjenu; s lutkom koja je model ljudskog bića djeca se igraju (naravno, psiholog će reći da ona uče), s većom lutkom može se uvježbavati davanje umjetnog disanja, dječak će se s malim brodićem igrati, a znanstvenik u institutu za brodogradnju će na temelju ponašanja modela u bazenu pokušati predvidjeti ponašanje broda odgovarajućih karakteristika u realnim uvjetima. Spomenuti modeli su materijalni modeli i najčešće predstavljaju umanjene replike stvarnih objekata. Međutim, modeli ne moraju imati fizičku sličnost s objektom koji je predmet pažnje. U kemiji smo upoznali modele atoma i molekula koji su bili svedeni na raznobojne kuglice povezane štapićima. Za objašnjenje jednostavnijih fizikalnih zakona također smo koristili materijalne modele (npr. gibanje po kosini, njihala i sl.) da bi zatim konstruirali apstraktni matematički model za objašnjenje promatrane pojave. Spomenuti modeli imaju svoju ulogu u prezentaciji nekog efekta. Međutim, ukoliko se želi neki fenomen objasniti do te mjere da se može točno predvidjeti buduće stanje sustava s kojim je on povezan, moramo se poslužiti složenijim modelima. Na primjer, kretanje planeta u Sunčevom sustavu možemo prikazati skicom ili čak konstruirati fizički model pomoću kojeg se mogu objašnjavati odnosi između Sunca i planeta, ali da bi se predvidjela pozicija pojedinog planeta u određenom dijelu godine, potrebno je koristiti odgovarajući matematički model.

1.1.3 Matematički modeli

Matematički model sadrži sljedeće bitne komponente; **pojavu ili proces** iz realnog svijeta koji se želi modelirati, **apstraktnu matematičku strukturu** i **korespondenciju** između elemenata prve i druge komponente. Realnost opisujemo objektima, parametrima, vezama i događajima. Tim pojmovima pridružuju se matematički pojmovi iz apstraktne matematičke strukture, varijable, relacije među matematičkim pojmovima i operacije s njima. Matematički modeli temelje se na različitim pretpostavkama o realnom sustavu ili fenomenu koji se proučava, a one se reprezentiraju jednadžbama, nejednadžbama, funkcijama i drugim matematičkim pojmovima u kojima se pojavljuju različite varijable i parametri. Najjednostavniji matematički modeli su funkcije koje reprezentiraju povezanost dviju ili više varijabli.

Kod modeliranja se postavlja pitanje odnosa između složenosti modela i njegove upotrebljivosti. Složenost modela karakterizirana je prvenstveno brojem varijabli koje se nastoje povezati i matematičkim svojstvima veza između njih. Treba težiti što jednostavnijem modelu, ali svako pojednostavljivanje modela povezano je s povećanjem razine apstrakcije i time se smanjuje mogućnost primjene rezultata modela u objašnjavanju fenomena koji se modelira. S druge strane, nastojanje da se koristimo složenim modelom povezano je s problemima prikupljanja dovoljne količine podataka, problemima rješivosti modela i mogućnošću da se kvalitetno interpretiraju i prezentiraju rezultati takve analize.

Matematički modeli općenito sadrže tri različite vrste kvantitativnih veličina; izlazne varijable (output), ulazne varijable (input) i parametre (konstante). Vrijednosti izlaznih varijabli čine rješenje modela. Izbor ulaznih varijabli i parametara u domeni je tvorca modela i taj izbor u najvećoj mjeri određuje kvalitetu i složenost modela.

Opća upotrebljivost matematičkog modela može se objasniti preko svojstava koja se i inače povezuju s matematičkim karakterizacijama. Ta svojstva su:

formalizacija - matematičke relacije omogućuju jasno razumijevanje odnosa između dijelova promatranog sustava i njegovo funkcioniranje,

preciznost - poznato je da matematika daje precizan rezultat, odnosno točnije rečeno, zna se u kojoj mjeri je rezultat primjene određenog modela precizan. Za situacije kada se modeliraju pojave s nesigurnošću, postoje statističke metode koje u toj nesigurnosti identificiraju skrivene veze i omogućuju njezino mjerenje,

fleksibilnost - matematički modeli se temelje na pretpostavkama i sadrže parametre koji omogućuju prilagođavanje modela promjenama u realnom sustavu,

mogućnost provjere i predvidljivost - matematički modeli su jasni i određeni u tolikoj mjeri da se mogu provjeriti i omogućavaju da se predvide rezultati njihove primjene,

ekonomičnost - matematika je koncizna, ona nikada ne koristi više alata nego je to potrebno.

Bitna prednost matematičkih modela u odnosu na materijalne je ta da se na simboličkom modelu lakše provode promjene nego na materijalnom. Mijenjanjem parametara u modelu model se transformira i prilagođava opažanjima. Načini li se npr. matematički model brodskog trupa on će sadržavati parametre koji karakteriziraju njegove dimenzije, kroz odnose dimenzija pojedinih djelova modeliraju se specifične karakteristike oblika trupa i takav jedan model u biti predstavlja mnoštvo modela. S takvim modelom daleko je lakše ispitati ponašanje budućeg broda i tražiti najbolji oblik trupa nego graditi mnoštvo materijalnih modela i kupati ih u bazenu za ispitivanje. Osim toga, postoje brojni vrlo općeniti matematički modeli koji se mogu lako adaptirati u različitim realnim situacijama. Na primjer, linearna funkcija predstavlja opći model za mnoge ekonomske pojave, a normalna krivulja se koristi u objašnjavanju mnogih problema u društvenim znanostima. Osim toga, u mnogim matematičkim modelima moguće je izvesti transformacije koje se mogu interpretirati kao promjene u sustavu ili procesu koji se modelira.

Više o modeliranju može se naći u [15].

1.1.4 Svrha matematičkih modela

Mogu se nabrojiti različiti motivi za razvoj modela ali mi ćemo se ograničiti na tri temeljna koji se odnose na matematičke modele.

(i) Prezentiranje informacija u što razumljivijem obliku

Dobri primjeri za ovakve modele su plan grada i zemljopisna karta. Uz malo znanja o simbolima koji se koriste u njima, iz tih prikaza mogu se dobiti bitne informacije za orijentaciju u prostoru. Gledano matematički, zemljovidi su grafovi. Iako se uz malo dodatnog truda iz informacija koje daje zemljovid mogu izvesti brojni zaključci, teško se mogu dobiti eksplicitni odgovori na pitanja poput: "Kojim putem ići od točke A do točke B u vrijeme prometne špice?" ili "Kako u najkraćem vremenu obići određene gradove?". U traženju odgovora na ta i slična pitanja pomaže posebna matematička disciplina, teorija grafova.

(ii) Jednostavnije računanje

Mnogi praktični problemi mogu se riješiti uz primjenu jednostavnijih matematičkih postupaka opće namjene, ali uz cijenu dugotrajnog računanja i manje točnosti. Međutim, razvoj posebnih matematičkih modela omogućuje brže dolaženje do rezultata i kvalitetniju analizu problema. Tako npr. modeli linearnog programiranja omogućuju da se izradi plan proizvodnje s ciljem optimalizacije profita (ili minimalizacije troškova proizvodnje).

(iii) Predviđanje

Treća svrha matematičkih modela je da se pomoću njih predvide buduća stanja sustava koji se modelira ili način odvijanja nekog procesa. Takav je npr. matematički model kojim se nastoji predvidjeti ponašanje broda odgovarajućih karakteristika. Poznat je primjer da je pomoću matematičkog modela otkriven planet Neptun na temelju uočenih odstupanja u očekivanoj orbiti planeta Urana. Vremenske prognoze temelje se na obradi velikog broja podataka pomoću složenih matematičkih modela. Postoji posebna disciplina koja se bavi razvojem različitih prognostičkih modela. Ti modeli daju odgovore na pitanja o očekivanom smjeru poslovnih događaja, a razvijeni su i modeli za prognoziranje kretanja vrijednosti dionica na burzama, modeli za prognoziranje učestalosti nesretnih događaja (za potrebe osiguranja od šteta), i drugi. Kod predviđanja se postavlja pitanje točnosti s kojom se može predvidjeti neki događaj ili pojava. Matematički modeli koji se temelje na fizikalnim zakonima uglavnom omogućuju točno predviđanje (npr. točno se može odrediti vrijeme nastupanja pomrčine nekog nebeskog tijela, putanja lansiranog svemirskog broda i sl.). S druge strane pak, za sada se bez obzira na složenost matematičkog modela, ne može sa sigurnošću predvidjeti buduće stanje ekonomije na temelju mjera ekonomske politike koje se mogu poduzeti. Sličan slučaj je i s vremenskim prognozama.

1.1.5 Matematičko modeliranje

Matematičko modeliranje je proces matematičke reprezentacije nekog fenomena s ciljem njegovog boljeg razumijevanja. Pri tom važnu ulogu igra postupak apstrakcije. Apstrakcija se u suštini svodi na to da se prepoznaju elementi koji nisu toliko bitni za funkcioniranje sustava koji se modelira i da se oni zanemare kod kreiranja modela.
Izgradnja matematičkog modela može se objasniti u nekoliko koraka:

1. Pojednostavljivanje (apstrakcija)- u sustavu ili procesu koji se modelira nastoje se prepoznati bitni elementi, a ostali se zanemaruju.

2. Prikaz (reprezentacija) - elementima sustava ili procesa pridružuju se matematički simboli, a odnosima među elementima pridružuju se (ne)jednadžbe.

3. Transformacije - rješenje matematičkog modela potrebno je oblikovati i interpretirati u obliku koji predstavlja odgovor na pitanje koje nas je i motiviralo na izgradnju modela.

4. Verifikacija - zaključke izvedene u prethodnom koraku potrebno je usporediti s rezultatima opažanja sustava ili procesa koji se modelira. Odstupanja su temelj za eventualnu prilagodbu modela.

1.1.6 Podjela matematičkih modela

Model je deterministički ukoliko se razvija direktno na temelju fizikalnih zakona. Takvi modeli se koriste npr. u slučaju kada se želi odrediti putanja po kojoj raketa treba letjeti na mjesec. Za prognozu vremena potrebno je razvijati modele koji se temelje na empirijskim podacima, a rezultati koje daju takvi modeli sadrže određenu razinu nesigurnosti. Takvi modeli nazivaju se stohastički.
Matematički modeli dijele se i po drugim kriterijima, a osnovne podjele temelje se na matematičkoj strukturi koja se koristi u modeliranju. Tako npr. govorimo o linearnom modelu ako su sve jednadžbe i funkcije koje se javljaju u modelu linearne. Podjela se može temeljiti i na specifičnostima varijabli i parametara u modelu. To je posebno naglašeno u matematičkim modelima procesa koji se odvijaju u vremenu; razlikuju se modeli u kontinuiranom vremenu i modeli s diskretnim vremenom. Oba ova modela imaju svoje prednosti i nedostatke. Rješenja modela s kontinuiranim vremenom daju nam informacije o promatranom

fizikalnom fenomenu u nekom neprekidnom intervalu vremena (kontinuumu) za razliku od modela s diskretnim vremenom koji objašnjavaju ponašanje sustava u određenim vremenima. Prednost prvih modela nad drugima je sa stajališta primjenjivosti rezultata očita; oni omogućavaju da se ponašanje promatranog sustava kontrolira kroz čitavo vrijeme i jasnije pokazuju efekte promjene vrijednosti ulaznih varijabli i parametara. S druge strane pak modeli s diskretnim vremenom imaju tu prednost da je za njihov razvoj potrebno poznavati jednostavnije matematičke discipline i da su pogodniji za računarsku primjenu. Većina modela u računarskim i informacijskim znanostima je upravo ovog drugog tipa.

1.2 Kako se gradi matematička teorija

Matematički pojmovi

Osnovni elementi svake matematičke teorije su **matematički pojmovi**. Oni se dijele na **osnovne** i **izvedene** (složene) pojmove. Osnovni matematički pojmovi najčešće su apstrakcija objekata ili pojmova iz stvarnog svijeta. Dobre primjere za objašnjenje matematičkih pojmova imamo u geometriji. Pojam **pravac** nastao je apstrakcijom predmeta poput ravne niti, brida ravne plohe ili sunčeve zrake. Pojam **ravnina** je vrlo vjerojatno nastao apstrakcijom iz ravnih površina poput pustinje, površine jezera ili mora. Pod osnovne matematičke pojmove svrstavaju se i osnovni odnosi među pojmovima poput: **pripadati**, **sjeći**, **spajati, ležati (u)**, te **između**, **sukladno** i **usporedno**. Među ovim pojmovima mogu se uvesti još detaljnije podjele. Osnovni matematički pojmovi nisu dovoljni da bi se izgradila matematička teorija. Pomoću njih definiraju se složeni pojmovi. Npr. trokut se definira kao dio ravnine omeđen s tri dužine.

Dokazivanje teorema

Na temelju opažanja i iskustva uočavaju se zakonitosti među odnosima koji vladaju između predmeta stvarnog svijeta i zatim se te zakonitosti nastoje oblikovati kao tvrdnje (teoremi, poučci) o odnosima među odgovarajućim matematičkim pojmovima. Tvrdnje koje se izriču moraju imati univerzalnu vrijednost koja se **dokazuje**. Za postupak dokazivanja matematičkih tvrdnji važan je proces **zaključivanja**. Pod zaključivanjem se podrazumjeva takav oblik mišljenja kojim se više tvrdnji dovodi u vezu i izvodi nova tvrdnja. Dokazati neku tvrdnju znači pokazati da je ta tvrdnja logička posljedica nekih tvrdnji za koje se zna da su istinite. Uspije li se to pokazati na takav način da se odabrani skup polaznih tvrdnji transformira u logički ekvivalentne tvrdnje sve dok se ne dobije tvrdnja koja se dokazuje, govori se o **direktnom dokazu**. U matematici se često koristi i **indirektan dokaz** čija logička utemeljenost će biti objašnjena kasnije u poglavlju o

matematičkoj logici. Znanost koja izučava procese zaključivanja zove se **logika**, a osnovni oblici zaključivanja su **analogija**, **indukcija** i **dedukcija**. Svi oblici zaključivanja nisu jednako važni za matematiku.
Analogija je takav način zaključivanja pri kojem se na temelju uočenih zakonitosti u određenoj situaciji izvodi zaključak koji bi trebao vrijediti u nekoj drugoj situaciji. Ovaj način zaključivanja nije pouzdan i može dovesti do potpuno krivih zaključaka. U matematici analogija može pomoći da se na temelju rezultata iz jednog područja matematike pokuša razviti teorija koja bi vrijedila u nekom drugom području, ali činjenica da je nova tvrdnja "slična" nekoj tvrdnji koja vrijedi nema snagu dokaza.
Indukcija je takav oblik zaključivanja pri kojem se zaključak o ispravnosti neke opće tvrdnje izvodi na temelju provjere o ispravnosti te tvrdnje u posebnim slučajevima. U matematici vrijedi poseban oblik indukcije tzv. potpuna indukcija. Vrijednost ovog načina zaključivanja za matematiku je ograničena na dokazivanje nekih tvrdnji koje se odnose na prirodne brojeve. Kasnije ćemo pokazati kako se ova metoda primjenjuje na konkretnim primjerima.

Deduktivna metoda

Od navedenih načina zaključivanja najveću važnost za matematiku ima dedukcija. Dedukcija se definira kao takav način zaključivanja pri kojem se zaključak o odnosima među matematičkim pojmovima u posebnim situacijama izvodi iz općih svojstava tih odnosa. Mogućnost da se u okviru neke teorije primijeni ovaj način zaključivanja indikator je za visoku razinu razvoja te teorije. Primjenu deduktivne metode u razvoju matematičke teorije karakteriziraju slijedeći koraci: (1) nabrajanje osnovnih pojmova, (2) definiranje složenih pojmova, (3) izricanje aksioma, (4) postavljanje teorema, (5) dokazivanje teorema. Prvi i drugi korak smo već komentirali. Koraci (3) i (4) su povezani jer su i aksiomi i teoremi tvrdnje o odnosima među matematičkim pojmovima. Razlika između aksioma i teorema je ta što su aksiomi tvrdnje koje se ne dokazuju, već se smatraju točnima po definiciji ili ukoliko se radi o pojmovima pomoću kojih se modeliraju pojave iz realnog svijeta točnima na temelju iskustva, a teoreme je potrebno dokazivati. Pri izboru aksioma potrebno je poštivati određena načela; načelo nezavisnosti, načelo potpunosti i načelo neproturječnosti. Načelo nezavisnosti traži da niti jedan aksiom ne smije biti izvediv iz preostalih. Načelo potpunosti zahtijeva da bilo koja tvrdnja unutar razmatrane teorije bude dokaziva ili oboriva na temelju aksioma (direktno ili posredno uz pomoć prije dokazanih teorema). Načelo neproturječnosti zahtijeva da se na temelju izabranih aksioma ne može dokazati ispravnost dviju tvrdnji koje su kontradiktorne. Iako ovi zahtjevi izgledaju prirodno, neki rezultati iz matematičke logike (Gödel[2] je dokazao da je potpunost

[2]Kurt Gödel (1906–1978) - austrijski matematičar, poznat po radovima vezanim uz aksiomatske matematičke sustave.

aksioma Peanove teorije brojeva nedokaziva, tj. postoje istine u teoriji brojeva koje se ne mogu dokazati.) pokazuju da nije moguć takav sustav aksioma koji bi zadovoljio sva tri navedena načela.
Kao primjer primjene deduktivne metode u razvoju matematičke teorije i dokaz da izbor aksioma nije jednostavan zadatak obično se spominje euklidska geometrija. Euklid[3] je oko 300.g.p.K. uočio da se tadašnje poznavanje geometrije može sistematizirati i oblikovati kao teorija koja počiva na pet aksioma. Sve do polovice devetnaestog stoljeća brojni matematičari pokušavali su dokazati da je jedan od tih aksioma (točnije, peti - tzv. aksiom o paralelama) izvediv iz preostalih. Iako u tome nisu uspjeli, njihov trud ipak nije bio uzaludan. Indirektno, ti su napori doveli do razvoja neeuklidske geometrije koja, pojednostavljeno rečeno, počiva na sustavu aksioma u kojem je jedan od njih negacija petog Euklidovog aksioma.

[3] (325 p.K. – 265 p. K.) - najpoznatiji antički matematičar, poznat po znamenitom djelu *Elementi*.

Rješenja zadataka

2.1 a) istina, b) laž
2.2 Ne.
2.3 $a \to b \iff \bar{a} \wedge b$
2.4 Da.
2.5 $(\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$
2.10 Ne. (npr. $x = 1$)
2.11 1. $\sum_{k=1}^{n} k$ 2. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 4. $(\sum_{k=1}^{n} k)^2$ 5. $\sum_{k=0}^{n} 2^k$
6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. 9. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2.12 $x \wedge y \wedge z$, $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$, $\bar{x} \wedge y \wedge z$
2.13 $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$, $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$, $x \vee \bar{y} \vee z$, $x \vee y \vee z$
2.14 $[z \wedge (x \vee \bar{y})] \vee (x \wedge \bar{y})$ ili
$(\bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y})$
2.15 Nije.
2.16 Nije.
2.17 $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$
$x \nearrow y = \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
2.19 1. $\top$, 2. $\bot$, istinit u $\mathcal{U} = \{5\}$, 3. $\bot$, istinit u $\mathcal{U} = \{1\}$
2.20 1. $\top$, 2. $\bot$, 3. $\bot$, 4. $\top$, 5. $\bot$, istinit u npr. $\mathcal{U} = \{1\}$
2.21 1. $\forall x \exists y (x < y)\ \mathcal{U} = \mathbb{R}$,
2. $\forall x \exists y (y = \sqrt{x})\ \mathcal{U} = \mathbb{R}^+$,
3. $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)\ \mathcal{U} = \mathbb{R}$,
4. $\forall x \exists y (y > x)\ \mathcal{U} = \mathbb{R}$,
5. $\exists \forall y (x > y) \mathcal{U} = \mathbb{R}$.
2.22 a) svaka je osoba u braku s nekim, b) postoji osoba koja je sa svima u braku
2.23 1. $\top$, 2. $\bot$, 3. $\top$, 4. $\top$, 5. $\top$, 6. $\bot$
2.33 Nije.
2.34 Nisu.
2.35 $DNF = (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$
$F_{\min} = (y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z})$
2.36 1. $\top$, 2. $\bot$, 3. $\bot$, 4. $\top$, 5. $\bot$, 6. $\bot$, 7. $\bot$.
2.37 1. $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z))$
2. $\forall x \forall y \exists z P(x, z, y)$, 3. $\exists! x \forall y P(y, x, y)$,
4. $\forall x P(x, 0, x)$.
3.1 a) laž; b) istina; c) istina; d) laž;
3.2 a) Da; b) Da; c) Ne;
3.7 $\langle -3, 2]$
3.8 $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
3.9 kao i prethodni, ali može i
$A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3.10 $A \times B =$
$\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$,
$B \times A =$
$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
3.15 2^{mn}
3.18 relacija je refleksivna ako tablica na dijagonali ima jedinice, simetrična ako je tablica simetrična obzirom na dijagonalu, tranzitivnost, tranzitivnost je netrivijalna
3.19 a) niti jedno; b) refleksivnost (?), simetričnost, tranzitivnost ne vrijedi - u suprotnom bi slijedilo da su gotovo svi ljudi prijatelji; c) sva svojstva relacije ekvivalencije
3.20 Klase ekvivalencije su skupovi stanovnika koji žive u istoj županiji.

3.21 Klase ekvivalencije su kružnice sa središtem u ishodištu.
3.23 Sa svim modulima koji dijele $(27-3)$, uključujući i 24.
3.25 Da.
3.26 Npr. refleksivnost znači da na svakom vrhu grafa postoji luk koji počinje i završava u tom vrhu, antisimetričnost znači da za niti jedan luk ne postoji povratan luk.
3.29 Samo u slučaju da je B jednočlan skup.
3.32 Bijekcija je dana sa $x \mapsto x+1$, sa inverzom $y \mapsto y-1$.
3.33 Funkcija $x \mapsto 2^x$ je bijekcija među zadanim skupovima. Inverz je funkcija $y \mapsto \log_2 y$.
3.34 a) neprebrojiv; b) neprebrojiv; c) konačan; d) prebrojivo beskonačan; e) prebrojivo beskonačan; f) neprebrojiv.
4.1 $a=-4$, $b=5$
4.2 $a_{21}=21$
4.3 a) u T_1 bi koštalo 179 kn, a u T_2 185 kn. b) u T_1 je cijena $20k_1+13k_2+10k_3$, a u T_2 je cijena $21k_1+12k_2+11k_3$.
4.5 A^{-1} postoji ako je $ad-bc\neq 0$.
4.8 $\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{k}$.
4.9 $(ABC)^{-1}=C^{-1}(AB)^{-1}=\dots$
4.11 a) $z=0$; b) $x=0$; c) $x,z=0$; d) $x=z$; e) $x=-z$.
6.1 a) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$, b) $\mathcal{D}_f=[3,+\infty\rangle$, c) $\mathcal{D}_f=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 2,+\infty\rangle$, d) $\mathcal{D}_f=[-1,3]$.
6.3 a) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$, b) $f^{-1}(x)=\frac{1}{8}x^3-1$.
6.4 a) nema, b) $x_1=-1$, $x_2=1$, c) $x_k=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
6.5 a) $T_0=\frac{2}{3}\pi$, b) $T_0=\pi$
6.6 a) parna, b),c) ni parna ni neparna, d) neparna
6.19 a) nema takvog; b) $f(x)=ax^2+b$, $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{R}$; c) nema takvog; d) nema takvog;
6.22 a) $\mathcal{D}_f=\emptyset$; b) $\mathcal{D}_f=\langle-\infty,-2]\cup[3,+\infty\rangle$; c) $\mathcal{D}_f=[0,2]$.
6.23 a) $f(x)=2^x$; b) $f(x)=3^x$; c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=\log_2 x$.
6.24 a) neparna; b) parna; c), d) niti parna, niti neparna.
6.25 a), b) niti parna, niti neparna; c), d) neparna.
6.26 a) omeđena; b) neomeđena; c) neomeđena; d) omeđena.
6.27 a) strogo padajuća; b), c), d) nije monotona.
6.30 a) na visini 0m; b) u zraku je $\frac{2v_0}{g}$ sekundi; c) za $\frac{v_0}{g}$ sekundi; d) $\frac{v_0^2}{2g}$ metara.
7.1 a) $a_n=6n+2$; b) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{3^{n-1}}{2}$ ili $a_n=\frac{(-3)^n}{6}$; c) $a_n=n!$.
7.5 $a_{12}=\pm 35,\pm 22$.
7.6 Da.
7.7 $a_9=512$.
7.8 $x=-1$.
7.9 a) strogo pada; b) za $q>0$ strogo pada; c) nije monoton; d) padajući niz.
7.10 a) omeđen; b) omeđen; c) neomeđen; d) omeđen; e) omeđen.
7.12 a) strogo raste, omeđen, $\lim a_n=1$; b) omeđen, gomilišta: $-1,0,1$; c) strogo pada, $\lim a_n=0$; d) neomeđen, $\lim a_n=+\infty$, strogo raste; e) strogo pada, $\lim a_n=-\infty$, neomeđen; f) omeđen, $\lim a_n=0$; g) strogo pada, $\lim a_n=0$, omeđen; h) strogo pada, omeđen, $\lim a_n=\frac{2}{3}$; i) omeđen, gomilišta: -2, 2.
7.14 a) $(\frac{4}{5})^5$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) e^6; e) 0.
7.16 a) 10; b) $\frac{1}{18}$; c) $\frac{17}{12}$.
7.18 a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{122}{99}$; c) $\frac{-707}{333}$.
7.19 $\sum_{i=1}^{6}(\frac{i}{i+1})^2$
7.20 240.
7.21 $a_1=2$, $a_n=a_{n-1}+3(n-1)$
7.22 $x=7$.
7.23 $p<0$ i $q=\frac{9p^2}{100}$.

7.24 a) Da; b) Da; c) Ne; d) Ne; e) Ne.
7.25 prvih 6 članova.
7.26 $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7.28 $a_n = 2^{1-n}(2^n - 2)$.
7.29 a) nije monoton, nije omeđen, $\lim a_n = +\infty$; b) strogo raste, omeđen je, $\lim a_n = \frac{1}{2}$; c) strogo pada, omeđen, $\lim a_n = 0$; d) strogo pada, neomeđen je, $\lim a_n = \infty$; e) strogo pada, omeđen je, $\lim a_n = 0$; f) nije monoton, omeđen je, $\lim a_n = 0$;
7.33 a) 0; b) e^2; c) 3; d) 0; e) 0; f) 0.
7.34 a) $-frac113$; b) $\frac{7}{2}$; c) 3; d) $\frac{9}{64}$;
7.35 a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{40}{3}$.
8.1 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

8.2 a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\frac{2}{3}$; e) 0; f) $\ln\frac{2}{3}$; g) e.
8.8 a) 15; b) 0; c) 0; d) 1; e) $-\frac{3}{4}$; f) 12;
8.9 a) ne postoji; b) $+\infty$; c) 0; d) 0; e) $-\infty$;
8.10 1. ne mora vrijediti jer f nije neprekidna; 2. vrijedi, zbog teorema o međuvrijednosti; 3. nije istina.
8.12 b) 3.
8.13 b) u cjelobrojnim točkama su neuklonjivi prekidi 1. vrste.
9.4 a) $4(x^3 - 2x^2)^3(3x^2 - 4x)$;
b) $\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(2\sqrt{x})}$; c) $-\frac{1}{\ln 3}\operatorname{tg} x$.
9.6 a) $y' = \frac{x^3 - 2xy^2}{y(2x^2+y^2)}$;
b) $y' = \frac{-2(x-1)y^2 + x(-2x^2+6x-3)}{y(2y^2+2x^2-4x-1)}$;
c) $y' = \frac{2y - \sin y}{x(\cos y - 2)}$;
d) $y' = \frac{-e^{-xy}(ye^{xy} - e^x - 6x)}{x}$;
9.8 a) $f'(x) = -2\sin 2x$, $f''(x) = -4\cos 2x$, $f'''(x) = 8\sin 2x$, $f^{(n)}(x) = 2^n\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$;
b) $f'(x) = 2\ln 3 \cdot 3^{2x}$, $f''(x) = 4\ln^2 3 \cdot 3^{2x}$, $f'''(x) = 8\ln^3 3 \cdot 3^{2x}$, $f^{(n)}(x) = (2\ln 3)^n \cdot 3^{2x}$;
c) $f'(x) = 20(1+2x)^9$, $f''(x) = 360(1+2x)^8$, $f'''(x) = 5760(1+2x)^7$,
9.9 a) $y' = (x-4)e^x$;
b) $y' = \cos x - \cos 2x$; c) $y' = 1$;
d) $y' = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$;
e) $y' = -2^{1+\operatorname{ctg}^2 x}\operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\ln 2$;
f) $y' = x^{e^x}(\frac{e^x}{x} + e^x\ln x)$;
g) $y' = (\ln\sqrt{x})^x(\frac{1}{2\ln\sqrt{x}} + \ln(\ln\sqrt{x}))$;
9.10 a) 1; b) 1;
9.12 a) $y'(1) = \frac{1}{4}$; b) $y'(1) = \frac{2\pi\ln 3}{-3-\ln 3}$; c) $y'(1) = -\frac{2}{3}$;
9.14 $f'(x) = 3\cdot 2^{3x}\ln 2$, $f''(x) = 9\cdot 2^{3x}\ln^2 2$, $f'''(x) = 27\cdot 2^{3x}\ln^3 2$, $f^{(n)} = 3^n\cdot 2^{3x}\ln^n 2$.
9.15 $a \in [1, +\infty\rangle$.
10.1 a) $t \ldots\ y = 10x - 15$, $n \ldots\ y = -\frac{1}{10}x + \frac{26}{5}$; b) $t \ldots\ y = \frac{1}{e}x$, $n \ldots\ y = -ex + \frac{1+e^2}{e}$;
c) $t \ldots\ y = -\frac{1}{3}x + 2$, $n \ldots\ y = 3x + 2$.
10.2 $\operatorname{arctg} 1659$
10.5 a) horizontalna: $y = 0$; b) kosa: $y = x + \frac{1}{3}$; c) lijeva kosa: $y = -x$, desna kosa: $y = 3x$; d) desna vertikalna: $x = 0$, kosa: $y = -x + 1$; e) lijeva vertikalna: $x = -\frac{1}{e}$, kosa: $\frac{1}{\ln 10}x + \frac{1}{e\ln 10}$.
10.10 $T_1(4, 0)$, $t_1 \ldots\ y = \frac{1}{2}x - 2$, $n_1 \ldots\ y = -2x + 8$, $T_2(0, 2)$, $t_2 \ldots\ y = \frac{1}{2}x + 2$, $n_2 \ldots\ y = -2x + 2$.
10.11 $y = x - \frac{3}{e^2}$.
10.12 a) $t \ldots\ y = -x + 6$, $n \ldots\ y = x$; b) $x = 0$; c) Ne;
10.16 b) $y' = \frac{2x(2-y)}{x^2+y^2+1}$;
c) $y = \frac{-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}} + \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{17}}$; e) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
10.18 a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0, 3\}$; b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, lok. min: $(2, 10)$, lok.max.: $(-2, -6)$, vert. asimp.: $x = 0$, kos. asimp.: $y = 2x + 2$
c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, nema ekstrema, lijeva h.a. je $y = 0$, desna h.a. je $y = 6$.
10.20 $(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{e}})$ lok. min., ujedno i globalni.

10.21 lok. maksimum je $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Funkcija raste na $\langle -\infty, 0\rangle$, pada na $\langle 0, +\infty\rangle$, konveksna je na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$ i konkavna na $\langle -1, 1\rangle$.

11.1 a) $-\frac{1}{x} + x^2 + \frac{x^5}{5}$; b) $\frac{2(-5+15x+5x^2+x^3)}{5\sqrt{x}}$

11.2 $\frac{\sin 3x}{3}$

11.3 a) $-1\frac{1}{5}\ln|5x-2|$; b) $\ln|\sin x|$;
c) $\operatorname{arctg}(e^{x^2})$; d) $\frac{4}{15}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x}-2)$.

11.4 a) $\sin x - x\cos x$;
b) $\frac{1}{16}x^4(4\ln 3x = 1)$; c) $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2+3x+1)$;
d) $-\frac{1}{5}e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$.

11.5 a) $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-2}{x+1}| + \ln|x-1|$;
b) $\frac{1}{8}\ln|4x^2-1|$;
c) $\frac{1}{20}(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{2} + 4\operatorname{arctg} x + \ln\frac{x^2+1}{x^2-2x+5})$;
d) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}(2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}e^{-x}) - 2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}e^{-x}) + \ln\frac{1+\sqrt{2}e^{-x}+e^{-2x}}{-1+\sqrt{2}e^{-x}-e^{-2x}})$.

11.7 $\frac{1}{30}(7+3\cos 2x)\sin^3 x$

11.8 $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{32}\sin 16x$

11.9 a) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg} x)$;
b) $\frac{1}{2}\left[-\operatorname{arcctg}(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + \operatorname{arctg}(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})\right]$;
c) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{14}\cos 7x$;
d) $\frac{1}{192}(12x + 3\sin 2x - 3\sin 4x - \sin 6x)$;
e) $e^x + \operatorname{tg} x$.

11.11 a) 0; b) 1

11.13 a) $\frac{3}{28}\sqrt[3]{x^2}(2x^4+7x^2+14)+C$, $C\in\mathbb{R}$; b) $-\frac{1}{12}(1-3x^3)^{\frac{4}{3}}+C$, $C\in\mathbb{R}$;
c) $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$, $C\in\mathbb{R}$; d) $\sqrt{4+x^2}+C$;
e) $\frac{5}{3}\ln|x-7| - \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$; f) $\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x+2) + \ln\left[(x-2)^2(x^2+4x+5)^3\right]$;
g) $\frac{3}{2-x} + 2\ln|x-2| + 5\ln|x| + C$;
h) $-\frac{1}{9x+3} + \ln\frac{81(x-2)^4}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} + C$;
i) $\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x + C$;
j) $\frac{1}{26}e^x(-5\cos 5x + \sin 5x) + C$;
k) $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C$;
l) $\frac{3}{2}(\frac{1}{7}\sin^4 x - \frac{1}{2}\sin^2 x + 1)\sqrt[3]{\sin^2 x} + C$.

11.15 a) $P = \frac{16}{3}$; b) $P = 5\ln 4 - 6$;
c) $P = 3$

11.17 $P = \frac{2}{3}a^2$

11.18 a) $\frac{53}{216} + \frac{2}{\pi}$; b) $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}$.

Bibliografija

[1] Andrews G. E., "*The Geometric Series in Calculus*", the American Mathematical Monthly, Vol. 105, Number 1, 1998.

[2] Barnett S., "*Matrices - Methods and Applications*", Oxford applied mathematics and computing science series, 1900.

[3] Chiang A.C. , "*Osnovne metode ekonomije*", MATE, Zagreb, 1994.

[4] Demidovič B. P., "*Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike*", Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

[5] Devlin K., "*Sets, Functions and Logic*", Chapman & Hall, 2004.

[6] Divjak B., Erjavec Z., "*Gospodarska i financijska matematika*", TIVA-FOI, Varaždin 2003.

[7] Divjak B., Hunjak T., "*Zbirka zadataka iz matematike*", TIVA-FOI, 2003.

[8] Goodaire, E. G., Parmenter, "*Discrete Mathematics*", Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

[9] Hughes-Hallett D., Gleason A. M. et al, "*Calculus*", J. Wiley & Sons Inc., 1994.

[10] Hoffmann L. D., Bradley G. L., *Finite mathematics with Calculus*, McGraw-Hill, Inc. 1995.

[11] Horvatić K., "*Linearna Algebra I, II*", PMF, Zagreb, 1995.

[12] Mortensen M. E., "*Mathematics for Computer Graphics Applications*", Industrial Press Inc., New York, 1999.

[13] Salas S., Hille E., Etgen G., "*Calculus: One and several variables*", J. Wiley, 1999.

[14] Simon C.P., Blume L., "*Mathematics for Economists*", W.W. Norton& Co., New York, London 1994.

[15] Stanat D. R., McAllister D. F., "*Discrete Mathematics in Computer Science*", Prentice/Hall International, 1977.

[16] Summers, J., "*Test your logic*: Fifty Puzzles in Deductive Reasoning", Dover Publications, 1972.

[17] Šikić, Z., “*Kako je stvarana novovjekovna matematika*”, Školska Knjiga, Zagreb, 1989.

[18] Ganier R., Taylor J., “*Discrete Mathematics for New Technology*”, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1999.

[19] Veljan, Darko, “*Kombinatorika s teorijom grafova*”, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[20] Vuković M., “*Matematička logika I*”, PMF-MO, Zagreb, 2000.

Kazalo