Tarefa básica

DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES

1) $\begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + 2y = b \end{cases}$

A) Solução única se $b = \frac{1}{2}$, qualquer que seja a.

CRAMER

S.P.D $\rightarrow$ det $\neq 0$

$Dy = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\quad 1/2a - 1 \quad \sim \quad$ det $\neq 0$

$-1 \quad 1/2a$ $\quad \rightarrow a = 1 . \frac{2}{1} \quad a \neq 2$

$a = 2$

falso pois, para ter uma solução única, "a" precisa ser diferente de 2.

B) $a = 2$

S.P.I $\rightarrow$ det $= 0$

det $= \boxed{a = 2}$ Verdadeiro

C) Falso. Para ter uma solução única (sistema possível e determinado), $a \neq 2$, como mostrado na letra A.

D) O sistema apresenta infinitas soluções quando $a = 2$, visto na letra B $\rightarrow$ sistema possível e indeterminado. Alternativa falsa.

E) O sistema é indeterminado quando o valor de a for 2. Alternativa falsa.

/ /

2) $\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1-k \end{cases}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{1-k^2}$ determinante

$1 \quad k^2$

I.) S.I → det = 0

$1 - k^2 = 0$

$k^2 = 1$ falso

$k = \sqrt{1}$

$\boxed{k = \pm 1}$

O sistema é indeterminado para mais de um valor de K. ou impossível

II.) S.P.D → Como foi verificado na alternativa I, o sistema é impossível quando $K = \pm 1$. Então, nem sempre o sistema apresenta soluções. Falso.

III.) S.P.D → det ≠ 0

$K \neq \pm 1$ → mais de 1 valor.

O sistema vai ter solução única para dois valores de K

falso

Resposta = alternativa D)

tilibra

③ $S = \begin{cases} x + 2y + cz = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$

A) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \rightarrow 8 - (3c+2) \rightarrow 8 - 3c - 2 \rightarrow 6 - 3c$

$3c+2+0 \quad 2+6+0$

$\boxed{\det = 6 - 3c}$

B) solução única → S.P.D → $\det \neq 0$

$6 - 3c \neq 0$

$-3c \neq -6$

$c \neq \frac{-6}{-3} \neq 2 \rightarrow c \neq 2$

$R = \{c \in \mathbb{R} / c \neq 2\}$

④ $\begin{cases} x - y = K \\ 12x - Ky + z = 1 \\ 36x + kz = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 12 & -K & 1 \\ 36 & 0 & K \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 12 & -K \\ 36 & 0 \end{matrix}$

$0 + 0 - 12K \quad -K^2 - 36$

$-K^2 - 36 - (-12K)$

$-K^2 + 12K - 36$

$a = -1 \quad b = 12 \quad c = -36$

$\Delta\, b^2 - 4 . a . c$

$\Delta\, 12^2 - 4 . -1 . -36$

$\Delta\, 144 - 144$

$\Delta = 0$

$k = \frac{-b \pm 0}{2 . a}$

$k = \frac{-12 \pm 0}{-2} \rightarrow K' \text{ e } K'' = 6$

S.P.D → $\det \neq 0$

$\boxed{K \neq 6}$

Alternativa E)

/ /

⑤ $\begin{cases} x-y+z=6 \\ 2x+y-z=-3 \\ x+2y-z=-5 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 6 \\ 2 & 1 & -1 & | & -3 \\ 1 & 2 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & | & \\ 0 & 3 & -3 & | & -15 \\ 0 & 3 & -2 & | & -11 \end{pmatrix} \sim$

(row operations: -2, -1; $3 \cdot$, $-3 \cdot$, $+$)

$\begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ 0 & 0 & -3 & | & -12 \end{pmatrix}$

$-3z=-12$

$z=\frac{-12}{-3}=4$

$\begin{cases} 3y-2z=-11 \\ 3y-2.4=-11 \\ 3y=-11+8 \\ y=\frac{-3}{3}=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y+z=6 \\ x+1+4=6 \\ x=6-5 \\ x=1 \end{cases}$

$x \cdot y \cdot z$

$1 \cdot -1 \cdot 4 = -4 \rightarrow$ Alternativa B)

⑥ $\begin{cases} x+y+z=K \\ Kx+y+z=1 \\ x+y-z=K \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & K \\ K & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & K \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & | & \\ 0 & 1-K & 1-K & | & 1-K^2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$

(row operations: $-K$, -1)

Escalonamento

$\frac{N}{D} \rightarrow \frac{1-K^2}{1-K}$

$\begin{cases} (1-K)y+(1-K)z=1-K^2 \\ y(1-K)+0=1-K^2 \\ y=\frac{1-K^2}{1-K} \end{cases}$

$\begin{cases} -2z=0 \\ z=0 \end{cases}$

A) S.I $\rightarrow D=0, N \neq 0$

$1-K^2 \neq 0$

$K^2 \neq 1$

$\boxed{K \neq \pm 1}$

$1-K=0$

$\boxed{K=1}$

falso, pois é um sistema impossível para mais de um valor de K.

B) S.P.D $\rightarrow D \neq 0$

$1-K \neq 0$

$K \neq 1$

falso, pois não é um valor único

C) $(K,0,0)$ se $K \neq 0$

se $K=2$

$y=\frac{1-2^2}{1-2}$

$y=\frac{-3}{-1}$

$y=3$

falso

D) S.P.I $\rightarrow D = 0,\ N = 0$

$\frac{N}{D} \rightarrow y = \frac{1-K^2}{1-K}$

$1-K^2 = 0$ | $1-K = 0$

$K^2 = 1$ | $\boxed{K = 1}$

$\boxed{K = \pm 1}$

Verdadeiro

E) solução nula

$y = \frac{1-K^2}{1-K}$ $\quad \emptyset = \frac{1-K^2}{\cancel{1-K}}$

$1-K^2 = 0$ | $x+y-z = K$

$K^2 = 1$ | $x+0-0 = \pm 1$

$\boxed{K = \pm 1}$ | $\boxed{x = \pm 1}$

falso.

7) $\begin{cases} x & 1 & 1 = 1 \\ mx & -2 & 4 = 5 \\ m^2x & 4 & 16 = 25 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -2 & 4 \\ m^2 & 4 & 16 \end{bmatrix}$ Propriedade da matriz de Vandermonde

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \rightarrow (b-a)(c-a)(c-b)$

$(-2-m)(4-m)(4+2)$

$(-8+2m-4m+m^2)(6)$

$m^2-2m-8 \cdot 6$

$6m^2-12m-48 \div 6$

m^2-2m-8

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -8$

$\Delta (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8$

$\Delta\ 4 + 32$

$\Delta = 36$

$m = \frac{-b \pm 6}{2}$

$m = \frac{2 \pm 6}{2}$

$m' = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$m'' = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Soma dos valores de m

$4-2$

2

Alternativa B)

/ /

▶ PARTE 2 – SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

1) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x + 7y = Kx \\ 7x + y = Ky \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(1-K) + 7y = 0 \\ 7x + y(1-K) = 0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1+K & 7 \\ 7 & 1+K \end{bmatrix} \rightarrow (1-K)(1-K) - 49$

$(1-K)^2 - 49 = 0$

$(1-K)^2 = 49$

$(1+K) = \sqrt{49}$

$(1-K) = 7$

$1 - K = 7$

$K = 7 + 1$

$\boxed{K = 8}$

Alternativa E)

2) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$1 + 9 + 0 = 10 \quad 0 + 12 - 2 = 10$

$\det = 10 - 10$

$\boxed{\det = 0}$

$D_x = 0 \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$

numerador = 0

Denominador = 0

$\frac{0}{0} \rightarrow$ infinitas soluções

Alternativa D)

tilibra

③ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ Kx+3y+4z=0 \\ x+Ky+3z=0 \end{cases}$

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ K & 3 & 4 \\ 1 & K & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ K & 3 \\ 1 & K \end{matrix}$$

$3+4K+3K \quad 9+4+K^2$

$\rightarrow K^2+13-(7K+3)$

$K^2+13-7K-3$

$K^2-7K+10$

$a=1 \quad b=-7 \quad c=10$

$\Delta (-7^2)-4.1.10$

$\Delta\ 49-40$

$\Delta\ 9$

$$K = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$K' = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$K'' = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Soma dos valores de $K \rightarrow 5+2 = 7$

Alternativa D)

④ $\begin{cases} x+Kz=0 \\ Kx+y=0 \\ x+Ky=0 \end{cases}$

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & K \\ K & 1 & 0 \\ 1 & K & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ K & 1 \\ 1 & K \end{matrix}$$

solução única

$\dfrac{0}{\neq 0} \longrightarrow$

$K+0+0=K \quad 0+0+K^3=K^3$

$K^3-K=0$

$K^3 \neq K$

Os únicos valores que, elevados ao cubo, permanecem os mesmos, são: 0, 1 e -1.

Alternativa A) $\{K \in \mathbb{R} \mid K \neq 0, K \neq 1, K \neq -1\}$

/ /

5) $\begin{cases} -x+2y-3=0 \\ 3x-y+3=0 \\ 2x-4y+6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2y=-3 & \text{I} \\ 3x-y=-3 & \text{II} \\ 2x-4y=6 \end{cases}$

I $\Rightarrow -x=-3-2y \quad (-1)$

$x=2y-3$

$x=2\cdot\frac{6}{5}-3$

$x=\frac{12}{5}-3$

$5x=12-15$

$5x=-3$

$\boxed{x=\frac{-3}{5}}$

II $3x-y=-3$

$3(2y-3)-y=-3$

$6y-9-y=-3$

$5y=-3+9$

$\boxed{y=\frac{6}{5}}$

É determinado

Alternativa B)