

Laboratório 1: Revisão de sinais

Marcelo Bittencourt do Nascimento Filho
marcelo.bn@aluno.ifsc.edu.br

Relatório apresentado para a disciplina de Sistemas de Comunicação I do curso de Engenharia de Telecomunicações, Instituto Federal de Santa Catarina - Campus São José.

1 Introdução

O estudo sobre sinais é algo imprescindível no ramo das telecomunicações. Suas características, aplicações e conceitos são de extrema importância para o surgimento de tecnologias que facilitam e afetam a vida de todos diariamente. O trabalho em questão, procura demonstrar os principais conceitos para um bom entendimento de sinais. Para isso, serão realizadas simulações em *softwares* como o *Matlab* que fornecerá matematicamente e graficamente as principais características sobre esse assunto.

A segunda seção deste documento definirá alguns termos importantes para uma compreensão total da pesquisa. Na terceira seção será explicado detalhadamente todos os exercícios que foram utilizados como base para o laboratório e, por fim, na quarta seção serão relatadas as considerações finais do projeto. Todos os códigos desenvolvidos estão públicos para [download aqui](#).

2 Fundamentação Teórica

2.1 Transformada de Fourier

Sendo um dos principais conceitos estudados neste laboratório, a Transformada de Fourier é extremamente utilizada em comunicações e tem por definição decompor um sinal que esteja no domínio do tempo para o domínio da frequência e assim tornando possível a análise de todos os componentes espectrais que o compõem [2].

A Figura 1 demonstra a Transformada de Fourier de um sinal cosseno com frequência fundamental de 1000Hz. O sinal em vermelho representa este cosseno no domínio tempo e o em azul no domínio da frequência e desta forma é possível visualizar a componente espectral do sinal como um impulso em 1000Hz.

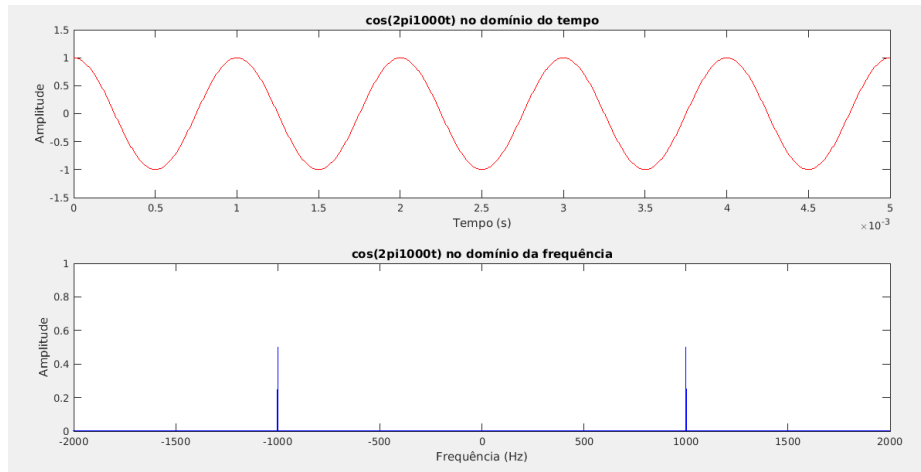


Figura 1. Exemplo Transformada de Fourier. Fonte: Autoria própria.

2.2 Teorema da amostragem

O Teorema da amostragem defini que qualquer sinal limitado a uma faixa de frequência B Hz, pode ser reconstruído sem erros em suas amostra se o mesmo sofrer um processo de amostragem de $f_s > 2B$ [1], sendo f_s a frequência de amostragem.

2.3 Sinais de energia e de potência

Um sinal pode ser classificado, para fins teóricos, como de energia ou como de potência. Um sinal é considerado de energia se o mesmo possui uma energia finita (sinal aperiódico) e, um sinal de potência possui potência finita (sinal periódico). Por definição, a potência de um sinal é calculada através da sua média temporal, portanto, um sinal de energia possui potência nula e um sinal de potência possui energia infinita.

2.4 Densidade espectral de potência

A densidade espectral de potência fornece a distribuição da potência de um sinal no domínio da frequência, ou seja, é possível visualizar desta maneira em quais frequências ocorrem os maiores valores de potência.

2.5 Função autocorrelação

A função autocorrelação é o processo de correlacionar um sinal com suas próprias versões deslocadas. Esta função é representada por $R_x(\tau)$, sendo τ a diferença

de instantes do sinal original e seus deslocamentos. Outro ponto importante sobre esta função é que ela pode ser obtida através da Transformada Inversa de Fourier da densidade espectral de potência de um determinado sinal e , que $R_x(0)$ é equivalente a potência média de um sinal de potência [3].

2.6 Ruído branco

Um ruído branco é caracterizado como sendo um sinal aleatório com distribuição normal com intensidade constante em variadas frequências (seu nome remete a luz branca, pois, essa luz possui todas as frequências de cores em seu espectro e assim como ela, o ruído possui várias frequências).

As principais características do ruído branco é possuir uma densidade espectral de potência constante com valor $N_o/2$ e uma função impulso com amplitude $N_o/2$ como função autocorrelação.

2.7 Filtros ideais

Filtros são utilizados em sistemas de comunicação com a finalidade de selecionar faixas de frequência importantes para analisar um determinado sinal. Os chamados filtros ideais não são realizáveis no mundo real, pois, possuem como definição conseguir atenuar totalmente todas as faixas de frequência que não satisfazem a frequência de corte do filtro, o que não ocorre com filtros reais.

3 Desenvolvimento

3.1 Questão 1

Na primeira questão do laboratório, é pedido inicialmente para criar três sinais senoidais com amplitudes 6V, 2V e 4V com frequências fundamentais de 1, 3 e 5kHz respectivamente. Criado os três sinais (denominados de sinal [a], [b] e [c]), o próximo passo é gerar um sinal resultante da soma desses três iniciais (sinal denominado de [s]) e, após todos esses processos foi realizado o *plot* dos quatro sinais no domínio do tempo e no domínio da frequência (através da Transformada de Fourier) como demonstra a Figura 2.

Pela figura, é possível perceber que o sinal [s] no domínio do tempo está tomando forma de uma onda quadrada, isto pois, uma onda quadrada é formada pela soma de diversas senóides de frequências diferentes assim como diz o teorema da Série de Fourier. Analisando o espectro de frequência do sinal [s], fica evidente o conceito da Transformada de Fourier sendo aplicado, pois, é possível visualizar as frequências que compõem o sinal sendo elas as frequências dos sinais [a] (1kHz), [b] (3kHz) e [c] (5kHz) que estão sendo representadas pelos impulsos.

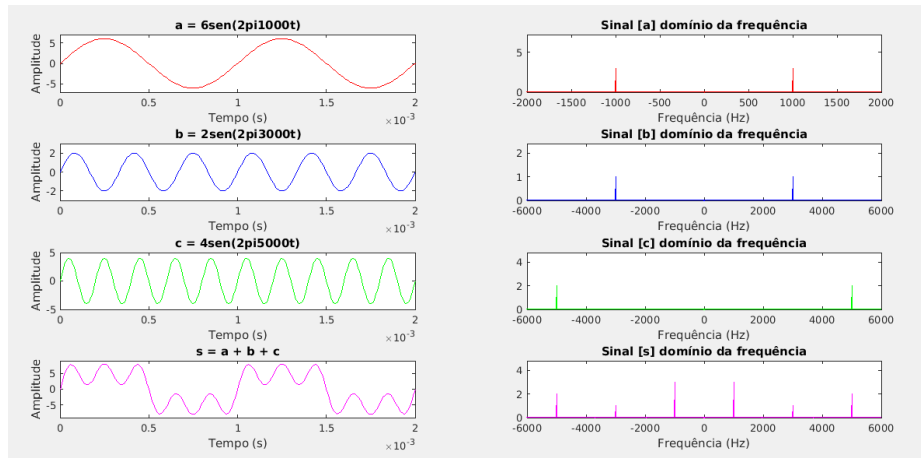


Figura 2. Sinais no domínio do tempo (coluna esquerda) e da frequência (coluna direita). Fonte: Autoria própria.

A próxima etapa da questão é calcular a potência média do sinal $[s]$. Foi estudado em sala que para se calcular a potência média é necessário realizar a soma de todos os termos do vetor sinal ao quadrado e dividí-los pela quantidade de elementos. Porém, a questão solicita que se use a função `norm()` do *Matlab* que retorna a raiz quadrada da soma dos termos ao quadrado de um vetor. Desta forma, foi necessário apenas elevar ao quadrado o retorno da função e realizar uma divisão pelo número de elementos do vetor, ou seja, pelo tamanho do vetor $[s]$ e, com isso, foi obtido uma potência média de 27.9986W para o sinal $[s]$.

Por fim, foi necessário realizar o *plot* da densidade espectral de potência do sinal $[s]$ através da função `pwelch()`, como demonstra a Figura 3. Com a figura, é possível perceber que toda a potência do sinal se situa nas suas três componentes de potência originadas dos sinais iniciais, ou seja, 1, 3 e 5kHz.

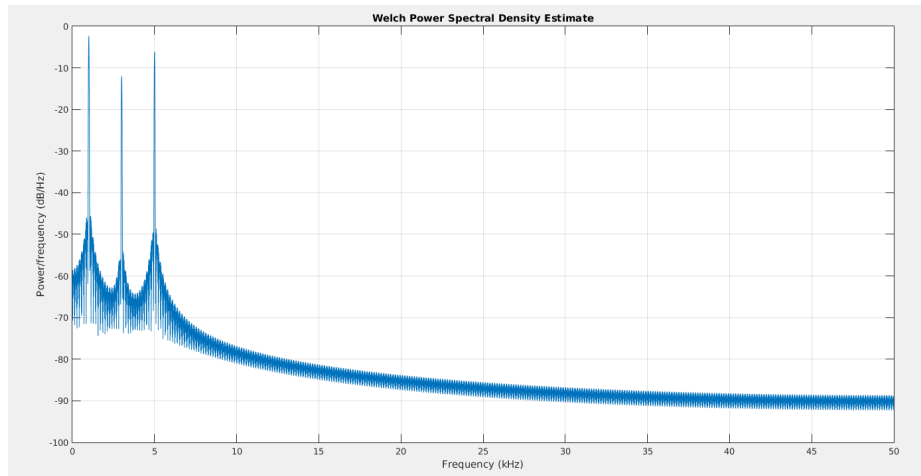


Figura 3. Densidade espectral de potência do sinal [s]. Fonte: Autoria própria.

3.2 Questão 2

Inicialmente, assim como na questão anterior, será necessário criar três sinais com amplitudes de 5V, 5/3V e 1V com frequências fundamentais de 1, 3 e 5kHz respectivamente (sinais também denominados de [a], [b] e [c]) assim como, gerar um sinal que será a soma desses três citados anteriormente (sinal denominado de [s]). A Figura 4 demonstra esses quatro sinais no domínio do tempo assim como no domínio da frequência (através da Transformada de Fourier). Na figura, é possível perceber também que o sinal [s] está tomando forma de uma onda quadrada, pois, é um sinal resultante da soma de três senóides.

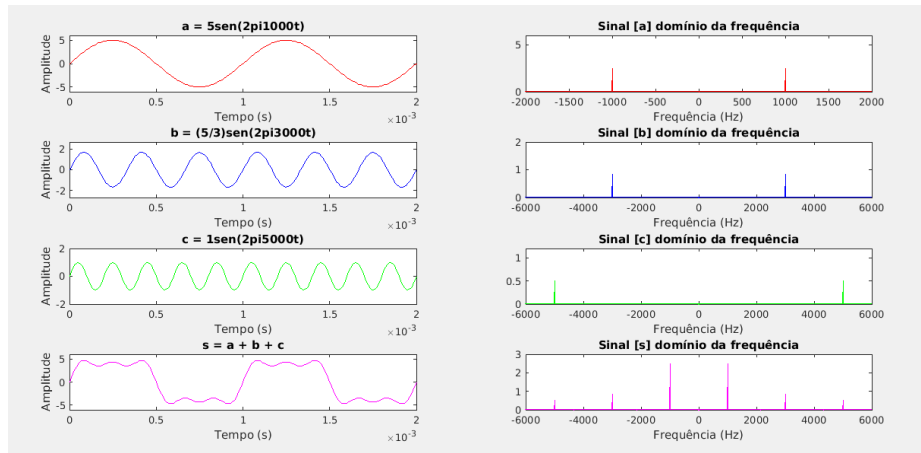


Figura 4. Sinais no domínio do tempo (coluna esquerda) e da frequência (coluna direita). Fonte: Autoria própria.

O próximo item da questão solicita a geração de três filtros ideais dos tipos passa-baixa (FPB) com frequência de corte de 2kHz, passa-alta (FPA) com banda de passagem acima de 4kHz e por último um filtro passa-faixa (FPF) com banda de passagem entre 2kHz e 4kHz. Já com os filtros devidamente criados, foi realizado a passagem do sinal [s] através de cada um deles e feita a análise do sinal final no domínio do tempo e da frequência. A Figura 5 representa todas as etapas desse item.

Na primeira linha da figura (sinais em cor magenta) é possível visualizar os processos ocorridos devido ao FPB. O primeiro gráfico dessa linha está representando a resposta em frequência desse filtro com suas frequências de corte em -2kHz e 2kHz conforme solicitado. O segundo gráfico está representando o sinal [s] no domínio da frequência, sendo possível observar que apenas frequências abaixo de 2kHz estão compondo-o e que essa frequência que ficou ativa é a de 1kHz que pertence ao sinal [a]. Desta forma, o sinal [s] no domínio do tempo ficará igual ao sinal [a] como demonstra o terceiro gráfico.

A segunda linha (sinais em verde) demonstra as operações ocorridas com o filtro FPA. Aqui, apenas frequências acima de 4kHz irão compor o sinal resultante, como é possível observar no segundo gráfico que somente a frequência de 5kHz continuou existindo no sinal. Desta forma, representado pelo terceiro gráfico, está o sinal [s] no domínio do tempo sendo ele igual ao sinal [c].

A terceira linha (sinais em azul) é referente aos processos do FPF. No segundo gráfico é possível observar o sinal [s] após a passagem pelo filtro e pode-se perceber que apenas a frequência de 3kHz ficou presente no sinal. Desta forma, com o terceiro gráfico, se conclui que o sinal [s] ficou igual ao sinal [b].

No fim desta questão pode-se observar que após a passagem do sinal [s] pelos diferentes filtros desenvolvidos, foi possível recuperar os sinais [a], [b] e [c], os quais faziam parte da composição do sinal [s], de acordo com o tipo de filtro utilizado

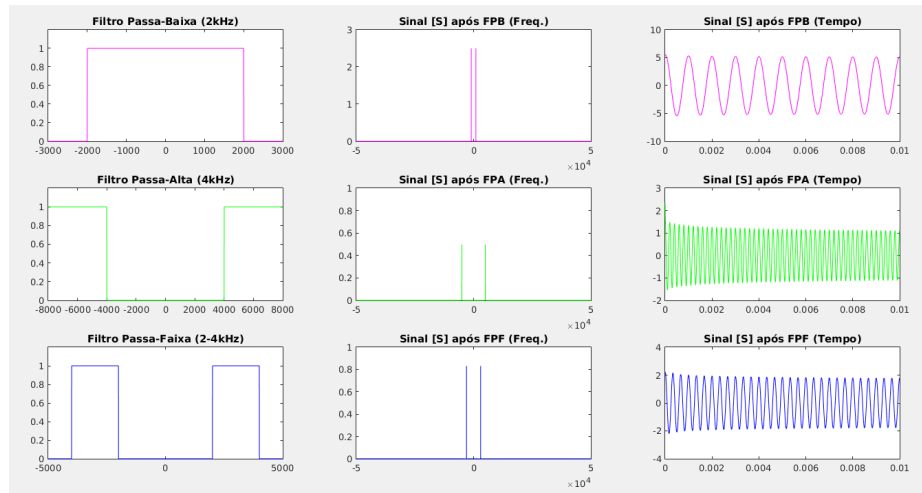


Figura 5. Resposta em frequência dos filtros e sinal [s] após passagem pelos filtros.
Fonte: Autoria própria.

3.3 Questão 3

A questão se inicia solicitando a criação de um vetor que representará um ruído com distribuição normal, ou seja, um ruído branco. Para isso, foi necessário utilizar a função do *Matlab* `randn()` que gera um vetor de tamanho *n* seguindo a distribuição normal, nesse caso o tamanho do vetor será de 10000 elementos devido ao vetor tempo que foi definido a partir dos valores fornecidos de tempo de amostragem (1/10k) e de tempo total do ruído (1 segundo).

O primeiro item pedido é para realizar o *plot* do histograma desse ruído, assim como o gráfico que o representa no domínio do tempo e da frequência. Todas essas informações podem ser visualizadas na Figura 6. Vale lembrar que neste ponto da questão, os valores de variância e média são 1 e 0 respectivamente pois, como já mencionado anteriormente, o ruído possui uma distribuição normal padrão. Após esse processo, foi pedido a função autocorrelação do ruído através da utilização da função `xcorr()`.

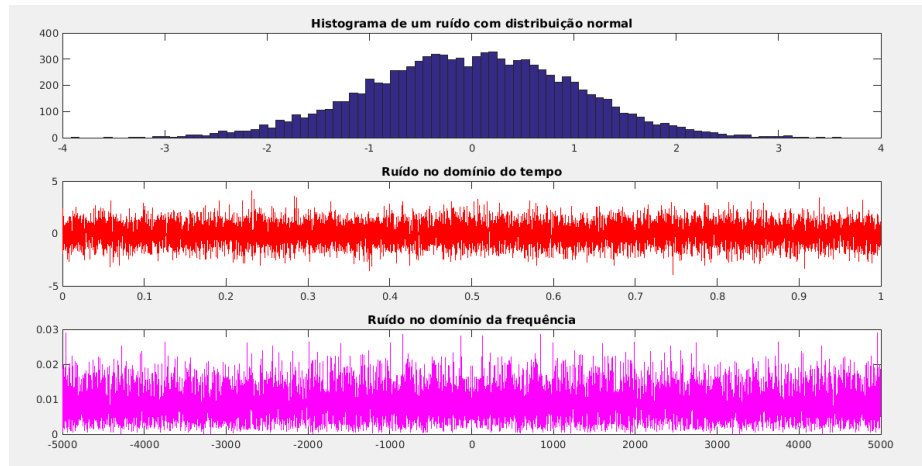


Figura 6. Histograma do ruído e suas representações no domínio do tempo e da frequência. Fonte: Autoria própria.

A Figura 7 confirma o que foi estudado em sala, a função autocorrelação de um ruído branco é um impulso.

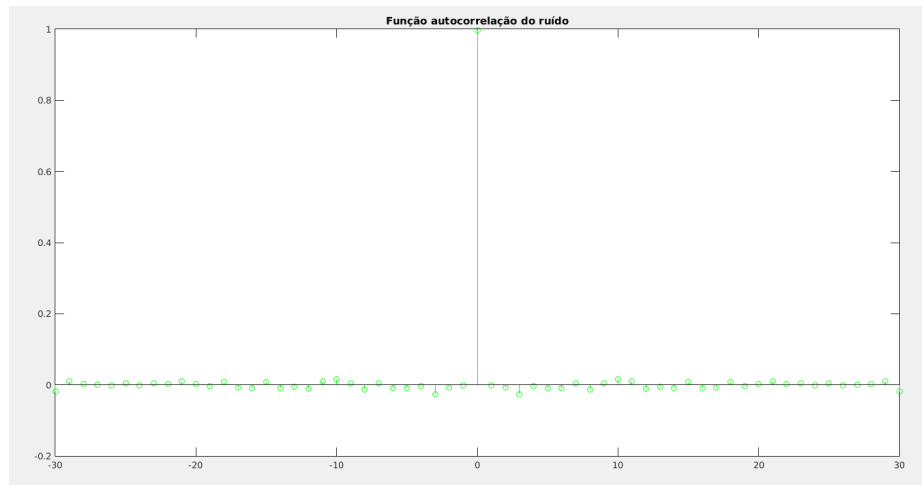


Figura 7. Função autocorrelação do ruído. Fonte: Autoria própria.

Agora, o objetivo é gerar um filtro utilizando a função `fir1()` no seguinte formato `fir1(50,(1000*2)/fs)`, tendo o primeiro parâmetro correspondendo a ordem do filtro (ordem de um filtro digital) e o segundo parâmetro sendo a frequência de corte normalizada. Através da Figura 8 é possível observar a resposta em frequência desse filtro e concluir que o mesmo é um FPB com frequência de corte de 1kHz.

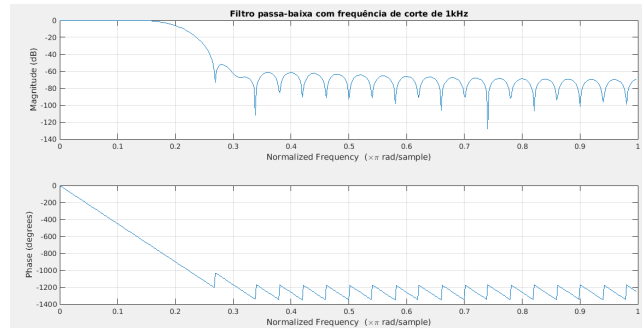


Figura 8. Resposta em frequência do filtro. Fonte: Autoria própria.

Realizando a passagem do ruído pelo filtro obtêm-se os seguintes resultados demonstrados pela Figura 9. A partir da imagem, mais especificamente pelo histograma do ruído, se pode concluir que ao passar pelo filtro o mesmo tem sua variância reduzida para valores em torno de 0,2. Outro ponto importante é que mesmo fornecendo uma frequência de corte de 1kHz como parâmetro, algumas frequências maiores a isso permaneceram devido ao fato do filtro gerado não ser ideal.

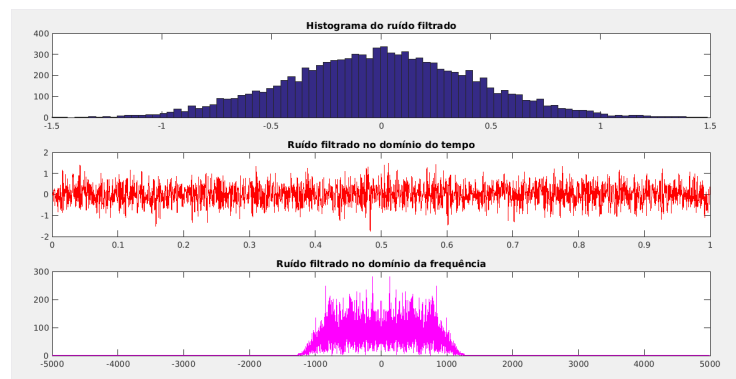


Figura 9. Histograma do ruído e suas representações no domínio do tempo e da frequência após passagem pelo FPB. Fonte: Autoria própria.

Por fim, a última análise realizada foi em relação a função autocorrelação do ruído após a filtragem, na qual está retratada pela Figura 10. Pela figura é possível perceber que o sinal de saída possui uma função sinc como autocorrelação, e a explicação para isto é a seguinte:

1) Ruído antes do filtro: Antes da passagem pelo filtro, o ruído seguia uma distribuição normal (ruído branco) e possuía $R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ e $G_x(f) = \frac{N_0}{2}$.

2) Ruído após o filtro: Ao passar pelo filtro ocorre o seguinte processo entre os sinais: $G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$. Sendo $G_y(f)$ a densidade espectral do sinal da saída do sistema, $G_x(f)$ a densidade espectral do sinal da entrada e $|H(f)|^2$ o módulo ao quadrado da resposta em frequência do filtro.

Desta forma, na saída haverá $G_y(f) = \frac{N_0}{2}$ para $f > f_{corte}$ e $G_y(f) = 0$, caso contrário, ou seja, uma função rect limitada em $-f_{corte}$ e f_{corte} . Agora, para se obter a $R_y(\tau)$ basta apenas realizar a Transformada Inversa de Fourier da $G_y(f)$. Os processos para esta etapa são os seguintes:

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2} \text{rect}(f/2f_{corte})\right\}$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\frac{1/2}{f_{corte}} \frac{N_0}{2} \text{rect}(f/2f_{corte})}{\frac{1/2}{f_{corte}}}\right\}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \text{sinc}(2f_{corte}\tau)$$

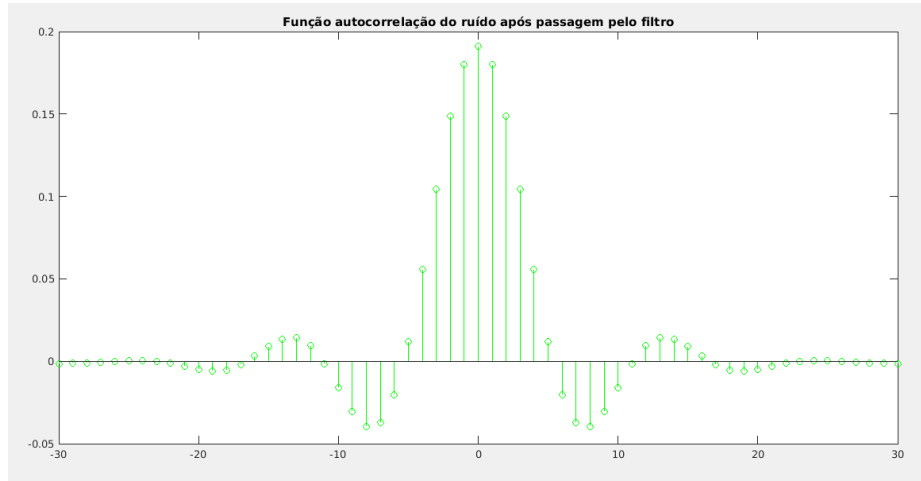


Figura 10. Função autocorrelação do ruído após passagem pelo filtro. Fonte: Autoria própria.

4 Considerações Finais

Ao término da pesquisa, ficou evidente o quão importante é possuir os conhecimentos iniciais a respeito da área de sinais. Através das questões foi possível visualizar na prática todos os conceitos estudados teoricamente em outras disciplinas passadas do curso.

Cada uma das questões trabalhadas abordaram de forma concisa uma parte do conteúdo proposto pelo laboratório. Na primeira questão, foi possível analisar o conceito de Transformada de Fourier, podendo se analisar graficamente os espectros pertencentes aos sinais gerados.

Na segunda questão, foi trabalhada as principais características de operações com filtros (filtros ideais) recuperando os sinais que originaram o sinal $[s]$. E por fim, na terceira questão foram abordados conceitos referentes ao ruído branco, podendo analisar suas características como histograma, representação na frequência e função autocorrelação assim como o seu resultado após a passagem por um filtro, que gerou uma diminuição na sua variância e alteração da sua função autocorrelação.

Referências

1. B. P. Lathi. Sinais e sistemas lineares. (ed. 2):pag. 678, 2004.
2. Sergio L. Netto Paulo S. R. Diniz, Eduardo A. B. da Silva. Processamento digital de sinais: Projeto e análise de sistemas. (ed. 2):pag. 123, 2014.
3. Bernard Sklar. Digital communications: Fundamentals and applications. (ed. 2):pag. 19, 2014.