Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824 - Tópicos em Otimização Combinatória

Relaxação Lagrangeana

Cid Carvalho de Souza

Setembro de 2005

Relaxação Lagrangeana

- Problema original:

$$
\begin{array}{lll}
IP & z = \max cx & \\
\text{s.a.} & Ax \leq b, & \\
 & Dx \leq d, & \text{(restrições complicadoras)} \\
 & x \in \mathbb{Z}^n_+ &
\end{array}
$$

- $X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\}$.
- $z' = \max\{cx : x \in X\}$ *é fácil !*
    - z' é um limite superior (dual) de z !
    - solução ótima de X em geral não satisfaz $Dx \leq d$.
- Para todo $u \in \mathbb{R}^m_+$, o **problema lagrangeano** é dado por:

$$
\begin{array}{ll}
IP(u) & z = \max cx + u(d - Dx) \\
\text{s.a.} & x \in X
\end{array}
$$

- **Proposição 1**: $IP(u)$ é uma relaxação de IP.
- Portanto, a idéia é levar as restrições complicadoras para a função objetivo, penalizando-as com o vetor u.
- A penalidade u_i associada à restrição $D_i x \leq d_i$ é chamada de multiplicador de Lagrange desta restrição.
- **Pergunta**: qual é o conjunto de multiplicadores que corresponde ao melhor limitante dual $z(u)$ para z ?
- **Problema dual Lagrangeano**:

$$(DL) \qquad w = \min\{z(u) : u \geq 0\}.$$

  Observação: se as restrições complicadoras forem de igualdade, o vetor u torna-se irrestrito em sinal.

- **Proposição 2**: Para $u \geq 0$, se
  (i) $\overline{x}$ é solução ótima de $IP(u)$ e
  (ii) $D\overline{x} \leq d$ e
  (iii) $D_i\overline{x} = d_i$ sempre que $u_i > 0$,
  então $\overline{x}$ é ótimo de IP.

  Prova: ... $\square$
- Observação 1: a condição (iii) representa uma complementaridade de folga.
- Observação 2: se as restrições complicadoras forem de igualdade, um ponto $\overline{x}$ satisfazendo (i) e (ii) já é uma solução ótima para IP !
- Terminologia: ao se aplicar a relaxação lagrangena, diz-se que as restrições complicadoras foram dualizadas.

- Relaxação lagrangeana para o problema de localização de facilidades (UFL):

$$
\begin{array}{llll}
(IP) & \max & z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in N} f_j y_j & \\
& \text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \qquad \forall\ i \in M, & \leftarrow \text{dualizar} \\
& & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\ i \in M, j \in N, & \\
& & x \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{B}^n &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(IP(u)) & \max & z(u) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i) x_{ij} \\
& & \qquad - \sum_{j \in N} f_j y_j + \sum_{i \in M} u_i \\
& \text{s.a.} & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\ i \in M, j \in N, \\
& & x \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{B}^n
\end{array}
$$

- $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - u_i$: custos lagrangeanos.
- Como se resolve $IP(u)$?

- Decompor $(IP(u))$ em n subproblemas: um por facilidade.

$$
\begin{array}{lll}
(IP_j(u)) & \max & z_j(u) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i) x_{ij} - f_j y_j \\
& \text{s.a.} & x_{ij} - y_j \leq 0, \qquad \forall\ i \in M \\
& & x \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{B}^n
\end{array}
$$

- Resolver $IP_j(u)$ por inspeção !

$$
z_j(u) = \max\{0, \sum_{i \in M} \max\{c_{ij} - u_i, 0\} - f_j\}
$$

- Exemplo: $m = 6,\ n = 5$ e

$$
c = \begin{bmatrix}
6 & 2 & 1 & 3 & 5 \\
4 & 10 & 2 & 6 & 1 \\
3 & 2 & 4 & 1 & 3 \\
2 & 0 & 4 & 1 & 4 \\
1 & 8 & 6 & 2 & 5 \\
3 & 2 & 4 & 8 & 1
\end{bmatrix}
$$

- para $f = (2,4,5,3,3)$ e $u = (5,6,3,2,5,4)$ a matriz de custos do problema lagrangeano torna-se:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & z_1(u) = z_3(u) = z_5(u) = 0 \\ & z_2(u) = 3 \\ & z_4(u) = 1 \\ & z(u) = \textstyle\sum_{j \in N} z_j(u) + \sum_{i \in M} u_i \\ & z(u) = 3 + 1 + 25 = 29. \end{aligned}$$

- Problema simétrico do caixeiro viajante (TSP):

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & z = \sum_{e \in E} c_e x_e \\ & \text{s.a.} & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \ \forall\, i \in V, \qquad \leftarrow \text{dualizar para } i \neq 1 \\ & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \ \forall\, 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\ & & \left(\displaystyle\sum_{e \in E} x_e = |V| \right), \qquad x \in \mathbb{B}^{|E|}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (IP(u)) & \min & z = \displaystyle\sum_{(i,j) \in E, 1 < i < j \leq n} (c_{ij} - u_i - u_j) x_{ij} + \\ & & \displaystyle\sum_{(1,j) \in E} (c_{1j} - u_j) x_{1,j} + 2 \sum_{i \in V - \{1\}} u_i \\ & \text{s.a.} & \sum_{e \in \delta(1)} x_e = 2, \\ & & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \ \forall\, 2 \leq |S| \leq |V| - 1, 1 \notin S \\ & & \left(\displaystyle\sum_{e \in E} x_e = |V| \right), \qquad x \in \mathbb{B}^{|E|}. \end{array}$$

- Como se resolve $IP(u)$? $IP(u)$ equivale a encontrar uma 1-árvore mínima para os custos lagrangeanos.

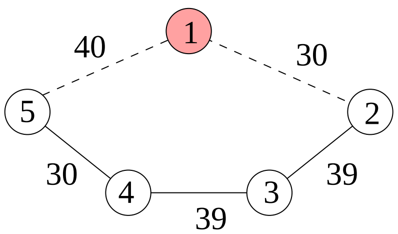
- Observação 1: o problema dual lagrangeano é de maximização.
- Observação 2: as restrições dualizadas são de igualdade. Logo, os multiplicadores de Lagrange são irrestritos em sinal.
- Exemplo: grafo completo com $n = 5$ vértices (K_5) com matriz de custos dada por

$$c = \begin{bmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ & - & 24 & 40 & 50 \\ & & - & 24 & 26 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$

- se $u_2 = u_4 = u_5 = 0$ e $u_3 = -15$, os custos lagrangeanos são:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} - & 30 & 41 & 50 & 40 \\ & - & 39 & 40 & 50 \\ & & - & 39 & 41 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$

- 1-árvore ótima para $IP(u)$:



$$z(u) = 30 + 40 + 39 + 39 + 30 + 2\sum_{i=2}^{4} u_i$$

$$z(u) = 178 - 30 = 148 \leq z$$

Pela **Proposição 2** essa solução é ótima

1. Qual a qualidade do limitante dual obtido ao resolver o dual lagrangeano ?
2. Como se pode resolver o dual lagrangeano ?

- Qualidade do limitante:
  - supor que $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^T\}$, com T finito;
  - $w = \min\{z(u) : u \geq 0\} =$
    $\min\{\max\{x \in X : cx + u(d - Dx)\} : u \geq 0\}$, ou
    $w = \min_{u \geq 0} \left\{ \max_{t \in \{1,\ldots,T\}} \{cx^t + u(d - Dx^t)\} \right\}.$
    Logo w pode ser calculado pelo seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} w = \min \eta & \\ \eta \geq cx^t + u(d - Dx^t), \quad t = 1, \ldots, T, & (\mu_t) \\ u \in \mathbb{R}^m_+, \eta \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

  - Vamos escrever o dual deste problema: (assumir que o ótimo é finito)

- dual:

$$\begin{array}{ll} \max & w = \sum_{t=1}^{T} \mu_t(cx^t) \\ \text{s.a.} & \sum_{t=1}^{T} \mu_t(Dx^t - d) \leq 0, \\ & \sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1, \mu \in \mathbb{R}^T_+. \end{array}$$

- Fazendo-se $x = \sum_{t=1}^{T} \mu_t x^t$, como $\sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1$ e $\mu \in \mathbb{R}^T_+$, chega-se a conclusão de que x é uma combinação convexa dos pontos x^t. Portanto, tem-se que:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & w = \max cx \\ \text{s.a.} & Dx \leq d, \\ & x \in \text{conv}(X). \end{array}}$$

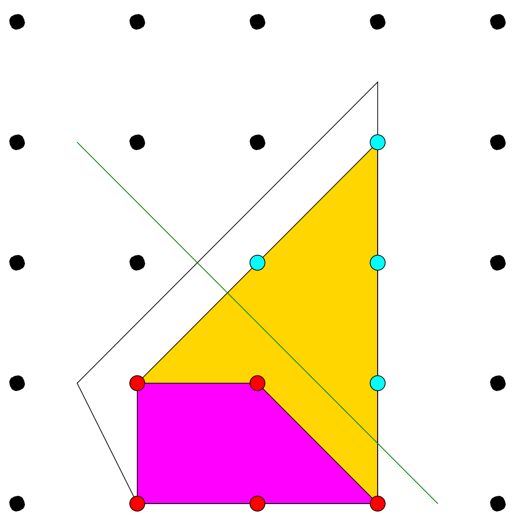
- **Teorema 3**: $w = \max\{cx : Dx \leq d, x \in \text{conv}(X)\}$.

- Nota: resolvendo o problema dual lagrangeano obtém-se um limitante superior equivalente aquele que seria obtido resolvendo o LP formado pelas restrições complicadoras e todas as restrições que descrevem a envoltória convexa das soluções inteiras de $Ax \leq b$.

- **Corolário 4**: Se $X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\}$ e $\mathtt{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ então $w = \max\{cx : Ax \leq b, Dx \leq d, x \in \mathbb{R}^n_+\}$.

- Quando a situação do Corolário 4 ocorre, diz-se que a relaxação tem a *propriedade da integralidade*.

- Exemplo: a relaxação do problema simétrico do caixeiro viajante usando 1-árvores tem a propriedade de integralidade. A vantagem do dual lagrangeano é que um LP com um número exponencial de restrições é resolvido sem representá-lo explicitamente !



$$S = \left\{ \begin{array}{c} Ax \leq b \\ Dx \leq d \\ x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{array} \right\}; \quad Q = \left\{ \begin{array}{c} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{array} \right\}; \quad R_{LP} = \left\{ \begin{array}{c} Ax \leq b \\ Dx \leq d \\ x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \right\};$$

$$R_{LD} = \mathtt{conv}(Q) \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Dx \leq d\}$$

- Note que $\texttt{conv}(S) \subseteq R_{LD} \subseteq R_{LP}$, logo

$$\boxed{z_{IP} \leq z_{LD} \leq z_{LP}}$$

- $$R_{LD} = \texttt{conv}(Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Dx \leq d\}) \\ \Updownarrow \\ \forall c \in \mathbb{R}^n, z_{IP} = z_{LD}.$$

- $$\texttt{conv}(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\} \\ \Updownarrow \\ \forall c \in \mathbb{R}^n, z_{LD} = z_{LP}.$$

- Resolvendo o dual Lagrangeano:
  - alternativa 1: usar um algoritmo de otimização por subgradientes;
  - alternativa 2: usar PL e um algoritmo de planos de corte.

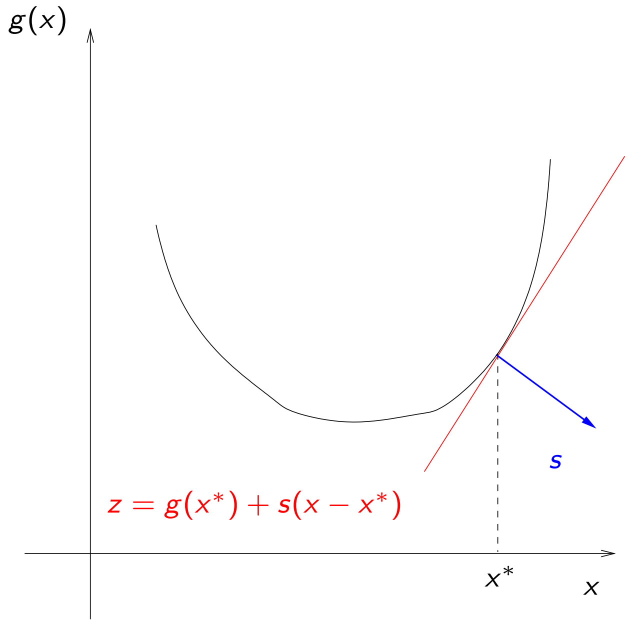
- **Definição 5**: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma **função convexa** se, para todos pontos x e y de $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$,
$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

- **Proposição 6**: $z(u) = \max\{cx + u(d - Dx)\}$ é convexa.

Prova: $\begin{cases} w = \lambda u + (1 - \lambda)v \\ z(w) = c\overline{x} + w(d - D\overline{x}) \qquad (\overline{x} \in X) \end{cases}$

$$\begin{array}{lcll} z(u) & \geq & c\overline{x} + u(d - D\overline{x}) & [\lambda] \\ z(v) & \geq & c\overline{x} + v(d - D\overline{x}) & [1 - \lambda] \\ & & & \\ \lambda z(u) + (1 - \lambda)z(v) & \geq & z(w) & \square. \end{array}$$

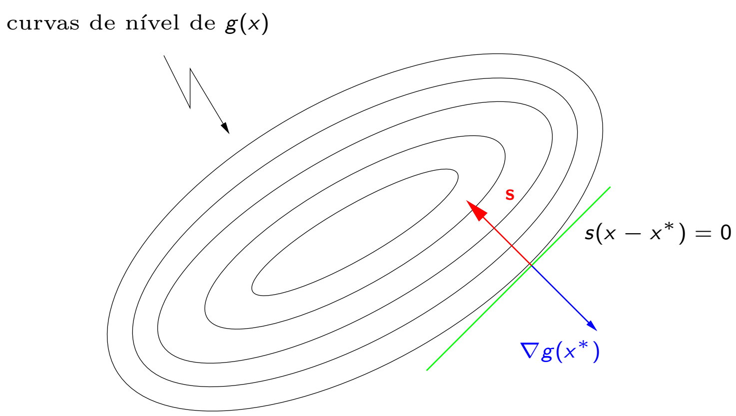
- **Proposição 7**: uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa *se e somente se*, para todo $x^* \in \mathbb{R}^n$ existe $s \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x^*) + s(x - x^*) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.



- Estando em x^*, que direção deve ser seguida de modo a minimizar $g(x)$?

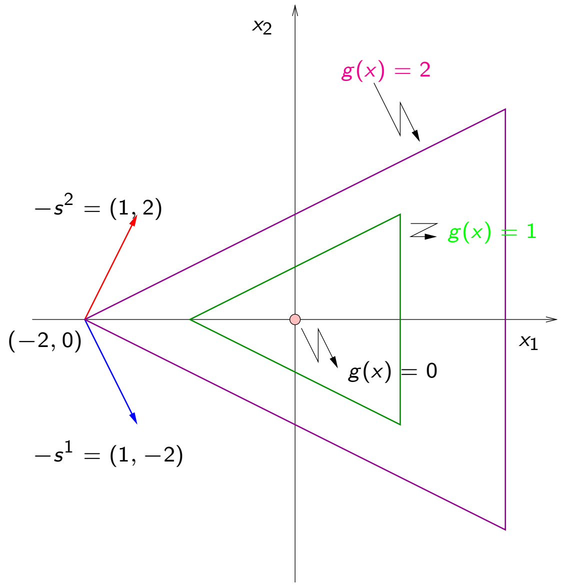
  Usando a Proposição 7, se x é tal que $g(x) < g(x^*)$, então necessariamente $s(x - x^*) < 0$. Ou seja, movendo na direção oposta àquela de s, $g(.)$ irá diminuir de valor !

- Como achar s ? Se g é diferenciável em x^*, fazer $s = -\nabla g(x^*)$ (gradiente de g em x^*).



- E se $g(.)$ é convexa mas não for diferenciável ?

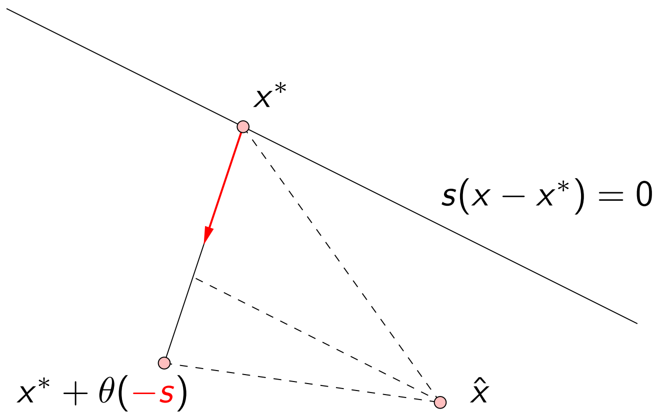
$$g(x_1, x_2) = \max\{x_1, -x_1 + 2x_2, -x_1 - 2x_2\}$$



- $s^1 = (-1, 2)$
- $s^2 = (-1, -2)$
- o hiperplano suporte não é único em $(-2, 0)$!
- as direções $-s^1$ e $-s^2$ não são de descida !

- $\boxed{\text{Pelo menos sabemos que a solução ótima satisfaz } s(x - x^*) < 0 \text{ !}}$

- Portanto, é possível sair de x^* e dar um passo *pequeno* na direção $-s$ de modo a me aproximar mais de um ponto ótimo $\hat{x}$.



- **Definição 8**: se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então s é um **subgradiente** de g em x^* *se e somente se* $s(x - x^*) \leq g(x) - g(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

  O **subdiferencial** $(\delta g(x^*))$ de g em x^* é o conjunto de todos os subgradientes de g neste ponto.

- **Proposição 9**: Se g é convexa e $0 \in \delta g(x^*)$ então $g(x^*) = \min\{g(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, ou seja, x^* é **ótimo**.

- Em teoria: se queremos minimizar uma função convexa g, basta começar de um ponto qualquer e iterativamente ir se deslocando a pequenos passos na direção oposta àquela de um subgradiente de g naquele ponto até que 0 pertença ao subdiferencial do ponto corrente.

- Como calcular um subgradiente de $z(u) = \max\{cx + u(d - Dx) : x \in X\}$ no ponto u ?

- **Proposição 10**: Seja $\overline{x} \in X$ tal que $z(u) = c\overline{x} + u(d - D\overline{x})$. Então, $(d - D\overline{x})$ é um subgradiente de $z(u)$ em u.

  Prova:

  $z(v) \geq cx + v(d - Dx), \forall x \in X,$ logo
  $z(v) \geq c\overline{x} + v(d - D\overline{x})$.

  Mas, $c\overline{x} = z(u) - u(d - D\overline{x})$, portanto,
  $z(v) \geq z(u) + (v - u)(d - D\overline{x})$. $\square$

- O **algoritmo de subgradiente** para resolver o problema dual lagrangeano:

> Inicialização: $k = 0$, escolher u^0.
> Iteração k:
> - $u = u^k$;
> - Resolver $IP(u^k)$. Seja $x(u^k)$ uma solução ótima.
> - Passo na direção oposta ao subgradiente: $u^{k+1} \leftarrow \max\{u^k - \mu_{\mathbf{k}}(d - Dx(u^k)), 0\}$
> - $k \leftarrow k + 1$;
> - Se o **critério de parada** não está satisfeito, **execute** mais uma iteração.

- μ é chamado de **tamanho do passo**.
- Qual o tamanho do passo que deve ser dado ? (problemas de convergência)

- **Teorema 11**:
  (a) Se $\sum_k \mu_k \to \infty$ e $\mu_k \to 0$ então $z(u^k) \to w_{LD}$.
  (b) Se $\mu_k = \mu_0 \rho^k$, com $\rho < 1$ e μ_0 e ρ são suficientemente grandes, então $z(u^k) \to w_{LD}$.
  (c) Se $\overline{w} \geq w_{LD}$ e $\mu_k = \epsilon \frac{z(u^k) - \overline{w}}{\|d - Dx(u^k)\|^2}$ com $0 < \epsilon < 2$, então $z(u^k) \to \overline{w}$, ou o algoritmo encontra u^k com $\overline{w} \geq z(u^k) \geq w_{LD}$ para algum k finito.

- **Comentários**:
  (a) converge lentamente !
  (b) dificuldade em escolher μ_0 e ρ "altos".
  Na prática só faz decréscimo geométrico do passo após um número constante de iterações.
  (c) dificuldade em encontrar um limitante superior $\overline{w}$.
  Na prática, usa-se uma estimativa para o limitante superior, mas isto não garante convergência !
  Esta estimativa muitas vezes é substituída pelo melhor limitante primal conhecido ... (ver discussão no livro texto)
  É o método mais usado !

Método do Subgradiente aplicado ao TSP simétrico

- restrições dualizadas: grau dos nós $(= 2)$.
- Direção do passo:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \mu_k \left(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e(u^k) \right).$$

- tamanho do passo (regra (c)):

$$\mu_k = \epsilon_k(\underline{w} - z(u^k)) / \sum_{i \in V} (2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e(u^k))^2.$$

- **Nota**: o problema dual neste caso é de maximização e os multiplicadores são irrestritos em sinal.

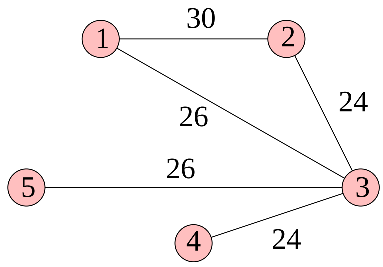
- Instância: grafo completo com 5 nós e custos dados por

$$c = \begin{bmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ & - & 24 & 40 & 50 \\ & & - & 24 & 26 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$

- Uma solução heurística: *tour* $\{1, 2, 3, 4, 5, 1\}$ de custo 148.
- Método do subgradiente com a regra (c) e $\epsilon_k = 1$ ...

- Iteração 1: supondo $u^1 = \{0,0,0,0,0\}$, a matriz de custos lagrangeanos coincide com a matriz original.

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} - & 30 & 26 & 50 & 40 \\ & - & 24 & 40 & 50 \\ & & - & 24 & 26 \\ & & & - & 30 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$



- 1-árvore ótima com custo $z(u^1) = 130$;
- subgradiente em u^1:

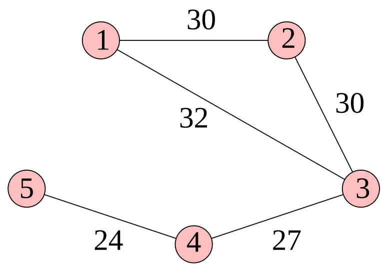
$$(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e(u^1))_{i=1,\dots,5} = (0,0,-2,1,1).$$

- atualização dos multiplicadores:

$$u^2 = u^1 + 1.[(148-130)/6](0,0,-2,1,1)$$
$$u^2 = (0,0,-6,3,3)$$

- Iteração 2: para $u^2 = (0,0,-6,3,3)$, a matriz de custos lagrangeanos é dada por:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} - & 30 & 32 & 37 & 47 \\ & - & 30 & 37 & 47 \\ & & - & 27 & 29 \\ & & & - & 24 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$



- 1-árvore ótima com custo $z(u^2) = 143 + 2\sum_i u_i^2 = 143$;
- subgradiente em u^2:

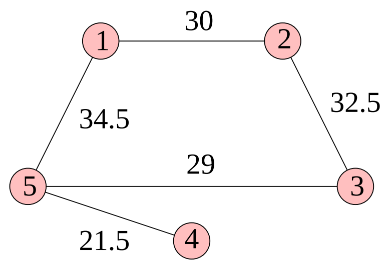
$$(2 - \sum_{e \in \delta(i)} x_e(u^2))_{i=1,\dots,5} = (0,0,-1,0,1).$$

- atualização dos multiplicadores:

$$u^3 = u^2 + 1.[(148-143)/2](0,0,-1,0,1)$$
$$u^3 = (0,0,-8.5,3,5.5)$$

- Iteração 3: para $u^3 = (0, 0, -8.5, 3, 5.5)$, a matriz de custos lagrangeanos é dada por:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} - & 30 & 34.5 & 47 & 34.5 \\ & - & 32.5 & 37 & 44.5 \\ & & - & 29.5 & 29 \\ & & & - & 21.5 \\ & & & & - \end{bmatrix}$$



- 1-árvore ótima com custo $z(u^2) = 147.5$;
- **solução ótima**: os custos inteiros e já se conhece um limitante superior de 148 !
- A relaxação lagrangeana pode ser usada dentro de um **algoritmo exato** do tipo *branch-and-bound* para produzir os limitantes duais.

Heurísticas Lagrangeanas e Fixação de Variáveis

- **Idéia**: em muitos casos a solução do problema lagrangeano é "quase" viável, sendo possível projetar uma heurística simples que a converte em uma solução do problema original de boa qualidade.
- **Exemplo**: problema do *set covering*

$$z = \min \left\{ \sum_{j \in N} c_j x_j : \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1 \, \forall i \in M, x \in \mathbb{B}^n \right\}.$$

Dualizando-se todas as restrições chega-se a:

$$z(u) = \sum_{i \in M} u_i + \min \left\{ \sum_{j \in N} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) x_j : x \in \mathbb{B}^n \right\},$$

com $u \in \mathbb{R}^m_+$.

Set covering: heurística e fixação de variáveis

- **Heurística Lagrangeana**:

  - $x(u) \leftarrow$ solução do lagrangeano;
  - remover as linhas de M já cobertas por $x(u)$;
  - resolver o SCP remanescente de **forma gulosa** obtendo a solução y;
  - fazer $x^H = x(u) + y$;
  - eliminar redundâncias de x^H
  - **retornar** x^H.

- **Fixando variáveis**:
  A idéia é fazer $x_i = \beta$, com $\beta \in \{0, 1\}$, sempre que for possível garantir que existe uma solução ótima onde $x_i = \beta$.

Set covering: fixação de variáveis

- seja $\bar{z}$ o valor da melhor solução **viável** conhecida. Soluções x de **melhor custo** devem satisfazer a:

$$\sum_{i \in M} u_i + \min_{x \in \mathbb{B}^n} \sum_{j \in N} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) x_j \leq cx < \bar{z}$$

- $N_1 \doteq \{j \in N : c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij} \geq 0\}$: ou seja, N_1 são os índices das variáveis em ZERO na solução do Lagrangeano.
- $N_0 \doteq \{j \in N : c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij} < 0\}$: ou seja, N_0 são índices das variáveis em UM na solução do Lagrangeano.
- **Teorema 12**: Se $k \in N_1$ e $\sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N_0} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) + (c_k - \sum_{i \in M} u_i a_{ik}) \geq \bar{z}$ então $x_k = 0$ para qualquer solução viável **melhor**.
  Se $k \in N_0$ e $\sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N_0 - \{k\}} (c_j - \sum_{i \in M} u_i a_{ij}) \geq \bar{z}$ então $x_k = 1$ para qualquer solução viável **melhor**.

Set covering: exemplo

- **Instância**: $m = 4$, $n = 6$, $c = (6, 6, 11, 5, 8, 8)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Para $u = (4, 4, 3, 3)$, tem-se que IP(u) é dado por:

$$z(u) = 14 + \min\{-x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : x \in \mathbb{B}^6\}.$$

- Logo, $x(u) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $z(u) = 13$.

Set covering: exemplo (cont.)

- **Problema** SCP **reduzido**: (remove linhas 1 e 3 !)

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 8x_6 \\ & x_4 + x_5 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ & x \in \mathbb{B}^6 \end{array}$$

- **Solução heurística do** SCP **reduzido**:
  $y = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \Longrightarrow x^H = x(u) + y = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$

  custo: $\overline{z} = 14$ (o valor ótimo é 13 ou 14 !)

- No Teorema 12, temos que $N_0 = \{1\}$ e $N_1 = \{3, 4, 5, 6\}$ e, qualquer solução com custo menor que 14 deve satisfazer $x_1 = 1$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. $\square$

Escolha da Relaxação Lagrangeana

- $$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s.a.} & A^1 x \leq b^1, \\ & A^2 x \leq b^2, \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{array}$$
- **O que dualizar: $A^1 x \leq b^1$, $A^2 x \leq b^2$ ou ambos ?**
- **Considerar**:
  - (i) a *"força"* do limitante w_{LD} dado pelo dual lagrangeano;
  - (ii) a facilidade de resolver o Problema Lagrangeano;
  - (iii) a facilidade de resolver o Problema dual Lagrangeano.
- **Análise**:
  - (i) Teorema 3;
  - (ii) depende do problema específico que se está resolvendo;
  - (iii) **difícil prever !** número de multiplicadores pode ser um bom indício: mais multiplicadores, mais difícil ...

Exemplo: *Generalized assignment*

- $$\begin{array}{lll} \max & z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1, \ \forall i \in M, & (\dagger) \\ & \sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j \in N, & (\ddagger) \\ & x \in \mathbb{B}^{m \times n} & \end{array}$$
- **Relaxação 1**: dualizar restrições em $(\dagger)$ e em $(\ddagger)$

$$w^1(u, v) = \max_{x \in \mathbb{B}^{m \times n}} \{ \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i - a_{ij} v) x_{ij} + \sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N} v_j b_j \}$$

- **Relaxação 2**: dualizar restrições em $(\dagger)$

$$\begin{array}{ll} w^2(u) = & \max \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - u_i) x_{ij} + \sum_{i \in M} u_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \leq b_j, \ \forall j \in N, \\ & x \in \mathbb{B}^{m \times n} \end{array}$$

Generalized assignment (cont.)

- **Relaxação 3**: dualizar restrições em (‡)

$$
\begin{array}{ll}
w^3(v) = & \max \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} (c_{ij} - a_{ij} v_j) x_{ij} + \sum_{j \in N} v_j b_j \\
\text{s.a.} & \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1, \ \forall i \in M, \\
 & x \in \mathbb{B}^{m \times n}
\end{array}
$$

- **Análise**:
  - $w^1_{LD} = w^3_{LD} = z_{LP}$ com $w^1(u, v)$ e $w^3(v)$ podem ser calculados por inspeção.
  - A relaxação 3 tem menos multiplicadores que a relaxação 1.
  - As restrições (‡) são do tipo **mochila**. Portanto, para A e b inteiros, a relaxação 2 pode ser computada através da resolução por Programação Dinâmica de n mochilas binárias. Como as restrições (‡) sozinhas não dão a envoltória convexa das soluções inteiras do problema da mochila binária, o **Teorema 3** garante que $w^2_{LD} \leq z_{LP}$.