Transformación de dominio y la transformada rápida de Fourier

IIC2283

Representación de un polinomio

La representación canónica de un polinomio $p(x)$ no nulo es:

$$p(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

donde $n \geq 1$, $a_{n-1} \neq 0$ y el grado de $p(x)$ es $n - 1$

Los coeficientes a_i de $p(x)$ son números racionales

- Pero vamos a evaluar estos polinomios tanto sobre números racionales como sobre números reales y complejos

Representación de un polinomio

La representación canónica de un polinomio $p(x)$ no nulo es:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

donde $n \geq 1$, $a_{n-1} \neq 0$ y el grado de $p(x)$ es $n - 1$

Los coeficientes a_i de $p(x)$ son números racionales

- Pero vamos a evaluar estos polinomios tanto sobre números racionales como sobre números reales y complejos

Representamos $p(x)$ a través del vector $(a_0, \ldots, a_{n-1})$

- También podemos representar $p(x)$ como un vector $(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ donde cada términos x^i tiene coeficiente 0 si $i \geq n$

Suma de polinomios

La suma de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ tal que:

$$c_i = a_i + b_i \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Suma de polinomios

La suma de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ tal que:

$$c_i \quad = \quad a_i + b_i \qquad\qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Consideramos a la suma y multiplicación de números en $\mathbb{C}$ como las operaciones básicas a contar.

- La suma de dos polinomios puede ser calculada en tiempo $O(n)$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ tal que:

$$c_i \quad = \quad \sum_{k,\ell \in \{0,\ldots,n-1\} \,:\, k+\ell=i} a_k \cdot b_\ell \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, 2n-2\}$$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ tal que:

$$c_i \quad = \quad \sum_{k,\ell \in \{0,\ldots,n-1\} \,:\, k+\ell=i} a_k \cdot b_\ell \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, 2n-2\}$$

La multiplicación de dos polinomios puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ tal que:

$$c_i \quad = \sum_{k,\ell \in \{0,\ldots,n-1\} \,:\, k+\ell=i} a_k \cdot b_\ell \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, 2n-2\}$$

La multiplicación de dos polinomios puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$

- ¿Podemos realizar esta operación en un orden menor?

Una representación alternativa de un polinomio

Un polinomio $p(x)$ de grado $n-1$ se puede representar de manera única a través de un conjunto de n pares de puntos-valores:

$$\{(v_0, p(v_0)), (v_1, p(v_1)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}))\},$$

suponiendo que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$

Ejemplo

El polinomio $p(x) = 1 + x + x^2$ es representado de manera única a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(0,1), (1,3), (2,7)\}$$

y también a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(-2,3), (0,1), (5,31)\}$$

Una representación alternativa de un polinomio

Un polinomio $p(x)$ de grado $n-1$ también se puede representar de manera única a través de un conjunto de pares de puntos-valores con $m > n$ elementos:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{m-1}, p(v_{m-1}))\},$$

suponiendo que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$

Ejemplo

El polinomio $p(x) = 1 + 2x$ es representado de manera única a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(0,1), (1,3), (2,5)\}$$

y también a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(-2,-3), (0,1), (5,11), (7,15)\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios de grado $n-1$ representados por:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}))\}$$
$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1}))\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios de grado $n-1$ representados por:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}))\}$$
$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1}))\}$$

El polinomio $r(x) = p(x) + q(x)$ es representado por:

$$\{(v_0, p(v_0) + q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}) + q(v_{n-1}))\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Suponga que se agrega n puntos a las representaciones de $p(x)$ y $q(x)$:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\}$$

$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1})), (v_n, q(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\}$$

El polinomio $s(x) = p(x) \cdot q(x)$ es representado por:

$$\{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Suponga que se agrega n puntos a las representaciones de $p(x)$ y $q(x)$:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\}$$
$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1})), (v_n, q(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\}$$

El polinomio $s(x) = p(x) \cdot q(x)$ es representado por:

$$\{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\}$$

¡Podemos sumar y multiplicar polinomios en tiempo $O(n)$ si están representados por pares de puntos-valores!

- Suponiendo que usamos los mismos puntos v_0, v_1, ..., v_{2n-1}

La situación hasta ahora

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}) \\ q(x) \mapsto (b_0, \dots, b_{n-1}) \end{array}} \arrow[d, "O(n^2)"'] \\
\boxed{p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \dots, c_{2n-2})}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0)), \dots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\} \\ q(x) \mapsto \{(v_0, q(v_0)), \dots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[d, "O(n)"] \\
\boxed{\begin{array}{r} p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \dots \\ \dots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\} \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

La situación hasta ahora

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1}) \\ q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1}) \end{array}} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "O(n^2)"'] & \boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\} \\ q(x) \mapsto \{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[d, "O(n)"] \\
\boxed{p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})} & \boxed{\begin{array}{l} p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \ldots \\ \qquad \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[l, "?"]
\end{tikzcd}
$$

De la representación canónica a la de puntos-valores

Ejercicio

Dado un polinomio $p(x)$ de grado n en su representación canónica y un punto v, de un algoritmo que calcule $p(v)$ en tiempo $O(n)$

De la representación canónica a la de puntos-valores

Ejercicio

Dado un polinomio $p(x)$ de grado n en su representación canónica y un punto v, de un algoritmo que calcule $p(v)$ en tiempo $O(n)$

Podemos entonces pasar de la representación canónica a la de puntos-valores en tiempo $O(n^2)$

De la representación puntos-valores a la canónica

Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n-1$ dado por una representación punto-valores:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{m-1}, p(v_{m-1}))\},$$

donde $m \geq n$

Podemos pasar a la representación canónica de $p(x)$ utilizando fórmula de Lagrange:

$$p(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{m-1} p(v_i) \cdot \left(\prod_{j \in \{0,\ldots,m-1\} \,:\, j \neq i} \frac{(x - v_j)}{(v_i - v_j)} \right)$$

De la representación puntos-valores a la canónica

Ejercicio

Dado un polinomio $p(x)$ representando por el conjunto de punto-valores $\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\}$, muestre que la fórmula de Lagrange permite construir la forma canónica de $p(x)$ en tiempo $O(n^2)$

Todavía no tenemos un algoritmo más rápido para multiplicar polinomios

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1}) \\ q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1}) \end{array}} \arrow[r, "O(n^2)"] \arrow[d, "O(n^2)"'] & \boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\} \\ q(x) \mapsto \{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[d, "O(n)"] \\
\boxed{p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})} & \boxed{\begin{array}{l} p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \ldots \\ \qquad \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[l, "O(n^2)"]
\end{tikzcd}
$$

La solución: la transformada rápida de Fourier

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}) \\ q(x) \mapsto (b_0, \dots, b_{n-1}) \end{array}} \arrow[r, "O(n \cdot \log_2(n))"] \arrow[d, "O(n^2)"'] & \boxed{\begin{array}{l} p(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0)), \dots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\} \\ q(x) \mapsto \{(v_0, q(v_0)), \dots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[d, "O(n)"] \\
\boxed{p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \dots, c_{2n-2})} & \boxed{\begin{array}{r} p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \dots \\ \dots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\} \end{array}} \arrow[l, "O(n \cdot \log_2(n))"]
\end{tikzcd}
$$

La solución: la transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier nos va a permitir entonces calcular la multiplicación de dos polinomios de grado $n - 1$ en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

- La idea clave es cómo elegir los puntos $v_0, \ldots, v_{2n-1}$ cuando se calcula la representación como punto-valores de un polinomio de grado $n - 1$

La solución: la transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier nos va a permitir entonces calcular la multiplicación de dos polinomios de grado $n - 1$ en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

- La idea clave es cómo elegir los puntos $v_0, \ldots, v_{2n-1}$ cuando se calcula la representación como punto-valores de un polinomio de grado $n - 1$

Los números complejos y las raíces de la unidad juegan un papel fundamental en la definición de la transformada rápida de Fourier.

La fórmula de Euler

Teorema

Para todo número real x:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

La fórmula de Euler

Teorema

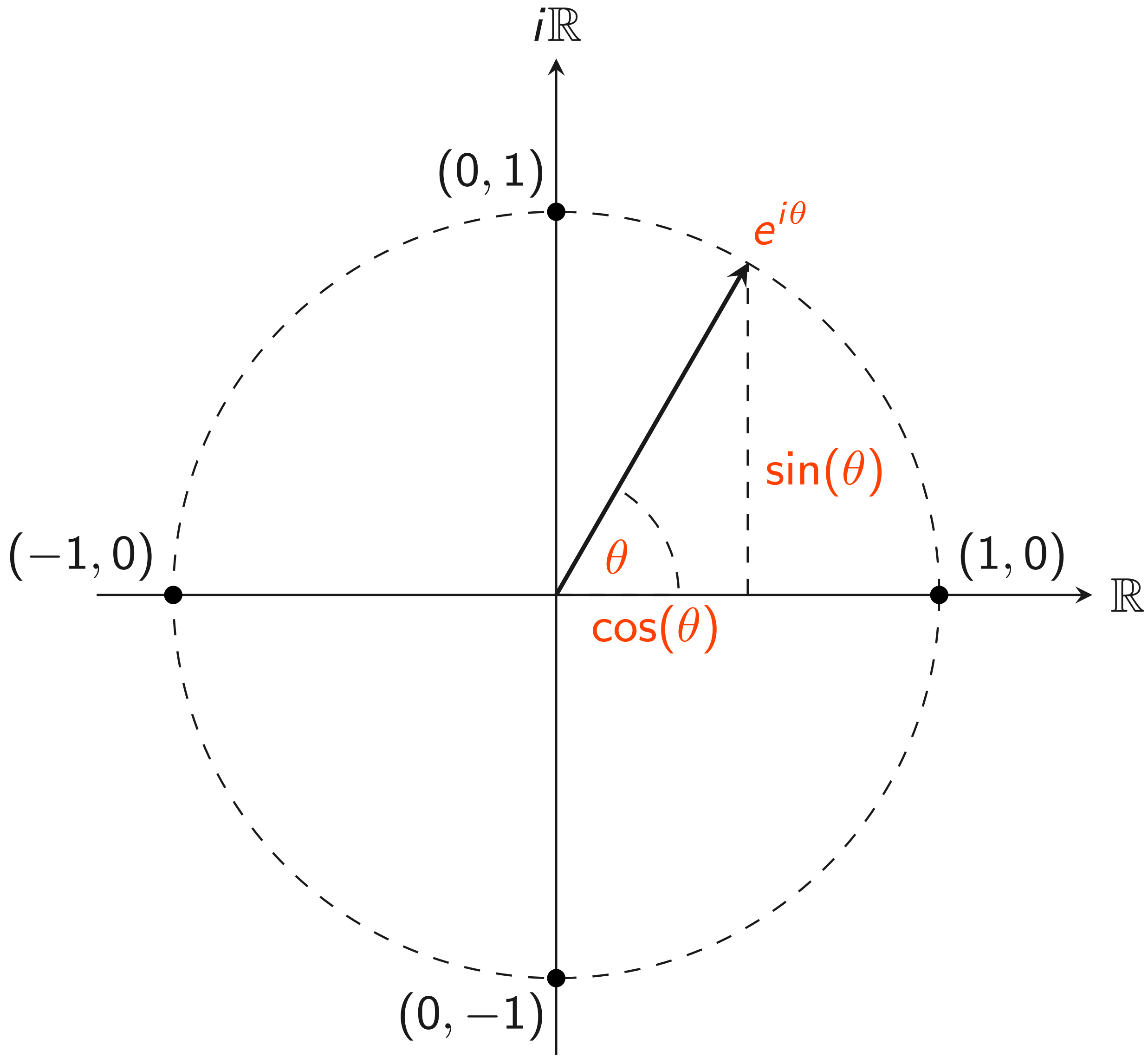
Para todo número real x:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Podemos representar entonces a $e^{i\theta}$ como un vector $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ en el plano complejo.

- $e^{i\theta}$ es un vector unitario: $||e^{i\theta}|| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

La fórmula de Euler: interpretación geométrica



La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Dado $n \geq 1$, queremos encontrar las n raíces del polinomio $p(x) = x^n - 1$

- Sabemos que este polinomio tiene n raíces en los números complejos
- Llamamos a estos elementos las n-raíces de la unidad

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Dado $n \geq 1$, queremos encontrar las n raíces del polinomio $p(x) = x^n - 1$

- Sabemos que este polinomio tiene n raíces en los números complejos
- Llamamos a estos elementos las n-raíces de la unidad

El componente básico para definir las n-raíces de la unidad:

$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Las n-raíces de la unidad son ω_n^0, ω_n^1, ω_n^2, $\ldots$, ω_n^{n-1}

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Las n-raíces de la unidad son ω_n^0, ω_n^1, ω_n^2, ..., ω_n^{n-1}

Si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\omega_n^k)^n &= ((e^{\frac{2\pi i}{n}})^k)^n \\
&= ((e^{\frac{2\pi i}{n}})^n)^k \\
&= (e^{2\pi i})^k \\
&= (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))^k \\
&= 1^k \\
&= 1
\end{aligned}$$

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Además, si $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\omega_n^k = \omega_n^\ell \quad & \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^\ell \\
& \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\ell-k} = 1 \\
& \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi(\ell-k)i}{n}}) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \frac{\ell-k}{n} = 0 \qquad\qquad \text{puesto que } 0 \leq \frac{\ell-k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \\
& \Rightarrow \quad \ell = k
\end{aligned}$$

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Además, si $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\omega_n^k = \omega_n^\ell \quad & \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^\ell \\
& \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\ell-k} = 1 \\
& \Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi(\ell-k)i}{n}}) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
& \Rightarrow \quad \frac{\ell-k}{n} = 0 \qquad\qquad \text{puesto que } 0 \leq \frac{\ell-k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \\
& \Rightarrow \quad \ell = k
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $\omega_n^0, \ldots, \omega_n^{n-1}$ son elementos distintos

Raíces de la unidad: ejemplos

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^4 - 1$?

Raíces de la unidad: ejemplos

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^4 - 1$?

- Considerando $\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi}{2} i}$, tenemos que las 4-raíces de la unidad son:

$$
\begin{aligned}
\omega_4^0 &= 1 \\
\omega_4^1 &= e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = i \\
\omega_4^2 &= (e^{\frac{\pi}{2} i})^2 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \\
\omega_4^3 &= (e^{\frac{\pi}{2} i})^3 = e^{\frac{3\pi}{2} i} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2}) = -i
\end{aligned}
$$

Raíces de la unidad: otro ejemplo

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^5 - 1$?

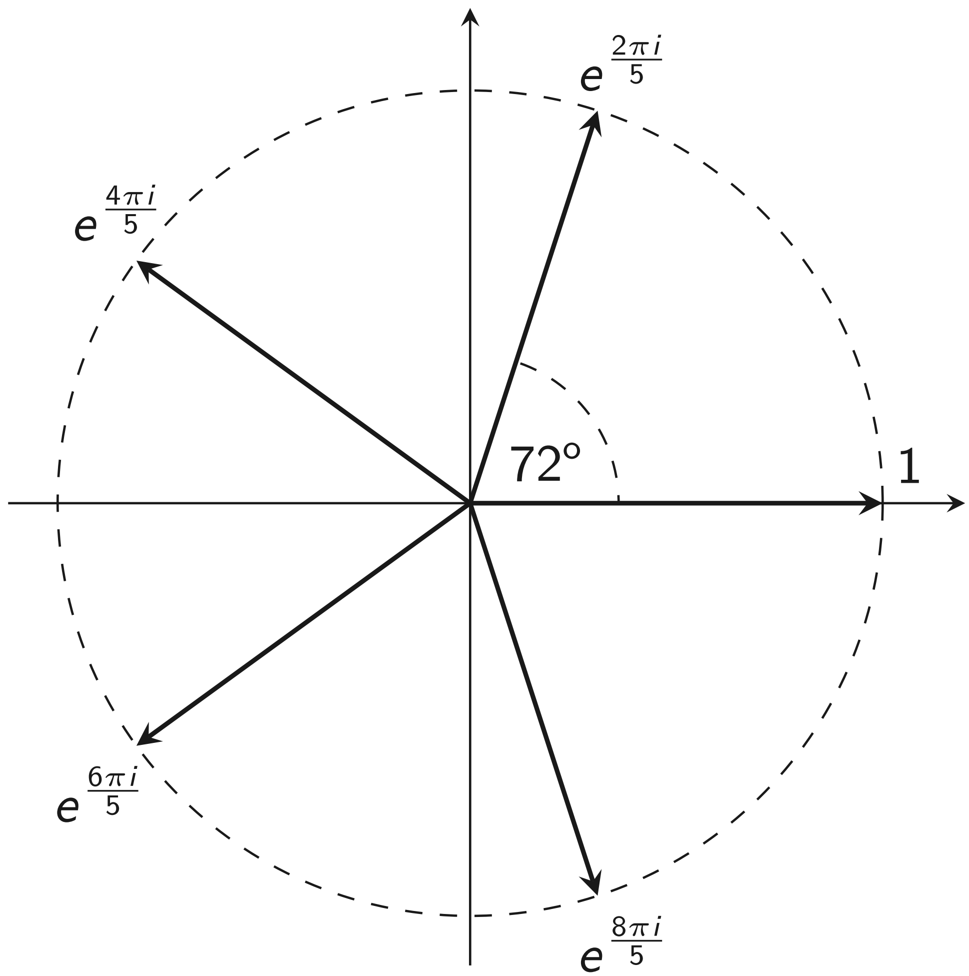
Raíces de la unidad: otro ejemplo

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^5 - 1$? Considerando $\omega_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, tenemos que las 5-raíces de la unidad son 1, $e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $e^{\frac{6\pi i}{5}}$ y $e^{\frac{8\pi i}{5}}$

Raíces de la unidad: otro ejemplo

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^5 - 1$? Considerando $\omega_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, tenemos que las 5-raíces de la unidad son 1, $e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $e^{\frac{6\pi i}{5}}$ y $e^{\frac{8\pi i}{5}}$

Representación geométrica:



La transformada discreta de Fourier

Dado: $n \geq 2$ y un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

La transformada discreta de Fourier

Dado: $n \geq 2$ y un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

Definition

La transformada discreta de Fourier (DFT) de $p(x)$ se define como:

$$[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$$

¿Cómo podemos calcular DFT de manera eficiente?

Representamos $p(x)$ a través del vector $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$

El problema a resolver es calcular de manera eficiente la transformada discreta de Fourier de $p(x)$, la cual denotamos como **DFT**$(\bar{a})$

- Definimos $y_k = p(\omega_n^k)$ para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, de manera tal que queremos calcular **DFT**$(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{n-1}]$

Ejercicio

Muestre que **DFT**$(\bar{a})$ puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$

¿Cómo podemos calcular DFT de manera eficiente?

Suponiendo que n potencia de 2, calculamos $\textbf{DFT}(\bar{a})$ realizando los siguientes pasos:

(1) Calcular $\textbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\textbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para dos vectores $\bar{a}_0$ y $\bar{a}_1$ de largo $\frac{n}{2}$

(2) Combinar $\textbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\textbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para obtener $\textbf{DFT}(\bar{a})$

Es fundamental que el paso (2) sea realizado en tiempo $O(n)$

¿Cómo podemos calcular DFT de manera eficiente?

Suponiendo que n potencia de 2, calculamos $\textbf{DFT}(\bar{a})$ realizando los siguientes pasos:

(1) Calcular $\textbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\textbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para dos vectores $\bar{a}_0$ y $\bar{a}_1$ de largo $\frac{n}{2}$

(2) Combinar $\textbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\textbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para obtener $\textbf{DFT}(\bar{a})$

Es fundamental que el paso (2) sea realizado en tiempo $O(n)$

Ejercicio

Muestre que si el paso (2) es realizado en $c \cdot n$ operaciones, entonces $\textbf{DFT}(\bar{a})$ puede ser calculada en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

La descomposición recursiva

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ x^{2i} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ x^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ x^{2i} + x \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ x^{2i}
\end{aligned}
$$

Definimos los polinomios:

$$
\begin{aligned}
q(z) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ z^{i} \\
r(z) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ z^{i}
\end{aligned}
$$

La descomposición recursiva

Tenemos entonces que $p(x) = q(x^2) + x \cdot r(x^2)$

Para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, tenemos entonces que calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{n-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{n-1})^2)]$$

La descomposición recursiva

Tenemos entonces que $p(x) = q(x^2) + x \cdot r(x^2)$

Para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, tenemos entonces que calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{n-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{n-1})^2)]$$

Pero si $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2 &= \omega_n^{n+2k} \\
&= \omega_n^n \cdot \omega_n^{2k} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^n \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= (e^{2\pi i}) \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= 1 \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= (\omega_n^k)^2
\end{aligned}$$

La descomposición recursiva

Por lo tanto para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, basta con calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$

La descomposición recursiva

Por lo tanto para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, basta con calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$

La pregunta clave: ¿si ω_n^0, ω_n^1, ..., ω_n^{n-1} son las n-raíces de la unidad, quiénes son $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$?

La descomposición recursiva

Por lo tanto para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, basta con calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$

La pregunta clave: ¿si ω_n^0, ω_n^1, ..., ω_n^{n-1} son las n-raíces de la unidad, quiénes son $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$?

- Dado que q y r son polinomios de grado $\frac{n}{2} - 1$, ¿quiénes deberían ser $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ para poder realizar las llamadas recursivas a **DFT**?

La respuesta a la pregunta

Lema

Si $n \geq 2$ *es par, entonces* $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, $\ldots$, $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ *son las* $\frac{n}{2}$*-raíces de la unidad* (*vale decir, son la raíces el polinomio* $x^{\frac{n}{2}} - 1$).

La respuesta a la pregunta

Lema

Si $n \geq 2$ *es par, entonces* $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ *son las* $\frac{n}{2}$*-raíces de la unidad* (*vale decir, son la raíces el polinomio* $x^{\frac{n}{2}} - 1$).

Demostración: primero tenemos que demostrar la regla de simplificación $\omega_{m\cdot\ell}^{k\cdot\ell} = \omega_m^k$ para $\ell > 0$:

$$\begin{aligned} \omega_{m\cdot\ell}^{k\cdot\ell} &= (e^{\frac{2\pi i}{m\cdot\ell}})^{k\cdot\ell} \\ &= (e^{\frac{2\pi i\cdot\ell}{m\cdot\ell}})^{k} \\ &= (e^{\frac{2\pi i}{m}})^{k} \\ &= \omega_m^k \end{aligned}$$

La respuesta a la pregunta

Dado $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\omega_n^k)^2 &= \omega_n^{k \cdot 2} \\
&= \omega_{\frac{n}{2} \cdot 2}^{k \cdot 2} \\
&= \omega_{\frac{n}{2}}^{k} && \text{por la regla de simplificación}
\end{aligned}$$

La respuesta a la pregunta

Dado $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\omega_n^k)^2 &= \omega_n^{k \cdot 2} \\ &= \omega_{\frac{n}{2} \cdot 2}^{k \cdot 2} \\ &= \omega_{\frac{n}{2}}^{k} \qquad \text{por la regla de simplificación} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ son las $\frac{n}{2}$-raíces de la unidad

- Puesto que $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \ldots, (\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2 = \omega_{\frac{n}{2}}^0, \omega_{\frac{n}{2}}^1, \ldots, \omega_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1}$ $\square$

La descomposición recursiva (continuación)

Recuerde que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, y defina:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}) \\ \bar{a}_1 &= (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

La descomposición recursiva (continuación)

Recuerde que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, y defina:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}) \\ \bar{a}_1 &= (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

De los resultados anteriores concluimos que para calcular **DFT**$(\bar{a})$, primero tenemos que calcular **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

La descomposición recursiva (continuación)

Recuerde que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, y defina:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_0 &= (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}) \\
\bar{a}_1 &= (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})
\end{aligned}$$

De los resultados anteriores concluimos que para calcular $\mathbf{DFT}(\bar{a})$, primero tenemos que calcular $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

¿Cómo se construye $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$?

Construyendo **DFT**$(\bar{a})$ a partir de **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

Sea:

$$\begin{aligned} \mathbf{DFT}(\bar{a}_0) &= [y_{0,0}, y_{0,1}, \ldots, y_{0,\frac{n}{2}-1}] \\ \mathbf{DFT}(\bar{a}_1) &= [y_{1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,\frac{n}{2}-1}] \end{aligned}$$

Para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y_k &= p(\omega_n^k) \\ &= q((\omega_n^k)^2) + \omega_n^k \cdot r((\omega_n^k)^2) \\ &= q(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k \cdot r(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \\ &= y_{0,k} + \omega_n^k \cdot y_{1,k} \end{aligned}$$

Construyendo **DFT**$(\bar{a})$ a partir de **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

Además, para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
y_{\frac{n}{2}+k} &= p(\omega_n^{\frac{n}{2}+k}) \\
&= q((\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2) + \omega_n^{\frac{n}{2}+k} \cdot r((\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2) \\
&= q(\omega_n^{n+2k}) + \omega_n^{\frac{n}{2}} \cdot \omega_n^{k} \cdot r(\omega_n^{n+2k}) \\
&= q(\omega_n^{n} \cdot \omega_n^{2k}) + (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\frac{n}{2}} \cdot \omega_n^{k} \cdot r(\omega_n^{n} \cdot \omega_n^{2k}) \\
&= q(1 \cdot \omega_n^{2k}) + e^{\pi i} \cdot \omega_n^{k} \cdot r(1 \cdot \omega_n^{2k}) \\
&= q(\omega_n^{2k}) - \omega_n^{k} \cdot r(\omega_n^{2k}) \\
&= q(\omega_{\frac{n}{2}}^{k}) - \omega_n^{k} \cdot r(\omega_{\frac{n}{2}}^{k}) \\
&= y_{0,k} - \omega_n^{k} \cdot y_{1,k}
\end{aligned}
$$

Construyendo $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

Resumiendo, para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{0,k} + \omega_n^k \cdot y_{1,k} \\ y_{\frac{n}{2}+k} &= y_{0,k} - \omega_n^k \cdot y_{1,k} \end{aligned}$$

Construyendo **DFT**$(\bar{a})$ a partir de **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

Resumiendo, para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{0,k} + \omega_n^k \cdot y_{1,k} \\ y_{\frac{n}{2}+k} &= y_{0,k} - \omega_n^k \cdot y_{1,k} \end{aligned}$$

Para tener un algoritmo recursivo para calcular **DFT** sólo nos falta el caso base.

- Consideramos $n = 2$ y un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x$

Construyendo **DFT**$(\bar{a})$ a partir de **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

Tenemos que $\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$

- Por lo tanto: $\omega_2^0 = 1$ y $\omega_2^1 = -1$

Concluimos que:

$$\begin{array}{rcl} p(\omega_2^0) & = & a_0 + a_1 \\ p(\omega_2^1) & = & a_0 - a_1 \end{array}$$

Un algoritmo recursivo eficiente para **DFT**

La entrada del algoritmo es un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

- Este polinomio es representado por el vector $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$

Suponemos además que $n \geq 2$ y n es una potencia de 2

El algoritmo es llamado la transformada rápida de Fourier (FFT)

- Fue propuesto por Cooley & Tukey

Un algoritmo recursivo eficiente para **DFT**

FFT($\bar{a}$)
- $(a_0, \ldots, a_{n-1}) := \bar{a}$
- **if** $n = 2$ **then**
  - $y_0 = a_0 + a_1$
  - $y_1 = a_0 - a_1$
  - **return** $[y_0, y_1]$
- **else**
  - $\bar{a}_0 := (a_0, \ldots, a_{n-2})$
  - $\bar{a}_1 := (a_1, \ldots, a_{n-1})$
  - $[y_{0,0}, \ldots, y_{0,\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(\bar{a}_0)$
  - $[y_{1,0}, \ldots, y_{1,\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(\bar{a}_1)$
  - $\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$
  - $\alpha := 1$
  - **for** $k := 0$ **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**
    - $y_k := y_{0,k} + \alpha \cdot y_{1,k}$
    - $y_{\frac{n}{2}+k} := y_{0,k} - \alpha \cdot y_{1,k}$
    - $\alpha := \alpha \cdot \omega_n$
  - **return** $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$

Algunos comentarios sobre **FFT**

Ejercicios

1. Demuestre que **FFT** funciona en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$, donde n es el grado del polinomio de entrada.

2. Sea $p(x)$ un polinomio representado como $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, donde n **no** es una potencia de 2.

   Para evaluar $p(x)$ en n puntos haga lo siguiente:

   (i) Defina $\bar{b} = (a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ de largo $m = 2^{\lceil \log_2(n) \rceil}$
   (ii) Calcule $\mathbf{FFT}(\bar{b}) = [y_0, \ldots, y_{m-1}]$, y retorne $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$

   Note que este algoritmo retorna $[p(\omega_m^0), \ldots, p(\omega_m^{n-1})]$ en lugar de $\mathbf{DFT}(\bar{a})$, y demuestre que funciona en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$