La nueva situación con el algoritmo **FFT**

$$\bar{a} = \overbrace{(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)}^{\text{largo } 2n}$$
$$\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$
$$p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$
$$q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

$O(n \cdot \log_2(n))$

$$\mathbf{FFT}(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{2n-1}]$$
$$\mathbf{FFT}(\bar{b}) = [z_0, \ldots, z_{2n-1}]$$
$$p(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1})\}$$
$$q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, z_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

$O(n)$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0 \cdot z_0), \ldots$$
$$\ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1})\}$$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})$$

La nueva situación con el algoritmo **FFT**

$$\bar{a} = \overbrace{(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)}^{\text{largo } 2n}$$
$$\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$
$$p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$
$$q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

$O(n \cdot \log_2(n))$

$$\textbf{FFT}(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{2n-1}]$$
$$\textbf{FFT}(\bar{b}) = [z_0, \ldots, z_{2n-1}]$$
$$p(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1})\}$$
$$q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, z_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

$O(n)$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0 \cdot z_0), \ldots$$
$$\ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1})\}$$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})$$

Todavía nos falta un algoritmo para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

La transformada discreta de Fourier como matriz

Suponga nuevamente que $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $n \geq 2$

- Para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$: $y_k = p(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\omega_n^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \omega_n^{i \cdot k}$

La transformada discreta de Fourier como matriz

Suponga nuevamente que $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $n \geq 2$

- Para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$: $y_k = p(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\omega_n^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \omega_n^{i \cdot k}$

La transformada discreta de Fourier puede ser representada entonces de la siguiente forma en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

La transformada discreta de Fourier como matriz

Definimos la n-ésima matriz de Fourier $\mathbf{F}_n$ como:

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz va a ser muy útil al momento de definir la inversa de la transformada discreta de Fourier.

La matriz conjugada de $\mathbf{F}_n$

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $\mathbf{F}_n[i, j] = (\omega_n^{i-1})^{j-1} = \omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}$

- Por lo tanto $\mathbf{F}_n[i, j] = \mathbf{F}_n[j, i]$, de lo cual se deduce que $\mathbf{F}_n$ es una matriz simétrica

La matriz conjugada de $\mathbf{F}_n$

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $\mathbf{F}_n[i, j] = (\omega_n^{i-1})^{j-1} = \omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}$

- Por lo tanto $\mathbf{F}_n[i, j] = \mathbf{F}_n[j, i]$, de lo cual se deduce que $\mathbf{F}_n$ es una matriz simétrica

Recuerde que la matriz adjunta A^* de una matriz A se define como $A^*[i, j] = \overline{A[j, i]}$

- Donde $\overline{b + ci} = b - ci$ es el conjugado del número complejo $b + ci$

La matriz conjugada de $\mathbf{F}_n$

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $\mathbf{F}_n[i,j] = (\omega_n^{i-1})^{j-1} = \omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}$

- Por lo tanto $\mathbf{F}_n[i,j] = \mathbf{F}_n[j,i]$, de lo cual se deduce que $\mathbf{F}_n$ es una matriz simétrica

Recuerde que la matriz adjunta A^* de una matriz A se define como $A^*[i,j] = \overline{A[j,i]}$

- Donde $\overline{b + ci} = b - ci$ es el conjugado del número complejo $b + ci$

Para calcular $\mathbf{F}_n^*$ necesitamos calcular el conjugado de ω_n^k

El conjugado de ω_n^k

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{(\omega_n^k)} &= \overline{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^k} \\
&= \overline{e^{\frac{2\pi k i}{n}}} \\
&= \overline{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= e^{\frac{-2\pi k i}{n}} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{-k} \\
&= \omega_n^{-k}
\end{aligned}
$$

La matriz inversa de $\mathbf{F}_n$

Lema

Sea I_n la matriz identidad de tamaño n. Entonces $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n = n \cdot I_n$

La matriz inversa de $\mathbf{F}_n$

Lema

Sea I_n la matriz identidad de tamaño n. Entonces $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n = n \cdot I_n$

Demostración: Sea $A = \mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n$

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A[i,i] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_n^*[i,k] \cdot \mathbf{F}_n[k,i] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \;=\; n \end{aligned}$$

La matriz inversa de $\mathbf{F}_n$

Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
A[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_n^*[i,k] \cdot \mathbf{F}_n[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_n^{-(i-1)+(j-1)})^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_n^{j-i})^{k-1} \\
&= \frac{(\omega_n^{j-i})^n - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} \qquad \text{ya que } \omega_n^{j-i} \neq 1 \ (j - i \neq 0,\ j - i \neq n \text{ y } j - i \neq -n) \\
&= \frac{(\omega_n^n)^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = \frac{1^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = 0
\end{aligned}$$

$\square$

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_n^*[1,1] \\ \mathbf{F}_n^*[2,1] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^*[n,1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n[1,1] \\ \mathbf{F}_n[2,1] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n[n,1] \end{pmatrix}$$

Además, para $j \in \{2, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_n^*[1,j] \\ \mathbf{F}_n^*[2,j] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^*[n,j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n[1, n+2-j] \\ \mathbf{F}_n[2, n+2-j] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n[n, n+2-j] \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Esta última igualdad se deduce de lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n[i, n+2-j] &= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+2-j-1)} \\
&= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)+(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)} \cdot \omega_n^{(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= (\omega_n^n)^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= 1^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= \mathbf{F}_n^*[i, j]
\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Considere la siguiente matriz de permutación de $n \times n$:

$$P_n \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De las propiedades anteriores se concluye que:

$$\mathbf{F}_n^* \quad = \quad \mathbf{F}_n \cdot P_n$$

Calculando la inversa de la transformada discreta de Fourier

Tenemos los ingredientes necesarios para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

Calculando la inversa de la transformada discreta de Fourier

Tenemos los ingredientes necesarios para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

- No necesitamos de un nuevo algoritmo para calcularla

Calculando la inversa de la transformada discreta de Fourier

Tenemos los ingredientes necesarios para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

- No necesitamos de un nuevo algoritmo para calcularla

Teorema

Sea $n \geq 2$, $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ *y* $\mathbf{DFT}(\bar{a}) = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$. *Si* $\bar{p} = (y_0, y_{n-1}, \ldots, y_1)$, *entonces:*

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p}) \quad = \quad [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

La demostración del teorema

Tenemos que:

$$\mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P_n \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = P_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Concluimos que:

$$\mathbf{F}_n \cdot P_n \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dado que $\mathbf{F}_n \cdot P_n = \mathbf{F}_n^*$, tenemos que:

$$\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Así, puesto que $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n = n \cdot I_n$, tenemos que:

$$n \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

De lo cual concluimos que:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Así, utilizando la notación matricial para la transformada discreta de Fourier concluimos que:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p})$$

$\square$

Multiplicando polinomios en tiempo $O(n \cdot \log n)$

$$\bar{a} = \overbrace{(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)}^{\text{largo } 2n}$$
$$\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$
$$p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$
$$q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

$\xrightarrow{O(n \cdot \log_2(n))}$

$$\textbf{FFT}(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{2n-1}]$$
$$\textbf{FFT}(\bar{b}) = [z_0, \ldots, z_{2n-1}]$$
$$p(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1})\}$$
$$q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, z_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

$\xrightarrow{O(n)}$

$$\bar{p} = (y_0 \cdot z_0, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1}, \ldots, y_1 \cdot z_1)$$
$$p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0 \cdot z_0), \ldots$$
$$\ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1})\}$$

$\xrightarrow{O(n \cdot \log_2(n))}$

$$\frac{1}{2n} \cdot \textbf{FFT}(\bar{p}) = [c_0, \ldots, c_{2n-1}]$$
$$p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})$$