shapes,snakes

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos

Ayudantía 5 - Repaso Interrogación 1

1 de octubre de 2020

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías

Pregunta 1 - Ejercicio complejidad asintótica

Considere la siguiente ecuación de recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ a \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(n) & n > 1 \end{cases}$$

donde $c > 0, a \geq 1$, y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ es una función que satisface la siguiente propiedad

$$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists d \in \mathbb{R}^+)(\forall n \geq 1)(f(n) \leq d \cdot n^{log_2(a)-\epsilon})$$

Nótese que esta propiedad implica que $f(n) \in O(n^{log_2(a)-\epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$, de lo cual se puede concluir que $T(n) \in O(n^{log_2(a)})$ utilizando el teorema maestro. En esta pregunta usted debe demostrar que $T(n) \in O(n^{log_2(a)})$ sin utilizar el teorema maestro.

Pregunta 2 - FFT

Recuerde que utilizamos la notación $(a_0, \ldots, a_{\ell-1})$ para representar un polinomio

$$p(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^i$$

con coeficientes en los números racionales. Además, suponiendo que $\ell \geq 2$ y ℓ es una potencia de 2, utilizamos $(\bar{a})$ para denotar la transformada rápida de Fourier aplicada a $\bar{a}$.

Considere el siguiente algoritmo que recibe como entradas un polinomio representado por la tupla de coeficientes $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{\ell-1})$ y un número natural k, donde $\ell \geq 2$, ℓ **no** es necesariamente una potencia de 2 y k es una potencia de 2.

```
ALG(ā, k)
    if k = 1 then return ā
    else
        (b_0, ..., b_{n-1}) := ALG(ā, k/2)
        m := 2^⌈log_2(2n)⌉
        (c_0, ..., c_{n-1}, c_n, ..., c_{m-1}) := (b_0, ..., b_{n-1}, 0, ..., 0)
        [y_0, ..., y_{m-1}] := FFT(c̄)          /* c̄ = (c_0, ..., c_{n-1}, c_n, ..., c_{m-1}) */
        z̄ := (y_0^2, y_{m-1}^2, ..., y_1^2)
        [d_0, ..., d_{m-1}] := (1/m) · FFT(z̄)
        return (d_0, ..., d_{2n-2})
```

Responda las siguientes preguntas sobre este algoritmo.

(a) [0.7 puntos] Indique qué retorna la llamada $(\bar{a},\ k)$, y demuestre formalmente que este es el caso (por ejemplo, utilizando inducción en k).

(b) [0.8 puntos] Considerando a la suma y multiplicación de números complejos como las operaciones a contar, encuentre una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que el número de operaciones realizadas por $(\bar{a}, k)$ esté acotado superiormente por $f(\ell, k)$ (recuerde que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{\ell-1})$). Demuestre formalmente.