Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos

Ayudantía 9 - Teoría de grupos

12 de noviembre de 2021

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías

Pregunta 1 - Propiedades básicas de los grupos

Demuestre que si $(G, \circ)$ es un grupo, entonces se cumplen las siguientes propiedades

a) El elemento neutro es único. Es decir, si e_1 y e_2 cumplen que $a \circ e_i = e_i \circ a = a$ para $i \in \{1, 2\}$ y para todo $a \in G$ entonces $e_1 = e_2$

b) El inverso de cada elemento es único. Es decir, si $a \circ b = b \circ a = e$ y $a \circ c = b \circ c = e$, entonces $b = c$

Pregunta 2 - Propiedades básicas de los subgrupos

Sea $(H, \circ)$ un subgrupo del grupo $(G, \circ)$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. Si e_1 es el neutro en $(G, \circ)$ y e_2 es el neutro de $(H, \circ)$, entonces $e_1 = e_2$
2. Para cada $a \in H$, si b es el inverso de a en $(G, \circ)$ y c es el inverso de a en $(H, \circ)$, entonces $c = b$

Pregunta 3 - Demostración del lema visto en clases (Lagrange)

Para demostrar el teorema de Lagrage se introdujo una relación binaria en clases. Sea $(G, \circ)$ un grupo finito y $(H, \circ)$ un subgrupo de $(G, \circ)$. Suponga que e es el elemento neutro de $(G, \circ)$ y a^{-1} es el inverso de a en $(G, \circ)$. Sea entonces $\sim$ una relación binaria sobre G definida como

$$a \sim b \text{ si y sólo si } b \circ a^{-1} \in H$$

En base a esta relación, se demostró que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para esta pregunta demostraremos que

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Con esto se concluye fácilmente el teorema de Lagrange.