La Jerarquía Polinomial

IIC3810

Motivación: coloración de grafos

Una grafo $G = (N, A)$ se dice k-coloreable si existe una función $f : N \to \{1, \ldots, k\}$ tal que:

- Si $(a, b) \in A$, entonces $f(a) \neq f(b)$

Motivación: coloración de grafos

Una grafo $G = (N, A)$ se dice k-coloreable si existe una función $f : N \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que:

- Si $(a, b) \in A$, entonces $f(a) \neq f(b)$

El número cromático de un grafo G, denotado como $\chi(G)$, se define como el menor número k tal que G es k-coloreable.

- Vale decir, G es k-coloreable y no $(k-1)$-coloreable

El problema de coloración de un grafo

Considere los siguientes problemas relacionados con el cálculo del número cromático de un grafo:

$$\begin{aligned}
\text{CROM}^{\leq} &= \{(G,k) \mid G \text{ es un grafo,} \\
&\qquad\qquad k \text{ es un número natural y } \chi(G) \leq k\} \\
\text{CROM}^{\geq} &= \{(G,k) \mid G \text{ es un grafo,} \\
&\qquad\qquad k \text{ es un número natural y } \chi(G) \geq k\}
\end{aligned}$$

El problema de coloración de un grafo

Considere los siguientes problemas relacionados con el cálculo del número cromático de un grafo:

$$\begin{aligned} \text{CROM}^{\leq} &= \{(G,k) \mid G \text{ es un grafo}, \\ &\qquad\qquad k \text{ es un número natural y } \chi(G) \leq k\} \\ \text{CROM}^{\geq} &= \{(G,k) \mid G \text{ es un grafo}, \\ &\qquad\qquad k \text{ es un número natural y } \chi(G) \geq k\} \end{aligned}$$

Ejercicio

Demuestre que $\text{CROM}^{\leq}$ es NP-completo y $\text{CROM}^{\geq}$ es co-NP-completo.

Cálculo del número cromático

Considere ahora el problema de decisión asociado al cálculo exacto del número cromático de un grafo:

$$\begin{aligned}\text{CROM} \ = \ \{(G, k) \mid G \text{ es un grafo,} \\ k \text{ es un número natural y } \chi(G) = k\}\end{aligned}$$

Cálculo del número cromático

Considere ahora el problema de decisión asociado al cálculo exacto del número cromático de un grafo:

$$\begin{aligned}\text{CROM} \ = \ \{(G, k) \mid\ & G \text{ es un grafo,} \\ & k \text{ es un número natural y } \chi(G) = k\}\end{aligned}$$

¿Cuál es la complejidad de CROM?

- ¿Está este problema en NP? ¿Está en co-NP? ¿Es completo para alguna de estas clases?

Calculo del número cromático

Podemos caracterizar CROM en términos de dos lenguajes en NP.

Calculo del número cromático

Podemos caracterizar CROM en términos de dos lenguajes en NP.

Ejercicio

Encuentre lenguajes L_1 y L_2 en NP tales que $\text{CROM} = L_1 \setminus L_2$

Calculo del número cromático

Podemos caracterizar CROM en términos de dos lenguajes en NP.

Ejercicio

Encuentre lenguajes L_1 y L_2 en NP tales que CROM $= L_1 \setminus L_2$

CROM no está "lejos" de NP

- De hecho, si P $=$ NP, entonces CROM está en P

Calculo del número cromático

Podemos caracterizar CROM en términos de dos lenguajes en NP.

Ejercicio

Encuentre lenguajes L_1 y L_2 en NP tales que CROM $= L_1 \smallsetminus L_2$

CROM no está "lejos" de NP

- De hecho, si P $=$ NP, entonces CROM está en P
- CROM puede ser solucionado resolviendo dos problemas en NP. Vemos a estos problemas como sub-rutinas u oráculos

Motivación: evaluación de expresiones aritméticas

Una expresión aritmética es definida recursivamente por las siguientes reglas:

- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces n es una expresión aritmética
- Si e_1 y e_2 son expresiones aritméticas, entonces $(e_1 + e_2)$ y $(e_1 \cup e_2)$ son expresiones aritméticas

Motivación: evaluación de expresiones aritméticas

Una expresión aritmética es definida recursivamente por las siguientes reglas:

- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces n es una expresión aritmética
- Si e_1 y e_2 son expresiones aritméticas, entonces $(e_1 + e_2)$ y $(e_1 \cup e_2)$ son expresiones aritméticas

Ejemplo

5, $(5 + 7)$ y $((5 + 7) \cup (4 \cup (6 + 11)))$ son expresiones aritméticas.

Evaluación de expresiones aritméticas

El lenguaje $L(e)$ definido por una expresión aritmética e es definido recursivamente por las siguiente reglas:

- Si $e = n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $L(e) = \{n\}$
- Si $e = (e_1 + e_2)$, entonces $L(e) = \{n + m \mid n \in L(e_1)$ y $m \in L(e_2)\}$
- Si $e = (e_1 \cup e_2)$, entonces $L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$

Evaluación de expresiones aritméticas

Ejemplo

El lenguaje definido por algunas expresiones aritméticas:

- $L(5) = \{5\}$ y $L(7) = \{7\}$
- Si $e = (5 + 7)$, entonces $L(e) = \{n + m \mid n \in L(5)$ y $m \in L(7)\} = \{12\}$
- Si $e = (6 + 11)$, entonces $L(e) = \{17\}$
- Si $e = (4 \cup (6 + 11))$, entonces $L(e) = L(4) \cup L((6 + 11)) = \{4\} \cup \{17\} = \{4, 17\}$
- Si $e = (1 \cup 3) + (7 \cup 13)$, entonces $L(e) = \{8, 10, 14, 16\}$

Evaluación de expresiones aritméticas

El problema de evaluación de expresiones aritméticas es definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{EVAL} \ = \ \{(e, k) \mid\ & e \text{ es una expresión aritmética}, \\ & k \text{ es un número natural y } k \in L(e)\} \end{aligned}$$

Evaluación de expresiones aritméticas

El problema de evaluación de expresiones aritméticas es definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{EVAL} \ = \ \{(e, k) \mid \ & e \text{ es una expresión aritmética,} \\ & k \text{ es un número natural y } k \in L(e)\}\end{aligned}$$

Ejercicio

Demuestre que EVAL es un problema NP-completo.

Equivalencia de expresiones aritméticas

Considere el siguiente problema sobre expresiones aritméticas:

$$\begin{aligned}\text{EQUIV} \;=\; \{(e_1, e_2) \mid e_1 \text{ y } e_2 \text{ son expresiones} \\ \text{aritméticas tales que } L(e_1) = L(e_2)\}\end{aligned}$$

Equivalencia de expresiones aritméticas

Considere el siguiente problema sobre expresiones aritméticas:

$$\text{EQUIV} = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \text{ y } e_2 \text{ son expresiones aritméticas tales que } L(e_1) = L(e_2)\}$$

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

Equivalencia de expresiones aritméticas

Considere el siguiente problema sobre expresiones aritméticas:

$$\text{EQUIV} = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \text{ y } e_2 \text{ son expresiones aritméticas tales que } L(e_1) = L(e_2)\}$$

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

- ¿Está en NP o co-NP?

Equivalencia de expresiones aritméticas

Considere el siguiente problema sobre expresiones aritméticas:

$$\text{EQUIV} = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \text{ y } e_2 \text{ son expresiones aritméticas tales que } L(e_1) = L(e_2)\}$$

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

- ¿Está en NP o co-NP?
- ¿Puede encontrar dos lenguajes L_1 y L_2 en NP tales que EQUIV $= L_1 \smallsetminus L_2$?

Equivalencia de expresiones aritméticas

Considere el siguiente problema sobre expresiones aritméticas:

$$\begin{aligned}\text{EQUIV} \ = \ \{(e_1, e_2) \mid\ & e_1 \text{ y } e_2 \text{ son expresiones} \\ & \text{aritméticas tales que } L(e_1) = L(e_2)\}\end{aligned}$$

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

- ¿Está en NP o co-NP?
- ¿Puede encontrar dos lenguajes L_1 y L_2 en NP tales que EQUIV $= L_1 \smallsetminus L_2$?
- ¿Puede al menos demostrar que si P $=$ NP, entonces EQUIV está en P?
  - ¿Tiene sentido la idea de sub-rutina (u oráculo) es este caso?

La noción de oráculo

¿Qué tienen en común los problemas CROM y EQUIV?

La noción de oráculo

¿Qué tienen en común los problemas CROM y EQUIV?

- Si encontramos un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, entonces estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial

La noción de oráculo

¿Qué tienen en común los problemas CROM y EQUIV?

- Si encontramos un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, entonces estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial
- Un problema NP-completo puede ser visto como un *oráculo* para estos problemas

La noción de oráculo

¿Qué tienen en común los problemas CROM y EQUIV?

- Si encontramos un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, entonces estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial
- Un problema NP-completo puede ser visto como un *oráculo* para estos problemas

Vamos a introducir la noción de MT con oráculo.

La noción de oráculo

¿Qué tienen en común los problemas CROM y EQUIV?

- Si encontramos un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, entonces estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial
- Un problema NP-completo puede ser visto como un *oráculo* para estos problemas

Vamos a introducir la noción de MT con oráculo.

- Vamos a mostrar que sirve para caracterizar a los problemas anteriores, y a muchos otros problemas . . .

MT con oráculo

Definición

MT determinista con oráculo para $A \subseteq \Sigma^*$:
$M^A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$

- Q *es un conjunto finito de estados tal que* $q_?, q_{YES}, q_{NO} \in Q$
- Σ *es un alfabeto finito tal que* $\vdash, \mathtt{B} \not\in \Sigma$
- Γ *es un alfabeto finito tal que* $\Sigma \cup \{\vdash, \mathtt{B}\} \subseteq \Gamma$
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*
- $F \subseteq Q$ *es un conjunto de estados finales*
- δ *es una función parcial:*

$$\delta \ : \ Q \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \square, \rightarrow\} \times \Gamma \times \{\leftarrow, \square, \rightarrow\}$$

La segunda cinta es la cinta de consulta

MT con oráculo: Funcionamiento

La definición anterior puede extenderse fácilmente al caso de no determinismo.

MT con oráculo: Funcionamiento

La definición anterior puede extenderse fácilmente al caso de no determinismo.

Una MT M con oráculo para A funciona como una MT tradicional excepto cuando entra al estado $q_?$:

MT con oráculo: Funcionamiento

La definición anterior puede extenderse fácilmente al caso de no determinismo.

Una MT M con oráculo para A funciona como una MT tradicional excepto cuando entra al estado $q_?$:

- Cinta de consulta: $\vdash wBB\cdots$, para $w \in \Sigma^*$

  La cabeza lectora de la cinta de consulta está en la posición 1

MT con oráculo: Funcionamiento

La definición anterior puede extenderse fácilmente al caso de no determinismo.

Una MT M con oráculo para A funciona como una MT tradicional excepto cuando entra al estado $q_?$:

- Cinta de consulta: $\vdash w\mathrm{BB}\cdots$, para $w \in \Sigma^*$

  La cabeza lectora de la cinta de consulta está en la posición 1

- M invoca al oráculo para A, y su siguiente estado es q_{YES} o q_{NO} dependiendo de su respuesta
  - $w \in A$ si y sólo si el estado es q_{YES}

MT con oráculo: Tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución de una MT con oráculo se define como para el caso de las MTs tradicionales.

- Una invocación al oráculo se considera como un paso

MT con oráculo: Tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución de una MT con oráculo se define como para el caso de las MTs tradicionales.

- Una invocación al oráculo se considera como un paso

Ejemplo

CROM es aceptado por una MT determinista $M^{\text{CROM}^{\leq}}$ que funciona en tiempo $O(n)$

- También podemos user SAT como oráculo. ¿En que tiempo funcionaría la MT?

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una primera clase definida en términos de MTs con oráculos:

Definición

P^A: Lenguajes L para los cuales existe una MT determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$.

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una primera clase definida en términos de MTs con oráculos:

Definición

P^A: Lenguajes L para los cuales existe una MT determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$.

Tenemos que:

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una primera clase definida en términos de MTs con oráculos:

Definición

P^A: Lenguajes L para los cuales existe una MT determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$.

Tenemos que:

- CROM está en P^{SAT}

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una primera clase definida en términos de MTs con oráculos:

Definición

P^A: Lenguajes L para los cuales existe una MT determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$.

Tenemos que:

- CROM está en $\mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$
  - También está contenido en P^{A}, para cualquier problema A que es NP-completo

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una primera clase definida en términos de MTs con oráculos:

Definición

P^A: Lenguajes L para los cuales existe una MT determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$.

Tenemos que:

- CROM está en $\mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$
  - También está contenido en P^A, para cualquier problema A que es NP-completo
- NP y co-NP están contenidos en $\mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una definición mas general:

Definición

$$P^{NP} = \bigcup_{A \in NP} P^{A}$$

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una definición mas general:

Definición

$$P^{NP} \quad = \quad \bigcup_{A \in NP} P^A$$

En realidad esta definición no es más general:

Proposition

$P^{NP} = P^{SAT}$

Clases de complejidad y la noción de oráculo

Una definición mas general:

Definición

$$P^{NP} \quad = \quad \bigcup_{A \in NP} P^{A}$$

En realidad esta definición no es más general:

Proposition

$P^{NP} = P^{SAT}$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Equivalencia de expresiones aritméticas: Complejidad

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

Equivalencia de expresiones aritméticas: Complejidad

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

- ¿Está en P^{NP}?

Equivalencia de expresiones aritméticas: Complejidad

¿Cuál es la complejidad de EQUIV?

- ¿Está en P^{NP}?

Nuevamente la noción de oráculo nos puede ayudar a entender la complejidad de un problema.

Una segunda clase definida en términos de oráculos

Definición

- NP^A: *Lenguajes L para los cuales existe una MT no determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$*
- NP^{NP}: $\bigcup_{A \in NP} NP^A$

Una segunda clase definida en términos de oráculos

Definición

- NP^A: *Lenguajes L para los cuales existe una MT no determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$*
- NP^{NP}: $\bigcup_{A \in NP} NP^A$

Podemos describir mejor la complejidad de EQUIV.

Una segunda clase definida en términos de oráculos

Definición

- NP^A: *Lenguajes L para los cuales existe una MT no determinista M^A tal que $L = L(M^A)$ y M^A funciona en tiempo $O(n^k)$*
- NP^{NP}: $\bigcup_{A \in NP} NP^A$

Podemos describir mejor la complejidad de EQUIV.

Ejercicio

Demuestre que EQUIV $\in$ co-$\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}}$.

- Esto es equivalente a demostrar que $\overline{\mathrm{EQUIV}} \in \mathrm{NP}^{\mathrm{NP}}$

La jerarquía polinomial

Podemos generalizar las definiciones anteriores considerando una clase de complejidad $\mathcal{C}$.

La jerarquía polinomial

Podemos generalizar las definiciones anteriores considerando una clase de complejidad $\mathcal{C}$.

Definición

- $P^{\mathcal{C}}$: $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} P^A$
- $NP^{\mathcal{C}}$: $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} NP^A$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = P$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\begin{aligned} \Sigma_0^P &= P \\ \Sigma_{n+1}^P &= NP^{\Sigma_n^P} \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0^P &= P & \\
\Sigma_{n+1}^P &= NP^{\Sigma_n^P} & n \geq 0 \\
\Delta_{n+1}^P &= P^{\Sigma_n^P} & n \geq 0
\end{aligned}
$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

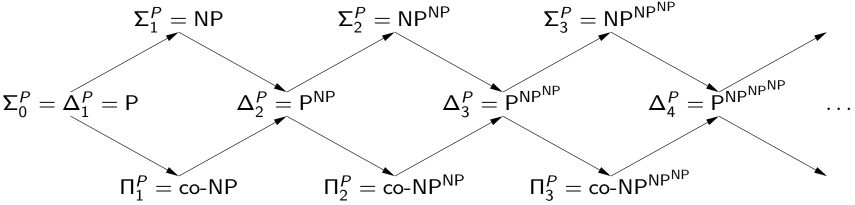
$$
\begin{aligned}
\Sigma_0^P &= P & \\
\Sigma_{n+1}^P &= NP^{\Sigma_n^P} & n \geq 0 \\
\Delta_{n+1}^P &= P^{\Sigma_n^P} & n \geq 0 \\
\Pi_{n+1}^P &= co\text{-}\Sigma_{n+1}^P & n \geq 0
\end{aligned}
$$

La jerarquía polinomial

¿Cómo se ve la jerarquía polinomial en una figura?

La jerarquía polinomial

¿Cómo se ve la jerarquía polinomial en una figura?



La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

¿Cuál es la relación entre PH y EXPTIME?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

¿Cuál es la relación entre PH y EXPTIME?

- PH $\subseteq$ EXPTIME

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

- Esto implicaría que PH tiene problemas completos

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

- Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

- Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^p$
  - Si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

- Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^p$
  - Si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$
- Si PH tiene un problema completo, entonces la jerarquía polinomial colapsa a algún nivel finito

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que EXPTIME $\subseteq$ PH?

- Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^p$
  - Si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$
- Si PH tiene un problema completo, entonces la jerarquía polinomial colapsa a algún nivel finito

Proposition

Si la jerarquía polinomial no colapsa a algún nivel finito, entonces PH $\subsetneq$ EXPTIME.

El colapso de la jerarquía polinomial: un resultado fundamental

Teorema

Para $k \geq 1$:

(a) *Si $\Sigma_k^P = \Pi_k^P$, entonces $PH = \Sigma_k^P$*

(b) *Si $\Sigma_k^P = \Delta_k^P$, entonces $PH = \Delta_k^P$*

Problemas completos en la jerarquía polinomial

El lenguaje QBF$_i$ ($i \geq 1$) está formado por todas las fórmulas proposicionales cuantificadas que son válidas y de la forma:

$$
\begin{gathered}
\exists x_{1,1} \cdots \exists x_{1,m_1} \\
\forall x_{2,1} \cdots \forall x_{2,m_2} \\
\exists x_{3,1} \cdots \exists x_{3,m_3} \\
\cdots \\
Q_i x_{i,1} \cdots Q_i x_{i,m_i}\, \varphi
\end{gathered}
$$

donde:

- $Q_i = \exists$ si i es impar y $Q_i = \forall$ si i es par
- φ es una fórmula proposicional sobre las variables $x_{1,1}$, ..., x_{1,m_1}, ..., $x_{i,1}$, ..., x_{i,m_i}

Un problema completo para Σ_k^P

La clase de problemas $\{\mathrm{QBF}_i\}_{i \geq 1}$ es adecuada para representar la jerarquía polinomial.

Teorema

Para cada $k \geq 1$, QBF_k es Σ_k^P-completo.

Otro problema completo para Σ_2^P

Teorema

$\overline{EQUIV}$ es Σ_2^P-completo.

- *Se deduce que EQUIV es Π_2^P-completo*

Otro problema completo para Σ_2^P

Teorema

$\overline{EQUIV}$ es Σ_2^P-completo.

- *Se deduce que EQUIV es Π_2^P-completo*

Hay problemas naturales que son completos para los distintos niveles de la jerarquía polinomial.

Comentario final: Una noción de reducción más general

Los problemas en las transparencias anteriores son completos bajo la noción de reducción $\leq_m^p$

- Una propiedad fundamental de esta noción de reducción: si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \mathrm{P}$, entonces $L_1 \in \mathrm{P}$

Comentario final: Una noción de reducción más general

Los problemas en las transparencias anteriores son completos bajo la noción de reducción $\leq_m^p$

- Una propiedad fundamental de esta noción de reducción: si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \mathrm{P}$, entonces $L_1 \in \mathrm{P}$

Podemos generalizar $\leq_m^p$ manteniendo esta propiedad fundamental:

Comentario final: Una noción de reducción más general

Los problemas en las transparencias anteriores son completos bajo la noción de reducción $\leq_m^p$

- Una propiedad fundamental de esta noción de reducción: si $L_1 \leq_m^p L_2$ y $L_2 \in \mathrm{P}$, entonces $L_1 \in \mathrm{P}$

Podemos generalizar $\leq_m^p$ manteniendo esta propiedad fundamental:

$$L_1 \leq_T^p L_2 \;\text{ si y sólo si }\; L_1 \in \mathrm{P}^{L_2}$$

Comentario final: Una noción de reducción más general

$\leq_T^p$ es llamada reducción de Turing de tiempo polinomial

Comentario final: Una noción de reducción más general

$\leq_T^p$ es llamada reducción de Turing de tiempo polinomial

Teorema

- *Si* $L_1 \leq_m^p L_2$, *entonces* $L_1 \leq_T^p L_2$
- *Existen lenguajes* L_1 *y* L_2 *tales que* $L_1 \leq_T^p L_2$ *y* $L_1 \not\leq_m^p L_2$

Demostración del teorema

La primera parte del teorema es fácil de demostrar, sólo vamos a demostrar la segunda parte.

- Vamos a considerar los lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$

Demostración del teorema

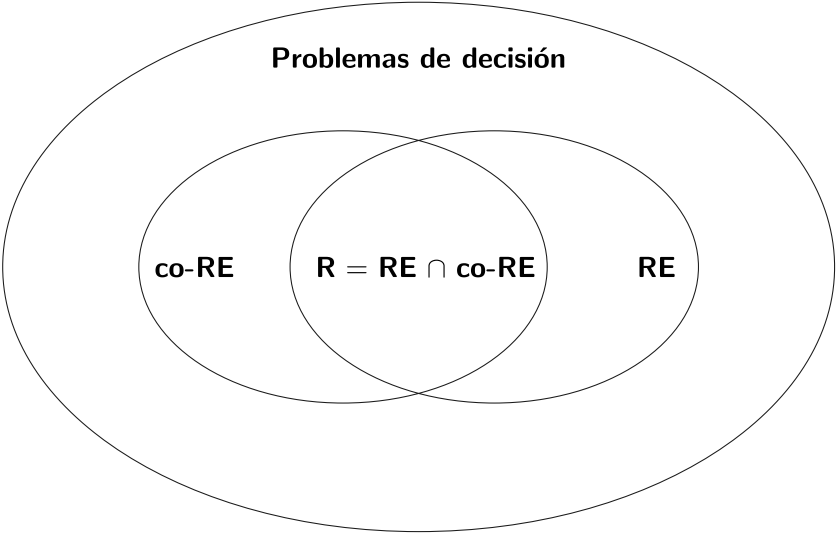
La primera parte del teorema es fácil de demostrar, sólo vamos a demostrar la segunda parte.

- Vamos a considerar los lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$

Recuerde la definición de las siguientes clases de complejidad:

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid L \text{ es un lenguaje decidible}\} \\ \mathrm{RE} &= \{L \subseteq \{0,1\}^* \mid L \text{ es un lenguaje recursivamente enumerable}\} \end{aligned}$$

Las clases R, RE y co-RE



Un lenguaje que separa RE de co-RE

Recuerde la definición del problema de la parada de la máquina de Turing:

$$U \;=\; \{(M,w) \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } w\}$$

Un lenguaje que separa RE de co-RE

Recuerde la definición del problema de la parada de la máquina de Turing:

$$U \;=\; \{(M, w) \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } w\}$$

Sabemos que $U \not\in$ R y $U \in$ RE

Un lenguaje que separa RE de co-RE

Recuerde la definición del problema de la parada de la máquina de Turing:

$$U \;=\; \{(M, w) \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y} \\ M \text{ se detiene con entrada } w\}$$

Sabemos que $U \notin$ R y $U \in$ RE

- Concluimos que $U \notin$ co-RE

Un lenguaje que separa RE de co-RE

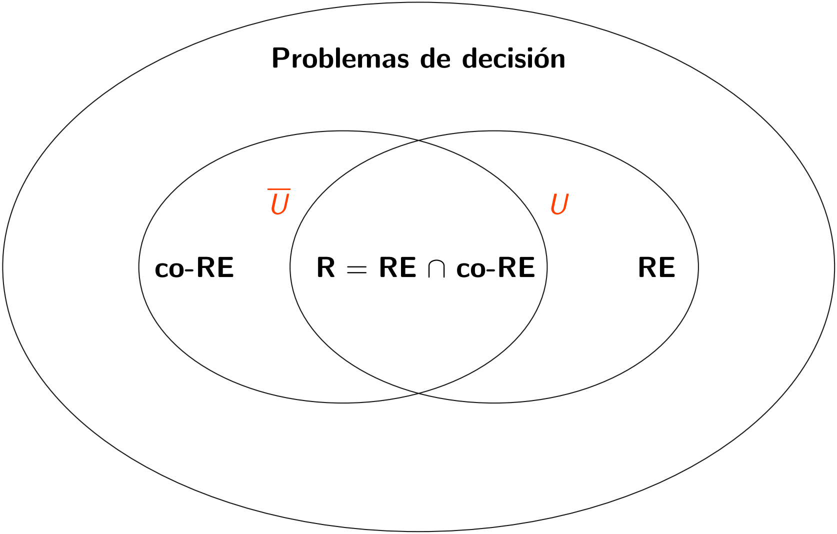
Recuerde la definición del problema de la parada de la máquina de Turing:

$$U = \{(M, w) \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0,1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } w\}$$

Sabemos que $U \notin \text{R}$ y $U \in \text{RE}$

- Concluimos que $U \notin \text{co-RE}$
- Entonces tenemos que $\overline{U} \in \text{co-RE}$ y $\overline{U} \notin \text{RE}$

U y $\overline{U}$ en la figura



Parte final de la demostración

Sabemos que si $L \leq_m^p U$, entonces $L \in \text{RE}$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Parte final de la demostración

Sabemos que si $L \leq_m^p U$, entonces $L \in \mathrm{RE}$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Tenemos entonces que $\overline{U} \not\leq_m^p U$

Parte final de la demostración

Sabemos que si $L \leq_m^p U$, entonces $L \in \text{RE}$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Tenemos entonces que $\overline{U} \not\leq_m^p U$

Esto concluye la demostración puesto que $\overline{U} \leq_T^p U$

Parte final de la demostración

Sabemos que si $L \leq_m^p U$, entonces $L \in \text{RE}$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Tenemos entonces que $\overline{U} \not\leq_m^p U$

Esto concluye la demostración puesto que $\overline{U} \leq_T^p U$

- De hecho, para cada lenguaje L se tiene que $\overline{L} \leq_T^p L$ $\square$