Relacionando el muestreo (casi) uniforme con la existencia de un FPRAS

IIC3810

Marcelo Arenas y Luis Alberto Croquevielle

La noción de p-relación

Será conveniente ver las funciones de #P como relaciones.

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ es una p-relación si:

- *Existe un polinomio q tal que si $(x, y) \in R$, entonces $|y| \leq q(|x|)$*
- *$R \in P$, vale decir, existe un algoritmo de tiempo polinomial que, dado $(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$, verifica si $(x, y) \in R$*

Cada p-relación representa una función en #P

Dada una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, defina la función $f_R : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ como:

$$f_R(x) = \begin{cases} |\{y \mid (x,y) \in R\}| & \text{si } \{y \mid (x,y) \in R\} \text{ es finito} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cada p-relación representa una función en #P

Dada una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, defina la función $f_R : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ como:

$$f_R(x) = \begin{cases} |\{y \mid (x,y) \in R\}| & \text{si } \{y \mid (x,y) \in R\} \text{ es finito} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Proposition

Si R es una p-relación, entonces $f_R \in \#P$

Cada p-relación representa una función en #P

Dada una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, defina la función $f_R : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ como:

$$f_R(x) = \begin{cases} |\{y \mid (x,y) \in R\}| & \text{si } \{y \mid (x,y) \in R\} \text{ es finito} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Proposition

Si R es una p-relación, entonces $f_R \in \#P$

Ejercicio

Demuestre la proposición

Cada función en #P puede ser representada como una p-relación

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en #P

- Existe una MT no determinista M tal que para todo $x \in \Sigma^*$ se tiene que $f(x) = \text{accept}_M(x)$

Cada función en #P puede ser representada como una p-relación

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en #P

- Existe una MT no determinista M tal que para todo $x \in \Sigma^*$ se tiene que $f(x) = \text{accept}_M(x)$

Cada ejecución de M se puede codificar usando el alfabeto Σ

Cada función en #P puede ser representada como una p-relación

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en #P

- Existe una MT no determinista M tal que para todo $x \in \Sigma^*$ se tiene que $f(x) = \text{accept}_M(x)$

Cada ejecución de M se puede codificar usando el alfabeto Σ

Utilizando las codificaciones de las ejecuciones de M definimos:

$$R_f = \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid y \text{ codifica una ejecución de } M \text{ con entrada } x \text{ que termina en un estado final}\}$$

Cada función en #P puede ser representada como una p-relación

Proposition

Si f está en $\#P$, entonces R_f es una p-relación

Cada función en #P puede ser representada como una p-relación

Proposition

Si f está en #P, entonces R_f es una p-relación

Demostración: Como la MT no determinista M en la transparencia anterior es de tiempo polinomial, para una entrada x se puede:

- Codificar cualquier ejecución de M que acepta usando un string de largo polinomial en $|x|$
- Verificar si una ejecución termina en estado final (simulando el funcionamiento de M) en tiempo polinomial □

Funciones en #P y p-relaciones

Por lo tanto, de ahora en adelante trabajamos con p-relaciones.

Estudiaremos los problemas de conteo y de generación uniforme asociados a p-relaciones, sabiendo que los resultados se extienden de manera inmediata a funciones en #P

Un generador uniforme para una p-relación

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, sea:

$$N_R(x) \quad = \quad |\{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R\}|$$

Además, suponga que $\perp$ es un símbolo reservado que no es usado en Σ

Un generador uniforme para una p-relación

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, sea:

$$N_R(x) \quad = \quad |\{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R\}|$$

Además, suponga que $\perp$ es un símbolo reservado que no es usado en Σ

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{G} : \Sigma^* \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ es un generador uniforme para R si para todo $x, y \in \Sigma^*$:

- si $(x, y) \notin R$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x) = y) = 0$
- si $(x, y) \in R$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x) = y) = \frac{1}{N_R(x)}$

Un generador casi uniforme para una p-relación

Las herramientas que veremos más adelante no nos permitirán obtener generadores uniformes, sino que una versión más débil

- Consideramos nuevamente una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

Un generador casi uniforme para una p-relación

Las herramientas que veremos más adelante no nos permitirán obtener generadores uniformes, sino que una versión más débil

- Consideramos nuevamente una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

Definición

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0,1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ *es un generador casi uniforme para* R *si para todo* $x, y \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0,1)$:

Un generador casi uniforme para una p-relación

Las herramientas que veremos más adelante no nos permitirán obtener generadores uniformes, sino que una versión más débil

- Consideramos nuevamente una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

Definición

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0,1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ *es un generador casi uniforme para* R *si para todo* $x, y \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0,1)$:

- *si* $(x,y) \notin R$, *entonces* $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = y) = 0$

Un generador casi uniforme para una p-relación

Las herramientas que veremos más adelante no nos permitirán obtener generadores uniformes, sino que una versión más débil

- Consideramos nuevamente una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

Definición

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0,1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ *es un generador casi uniforme para* R *si para todo* $x, y \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0,1)$:

- *si* $(x,y) \notin R$, *entonces* $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = y) = 0$
- *si* $N_R(x) > 0$, *entonces* $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = \perp) = 0$

Un generador casi uniforme para una p-relación

Las herramientas que veremos más adelante no nos permitirán obtener generadores uniformes, sino que una versión más débil

- Consideramos nuevamente una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

Definición

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0,1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ *es un generador casi uniforme para* R *si para todo* $x, y \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0,1)$:

- *si* $(x,y) \notin R$, *entonces* $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = y) = 0$
- *si* $N_R(x) > 0$, *entonces* $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = \perp) = 0$
- *si* $(x,y) \in R$, *entonces:*

$$(1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{N_R(x)} \leq \mathbf{Pr}(\mathcal{G}(x,\varepsilon) = y) \leq (1+\varepsilon) \cdot \frac{1}{N_R(x)}$$

Un esquema de generación casi uniforme

Definición

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$*, un algoritmo aleatorizado* $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0,1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ *es un* **fully polynomial almost uniform generator (FPAUG)** *para* R *si*

1. $\mathcal{G}$ *es un generador casi uniforme para* R
2. *Existe un polinomio* $q(u,v)$ *tal que para todo* $x \in \Sigma^*$ *y* $\varepsilon \in (0,1)$*, el número de pasos ejecutados por* $\mathcal{G}(x,\varepsilon)$ *es menor o igual a* $q(|x|, \frac{1}{\varepsilon})$

Una definición de FPRAS para relaciones

Definición

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$*, un algoritmo aleatorizado* $\mathcal{A} : \Sigma^* \times (0,1) \to \mathbb{N}$ *es un* **fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS)** *para* R *si existe un polinomio* $q(u,v)$ *tal que para cada* $x \in \Sigma^*$ *y* $\varepsilon \in (0,1)$*:*

1. *El número de pasos ejecutados por* $\mathcal{A}(x,\varepsilon)$ *es menor o igual a* $q(|x|, \frac{1}{\varepsilon})$

Una definición de FPRAS para relaciones

Definición

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$*, un algoritmo aleatorizado* $\mathcal{A} : \Sigma^* \times (0,1) \to \mathbb{N}$ *es un* **fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS)** *para* R *si existe un polinomio* $q(u,v)$ *tal que para cada* $x \in \Sigma^*$ *y* $\varepsilon \in (0,1)$*:*

1. *El número de pasos ejecutados por* $\mathcal{A}(x,\varepsilon)$ *es menor o igual a* $q(|x|, \frac{1}{\varepsilon})$
2. $\mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(x,\varepsilon) - N_R(x)| \leq \varepsilon \cdot N_R(x)) \geq \frac{3}{4}$

Una definición de FPRAS para relaciones

Definición

Dada una p-relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$*, un algoritmo aleatorizado* $\mathcal{A} : \Sigma^* \times (0,1) \to \mathbb{N}$ *es un* **fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS)** *para* R *si existe un polinomio* $q(u,v)$ *tal que para cada* $x \in \Sigma^*$ *y* $\varepsilon \in (0,1)$*:*

1. *El número de pasos ejecutados por* $\mathcal{A}(x,\varepsilon)$ *es menor o igual a* $q(|x|, \frac{1}{\varepsilon})$
2. $\mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(x,\varepsilon) - N_R(x)| \leq \varepsilon \cdot N_R(x)) \geq \frac{3}{4}$

Observación

Dado $f \in \#\mathrm{P}$ representado como R_f, se puede demostrar que esta definición de FPRAS es equivalente a la vista en el capítulo anterior

Un comentario sobre las definiciones anteriores

La noción de algoritmo aleatorizado se formaliza usando MT probabilísticas

- Estas máquinas funcionan con cintas de bits, por lo que las probabilidades resultantes son de la forma $\frac{n}{2^k}$

Un comentario sobre las definiciones anteriores

La noción de algoritmo aleatorizado se formaliza usando MT probabilísticas

- Estas máquinas funcionan con cintas de bits, por lo que las probabilidades resultantes son de la forma $\frac{n}{2^k}$

Por lo tanto, al describir un algoritmo aleatorizado, en teoría no podemos decir algo como "la probabilidad de error del algoritmo es $\frac{1}{3}$"

Algunos comentarios sobre las definiciones anteriores

Tratar de tener algoritmos aleatorizados con probabilidades arbitrarias no entrega intuiciones nuevas

- Y hace mucho más técnicas y complicadas las demostraciones

Algunos comentarios sobre las definiciones anteriores

Tratar de tener algoritmos aleatorizados con probabilidades arbitrarias no entrega intuiciones nuevas

- Y hace mucho más técnicas y complicadas las demostraciones

Supuesto

Todas las probabilidades que vamos a considerar (por ejemplo, la probabilidad $\frac{1}{N_R(x)}$) son de la forma $\frac{n}{2^k}$

La relación entre FPAUG y FPRAS

Pasaremos ahora a enunciar y demostrar que la existencia de un FPAUG implica la existencia de un FPRAS

- Este resultado es válido para una amplia clase de relaciones
- Esto nos va a permitir utilizar una gran cantidad de herramientas desarrolladas para el muestreo de variables aleatorias en la construcción de FPRAS

La relación entre FPAUG y FPRAS

Pasaremos ahora a enunciar y demostrar que la existencia de un FPAUG implica la existencia de un FPRAS

- Este resultado es válido para una amplia clase de relaciones
- Esto nos va a permitir utilizar una gran cantidad de herramientas desarrolladas para el muestreo de variables aleatorias en la construcción de FPRAS

Primero debemos formalizar la noción de p-relación auto-reducible, la cual es necesaria al demostrar la relación entre FPAUG y FPRAS

Relaciones auto-reducibles

Intuitivamente, un problema se dice auto-reducible si es que se puede solucionar mediante la resolución de instancias más simples del mismo problema

Relaciones auto-reducibles

Intuitivamente, un problema se dice auto-reducible si es que se puede solucionar mediante la resolución de instancias más simples del mismo problema

Ejemplo

Sea φ una fórmula proposicional con variables $x_1, \ldots, x_n$

La notación $\varphi[\frac{x_i}{v}]$ indica que la variable x_i es reemplazada por $v \in \{0, 1\}$

- Si $v = 0$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\bot$, y si $v = 1$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\top$
- $\varphi[\frac{x_i}{v}]$ tiene una variable menos que φ

Determinar si φ es satisfacible se reduce a determinar si $\varphi[\frac{x_1}{0}]$ o $\varphi[\frac{x_1}{1}]$ es satisfacible

- Así, una instancia de SAT se reduce a instancias más simples de SAT

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ *es auto-reducible si:*

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ es auto-reducible si:

1. *Existe una función $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tal que g es computable en tiempo polinomial y para cada $(x, y) \in R$ se tiene que $|y| = g(x)$*

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ es auto-reducible si:

1. *Existe una función $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tal que g es computable en tiempo polinomial y para cada $(x, y) \in R$ se tiene que $|y| = g(x)$*
2. *Existen funciones $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ y $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tales que:*

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ es auto-reducible si:

1. *Existe una función $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tal que g es computable en tiempo polinomial y para cada $(x, y) \in R$ se tiene que $|y| = g(x)$*
2. *Existen funciones $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ y $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tales que:*
   - *ψ y σ son computables en tiempo polinomial*

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ es auto-reducible si:

1. *Existe una función $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tal que g es computable en tiempo polinomial y para cada $(x, y) \in R$ se tiene que $|y| = g(x)$*
2. *Existen funciones $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ y $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ tales que:*
   - *ψ y σ son computables en tiempo polinomial*
   - *$\sigma(x) \in O(\log(|x|))$*

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ *es auto-reducible si:*

1. *Existe una función* $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tal que* g *es computable en tiempo polinomial y para cada* $(x, y) \in R$ *se tiene que* $|y| = g(x)$
2. *Existen funciones* $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ *y* $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tales que:*
   - ψ *y* σ *son computables en tiempo polinomial*
   - $\sigma(x) \in O(\log(|x|))$
   - $\forall x \in \Sigma^*$*: si* $g(x) > 0$*, entonces* $0 < \sigma(x) \leq g(x)$

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ *es auto-reducible si:*

1. *Existe una función* $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tal que* g *es computable en tiempo polinomial y para cada* $(x, y) \in R$ *se tiene que* $|y| = g(x)$
2. *Existen funciones* $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ *y* $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tales que:*
   - ψ *y* σ *son computables en tiempo polinomial*
   - $\sigma(x) \in O(\log(|x|))$
   - $\forall x \in \Sigma^*$*: si* $g(x) > 0$*, entonces* $0 < \sigma(x) \leq g(x)$
   - $\forall x, w \in \Sigma^*$: $|\psi(x, w)| \leq |x|$

Relaciones auto-reducibles: formalización

Definición

Una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ *es auto-reducible si:*

1. *Existe una función* $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tal que* g *es computable en tiempo polinomial y para cada* $(x, y) \in R$ *se tiene que* $|y| = g(x)$
2. *Existen funciones* $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ *y* $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *tales que:*
   - ψ *y* σ *son computables en tiempo polinomial*
   - $\sigma(x) \in O(\log(|x|))$
   - $\forall x \in \Sigma^*$*: si* $g(x) > 0$*, entonces* $0 < \sigma(x) \leq g(x)$
   - $\forall x, w \in \Sigma^*$*:* $|\psi(x, w)| \leq |x|$
   - $\forall x, y \in \Sigma^*$ *con* $y = a_1 \cdots a_n$*:*

     $(x, y) \in R$ *si y sólo si* $(\psi(x, a_1 \cdots a_{\sigma(x)}), a_{\sigma(x)+1} \cdots a_n) \in R$

Relaciones auto-reducibles: ejemplos

Ejercicios

Demuestre que las siguientes relaciones son auto-reducibles:

1. $R_{\mathsf{SAT}} = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi$ es una fórmula proposicional y σ es una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 1\}$

2. $R_{\mathsf{IS}} = \{(G, S) \mid G$ es un grafo y S es un conjunto independiente de $G\}$

Una relación natural no auto-reducible

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente maximal de G si:

1. S es un conjunto independiente de G
2. Para todo conjunto independiente S' de G, no se cumple que $S \subsetneq S'$

Una relación natural no auto-reducible

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente maximal de G si:

1. S es un conjunto independiente de G
2. Para todo conjunto independiente S' de G, no se cumple que $S \subsetneq S'$

Considere la relación:

$R_{\text{MIS}} = \{(G, S) \mid G \text{ es un grafo y } S \text{ es un conjunto independiente maximal de } G\}$

Una relación natural no auto-reducible

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente maximal de G si:

1. S es un conjunto independiente de G
2. Para todo conjunto independiente S' de G, no se cumple que $S \subsetneq S'$

Considere la relación:

$R_{\text{MIS}} = \{(G, S) \mid G \text{ es un grafo y } S \text{ es un conjunto independiente maximal de } G\}$

¿Es R_{MIS} auto-reducible?

Una relación natural no auto-reducible

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente maximal de G si:

1. S es un conjunto independiente de G
2. Para todo conjunto independiente S' de G, no se cumple que $S \subsetneq S'$

Considere la relación:

$R_{\text{MIS}} = \{(G, S) \mid G \text{ es un grafo y } S \text{ es un conjunto independiente maximal de } G\}$

¿Es R_{MIS} auto-reducible?

- ¿Cómo se puede demostrar que no lo es?

Una propiedad de las relaciones auto-reducibles

Para demostrar que R_{MIS} no es auto-reducible identificamos una propiedad de las relaciones auto-reducibles que no es cumplida por R_{MIS}

- Bajo una suposición de complejidad

Una propiedad de las relaciones auto-reducibles

Para demostrar que R_{MIS} no es auto-reducible identificamos una propiedad de las relaciones auto-reducibles que no es cumplida por R_{MIS}

- Bajo una suposición de complejidad

Dado un alfabeto Σ, suponga dado un orden lineal en Σ

- Este orden lineal induce un orden lexicográfico $\leq$ en Σ^*

Una propiedad de las relaciones auto-reducibles

Para demostrar que R_{MIS} no es auto-reducible identificamos una propiedad de las relaciones auto-reducibles que no es cumplida por R_{MIS}

- Bajo una suposición de complejidad

Dado un alfabeto Σ, suponga dado un orden lineal en Σ

- Este orden lineal induce un orden lexicográfico $\leq$ en Σ^*

Definición

Dada una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$*:*

$$
\begin{aligned}
\mathit{Exists}(R) &= \{x \mid \exists y : (x,y) \in R\} \\
\mathit{Min}(R) &= \{(x,y) \mid x \in \mathit{Exists}(R) \wedge y = \arg\min_{\leq}\{z \mid (x,z) \in R\}\} \\
\mathit{Max}(R) &= \{(x,y) \mid x \in \mathit{Exists}(R) \wedge y = \arg\max_{\leq}\{z \mid (x,z) \in R\}\}
\end{aligned}
$$

Una propiedad de las relaciones auto-reducible

Teorema

Si R es una p-relación auto-reducible tal que $Exists(R) \in P$, entonces $Min(R) \in P$ y $Max(R) \in P$

Una propiedad de las relaciones auto-reducible

Teorema

Si R es una p-relación auto-reducible tal que $Exists(R) \in P$, entonces $Min(R) \in P$ y $Max(R) \in P$

Ejercicio

Demuestre el teorema

R_{MIS} no es auto-reducible

Proposición

Si R_{MIS} es auto-reducible, entonces $\text{P} = \text{NP}$

R_{MIS} no es auto-reducible

Proposición

Si R_{MIS} es auto-reducible, entonces P = NP

Ejercicio

Demuestre las siguientes propiedades:

1. R_{MIS} es una p-relación y Exists(R_{MIS}) $\in$ P
2. Min(R_{MIS}) es co-NP-completo

R_{MIS} no es auto-reducible

Proposición

Si R_{MIS} es auto-reducible, entonces P = NP

Ejercicio

Demuestre las siguientes propiedades:

1. R_{MIS} es una p-relación y Exists(R_{MIS}) $\in$ P
2. Min(R_{MIS}) es co-NP-completo

A partir de estas propiedades y del teorema demuestre la proposición

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a mostrar que CNF-SAT $\leq_m^p \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a mostrar que CNF-SAT $\leq_m^p \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$

- Dada una formula proposicional φ en CNF, mostramos como construir en tiempo polinomial un grafo $G = (N, A)$ y un conjunto $S \subseteq N$ tales que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \quad \text{si y sólo si} \quad (G, S) \in \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$$

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a mostrar que CNF-SAT $\leq_m^p \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$

- Dada una formula proposicional φ en CNF, mostramos como construir en tiempo polinomial un grafo $G = (N, A)$ y un conjunto $S \subseteq N$ tales que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \quad \text{si y sólo si} \quad (G, S) \in \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$$

Debemos representar S como un string sobre un alfabeto Σ fijo

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a mostrar que CNF-SAT $\leq_m^p \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$

- Dada una formula proposicional φ en CNF, mostramos como construir en tiempo polinomial un grafo $G = (N, A)$ y un conjunto $S \subseteq N$ tales que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \quad \text{si y sólo si} \quad (G, S) \in \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$$

Debemos representar S como un string sobre un alfabeto Σ fijo

- Esto es necesario porque debemos tener un orden lexicográfico sobre los conjuntos independientes maximales de G

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a mostrar que CNF-SAT $\leq_m^p \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$

- Dada una formula proposicional φ en CNF, mostramos como construir en tiempo polinomial un grafo $G = (N, A)$ y un conjunto $S \subseteq N$ tales que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \quad \text{si y sólo si} \quad (G, S) \in \overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$$

Debemos representar S como un string sobre un alfabeto Σ fijo

- Esto es necesario porque debemos tener un orden lexicográfico sobre los conjuntos independientes maximales de G

En estricto rigor también G debería ser representado como un string sobre Σ

- Aunque esto no es fundamental para la demostración

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a dar la idea de la demostración con un ejemplo

- Dejamos como un ejercicio el generalizar esta idea a cualquier fórmula proposicional en CNF

Solucionando el ejercicio: $\overline{\text{Min}(R_{\text{MIS}})}$ es NP-hard

Vamos a dar la idea de la demostración con un ejemplo

- Dejamos como un ejercicio el generalizar esta idea a cualquier fórmula proposicional en CNF

Suponga que $\varphi = C_1 \wedge C_2$, donde $C_1 = (r \vee t)$ y $C_2 = (t \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg u)$

- Consideramos $\Sigma = \{0, 1\}$ en la reducción

Los nodos del grafo G

El conjunto N de nodos de G es definido como:

$$N \quad = \quad \{C_1, C_2, r, s, t, u, \neg r, \neg s, \neg t, \neg u, \star\}$$

donde $\star$ es un símbolo que no es mencionado en φ

Representando un conjunto independiente de G

Para representar un conjunto $S \subseteq N$ usamos un string $w \in \{0,1\}^*$ de largo 11

- El primer bit de w es 1 si $C_1 \in S$, y 0 en caso contrario. El segundo bit de w es 1 si $C_2 \in S$, y 0 en caso contrario
- El tercer bit de w es 1 si $\star \in S$, y 0 en caso contrario
- Los siguientes bits de w son construidos de la misma forma para los nodos $r, s, t, u, \neg r, \neg s, \neg t, \neg u$

Representando un conjunto independiente de G

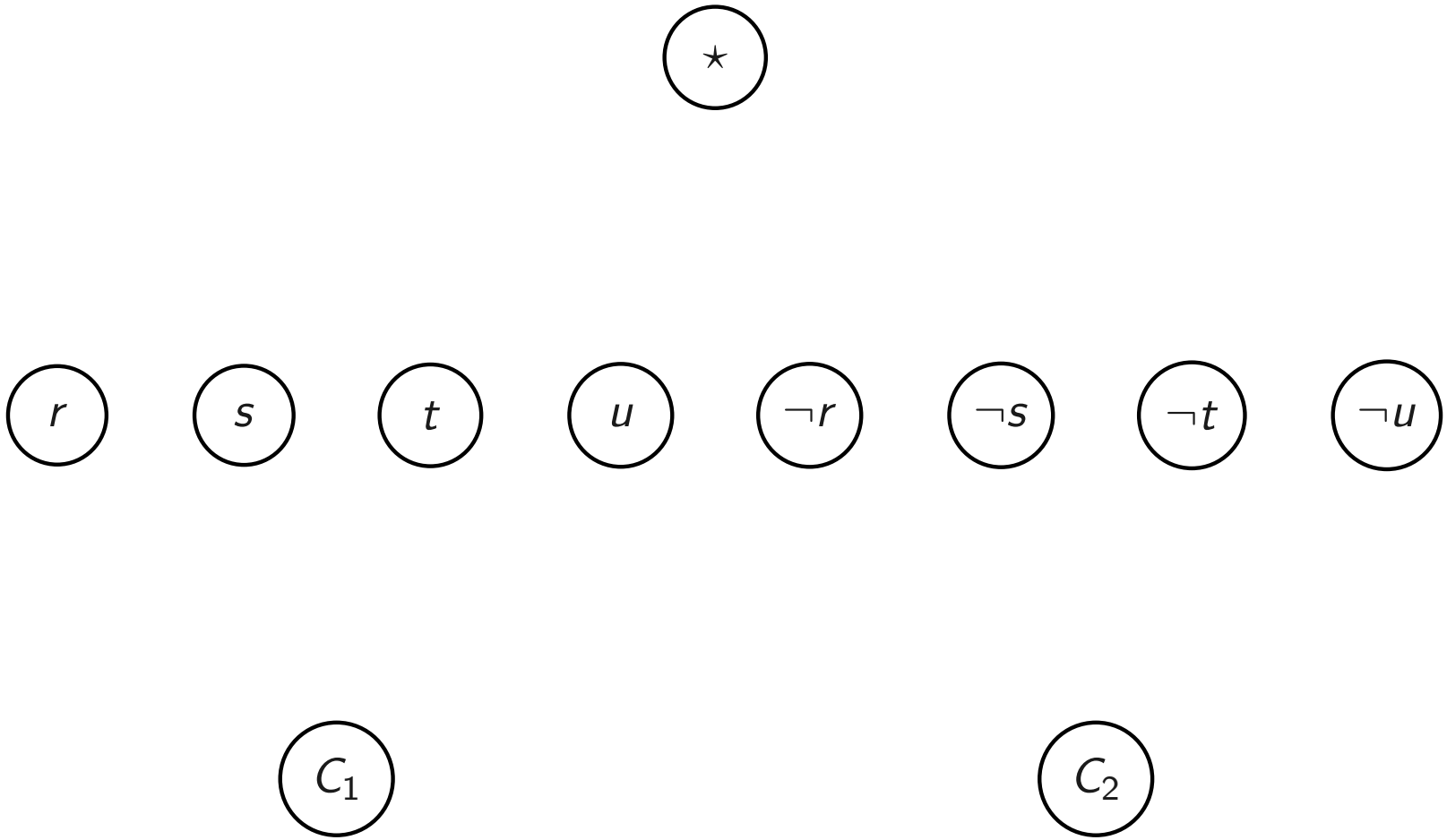
Para representar un conjunto $S \subseteq N$ usamos un string $w \in \{0,1\}^*$ de largo 11

- El primer bit de w es 1 si $C_1 \in S$, y 0 en caso contrario. El segundo bit de w es 1 si $C_2 \in S$, y 0 en caso contrario
- El tercer bit de w es 1 si $\star \in S$, y 0 en caso contrario
- Los siguientes bits de w son construidos de la misma forma para los nodos $r, s, t, u, \neg r, \neg s, \neg t, \neg u$

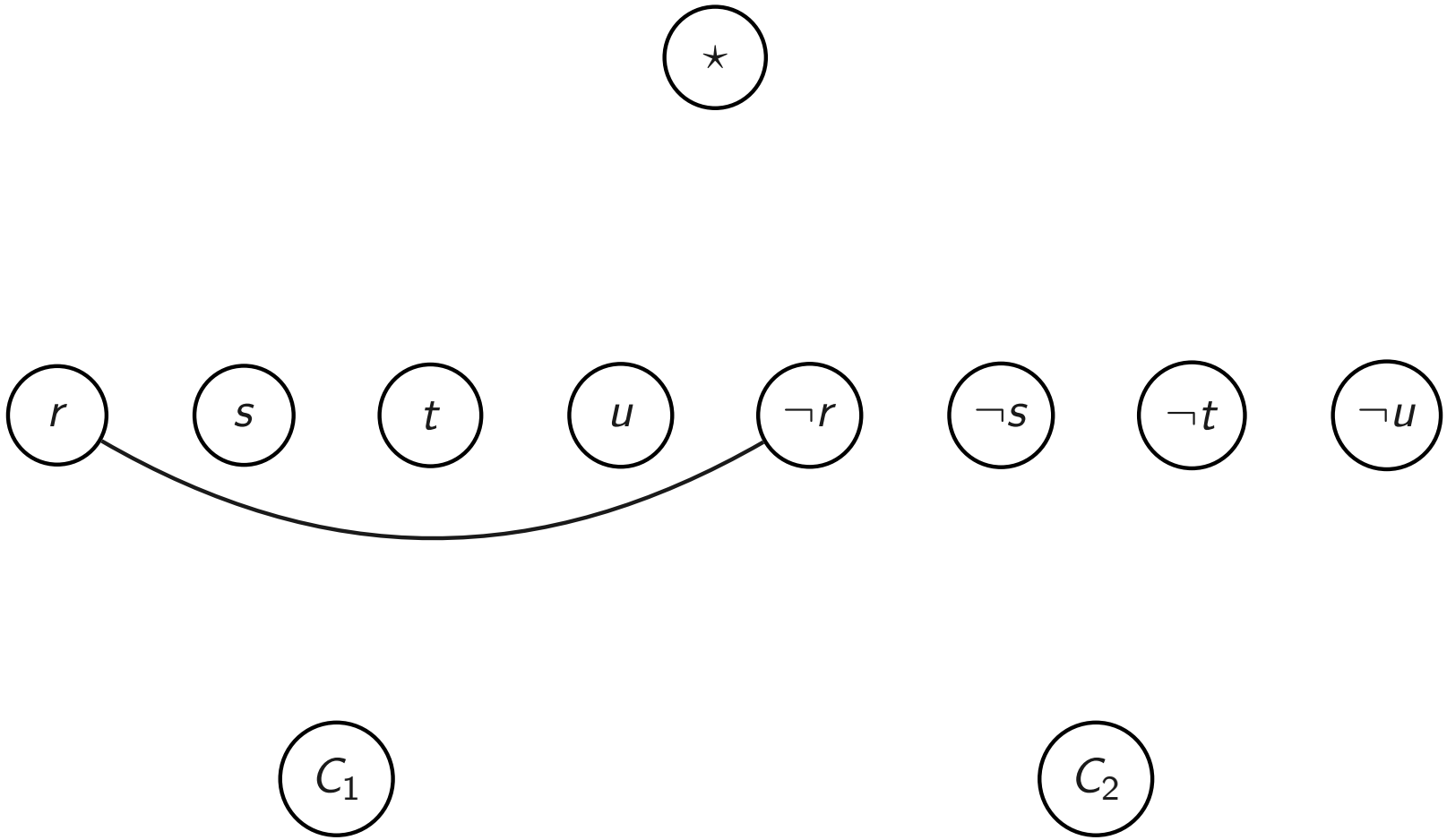
Ejemplo

El conjunto $S = \{C_2, \star, u, \neg s, \neg t\}$ es representado por el string 01100010110

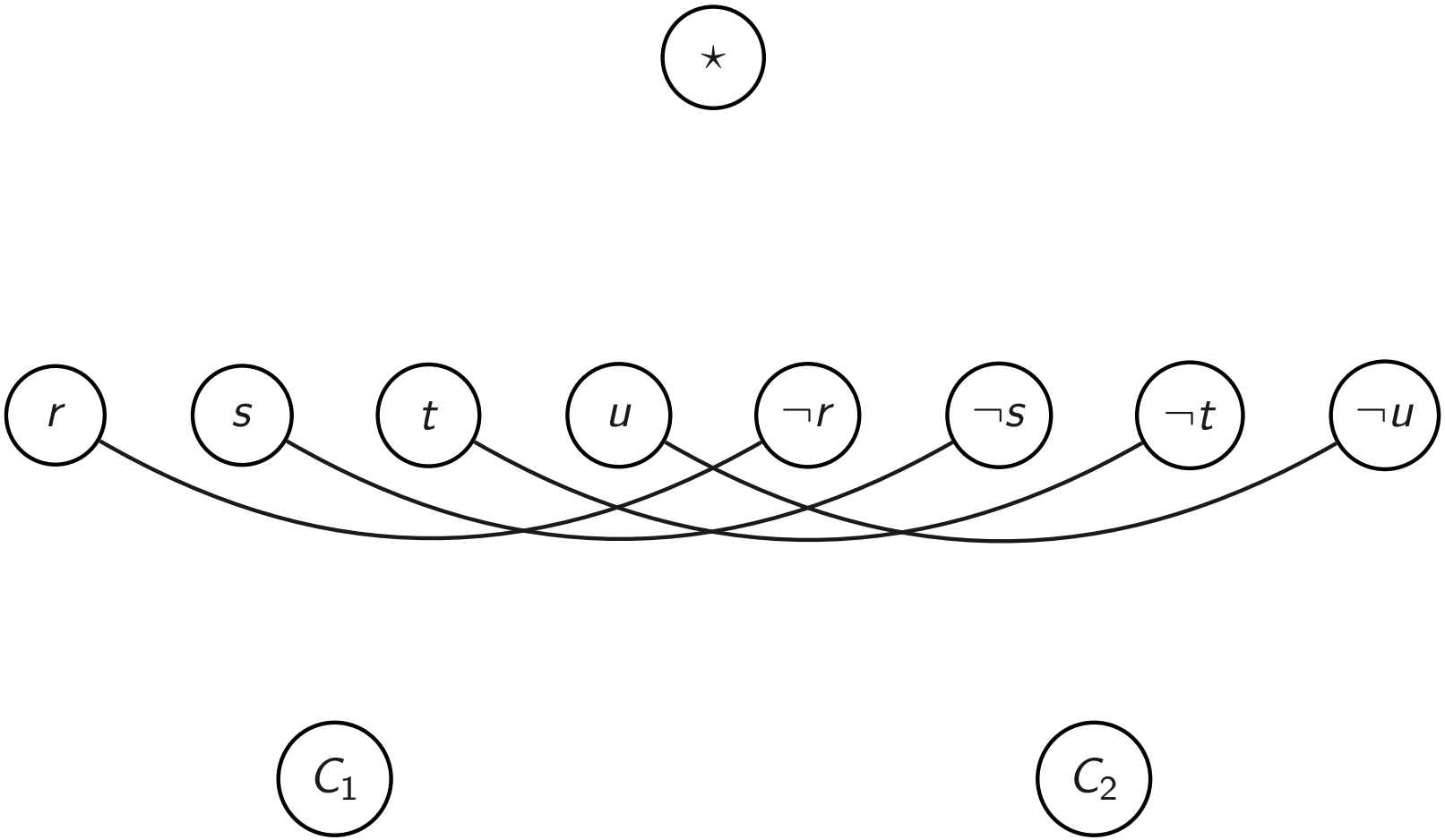
Los arcos del grafo G



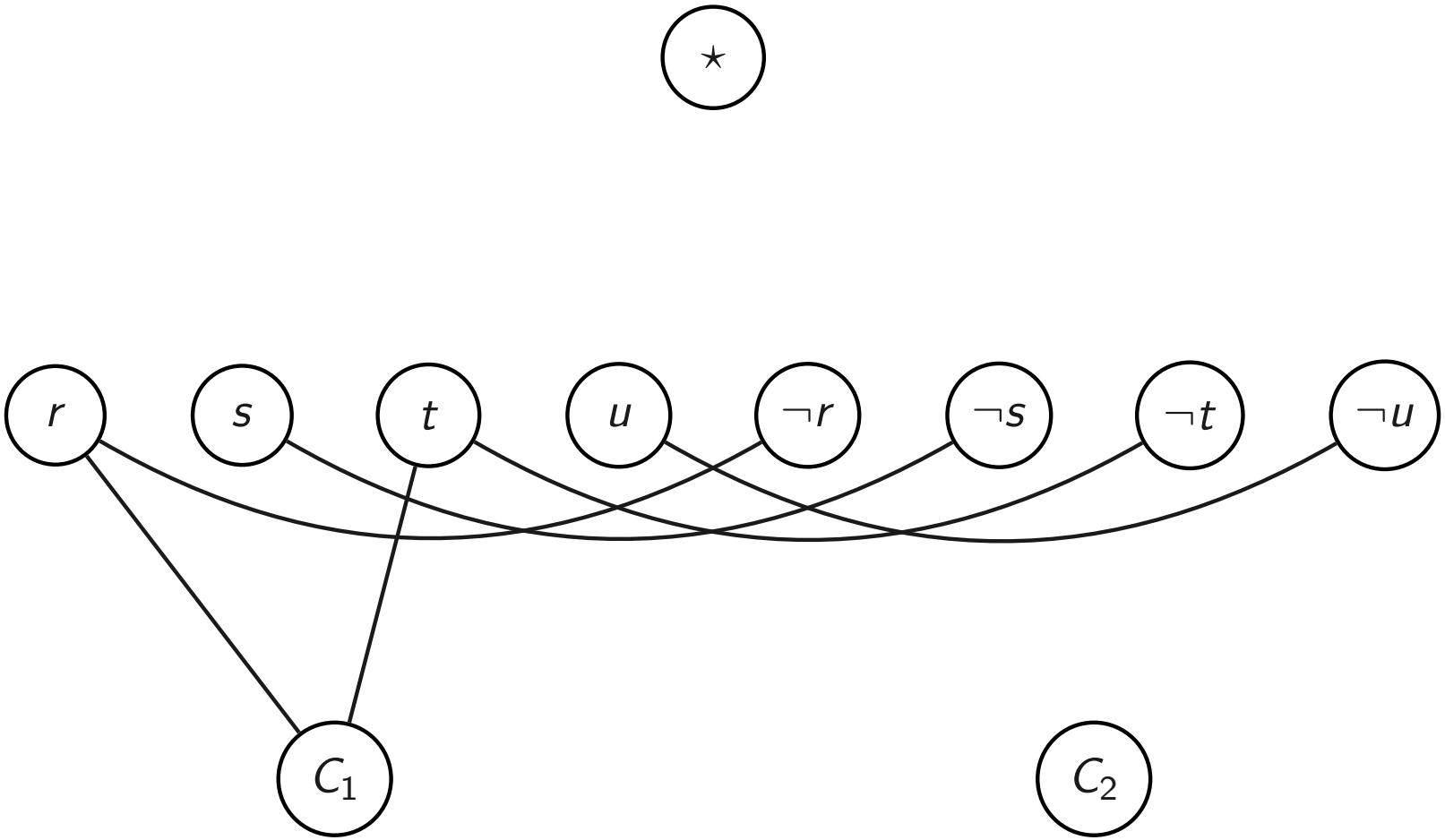
Los arcos del grafo G



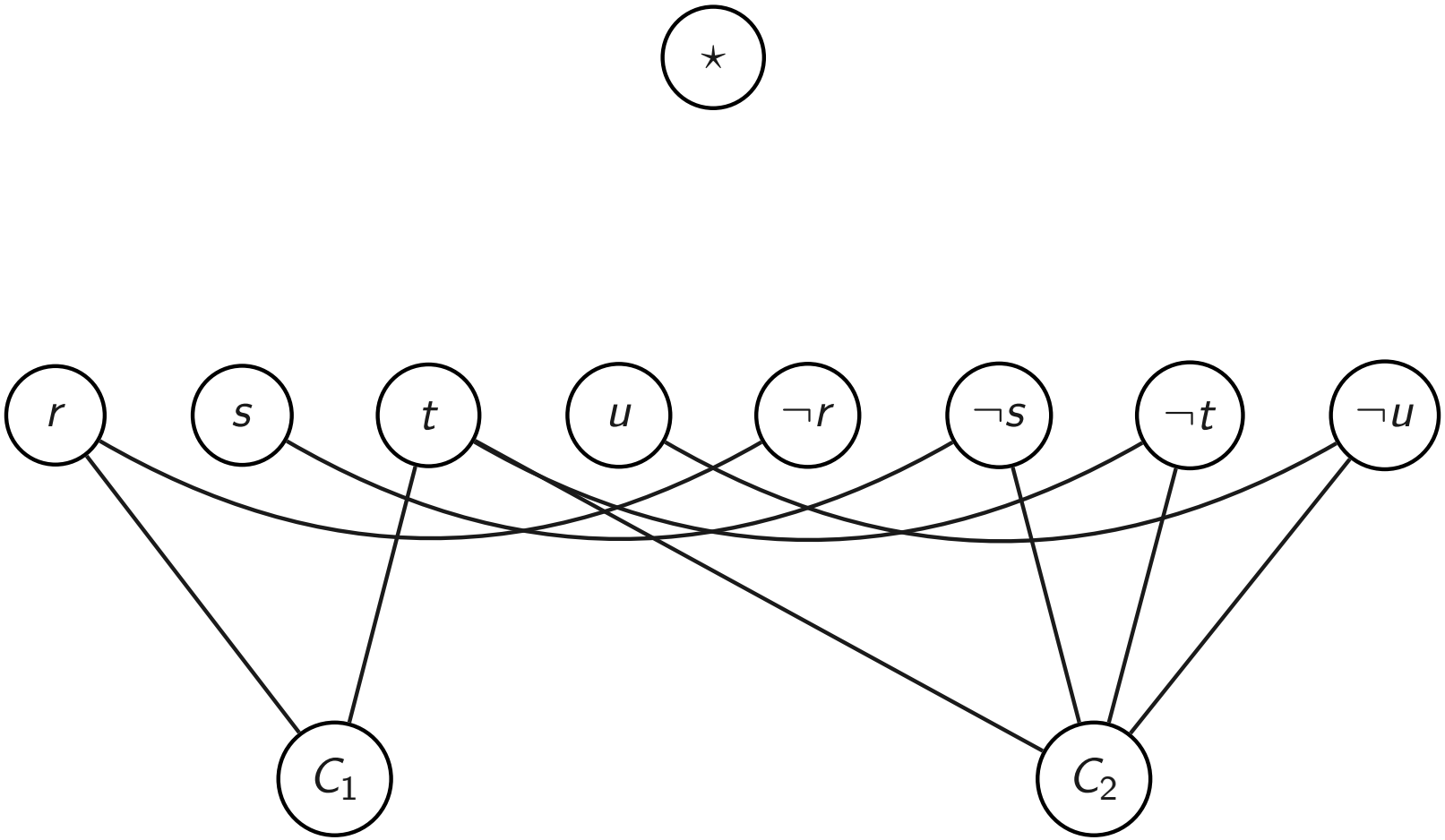
Los arcos del grafo G



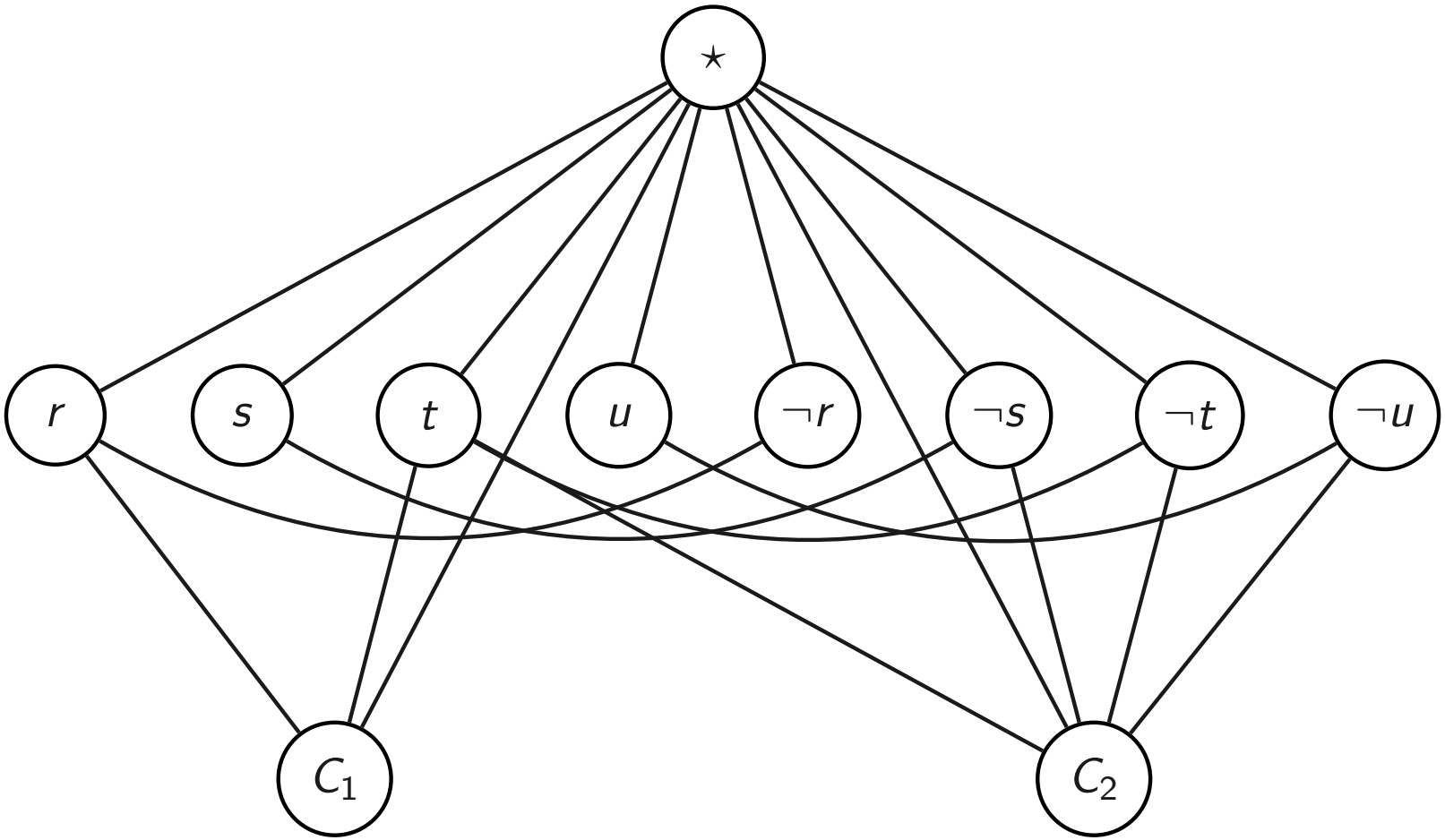
Los arcos del grafo G



Los arcos del grafo G



Los arcos del grafo G



La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

Tenemos que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

- ¿Por qué se cumple esto en general?

La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

Tenemos que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

- ¿Por qué se cumple esto en general?

$S' = \{r, \neg s\}$ también es un conjunto independiente maximal de G

La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

Tenemos que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

- ¿Por qué se cumple esto en general?

$S' = \{r, \neg s\}$ también es un conjunto independiente maximal de G

- S' representa a una valuación σ que satisface φ: $\sigma(r) = 1$ y $\sigma(s) = 0$

La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

Tenemos que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

- ¿Por qué se cumple esto en general?

$S' = \{r, \neg s\}$ también es un conjunto independiente maximal de G

- S' representa a una valuación σ que satisface φ: $\sigma(r) = 1$ y $\sigma(s) = 0$
- S' es representado por el string 00010000100

La equivalencia entre los problemas

$S = \{\star\}$ es un conjunto independiente maximal de G

- Es representado por el string 00100000000

Tenemos que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

- ¿Por qué se cumple esto en general?

$S' = \{r, \neg s\}$ también es un conjunto independiente maximal de G

- S' representa a una valuación σ que satisface φ: $\sigma(r) = 1$ y $\sigma(s) = 0$
- S' es representado por el string 00010000100
- Tenemos que $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$ puesto que 00010000100 es menor que 00100000000 en orden lexicográfico

Comentarios finales

Ejercicios

1. Para $\varphi = (r \vee t) \vee (t \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg u)$, encuentre S'' tal que $(G, S'') \in \mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})$

2. Generalice la construcción mostrada para cualquier fórmula proposicional φ en CNF
   - Si φ menciona m cláusulas y n variables proposicionales, entonces el grafo G debe tener $m + 2 \cdot n + 1$ nodos
   - Como en el ejemplo, se debe tener que $S = \{\star\}$

3. Para la construcción realizada en 2, demuestre que φ es satisfacible si y sólo si $(G, S) \in \overline{\mathrm{Min}(R_{\mathrm{MIS}})}$

Una herramienta fundamental

Teorema (Jerrum, Valiant & Vazirani)

Sea R una p-relación auto-reducible. Si existe un FPAUG para R, entonces existe un FPRAS para R

La idea de la demostración: primer ejemplo

Vamos a mostrar algunas de las ideas fundamentales de la demostración considerando #SAT

- Recuerde que $R_{\mathsf{SAT}} = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi$ es una fórmula proposicional y σ es una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 1\}$ es una p-relación auto-reducible

La idea de la demostración: primer ejemplo

Vamos a mostrar algunas de las ideas fundamentales de la demostración considerando #SAT

- Recuerde que $R_{\mathsf{SAT}} = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi$ es una fórmula proposicional y σ es una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 1\}$ es una p-relación auto-reducible

Suponemos que tenemos un generador uniforme para R_{SAT}

La idea de la demostración: primer ejemplo

Vamos a mostrar algunas de las ideas fundamentales de la demostración considerando #SAT

- Recuerde que $R_{\mathsf{SAT}} = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi$ es una fórmula proposicional y σ es una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 1\}$ es una p-relación auto-reducible

Suponemos que tenemos un generador uniforme para R_{SAT}

- Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para #SAT

La idea de la demostración: primer ejemplo

Vamos a mostrar algunas de las ideas fundamentales de la demostración considerando #SAT

- Recuerde que $R_{\mathsf{SAT}} = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi$ es una fórmula proposicional y σ es una valuación tal que $\sigma(\varphi) = 1\}$ es una p-relación auto-reducible

Suponemos que tenemos un generador uniforme para R_{SAT}

- Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para #SAT
- En la demostración del teorema la hipótesis será que existe un FPAUG para la relación que estemos considerando

La idea de la demostración: #SAT

Sea $\mathcal{G}$ un generador uniforme para R_{SAT} que funciona en tiempo polinomial

Para cada fórmula proposicional φ tenemos:

- si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\varphi) = \sigma) = 0$
- si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\varphi) = \sigma) = \frac{1}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$

La idea de la demostración: #SAT

Sea φ un fórmula proposicional y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de variables mencionadas en φ

Podemos utilizar $\mathcal{G}$ para generar una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$

- Si $\mathcal{G}(\varphi) = \bot$, entonces sabemos que φ no es satisfacible y $\#\mathrm{SAT}(\varphi) = 0$

Suponemos que $\sigma(x_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

La idea de la demostración: #SAT

Tenemos que $\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]) = 1$

- $\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]$ es obtenida desde φ reemplazando casa variable x_i por el valor v_i
  - Si $v_i = 0$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\bot$, y si $v_i = 1$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\top$
  - $\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]$ no tiene variables

La idea de la demostración: #SAT

Tenemos que $\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]) = 1$

- $\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]$ es obtenida desde φ reemplazando casa variable x_i por el valor v_i
  - Si $v_i = 0$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\bot$, y si $v_i = 1$ reemplazamos x_i por el operador 0-ario $\top$
  - $\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}]$ no tiene variables

Así, tenemos que:

$$\#\mathrm{SAT}(\varphi) \quad = \quad \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi)}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])} \cdot \#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])$$

La idea de la demostración: #SAT

Por lo tanto, tenemos que:

$$\#\mathsf{SAT}(\varphi) \quad = \quad \frac{1}{\rho}$$

donde:

$$\rho \quad = \quad \frac{\#\mathsf{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$$

La idea de la demostración: #SAT

Por lo tanto, tenemos que:

$$\#\mathsf{SAT}(\varphi) \quad = \quad \frac{1}{\rho}$$

donde:

$$\rho \quad = \quad \frac{\#\mathsf{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$$

Podemos entonces estimar $\#\mathsf{SAT}(\varphi)$ utilizando una estimación para ρ

- Utilizamos $\mathcal{G}$ para estimar ρ

Estimando ρ

Sea X una variable aleatoria que toma valor 1 para σ, y toma valor 0 para cada valuación σ' tal que $\sigma'(\varphi) = 1$ y $\sigma' \neq \sigma$

- En particular, tenemos que $X \sim \mathbf{Ber}(\rho)$

Tenemos que $\mathbf{E}[X] = \rho$, por lo que podemos estimar ρ a través del muestreo de X

- Realizamos $t \geq 1$ nuestras independientes $X_1, \ldots, X_t$ de X, y utilizamos como estimador el promedio $\overline{X} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} X_i$
  - Puesto que $\mathbf{E}[\overline{X}] = \rho$ y tiene una menor varianza

Estimando ρ

Para estimar ρ utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\sigma' := \mathcal{G}(\varphi)$
    if $\sigma' = \sigma$ **then**
        $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

Estimando ρ

Para estimar ρ utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\sigma' := \mathcal{G}(\varphi)$
    if $\sigma' = \sigma$ **then**
        $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

¿Qué tan buena es la estimación de ρ? ¿Cuántas muestras t debemos realizar para tener una buena estimación de ρ?

Estimando ρ

Usando la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]) &\leq \frac{\mathbf{Var}[\overline{X}]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]^2} \\
&= \frac{\mathbf{Var}[X]}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \\
&= \frac{\rho \cdot (1-\rho)}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \\
&\leq \frac{1}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}
\end{aligned}$$

Estimando ρ

Usando la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]) &\leq \frac{\mathbf{Var}[\overline{X}]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]^2} \\
&= \frac{\mathbf{Var}[X]}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \\
&= \frac{\rho \cdot (1-\rho)}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \\
&\leq \frac{1}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \leq t$, entonces:

$$\mathbf{Pr}(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]) \leq \frac{1}{4}$$

Estimando ρ

Para obtener una buena estimación de ρ realizamos entonces $t = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \rceil$ muestras

- ¿Cuán grande es t?

Estimando ρ

Para obtener una buena estimación de ρ realizamos entonces $t = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \rceil$ muestras

- ¿Cuán grande es t?

Dado que $\mathbf{E}[X] = \rho = \frac{1}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$, obtenemos:

$$t = \left\lceil \frac{4 \cdot (\#\mathsf{SAT}(\varphi))^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

Estimando ρ

Para obtener una buena estimación de ρ realizamos entonces $t = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \rceil$ muestras

- ¿Cuán grande es t?

Dado que $\mathbf{E}[X] = \rho = \frac{1}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$, obtenemos:

$$t = \left\lceil \frac{4 \cdot (\#\mathsf{SAT}(\varphi))^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

Por lo tanto, t puede ser exponencial en el tamaño de φ

- ¿Puede ser solucionado este problema utilizando una valuación distinta de σ que satisfaga φ?

Reduciendo el número de muestras

Consideramos nuevamente la valuación σ que satisface φ

- Recuerde que $\sigma(x_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

Reduciendo el número de muestras

Consideramos nuevamente la valuación σ que satisface φ

- Recuerde que $\sigma(x_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

Tenemos que:

$$\#\mathrm{SAT}(\varphi) = \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi)}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])} \cdot \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}])} \cdot \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}, \frac{x_3}{v_3}])} \cdot \ldots \cdot \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{v_{n-1}}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])} \cdot \#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])$$

Reduciendo el número de muestras

Por lo tanto:

$$\#\mathrm{SAT}(\varphi) = \frac{1}{\left(\frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi)}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}, \frac{x_3}{v_3}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \frac{x_2}{v_2}])}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\left(\frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_n}{v_n}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{v_{n-1}}])}\right)}$$

Definiendo $\rho_i = \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_i}{v_i}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{v_{i-1}}])}$, obtenemos:

$$\#\mathrm{SAT}(\varphi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i}$$

Estimando ρ_1

Sea X una variable aleatoria tal que para toda valuación σ' que satisface φ:

$$X(\sigma') = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma'(x_1) = v_1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que $X \sim \textbf{Ber}(\rho_1)$

Realizamos $t \geq 1$ nuestras independientes $X_1, \ldots, X_t$ de X, y utilizamos como estimador el promedio $\overline{X} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} X_i$

Estimando ρ_1

Para estimar ρ_1 utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\sigma' := \mathcal{G}(\varphi)$
    if $\sigma'(x_1) = v_1$ **then**
        $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

Estimando ρ_1

Para estimar ρ_1 utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\sigma' := \mathcal{G}(\varphi)$
    if $\sigma'(x_1) = v_1$ **then**
        $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

¿Qué tan buena es la estimación de ρ_1? ¿Solucionamos el problema que teníamos con el enfoque anterior?

Estimando ρ_1

Usando nuevamente la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\mathbf{Pr}(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]) \quad \leq \quad \frac{1}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}$$

Entonces realizamos $t = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \rceil$ muestras

- Dado que $\mathbf{E}[X] = \rho_1 = \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi)}$, obtenemos:

$$t \quad = \quad \left\lceil \frac{4 \cdot (\#\mathrm{SAT}(\varphi))^2}{\varepsilon^2 \cdot (\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}]))^2} \right\rceil$$

Estimando ρ_1

Usando nuevamente la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\mathbf{Pr}(|\overline{X} - \mathbf{E}[\overline{X}]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[\overline{X}]) \quad \leq \quad \frac{1}{t \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}$$

Entonces realizamos $t = \lceil \frac{4}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2} \rceil$ muestras

- Dado que $\mathbf{E}[X] = \rho_1 = \frac{\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}])}{\#\mathrm{SAT}(\varphi)}$, obtenemos:

$$t \quad = \quad \left\lceil \frac{4 \cdot (\#\mathrm{SAT}(\varphi))^2}{\varepsilon^2 \cdot (\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}]))^2} \right\rceil$$

Por lo tanto, nuevamente t puede ser exponencial en el tamaño de φ

- Por ejemplo, si $\#\mathrm{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{v_1}]) = 1$ y $\#\mathrm{SAT}(\varphi) = 2^{n-1} + 1$

Reduciendo el valor de t

¿Qué salió mal?

Reduciendo el valor de t

¿Qué salió mal? El problema de elegir σ antes de realizar la estimación de ρ_1 es que el valor $\mathbf{E}[X]$ puede ser muy pequeño, por lo que el valor $\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2}$ puede ser muy grande

Reduciendo el valor de t

¿Qué salió mal? El problema de elegir σ antes de realizar la estimación de ρ_1 es que el valor $\mathbf{E}[X]$ puede ser muy pequeño, por lo que el valor $\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2}$ puede ser muy grande

- En el caso anterior podíamos tener que $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2^{n-1}+1}$, por lo que $\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2} = (2^{n-1}+1)^2$

Reduciendo el valor de t

¿Qué salió mal? El problema de elegir σ antes de realizar la estimación de ρ_1 es que el valor $\mathbf{E}[X]$ puede ser muy pequeño, por lo que el valor $\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2}$ puede ser muy grande

- En el caso anterior podíamos tener que $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2^{n-1}+1}$, por lo que $\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2} = (2^{n-1}+1)^2$

Para evitar este problema, tenemos que elegir el valor v_1 por el que vamos a reemplazar la variable x_1 **después** de realizar las t muestras

Reduciendo el valor de t

Sea:

$$\alpha = \frac{\#\mathsf{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{0}])}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\#\mathsf{SAT}(\varphi[\frac{x_1}{1}])}{\#\mathsf{SAT}(\varphi)}$$

Nótese que $\alpha + \beta = 1$

Sean Y, Z variables aleatorios tales que para toda valuación σ que satisface φ:

$$Y(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x_1) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$Z(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x_1) = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma(x_1) = 0 \end{cases}$$

Nótese que $Y \sim \mathbf{Ber}(\alpha)$, $Z \sim \mathbf{Ber}(\beta)$ y $Z = 1 - Y$

Reduciendo el valor de t

Consideramos los estimadores $\overline{Y}$ y $\overline{Z}$ que calculamos con el siguiente algoritmo:

$fav_Y := 0$
$fav_Z := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\sigma := \mathcal{G}(\varphi)$
    if $\sigma(x_1) = 0$
        then $fav_Y := fav_Y + 1$
        else $fav_Z := fav_Z + 1$
return $(\frac{fav_Y}{t}, \frac{fav_Z}{t})$

Reduciendo el valor de t

Finalmente reemplazamos x_1 por:

$$v_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{Y} \geq \overline{Z} \\ 1 & \text{si } \overline{Y} < \overline{Z} \end{cases}$$

Lo cual corresponde a utilizar el siguiente estimador:

$$X = \mathbf{max}\{\overline{Y}, \overline{Z}\}$$

Reduciendo el valor de t

Finalmente reemplazamos x_1 por:

$$v_1 \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{Y} \geq \overline{Z} \\ 1 & \text{si } \overline{Y} < \overline{Z} \end{cases}$$

Lo cual corresponde a utilizar el siguiente estimador:

$$X \quad = \quad \mathbf{max}\{\overline{Y}, \overline{Z}\}$$

Vale decir, reemplazamos x_1 por el valor v_1 que esperamos que aparezca un mayor número de veces en las valuaciones que satisfacen φ

Reduciendo el valor de t

¿Solucionamos el problema con el valor de $\mathbf{E}[X]$?

Reduciendo el valor de t

¿Solucionamos el problema con el valor de $\mathbf{E}[X]$? **¡Sí!**

Reduciendo el valor de t

¿Solucionamos el problema con el valor de $\mathbf{E}[X]$? **¡Sí!**

Dado que $\overline{Y} \leq X$ y $\overline{Z} \leq X$, tenemos que $\mathbf{E}[\overline{Y}] \leq \mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[\overline{Z}] \leq \mathbf{E}[X]$

- Por lo tanto $\alpha \leq \mathbf{E}[X]$ y $\beta \leq \mathbf{E}[X]$

Reduciendo el valor de t

¿Solucionamos el problema con el valor de $\mathbf{E}[X]$? **¡Sí!**

Dado que $\overline{Y} \leq X$ y $\overline{Z} \leq X$, tenemos que $\mathbf{E}[\overline{Y}] \leq \mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[\overline{Z}] \leq \mathbf{E}[X]$

- Por lo tanto $\alpha \leq \mathbf{E}[X]$ y $\beta \leq \mathbf{E}[X]$

Tenemos que $\alpha + \beta \leq 2 \cdot \mathbf{E}[X]$, de lo cual concluimos $\frac{1}{2} \leq \mathbf{E}[X]$

Reduciendo el valor de t

¿Solucionamos el problema con el valor de $\mathbf{E}[X]$? **¡Sí!**

Dado que $\overline{Y} \leq X$ y $\overline{Z} \leq X$, tenemos que $\mathbf{E}[\overline{Y}] \leq \mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[\overline{Z}] \leq \mathbf{E}[X]$

- Por lo tanto $\alpha \leq \mathbf{E}[X]$ y $\beta \leq \mathbf{E}[X]$

Tenemos que $\alpha + \beta \leq 2 \cdot \mathbf{E}[X]$, de lo cual concluimos $\frac{1}{2} \leq \mathbf{E}[X]$

Concluimos entonces que:

$$\frac{1}{\mathbf{E}[X]^2} \leq 4$$

¿Qué más debemos hacer?

Debemos realizar procedimientos de estimación similares para $\rho_2, \ldots, \rho_n$

- En todos ellos usamos el mismo valor de muestras t

Además, debemos calcular cómo los errores en las estimaciones de $\rho_1, \ldots, \rho_n$ se componen para obtener un error para la estimación de

$$\prod_{i=1}^{n} \rho_i$$

¿Qué más debemos hacer?

Finalmente, a partir de la estimación de $\prod_{i=1}^{n} \rho_i$, obtenemos una estimación de:

$$\#\mathsf{SAT}(\varphi) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i} \;=\; \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \rho_i}$$

Esto nos da como resultado un FPRAS para #SAT

Vamos a mostrar en un segundo ejemplo como las estimaciones $\rho_1, \ldots, \rho_n$ son utilizadas para generar un FPRAS para un problema de conteo a partir de un generador uniforme de soluciones

La idea de la demostración: segundo ejemplo

En este segundo ejemplo vamos a explicar cómo componer los errores en las estimaciones locales para obtener una cota superior en el error total de la estimación

La idea de la demostración: segundo ejemplo

Utilizamos $\cdot$ para denotar el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{KS} \;=\; \{(\vec{a}, b) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ para } n \geq 1, \\ b \in \mathbb{Z} \text{ y existe } \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ tal que } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\} \end{aligned}$$

La idea de la demostración: segundo ejemplo

Utilizamos $\cdot$ para denotar el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{KS} \;=\; \{(\vec{a}, b) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ para } n \geq 1, \\ b \in \mathbb{Z} \text{ y existe } \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ tal que } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\} \end{aligned}$$

KS es una versión simplificada del problema de la mochila, de hecho tenemos que KS $\in$ P

KS como una relación y el problema de conteo asociado

Ejercicio

Podemos representar KS como la siguiente relación:

$$R_{\text{KS}} = \{((\vec{a}, b), \vec{x}) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ y } \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ para } n \geq 1, b \in \mathbb{Z} \text{ y } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\}$$

Demuestre que R_{KS} es auto-reducible

KS como una relación y el problema de conteo asociado

Ejercicio

Podemos representar KS como la siguiente relación:

$$R_{\text{KS}} = \{((\vec{a}, b), \vec{x}) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ y } \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ para } n \geq 1, b \in \mathbb{Z} \text{ y } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\}$$

Demuestre que R_{KS} es auto-reducible

Definimos la función de conteo #KS como $\#\text{KS}(\vec{a}, b) = N_{R_{\text{KS}}}((\vec{a}, b))$

- Suponiendo que $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$, tenemos que $\#\text{KS}(\vec{a}, b)$ es el número de vectores $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ tales que $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b$

La idea de la demostración para KS

Sea $(\vec{a}, b)$ una entrada de #KS

- Suponemos que $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$ y $b \geq 0$
  - ¿Por qué podemos suponer esto?

La idea de la demostración para KS

Sea $(\vec{a}, b)$ una entrada de #KS

- Suponemos que $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$ y $b \geq 0$
  - ¿Por qué podemos suponer esto?

Definimos $b_0 = 0$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$b_i \quad = \quad \text{mín} \left\{ \sum_{j=1}^{i} a_j, \ b \right\}$$

La idea de la demostración para KS

Sea $(\vec{a}, b)$ una entrada de #KS

- Suponemos que $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n$ y $b \geq 0$
  - ¿Por qué podemos suponer esto?

Definimos $b_0 = 0$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$b_i \quad = \quad \text{mín} \left\{ \sum_{j=1}^{i} a_j, \ b \right\}$$

Es importante notar que:

$$\begin{array}{lcll} \#\text{KS}(\vec{a}, b_0) & = & 1 & \\ \#\text{KS}(\vec{a}, b_i) & \leq & \#\text{KS}(\vec{a}, b_{i+1}) & \text{para todo } i \in \{0, \ldots, n-1\} \\ \#\text{KS}(\vec{a}, b_n) & = & \#\text{KS}(\vec{a}, b) & \end{array}$$

La idea de la demostración para KS

De la misma forma que para #SAT, la demostración se basa en la igualdad:

$$\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b) = \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_n) = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_n)}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-1})} \cdot \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-2})} \cdot \ \ldots \ \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_1)}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0)} \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0)$$

La idea de la demostración para KS

De la misma forma que para #SAT, la demostración se basa en la igualdad:

$$\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b) = \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_n) = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_n)}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-1})} \cdot \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{n-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_1)}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0)} \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0)$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos:

$$\rho_i = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{i-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_i)}$$

La idea de la demostración para KS

Tenemos que $0 < \rho_i \leq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

La idea de la demostración para KS

Tenemos que $0 < \rho_i \leq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

Considerando que $\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0) = 1$, concluimos que:

$$\frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} = \prod_{i=1}^{n} \rho_i$$

La idea de la demostración para KS

Tenemos que $0 < \rho_i \leq 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

Considerando que $\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_0) = 1$, concluimos que:

$$\frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} = \prod_{i=1}^{n} \rho_i$$

Por lo tanto, si logramos tener buenas estimaciones de cada ρ_i podemos obtener una buena estimación de $\frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a},b)}$

- Y de esta forma de $\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)$

Estimando ρ_i

Sea X_i una variable aleatoria tal que para toda valuación $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ que satisface $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_i$:

$$X_i(\vec{x}) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_{i-1} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que $X_i \sim \mathbf{Ber}(\rho_i)$

Realizamos $t \geq 1$ nuestras independientes $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,t}$ de X_i, y utilizamos como estimador el promedio $\overline{Y_i} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^{t} Y_{i,j}$

- Recuerde que $\mathbf{E}[\overline{Y_i}] = \rho_i$ y tiene una menor varianza

Estimando ρ_i

Sea X_i una variable aleatoria tal que para toda valuación $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ que satisface $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_i$:

$$X_i(\vec{x}) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_{i-1} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que $X_i \sim \textbf{Ber}(\rho_i)$

Realizamos $t \geq 1$ nuestras independientes $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,t}$ de X_i, y utilizamos como estimador el promedio $\overline{Y_i} = \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^{t} Y_{i,j}$

- Recuerde que $\textbf{E}[\overline{Y_i}] = \rho_i$ y tiene una menor varianza

¿Pero como podemos muestrear X_i?

Estimando ρ_i

En este punto necesitamos suponer que tenemos un generador uniforme para R_{KS}

Estimando ρ_i

En este punto necesitamos suponer que tenemos un generador uniforme para R_{KS}

- Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para #KS

Estimando ρ_i

En este punto necesitamos suponer que tenemos un generador uniforme para R_{KS}

- Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para #KS
- En la demostración del teorema la hipótesis será que existe un FPAUG para la relación que estemos considerando

Estimando ρ_i

En este punto necesitamos suponer que tenemos un generador uniforme para R_{KS}

- Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para #KS
- En la demostración del teorema la hipótesis será que existe un FPAUG para la relación que estemos considerando

Sea $\mathcal{G}$ el generador uniforme que necesitamos. Para cada entrada $(\vec{c}, d)$ de KS con $\vec{c} \in \mathbb{N}^m$, y cada vector $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$ tenemos:

- si $\vec{c} \cdot \vec{y} > d$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\vec{c}, d) = \vec{y}) = 0$
- si $\vec{c} \cdot \vec{y} \leq d$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\vec{c}, d) = \vec{y}) = \frac{1}{\#\mathsf{KS}(\vec{c}, d)}$

Estimando ρ_i

Para estimar $\rho_i = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{i-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_i)}$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
    $\vec{v} := \mathcal{G}(\vec{a}, b_i)$
    if $\vec{a} \cdot \vec{v} \leq b_{i-1}$ **then**
        $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

Estimando ρ_i

Para estimar $\rho_i = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{i-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_i)}$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
  $\vec{v} := \mathcal{G}(\vec{a}, b_i)$
  if $\vec{a} \cdot \vec{v} \leq b_{i-1}$ **then**
    $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

¿Qué tan buena es la estimación de ρ_i? ¿Que tan buena es la estimación de $\frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}$ dadas las estimaciones de $\rho_1, \ldots, \rho_n$?

Estimando ρ_i

Para estimar $\rho_i = \frac{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_{i-1})}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b_i)}$ utilizamos el siguiente algoritmo:

$fav := 0$
for $j := 1$ **to** t **do**
  $\vec{v} := \mathcal{G}(\vec{a}, b_i)$
  if $\vec{a} \cdot \vec{v} \leq b_{i-1}$ **then**
    $fav := fav + 1$
return $\frac{fav}{t}$

¿Qué tan buena es la estimación de ρ_i? ¿Que tan buena es la estimación de $\frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}$ dadas las estimaciones de $\rho_1, \ldots, \rho_n$?

- Tenemos que acotar la probabilidad de error

La probabilidad de error

Sea $Z = \prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}$

La probabilidad de error

Sea $Z = \prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}$

Y sea $\varepsilon \in (0, 1)$

La probabilidad de error

Sea $Z = \prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}$

Y sea $\varepsilon \in (0, 1)$

Para obtener un FPRAS para #KS, primero tenemos que acotar superiormente la siguiente probabilidad:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|Z - \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right)$$

La probabilidad de error

Dado que $\overline{Y_i}$ es independiente de $\overline{Y_j}$ para $i \neq j$; tenemos que:

$$\mathbf{E}[Z] \;=\; \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}\right] \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}] \;=\; \prod_{i=1}^{n} \rho_i \;=\; \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}$$

La probabilidad de error

Dado que $\overline{Y_i}$ es independiente de $\overline{Y_j}$ para $i \neq j$; tenemos que:

$$\mathbf{E}[Z] \;=\; \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}\right] \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}] \;=\; \prod_{i=1}^{n} \rho_i \;=\; \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}$$

Usando entonces la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}\left(\left|Z - \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right) &= \mathbf{Pr}(|Z - \mathbf{E}[Z]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[Z]) \\ &\leq \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} \end{aligned}$$

La probabilidad de error

Pero tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\mathbf{E}[Z]^2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2}{\mathbf{E}[Z]^2} \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[Z^2]}{\mathbf{E}[Z]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[(\prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i})^2]}{(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}])^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[\prod_{i=1}^{n} \overline{Y_i}^2]}{\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}^2]}{\prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

La probabilidad de error

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}[\overline{Y_i}^2]}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{Var}[\overline{Y_i}] + \mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2)}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right)
\end{aligned}
$$

La probabilidad de error

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}[\overline{Y_i}^2]}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{Var}[\overline{Y_i}] + \mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2)}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\mathbf{E}[\overline{Y_i}]^2} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto necesitamos acotar superiormente $\dfrac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} &= \frac{\mathbf{Var}[\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} Y_{i,j}]}{\rho_i^2} \\
&= \frac{\frac{1}{t^2}\cdot \mathbf{Var}[\sum_{j=1}^{t} Y_{i,j}]}{\rho_i^2} \\
&= \frac{\frac{1}{t^2}\cdot \sum_{j=1}^{t} \mathbf{Var}[Y_{i,j}]}{\rho_i^2} \\
&= \frac{\frac{1}{t^2}\cdot \sum_{j=1}^{t} \rho_i\cdot(1-\rho_i)}{\rho_i^2} \\
&= \frac{\frac{1}{t^2}\cdot t\cdot \rho_i\cdot(1-\rho_i)}{\rho_i^2} \\
&= \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{\rho_i}-1\right)
\end{aligned}
$$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Lema

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ *se tiene que:*

$$\#KS(\vec{a}, b_{i-1}) \leq \#KS(\vec{a}, b_i) \leq (n+1) \cdot \#KS(\vec{a}, b_{i-1})$$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Lema

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ *se tiene que:*

$$\#KS(\vec{a}, b_{i-1}) \leq \#KS(\vec{a}, b_i) \leq (n+1) \cdot \#KS(\vec{a}, b_{i-1})$$

Ejercicios

1. Sea $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ tal que $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_i$. Demuestre que si $\vec{a} \cdot \vec{x} > b_{i-1}$, entonces existe una posición $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_j = 1$ y para el vector $\vec{y} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ se tiene que $\vec{a} \cdot \vec{y} \leq b_{i-1}$
2. Demuestre que el lema es consecuencia de la propiedad anterior

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Del lema concluimos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{\#\mathsf{KS}(\vec{a}, b_i)}{\#\mathsf{KS}(\vec{a}, b_{i-1})} \leq (n+1)$$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Del lema concluimos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{\#\mathsf{KS}(\vec{a}, b_i)}{\#\mathsf{KS}(\vec{a}, b_{i-1})} \leq (n+1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{\rho_i} - 1\right) \leq \frac{n}{t}$$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Escogemos t de manera de hacer pequeña la cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Escogemos t de manera de hacer pequeña la cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

- Vamos a escoger t de manera que sea polinomial en n y $\frac{1}{\varepsilon}$, dado que n es menor que el tamaño de la entrada $(\vec{b}, a)$

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Escogemos t de manera de hacer pequeña la cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

- Vamos a escoger t de manera que sea polinomial en n y $\frac{1}{\varepsilon}$, dado que n es menor que el tamaño de la entrada $(\vec{b}, a)$
- Esperamos que n y $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sean valores grandes, por lo que t debe disminuir el impacto de estos valores

Acotando superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)
\end{aligned}$$

Escogemos t de manera de hacer pequeña la cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

- Vamos a escoger t de manera que sea polinomial en n y $\frac{1}{\varepsilon}$, dado que n es menor que el tamaño de la entrada $(\vec{b}, a)$
- Esperamos que n y $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sean valores grandes, por lo que t debe disminuir el impacto de estos valores
  - Tomamos $t = c \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2}$, donde c es una constante

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Tomamos $t = 5 \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2}$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Tomamos $t = 5 \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2}$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n} \right]^n - 1 \right) \end{aligned}$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right]^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i! \cdot (n-i)! \cdot n^i} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i}{i!} \\
&= e^{\frac{\varepsilon^2}{5}}
\end{aligned}$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Lema

$e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Lema

$e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$

Ejercicio

Demuestre el lema considerando que $0 < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{1}{4}$ y el intervalo donde la función $f(x) = e^{\frac{4}{5} \cdot x} - x - 1$ es negativa

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Lema

$e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$

Ejercicio

Demuestre el lema considerando que $0 < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{1}{4}$ y el intervalo donde la función $f(x) = e^{\frac{4}{5} \cdot x} - x - 1$ es negativa

Concluimos que:

$$\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right]^n \leq e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n} \right]^n - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + 1 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n} \right]^n - 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + 1 - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $0 < \varepsilon < 1$ obtenemos:

$$\mathbf{Pr}\left(\left| Z - \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} \right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} \right) \leq \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} \leq \frac{1}{4} \qquad (\natural)$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado $0 < \delta < 1$, para terminar debemos demostrar que:

$$\mathbf{Pr}(|Z^{-1} - \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)| \leq \delta \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

De esta forma Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado $0 < \delta < 1$, para terminar debemos demostrar que:

$$\mathbf{Pr}(|Z^{-1} - \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)| \leq \delta \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

De esta forma Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

Considerando $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ en ($\natural$) obtenemos:

$$\mathbf{Pr}\left(\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} \leq Z \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado $0 < \delta < 1$, para terminar debemos demostrar que:

$$\mathbf{Pr}(|Z^{-1} - \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)| \leq \delta \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

De esta forma Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

Considerando $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ en ($\natural$) obtenemos:

$$\mathbf{Pr}\left(\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)} \leq Z \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)}\right) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

Dado que $0 < \frac{\delta}{2} < 1$, entonces tenemos que:

$$\mathbf{Pr}\left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b) \leq Z^{-1} \leq \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}} \cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a}, b)\right) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado que $(1-\delta) \leq \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}$ y $\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}} \leq (1+\delta)$, concluimos que:

$$\mathbf{Pr}\left((1-\delta)\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b) \leq Z^{-1} \leq (1+\delta)\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b)\right) \geq$$

$$\mathbf{Pr}\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b) \leq Z^{-1} \leq \frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b)\right) \geq \frac{3}{4}$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado que $(1-\delta) \leq \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}$ y $\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}} \leq (1+\delta)$, concluimos que:

$$\mathbf{Pr}\left((1-\delta)\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b) \leq Z^{-1} \leq (1+\delta)\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b)\right) \geq$$

$$\mathbf{Pr}\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b) \leq Z^{-1} \leq \frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}\cdot \#\mathrm{KS}(\vec{a},b)\right) \geq \frac{3}{4}$$

Por lo tanto Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

- El número de pasos ejecutados por el algoritmo es polinomial en el tamaño de la entrada $(\vec{a},b)$ y $\frac{1}{\delta}$ si suponemos que $\mathcal{G}$ funciona en tiempo polinomial, puesto que $\mathcal{G}$ es invocado $n\cdot t$ veces y:

$$n\cdot t = n\cdot 5\cdot n^2\cdot \varepsilon^{-2} = 5\cdot n^3\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-2} = \frac{20\cdot n^3}{\delta^2}$$

La demostración general

Vamos a extender las ideas utilizadas para #SAT y #KS al caso general

Vale decir, dada una p-relación R auto-reducible, vamos a demostrar que si existe un FPAUG para R, entonces existe un FPRAS para R

Algunos supuestos para la relación R

Suponemos que $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, y dados $x, w \in \Sigma^*$ definimos:

$$\text{Ext}_R(x, w) \quad = \quad \{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R \text{ y existe } z \in \Sigma^* \text{ tal que } y = wz\}$$

Algunos supuestos para la relación R

Suponemos que $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, y dados $x, w \in \Sigma^*$ definimos:

$$\text{Ext}_R(x, w) \quad = \quad \{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R \text{ y existe } z \in \Sigma^* \text{ tal que } y = wz\}$$

Sean $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ y $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ funciones que muestran que R es auto-reducible

- De acuerdo a la definición vista en las transparencias anteriores

Además, sea $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0, 1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ un FPAUG para R

Algunos supuestos para la relación R

Suponemos que $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, y dados $x, w \in \Sigma^*$ definimos:

$$\text{Ext}_R(x, w) \quad = \quad \{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R \text{ y existe } z \in \Sigma^* \text{ tal que } y = wz\}$$

Sean $g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $\psi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ y $\sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ funciones que muestran que R es auto-reducible

- De acuerdo a la definición vista en las transparencias anteriores

Además, sea $\mathcal{G} : \Sigma^* \times (0, 1) \to \Sigma^* \cup \{\perp\}$ un FPAUG para R

Finalmente, sean $c, d \in \mathbb{R}^+$ tales que $|\Sigma|^{\sigma(x)} \leq |x|^c + d$ para todo $x \in \Sigma^*$

- Sabemos que existen porque $\sigma(x) \in O(\log(|x|))$

Un esquema de aproximación para R

EAR(x, ε)
  if $\mathcal{G}(x, \varepsilon) = \perp$ **then return** 0
  else
    $N := 1$
    $m := g(x)$
    $t := \lceil 180 \cdot (|x|^c + d)^3 \cdot m^3 \cdot \varepsilon^{-2} \rceil$
    while $g(x) > 0$ **do**
      for $j := 1$ **to** t **do**
        $y_j := \mathcal{G}\left(x, \frac{\varepsilon}{5m}\right)$
      Sea $w \in \Sigma^{\sigma(x)}$ el prefijo de largo $\sigma(x)$ más común en $\{y_1, \ldots, y_t\}$
      $\alpha := \frac{|\{j \in \{1, \ldots, t\} \mid y_j \in \mathrm{Ext}_R(x, w)\}|}{t}$
      $x := \psi(x, w)$
      $N := \frac{1}{\alpha} \cdot N$ /* se tiene que $\alpha > 0$ */
    return N

EAR es un FPRAS para R

Vamos a demostrar que **EAR** es un FPRAS para R

- Sean $x \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0, 1)$ una entrada de **EAR**

EAR es un FPRAS para R

Vamos a demostrar que **EAR** es un FPRAS para R

- Sean $x \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0, 1)$ una entrada de **EAR**

Si $N_R(x) = 0$, tenemos que **EAR**(x, ε) retorna el resultado correcto 0 dado que $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R

- En el resto de la demostración suponemos que $N_R(x) > 0$

EAR es un FPRAS para R

Vamos a demostrar que **EAR** es un FPRAS para R

- Sean $x \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in (0, 1)$ una entrada de **EAR**

Si $N_R(x) = 0$, tenemos que **EAR**(x, ε) retorna el resultado correcto 0 dado que $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R

- En el resto de la demostración suponemos que $N_R(x) > 0$

De la misma forma, **EAR**(x, ε) retorna el resultado correcto si $g(x) = 0$

- ¿Por qué?

En el resto de la demostración suponemos que $g(x) > 0$

EAR es un FPRAS para R

Tenemos que el valor de la función g disminuye en cada iteración

- ¿Por qué?

EAR es un FPRAS para R

Tenemos que el valor de la función g disminuye en cada iteración

- ¿Por qué?

Sea s la cantidad total de iteraciones realizadas por el algoritmo

- Tenemos que $s \leq g(x) = m$

EAR es un FPRAS para R

EAR funciona en tiempo polinomial en $|x|$ y $\frac{1}{\varepsilon}$

- Dado que R es una p-relación, sabemos que existe un polinomio fijo $p(u)$ tal que $m = g(x) \leq p(|x|)$
- Además, sabemos que m puede ser calculado en tiempo polinomial dada la definición de relación auto-reducible
- Finalmente, tenemos que $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R, y **EAR** realiza a lo más $m \cdot \lceil 180 \cdot (|x|^c + d)^3 \cdot m^3 \cdot \varepsilon^{-2} \rceil$ llamadas a la función $\mathcal{G}$

EAR es un FPRAS para R

EAR funciona en tiempo polinomial en $|x|$ y $\frac{1}{\varepsilon}$

- Dado que R es una p-relación, sabemos que existe un polinomio fijo $p(u)$ tal que $m = g(x) \leq p(|x|)$
- Además, sabemos que m puede ser calculado en tiempo polinomial dada la definición de relación auto-reducible
- Finalmente, tenemos que $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R, y **EAR** realiza a lo más $m \cdot \lceil 180 \cdot (|x|^c + d)^3 \cdot m^3 \cdot \varepsilon^{-2} \rceil$ llamadas a la función $\mathcal{G}$

Nos queda entonces por demostrar:

$$\mathbf{Pr}\left((1-\varepsilon) \cdot N_R(x) \;\leq\; \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \;\leq\; (1+\varepsilon) \cdot N_R(x)\right) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

La propiedad central

Dado $i \in \{1, \ldots, s\}$, para la iteración i del algoritmo sean:

- x_i, N_i los valores de las variables x y N al principio de la iteración
  - Tenemos que $x_1 = x$ y $N_1 = 1$
- w_i, α_i los valores de las variables w y α calculados en la iteración

La propiedad central

Dado $i \in \{1, \ldots, s\}$, para la iteración i del algoritmo sean:

- x_i, N_i los valores de las variables x y N al principio de la iteración
  - Tenemos que $x_1 = x$ y $N_1 = 1$
- w_i, α_i los valores de las variables w y α calculados en la iteración

Propiedad de aproximación (invariante del algoritmo)

Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$:

$$\frac{\alpha_i}{1 + \frac{\varepsilon}{2m}} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot \alpha_i$$

Usando la propiedad de aproximación

Tenemos que:

$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x)\Big) =$$

$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \,\Big|\, \text{propiedad de aproximación}\Big)\cdot$$
$$\mathbf{Pr}\Big(\text{propiedad de aproximación}\Big) +$$
$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \,\Big|\, \overline{\text{propiedad de aproximación}}\Big)\cdot$$
$$\mathbf{Pr}\Big(\overline{\text{propiedad de aproximación}}\Big) \geq$$
$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \,\Big|\, \text{propiedad de aproximación}\Big)\cdot$$
$$\mathbf{Pr}\Big(\text{propiedad de aproximación}\Big)$$

Usando la propiedad de aproximación

Por lo tanto, para demostrar que **EAR** es un FPRAS para R basta acotar inferiormente la siguiente probabilidad:

$$\mathbf{Pr}\left((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \,\middle|\, \text{propiedad de aproximación}\right)\cdot \mathbf{Pr}\left(\text{propiedad de aproximación}\right)$$

Usando la propiedad de aproximación

Por lo tanto, para demostrar que **EAR** es un FPRAS para R basta acotar inferiormente la siguiente probabilidad:

$$\mathbf{Pr}\left((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \,\middle|\, \text{propiedad de aproximación}\right)\cdot \mathbf{Pr}\left(\text{propiedad de aproximación}\right)$$

Primero vamos a demostrar que la propiedad de aproximación es suficiente para tener una buena aproximación de $N_R(x)$

- Después de esto vamos a acotar inferiormente la probabilidad de que la propiedad de aproximación se cumpla

La propiedad de aproximación es suficiente

Definimos x_{s+1} y N_{s+1} como los valores de las variables x y N al final de la iteración s del algoritmo

La propiedad de aproximación es suficiente

Definimos x_{s+1} y N_{s+1} como los valores de las variables x y N al final de la iteración s del algoritmo

- Tenemos que $g(x_{s+1}) = 0$, $N_R(x_{s+1}) = 1$ y el valor retornado por el algoritmo es N_{s+1}
  - ¿Por qué?

La propiedad de aproximación es suficiente

Definimos x_{s+1} y N_{s+1} como los valores de las variables x y N al final de la iteración s del algoritmo

- Tenemos que $g(x_{s+1}) = 0$, $N_R(x_{s+1}) = 1$ y el valor retornado por el algoritmo es N_{s+1}
  - ¿Por qué?

Dado $i \in \{1, \ldots, s\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \psi(x_i, w_i) \\ N_R(x_{i+1}) &= |\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)| \\ N_{i+1} &= \frac{1}{\alpha_i} \cdot N_i \end{aligned}$$

La propiedad de aproximación es suficiente

Además, tenemos que:

$$\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot \alpha_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i)}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{\alpha_i} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i) \cdot N_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq |\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)| \cdot \frac{N_i}{\alpha_i} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i) \cdot N_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i) \cdot N_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq N_R(x_{i+1}) \cdot N_{i+1} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i) \cdot N_i$$

La propiedad de aproximación es suficiente

Además, tenemos que:

$$\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot \alpha_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i)}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{\alpha_i} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i) \cdot N_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq |\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)| \cdot \frac{N_i}{\alpha_i} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i) \cdot N_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_R(x_i) \cdot N_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq N_R(x_{i+1}) \cdot N_{i+1} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right) \cdot N_R(x_i) \cdot N_i$$

Así, la cantidad $N_R(x_i) \cdot N_i$ es *casi* una invariante del ciclo **while**

La propiedad de aproximación es suficiente

Suponiendo que la propiedad de aproximación es cierta concluimos que:

$$\frac{N_R(x_1)\cdot N_1}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^s} \leq N_R(x_{s+1})\cdot N_{s+1} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^s \cdot N_R(x_1)\cdot N_1$$

La propiedad de aproximación es suficiente

Suponiendo que la propiedad de aproximación es cierta concluimos que:

$$\frac{N_R(x_1)\cdot N_1}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^s} \leq N_R(x_{s+1})\cdot N_{s+1} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^s \cdot N_R(x_1)\cdot N_1$$

Por lo tanto, dado que $s \leq m$ tenemos que:

$$\frac{N_R(x_1)\cdot N_1}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^m} \leq N_R(x_{s+1})\cdot N_{s+1} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \cdot N_R(x_1)\cdot N_1$$

Algunas propiedades de $N_R(x_i) \cdot N_i$

Dado que $x_1 = x$ y $N_1 = 1$, tenemos que $N_R(x) = N_R(x_1) \cdot N_1$

- Recuerde que queremos calcular $N_R(x)$

Algunas propiedades de $N_R(x_i) \cdot N_i$

Dado que $x_1 = x$ y $N_1 = 1$, tenemos que $N_R(x) = N_R(x_1) \cdot N_1$

- Recuerde que queremos calcular $N_R(x)$

Dado que $N_R(x_{s+1}) = 1$, tenemos que $N_R(x_{s+1}) \cdot N_{s+1} = N_{s+1}$

- Además, sabemos que $\mathbf{EAR}(x, \varepsilon) = N_{s+1}$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Juntando los resultados anteriores obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^m} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \cdot N_R(x)$$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Juntando los resultados anteriores obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^m} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \cdot N_R(x)$$

Dado que $\varepsilon \in (0,1)$, tal como el caso de #KS obtenemos:

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon+1$$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Juntando los resultados anteriores obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})^m} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \cdot N_R(x)$$

Dado que $\varepsilon \in (0,1)$, tal como el caso de #KS obtenemos:

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)^m \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon+1$$

Ejercicio

Demuestre que $e^{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon+1$ considerando que $0<\varepsilon<1$ y el intervalo donde la función $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$ es negativa

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Así, suponiendo que la propiedad de aproximación se cumple obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\varepsilon)} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x)$$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Así, suponiendo que la propiedad de aproximación se cumple obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\varepsilon)} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x)$$

Sabemos que $(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$, puesto que $\varepsilon > 0$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Así, suponiendo que la propiedad de aproximación se cumple obtenemos:

$$\frac{N_R(x)}{(1+\varepsilon)} \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x)$$

Sabemos que $(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$, puesto que $\varepsilon > 0$

Suponiendo que la propiedad de aproximación se cumple, obtenemos entonces:

$$(1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \leq \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)\cdot N_R(x)$$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Vale decir, hemos demostrado que:

$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \;\leq\; \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \;\leq\; (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \;\Big|\; \text{propiedad de aproximación} \Big) \;=\; 1$$

La propiedad de aproximación es suficiente: conclusión

Vale decir, hemos demostrado que:

$$\mathbf{Pr}\Big((1-\varepsilon)\cdot N_R(x) \;\leq\; \mathbf{EAR}(x,\varepsilon) \;\leq\; (1+\varepsilon)\cdot N_R(x) \;\Big|\; \text{propiedad de aproximación} \Big) \;=\; 1$$

De esta forma, para terminar la demostración tenemos que demostrar:

$$\mathbf{Pr}\Big(\text{propiedad de aproximación} \Big) \;\geq\; \frac{3}{4}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación)

Fije $i \in \{1, \ldots, s\}$

- i corresponde a una iteración de **EAR**

Para cada $u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}$ definimos la variable aleatoria:

$$X_u = \frac{|\{j \in \{1, \ldots, t\} \mid \exists z \in \Sigma^* : y_j = uz\}|}{t}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación)

Fije $i \in \{1, \ldots, s\}$

- i corresponde a una iteración de **EAR**

Para cada $u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}$ definimos la variable aleatoria:

$$X_u = \frac{|\{j \in \{1, \ldots, t\} \mid \exists z \in \Sigma^* : y_j = uz\}|}{t}$$

X_u es un promedio de t variables aleatorias que toman valor 0 ó 1, las cuales denotamos como $X_{j,u}$ para $j \in \{1, \ldots, t\}$

- $X_{j,u}(y_j) = 1$ si $y_j = uz$ para algún $z \in \Sigma^*$, y $X_{j,u}(y_j) = 0$ en otro caso

Vale decir, tenemos que $X_u = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} X_{j,u}$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación)

Tenemos que:

$$\mathbf{Var}[X_u] \;=\; \mathbf{Var}\left[\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} X_{j,u}\right] \;=\; \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t}\mathbf{Var}[X_{j,u}] \;\leq\; \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t} 1 \;=\; \frac{1}{t}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación)

Tenemos que:

$$\mathbf{Var}[X_u] \;=\; \mathbf{Var}\left[\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} X_{j,u}\right] \;=\; \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t}\mathbf{Var}[X_{j,u}] \;\leq\; \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t} 1 \;=\; \frac{1}{t}$$

Dado que $t = \lceil 180 \cdot (|x|^c + d)^3 \cdot m^3 \cdot \varepsilon^{-2} \rceil$, por la desigualdad de Chebyshev concluimos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}\left(|X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \frac{\varepsilon}{6 \cdot (|x|^c + d) \cdot m}\right) &\leq \frac{36 \cdot (|x|^c + d)^2 \cdot m^2 \cdot \mathbf{Var}[X_u]}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{36 \cdot (|x|^c + d)^2 \cdot m^2}{\varepsilon^2 \cdot t} \\
&\leq \frac{36 \cdot (|x|^c + d)^2 \cdot m^2}{\varepsilon^2 \cdot 180 \cdot (|x|^c + d)^3 \cdot m^3 \cdot \varepsilon^{-2}} \\
&= \frac{1}{5 \cdot (|x|^c + d) \cdot m}
\end{aligned}$$

Definiendo α_i en términos de las variables aleatorias X_u

El valor de cada variable aleatoria X_u es una función de las variables $y_1, \ldots, y_t$

- Podemos entonces hablar de $X_u(y_1, \ldots, y_t)$

Definiendo α_i en términos de las variables aleatorias X_u

El valor de cada variable aleatoria X_u es una función de las variables $y_1, \ldots, y_t$

- Podemos entonces hablar de $X_u(y_1, \ldots, y_t)$

De la misma forma, el valor de la variable aleatoria α_i es una función de $y_1, \ldots, y_t$, y podemos hablar de $\alpha_i(y_1, \ldots, y_t)$

Definiendo α_i en términos de las variables aleatorias X_u

Suponga que v es el valor de w_i. Si los valores de la variables $y_1, \ldots, y_t$ en la iteración i son $a_1, \ldots, a_t$, respectivamente, entonces tenemos que:

$$\alpha_i(a_1, \ldots, a_t) \quad = \quad X_v(a_1, \ldots, a_t)$$

Definiendo α_i en términos de las variables aleatorias X_u

Suponga que v es el valor de w_i. Si los valores de la variables $y_1, \ldots, y_t$ en la iteración i son $a_1, \ldots, a_t$, respectivamente, entonces tenemos que:

$$\alpha_i(a_1, \ldots, a_t) \quad = \quad X_v(a_1, \ldots, a_t)$$

Además, en general tenemos que:

$$\alpha_i(y_1, \ldots, y_t) \quad = \quad \max_{u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}} X_u(y_1, \ldots, y_t)$$

Definiendo α_i en términos de las variables aleatorias X_u

Suponga que v es el valor de w_i. Si los valores de la variables $y_1, \ldots, y_t$ en la iteración i son $a_1, \ldots, a_t$, respectivamente, entonces tenemos que:

$$\alpha_i(a_1, \ldots, a_t) \quad = \quad X_v(a_1, \ldots, a_t)$$

Además, en general tenemos que:

$$\alpha_i(y_1, \ldots, y_t) \quad = \quad \max_{u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}} X_u(y_1, \ldots, y_t)$$

Es importante notar que **no** podemos concluir que:

$$\alpha_i(y_1, \ldots, y_t) \quad = \quad X_v(y_1, \ldots, y_t),$$

dado que v es un string **fijo** calculado en la iteración i

Acotando superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Queremos entender cuán cercar está α_i de $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

- Vale decir, queremos acotar superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Acotando superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Queremos entender cuán cercar está α_i de $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

- Vale decir, queremos acotar superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Dado que $\alpha_i = \max_{u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}} X_u$, no podemos utilizar la desigualdad de Chebyshev para acotar superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Acotando superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Si se tiene que $|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta$, entonces debe ser posible encontrar $u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}$ tal que $|X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \delta$

Acotando superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta)$

Si se tiene que $|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta$, entonces debe ser posible encontrar $u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}$ tal que $|X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \delta$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \delta) \quad \leq \quad \mathbf{Pr}\left(\bigvee_{u \in \Sigma^{\sigma(x_i)}} |X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \delta \right)$$

Acotando superiormente $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \frac{\varepsilon}{6\cdot(|x|^c+d)\cdot m})$

Utilizando la conclusión de la transparencia anterior:

$$\mathbf{Pr}\left(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \geq \frac{\varepsilon}{6\cdot(|x|^c+d)\cdot m}\right) \leq$$

$$\mathbf{Pr}\left(\bigvee_{u\in\Sigma^{\sigma(x_i)}}\left[|X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \frac{\varepsilon}{6\cdot(|x|^c+d)\cdot m}\right]\right) \leq$$

$$\sum_{u\in\Sigma^{\sigma(x_i)}} \mathbf{Pr}\left(|X_u - \mathbf{E}[X_u]| \geq \frac{\varepsilon}{6\cdot(|x|^c+d)\cdot m}\right) \leq$$

$$\sum_{u\in\Sigma^{\sigma(x_i)}} \frac{1}{5\cdot(|x|^c+d)\cdot m} =$$

$$\frac{1}{5\cdot(|x|^c+d)\cdot m}\cdot|\Sigma|^{\sigma(x_i)} \leq$$

$$\frac{1}{5\cdot(|x|^c+d)\cdot m}\cdot(|x_i|^c+d) = \frac{1}{5m}\cdot\left(\frac{|x_i|^c+d}{|x|^c+d}\right) \leq \frac{1}{5m}$$

¿Por qué **EAR** elige el prefijo de largo $\sigma(x)$ más común en $\{y_1, \ldots, y_t\}$?

Como w_i se elige como el prefijo de largo $\sigma(x_i)$ más común en $\{y_1, \ldots, y_t\}$, sabemos que:

$$\alpha_i = \frac{|\{j \in \{1, \ldots, t\} \mid y_j \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)\}|}{t} \geq \frac{t}{|\Sigma|^{\sigma(x_i)}} \cdot \frac{1}{t} =$$

$$\frac{1}{|\Sigma|^{\sigma(x_i)}} \geq \frac{1}{|x_i|^c + d} \geq \frac{1}{|x|^c + d}$$

¿Por qué **EAR** elige el prefijo de largo $\sigma(x)$ más común en $\{y_1, \ldots, y_t\}$?

Como w_i se elige como el prefijo de largo $\sigma(x_i)$ más común en $\{y_1, \ldots, y_t\}$, sabemos que:

$$\alpha_i = \frac{|\{j \in \{1, \ldots, t\} \mid y_j \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)\}|}{t} \geq \frac{t}{|\Sigma|^{\sigma(x_i)}} \cdot \frac{1}{t} =$$

$$\frac{1}{|\Sigma|^{\sigma(x_i)}} \geq \frac{1}{|x_i|^c + d} \geq \frac{1}{|x|^c + d}$$

Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}\left(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \leq \alpha_i \cdot \frac{\varepsilon}{6m}\right) &\geq \mathbf{Pr}\left(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| < \alpha_i \cdot \frac{\varepsilon}{6m}\right) \\
&\geq \mathbf{Pr}\left(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| < \frac{\varepsilon}{6 \cdot (|x|^c + d) \cdot m}\right) \\
&\geq 1 - \frac{1}{5m}
\end{aligned}$$

Dos desigualdades útiles

Tenemos que $1 + \frac{\varepsilon}{5m} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{6m}$

Dos desigualdades útiles

Tenemos que $1 + \dfrac{\varepsilon}{5m} \geq 1 + \dfrac{\varepsilon}{6m}$

Por otra parte, para $\varepsilon \in (0, 1)$ también se tiene que:

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{5m}} \quad \leq \quad 1 - \frac{\varepsilon}{6m},$$

puesto que $m \geq 1$ y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{5m}} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{6m} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5m}{5m + \varepsilon} \leq \frac{6m - \varepsilon}{6m} \\
&\Leftrightarrow \quad 30 \cdot m^2 \leq 30 \cdot m^2 + 6 \cdot m \cdot \varepsilon - 5 \cdot m \cdot \varepsilon - \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 \leq m \cdot \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq m
\end{aligned}$$

Una cota inferior para $\mathbf{Pr}(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \leq \alpha_i \cdot \frac{\varepsilon}{6m})$

Usando todas las desigualdades anteriores concluimos que:

$$\mathbf{Pr}\left(\frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})} \cdot \alpha_i \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \alpha_i\right) \geq$$

$$\mathbf{Pr}\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{6m}\right) \cdot \alpha_i \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{6m}\right) \cdot \alpha_i\right) =$$

$$\mathbf{Pr}\left(|\alpha_i - \mathbf{E}[X_{w_i}]| \leq \alpha_i \cdot \frac{\varepsilon}{6m}\right) \geq$$

$$1 - \frac{1}{5m}$$

Acotando $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

Por definición de X_{w_i}, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{w_i}] &= \mathbf{E}\left[\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} X_{j,w_i}\right] \\
&= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} \mathbf{E}[X_{j,w_i}] \\
&= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} \left(1 \cdot \mathbf{Pr}(X_{j,w_i} = 1) + 0 \cdot \mathbf{Pr}(X_{j,w_i} = 0)\right) \\
&= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} \sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)} \mathbf{Pr}\left(\mathcal{G}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{5m}\right) = y\right) \\
&= \sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)} \mathbf{Pr}\left(\mathcal{G}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{5m}\right) = y\right)
\end{aligned}$$

Acotando $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

Como $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R, tenemos que:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{Pr}\left(\mathcal{G}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{5m}\right) = y\right) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)}$$

Acotando $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

Como $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R, tenemos que:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{Pr}\left(\mathcal{G}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{5m}\right) = y\right) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)}$$

Acotando $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

Como $\mathcal{G}$ es un FPAUG para R, tenemos que:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{Pr}\left(\mathcal{G}\left(x_i, \frac{\varepsilon}{5m}\right) = y\right) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \sum_{y \in \mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)} \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{1}{N_R(x_i)}$$

De lo cual concluimos que:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i, w_i)|}{N_R(x_i)}$$

Acotando $\mathbf{E}[X_{w_i}]$

Dado que:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right) &\leq \left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right) \\ \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{4m}} &\leq \left(1-\frac{\varepsilon}{5m}\right) \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{4m}} \cdot \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right) \cdot \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

Otra desigualdad útil

Para $\varepsilon \in (0,1)$, se tiene que:

$$1 + \frac{\varepsilon}{2m} \quad \geq \quad \left(1 + \frac{\varepsilon}{5m}\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{4m}\right)$$

Otra desigualdad útil

Para $\varepsilon \in (0,1)$, se tiene que:

$$1+\frac{\varepsilon}{2m} \quad \geq \quad \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right)$$

Puesto que $\varepsilon \in (0,1)$ y:

$$\begin{aligned}
1+\frac{\varepsilon}{2m} \geq \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 1+\frac{\varepsilon}{2m} \geq 1+\frac{\varepsilon}{4m}+\frac{\varepsilon}{5m}+\frac{\varepsilon^2}{20m} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2m} \geq \frac{\varepsilon}{4m}+\frac{\varepsilon}{5m}+\frac{\varepsilon^2}{20m} \\
&\Leftrightarrow \quad 10\varepsilon \geq 5\varepsilon+4\varepsilon+\varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq \varepsilon^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Acotando inferiormente $\mathbf{Pr}(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq (1+\frac{\varepsilon}{2m})\cdot\alpha_i)$

Usando las desigualdades anteriores, tenemos que:

$$\frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})}\cdot\alpha_i \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})}\cdot\alpha_i \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right)\cdot\frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})\cdot(1+\frac{\varepsilon}{4m})}\cdot\alpha_i \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})}\cdot\alpha_i \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

Acotando inferiormente $\mathbf{Pr}(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq (1+\frac{\varepsilon}{2m})\cdot\alpha_i)$

Usando las desigualdades anteriores, tenemos que:

$$\frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})}\cdot\alpha_i \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})}\cdot\alpha_i \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{4m}\right)\cdot\frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})\cdot(1+\frac{\varepsilon}{4m})}\cdot\alpha_i \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})}\cdot\alpha_i \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)}$$

De la misma forma obtenemos:

$$\mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right)\cdot\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)\cdot\alpha_i$$

Acotando inferiormente $\mathbf{Pr}(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq (1+\frac{\varepsilon}{2m}) \cdot \alpha_i)$

Juntando todo lo anterior, finalmente concluimos que:

$$\mathbf{Pr}\left(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)\cdot\alpha_i\right) \geq$$
$$\mathbf{Pr}\left(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{5m})} \leq \mathbf{E}[X_{w_i}] \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{5m}\right)\cdot\alpha_i\right) \geq 1-\frac{1}{5m}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación): el paso final

Recuerde que nuestro objetivo es demostrar que:

$$\mathbf{Pr}(\text{propiedad de aproximación}) \quad \geq \quad \frac{3}{4}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación): el paso final

Recuerde que nuestro objetivo es demostrar que:

$$\mathbf{Pr}(\text{propiedad de aproximación}) \geq \frac{3}{4}$$

Tenemos que:

$$\mathbf{Pr}(\text{propiedad de aproximación}) =$$

$$\mathbf{Pr}\left(\bigwedge_{i=1}^{s}\left[\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)\cdot\alpha_i\right]\right) =$$

$$\prod_{i=1}^{s}\mathbf{Pr}\left(\frac{\alpha_i}{(1+\frac{\varepsilon}{2m})} \leq \frac{|\mathrm{Ext}_R(x_i,w_i)|}{N_R(x_i)} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2m}\right)\cdot\alpha_i\right) \geq$$

$$\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{5m}\right) = \left(1-\frac{1}{5m}\right)^{s} \geq \left(1-\frac{1}{5m}\right)^{m}$$

Acotando inferiormente **Pr**(propiedad de aproximación): el paso final

Dado que $m \geq 1$, tenemos que $\left(1 - \frac{1}{5m}\right)^m \geq \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$

Concluimos finalmente que:

$$\textbf{Pr}(\text{propiedad de aproximación}) \geq \left(1 - \frac{1}{5m}\right)^m \geq \frac{3}{4}$$

Esto termina la demostración del teorema $\square$