La clase de complejidad GI

El problema de isomorfismo de grafos define su propia clase de complejidad.

La clase de complejidad GI

El problema de isomorfismo de grafos define su propia clase de complejidad.

Definición

Un lenguaje L está en GI si y sólo si $L \in P^{\text{GRAPH-ISO}}$.

La clase de complejidad GI

El problema de isomorfismo de grafos define su propia clase de complejidad.

Definición

Un lenguaje L está en GI si y sólo si $L \in P^{\textit{GRAPH-ISO}}$.

¿Cuál es la relación de GI con las clases de complejidad que hemos estudiado?

La clase de complejidad GI

El problema de isomorfismo de grafos define su propia clase de complejidad.

Definición

Un lenguaje L está en GI si y sólo si $L \in P^{\text{GRAPH-ISO}}$.

¿Cuál es la relación de GI con las clases de complejidad que hemos estudiado?

- Tenemos que $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{GI} \subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}$

Problemas GI-completos

Proposición

COL-GRAPH-ISO es GI-complete.

Problemas GI-completos

Proposición

COL-GRAPH-ISO es GI-complete.

¿Cómo se demuestra esto?

Problemas GI-completos

Defina el problema AUT-1-AFP de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{AUT-1-AFP} \ = \ \{(G, u) \mid G = (N, E) \text{ es un grafo}, u \in N \text{ y} \\ \text{existe } f \in \text{Aut}(G) \text{ tal que } f(u) \neq u\} \end{aligned}$$

Problemas GI-completos

Defina el problema AUT-1-AFP de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{AUT-1-AFP} \;=\; \{(G, u) \mid G = (N, E) \text{ es un grafo}, u \in N \text{ y} \\ \text{existe } f \in \text{Aut}(G) \text{ tal que } f(u) \neq u\}\end{aligned}$$

Proposición

AUT-1-AFP es GI-complete.

AUT-1-AFP está en GI

Es posible demostrar que AUT-1-AFP $\in \mathrm{P}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

AUT-1-AFP está en GI

Es posible demostrar que AUT-1-AFP $\in \mathrm{P}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

- ¿Cómo se hace esto?

AUT-1-AFP está en GI

Es posible demostrar que AUT-1-AFP $\in \text{P}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

- ¿Cómo se hace esto?

Concluimos que AUT-1-AFP $\in$ GI.

AUT-1-AFP está en GI

Es posible demostrar que AUT-1-AFP $\in$ P$^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

- ¿Cómo se hace esto?

Concluimos que AUT-1-AFP $\in$ GI.

- ¿Por qué?

AUT-1-AFP es GI-hard

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO $\in \mathsf{P}^{\text{AUT-1-AFP}}$.

AUT-1-AFP es GI-hard

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO $\in$ P$^{\text{AUT-1-AFP}}$.

Vamos a mostrar un algoritmo polinomial que dados grafos $G_1 = (N_1, E_2)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$, produce una grafo G y un vértice u en G tal que:

$$(G_1, G_2) \in \text{GRAPH-ISO} \quad \text{si y sólo si} \quad (G, u) \in \text{AUT-1-AFP}$$

AUT-1-AFP es GI-hard

Sean u_1, u_2 dos nodos tales que $u_1 \notin N_1 \cup N_2$ y $u_2 \notin N_1 \cup N_2$.

AUT-1-AFP es GI-hard

Sean u_1, u_2 dos nodos tales que $u_1 \not\in N_1 \cup N_2$ y $u_2 \not\in N_1 \cup N_2$.

Para $i \in \{1, 2\}$, defina $G_i' = (N_i', E_i')$:

$$\begin{array}{rcl} N_i' & = & N_i \cup \{u_i\} \\ E_i' & = & E_i \cup \{(u_i, v) \mid v \in N_i\} \end{array}$$

AUT-1-AFP es GI-hard

Sean u_1, u_2 dos nodos tales que $u_1 \not\in N_1 \cup N_2$ y $u_2 \not\in N_1 \cup N_2$.

Para $i \in \{1, 2\}$, defina $G'_i = (N'_i, E'_i)$:

$$\begin{array}{rcl} N'_i & = & N_i \cup \{u_i\} \\ E'_i & = & E_i \cup \{(u_i, v) \mid v \in N_i\} \end{array}$$

Finalmente, defina $G = G'_1 \uplus G'_2$.

- Suponemos que los nodos u_1, u_2 no son renombrados al realizar esta operación.

AUT-1-AFP es GI-hard

Si $f \in \mathrm{Aut}(G)$, entonces $f(u_1) = u_1$ o $f(u_1) = u_2$.

AUT-1-AFP es GI-hard

Si $f \in \mathrm{Aut}(G)$, entonces $f(u_1) = u_1$ o $f(u_1) = u_2$.

- ¿Por qué se tiene esto?

AUT-1-AFP es GI-hard

Si $f \in \mathrm{Aut}(G)$, entonces $f(u_1) = u_1$ o $f(u_1) = u_2$.

- ¿Por qué se tiene esto?

Por las definiciones de G_1' y G_2', concluimos que $(G_1, G_2) \in$ GRAPH-ISO si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $f(u_1) = u_2$.

AUT-1-AFP es GI-hard

Si $f \in \text{Aut}(G)$, entonces $f(u_1) = u_1$ o $f(u_1) = u_2$.

- ¿Por qué se tiene esto?

Por las definiciones de G_1' y G_2', concluimos que $(G_1, G_2) \in$ GRAPH-ISO si y sólo si existe $f \in \text{Aut}(G)$ tal que $f(u_1) = u_2$.

- Por lo tanto: $(G_1, G_2) \in$ GRAPH-ISO si y sólo si $(G, u_1) \in$ AUT-1-AFP.

$\square$

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una instancia I de un esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$ se define como una estructura $\langle D, R_1^I, \ldots, R_n^I \rangle$ tal que:

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una instancia I de un esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$ se define como una estructura $\langle D, R_1^I, \ldots, R_n^I \rangle$ tal que:

- D es un conjunto finito que es llamado el dominio de I.

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una instancia I de un esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$ se define como una estructura $\langle D, R_1^I, \ldots, R_n^I \rangle$ tal que:

- D es un conjunto finito que es llamado el dominio de I.
- $R_i^I \subseteq D^{k_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una generalización de GRAPH-ISO

Un esquema relacional es un conjunto $\{R_1, \ldots, R_n\}$ de nombres de relaciones.

- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una instancia I de un esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$ se define como una estructura $\langle D, R_1^I, \ldots, R_n^I \rangle$ tal que:

- D es un conjunto finito que es llamado el dominio de I.
- $R_i^I \subseteq D^{k_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo

Un grafo es una instancia sobre el esquema relacional $\{E\}$, donde E es una relación binaria.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una función $f : D_1 \to D_2$ es un isomorfismo de I_1 en I_2 si:

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una función $f : D_1 \to D_2$ es un isomorfismo de I_1 en I_2 si:

- f es una biyección.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una función $f : D_1 \to D_2$ es un isomorfismo de I_1 en I_2 si:

- f es una biyección.
- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in D_1^{k_i}$:

$$(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in R_i^{I_1} \text{ si y sólo si } (f(a_1), \ldots, f(a_{k_i})) \in R_i^{I_2}.$$

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una función $f : D_1 \to D_2$ es un isomorfismo de I_1 en I_2 si:

- f es una biyección.
- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in D_1^{k_i}$:

$$(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in R_i^{I_1} \text{ si y sólo si } (f(a_1), \ldots, f(a_{k_i})) \in R_i^{I_2}.$$

Decimos que I_1 es isomorfa a I_2 si existe un isomorfismo de I_1 en I_2.

Una generalización de GRAPH-ISO

Sean I_1 e I_2 dos instancias definidas sobre el mismo esquema relacional $\{R_1, \ldots, R_n\}$.

- El dominio de I_i es D_i, para cada $i \in \{1, 2\}$.
- R_i tiene aridad $k_i \geq 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Una función $f : D_1 \to D_2$ es un isomorfismo de I_1 en I_2 si:

- f es una biyección.
- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in D_1^{k_i}$:

$$(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in R_i^{I_1} \text{ si y sólo si } (f(a_1), \ldots, f(a_{k_i})) \in R_i^{I_2}.$$

Decimos que I_1 es isomorfa a I_2 si existe un isomorfismo de I_1 en I_2.

- Un automorfismo de I es un isomorfismo de I en I.

Una generalización de GRAPH-ISO

Defina el problema REL-ISO de la siguiente forma:

$$\text{REL-ISO} \ = \ \{(I_1, I_2) \mid I_1, I_2 \text{ son instancias del mismo esquema relacional e } I_1 \text{ es isomorfa a } I_2\}$$

Una generalización de GRAPH-ISO

Defina el problema REL-ISO de la siguiente forma:

$$\text{REL-ISO} \;=\; \{(I_1, I_2) \mid I_1, I_2 \text{ son instancias del mismo esquema relacional e } I_1 \text{ es isomorfa a } I_2\}$$

Proposición

REL-ISO es GI-completo.

REL-ISO es GI-completo

Es claro que GRAPH-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{REL-ISO}}$.

REL-ISO es GI-completo

Es claro que GRAPH-ISO $\in$ $\mathrm{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- ¿Por qué?

REL-ISO es GI-completo

Es claro que GRAPH-ISO $\in$ $\mathrm{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- ¿Por qué?

Vamos a mostrar que REL-ISO $\in$ $\mathrm{P}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

REL-ISO es GI-completo

Es claro que GRAPH-ISO $\in$ P$^{\text{REL-ISO}}$.

- ¿Por qué?

Vamos a mostrar que REL-ISO $\in$ P$^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

- De esto se concluye que REL-ISO $\in$ GI.

REL-ISO es GI-completo

Vamos a mostrar un algoritmo de tiempo polinomial que, dada una instancia I, produce un grafo coloreado G_I.

REL-ISO es GI-completo

Vamos a mostrar un algoritmo de tiempo polinomial que, dada una instancia I, produce un grafo coloreado G_I.

Dadas dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, la siguiente es la propiedad central de esta construcción:

$$(I_1, I_2) \in \text{REL-ISO} \quad \text{si y sólo si} \quad (G_{I_1}, G_{I_2}) \in \text{COL-GRAPH-ISO}$$

REL-ISO es GI-completo

Vamos a mostrar un algoritmo de tiempo polinomial que, dada una instancia I, produce un grafo coloreado G_I.

Dadas dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, la siguiente es la propiedad central de esta construcción:

$$(I_1, I_2) \in \text{REL-ISO} \quad \text{si y sólo si} \quad (G_{I_1}, G_{I_2}) \in \text{COL-GRAPH-ISO}$$

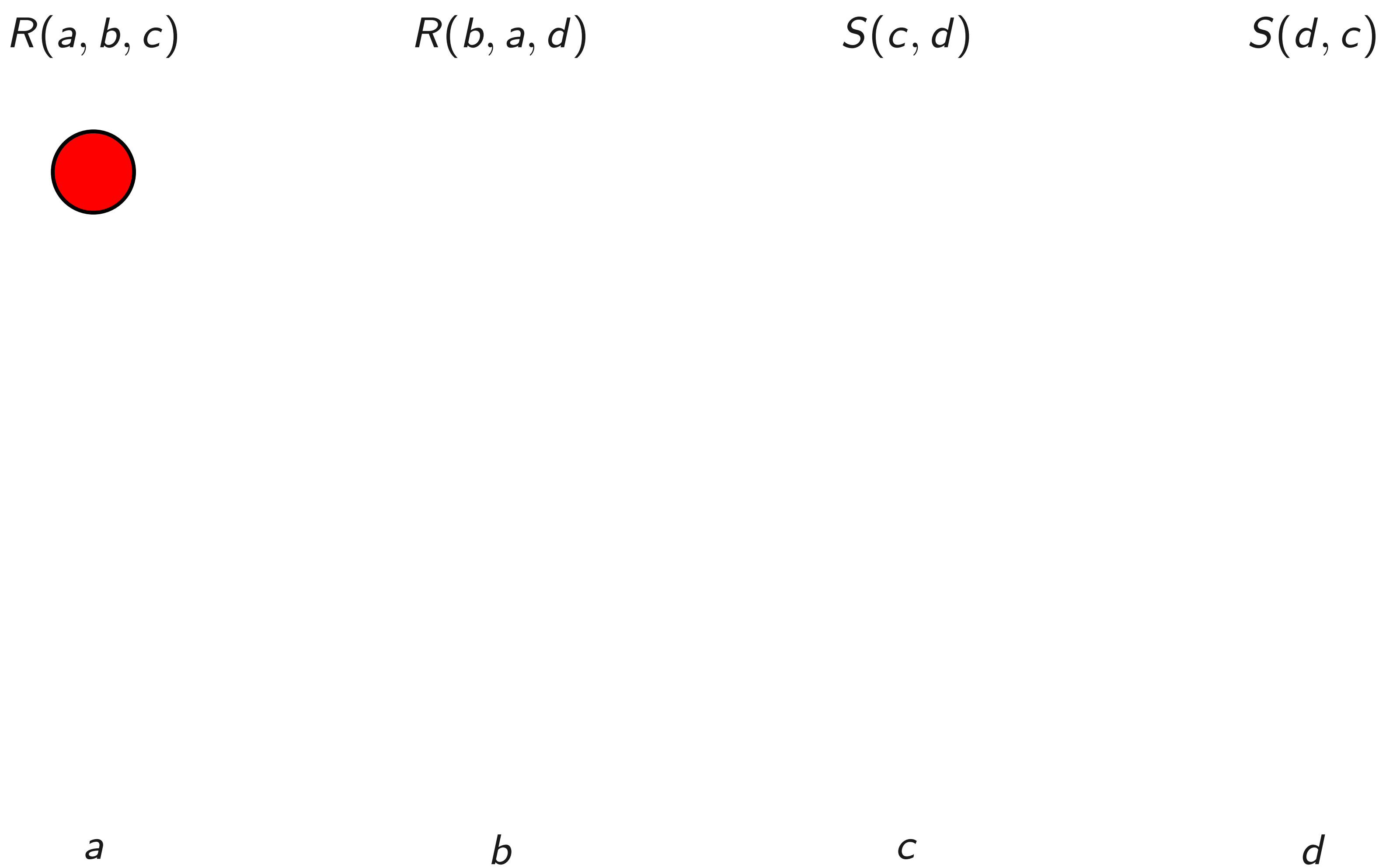
De esto concluimos que REL-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$.

La construcción de G_I

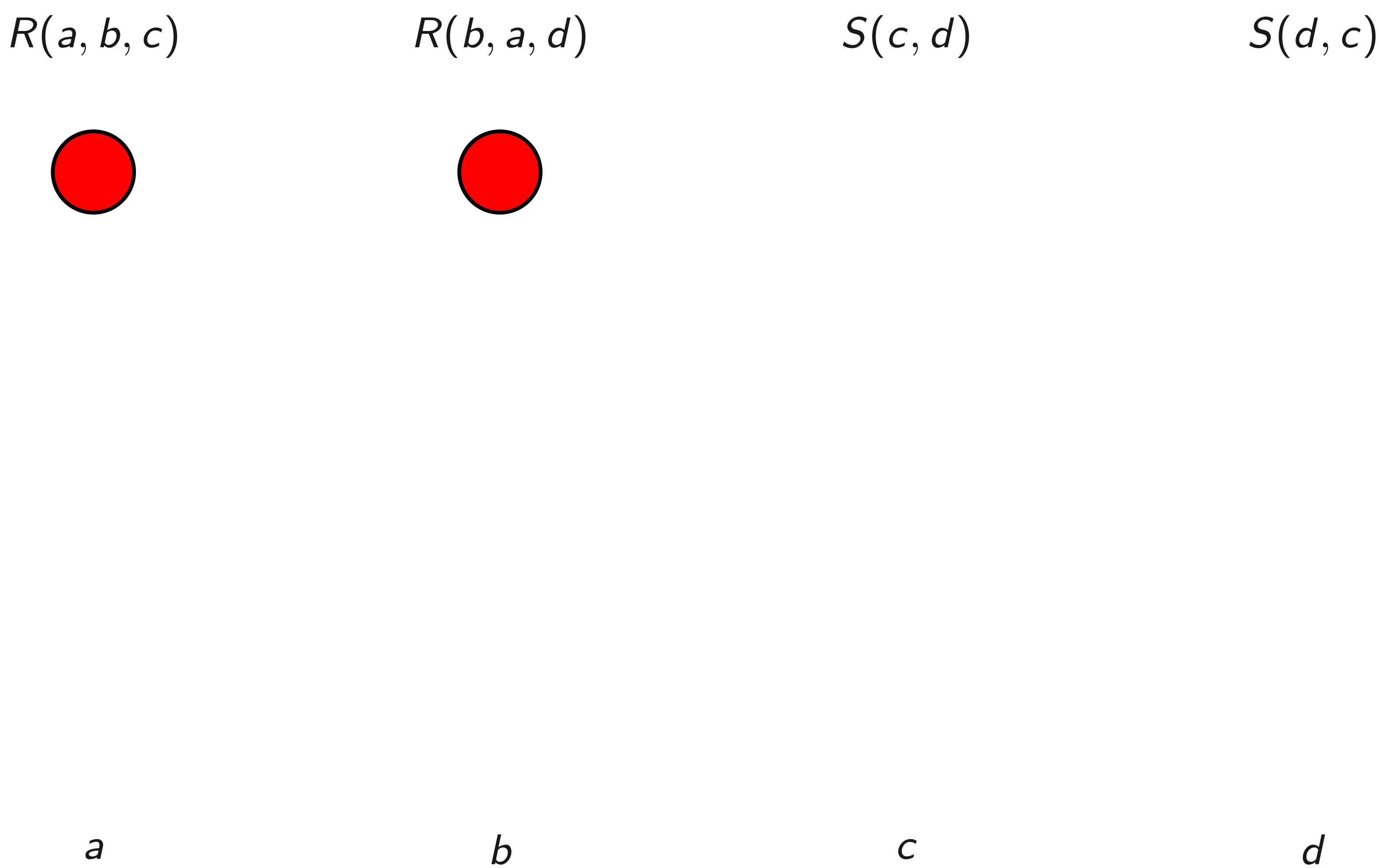
$R(a, b, c)$ $R(b, a, d)$ $S(c, d)$ $S(d, c)$

a b c d

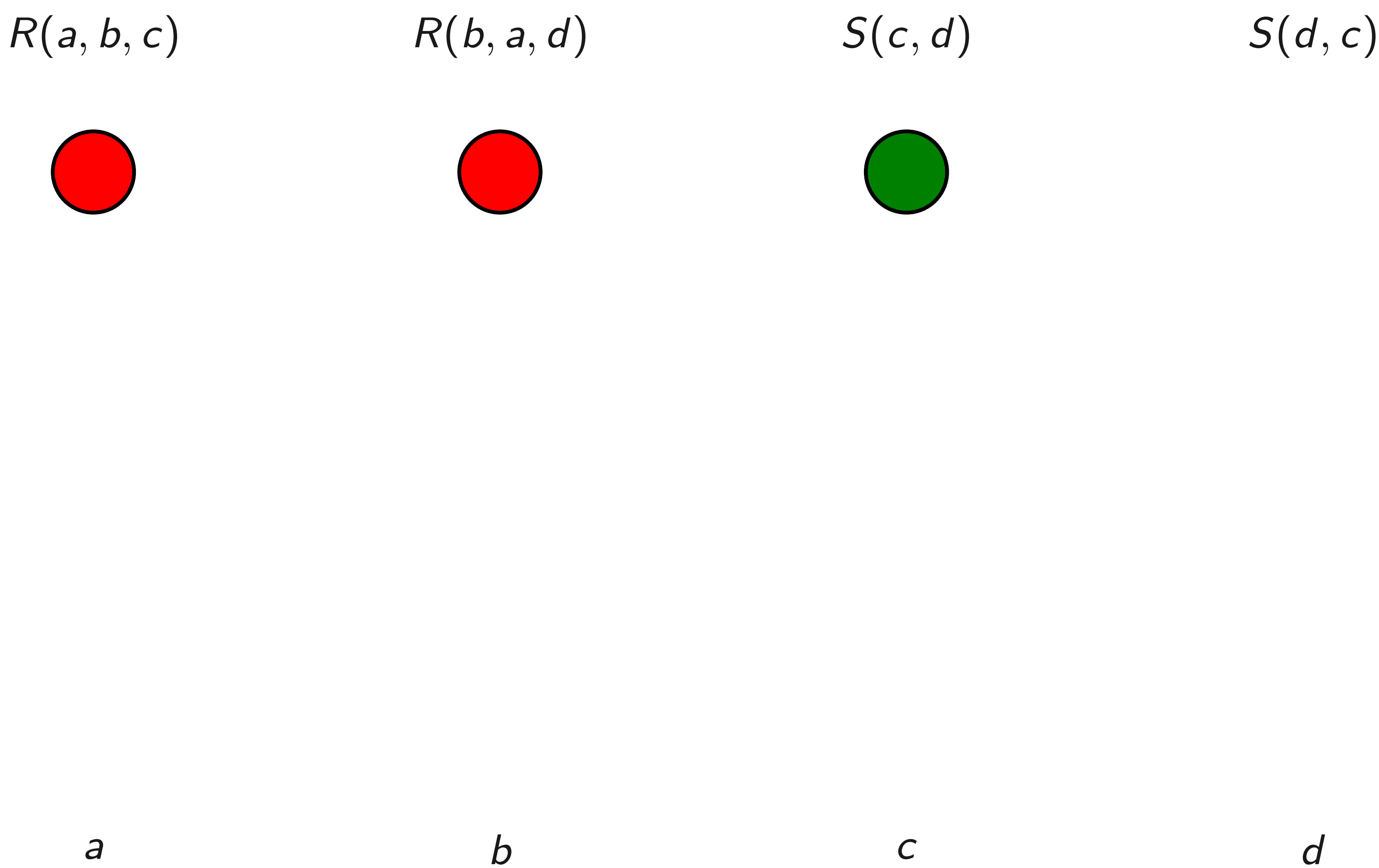
La construcción de G_I



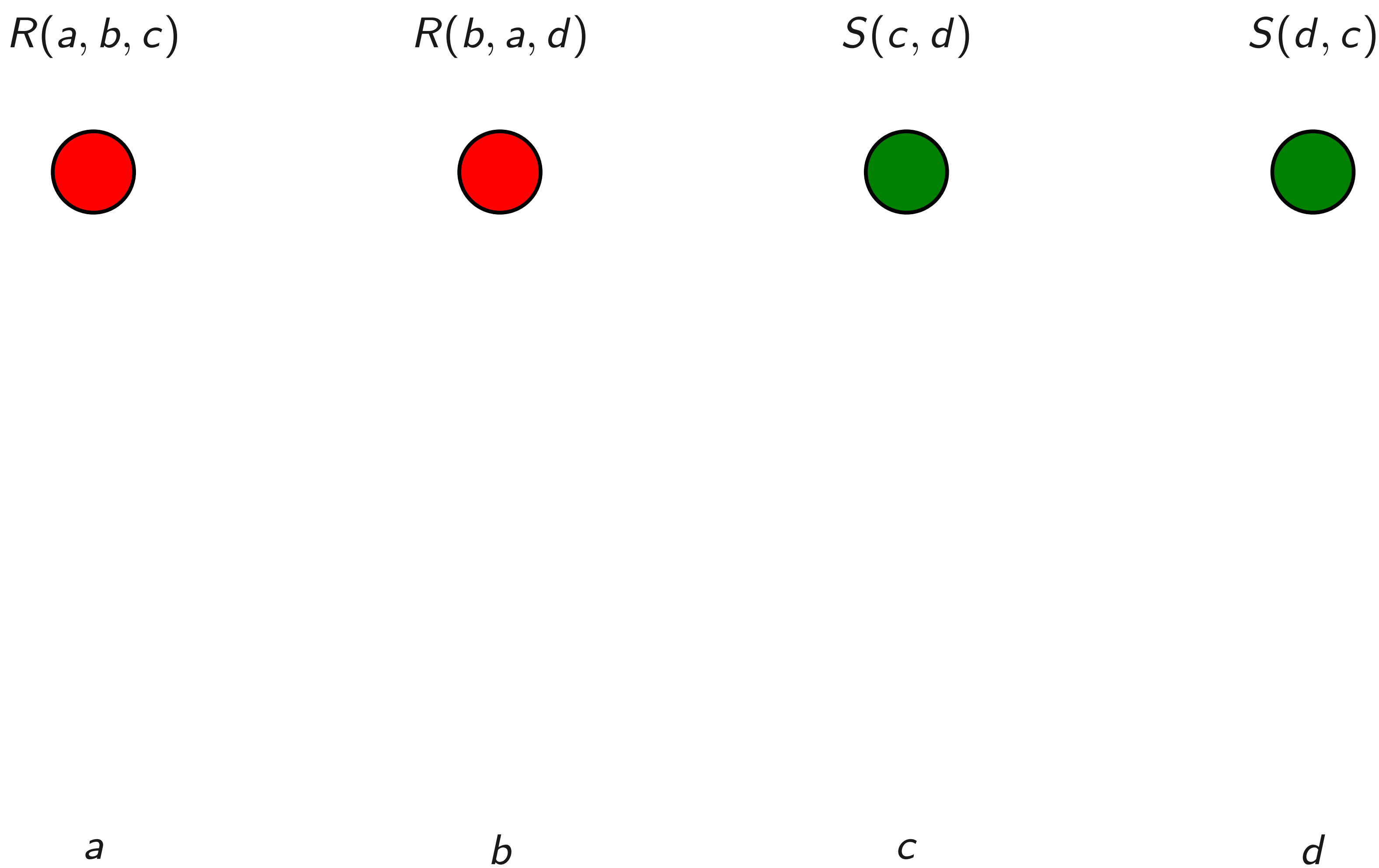
La construcción de G_I



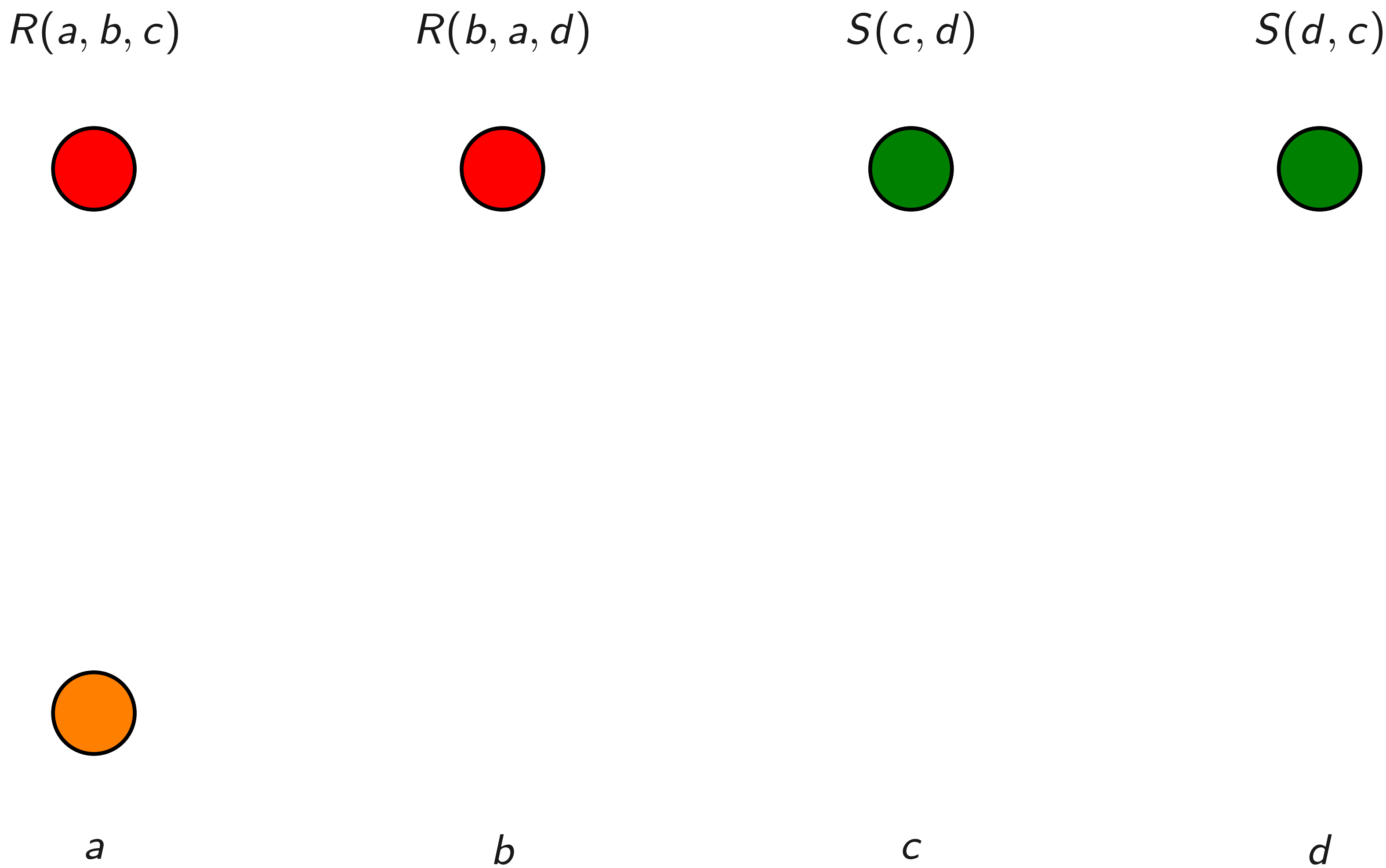
La construcción de G_I



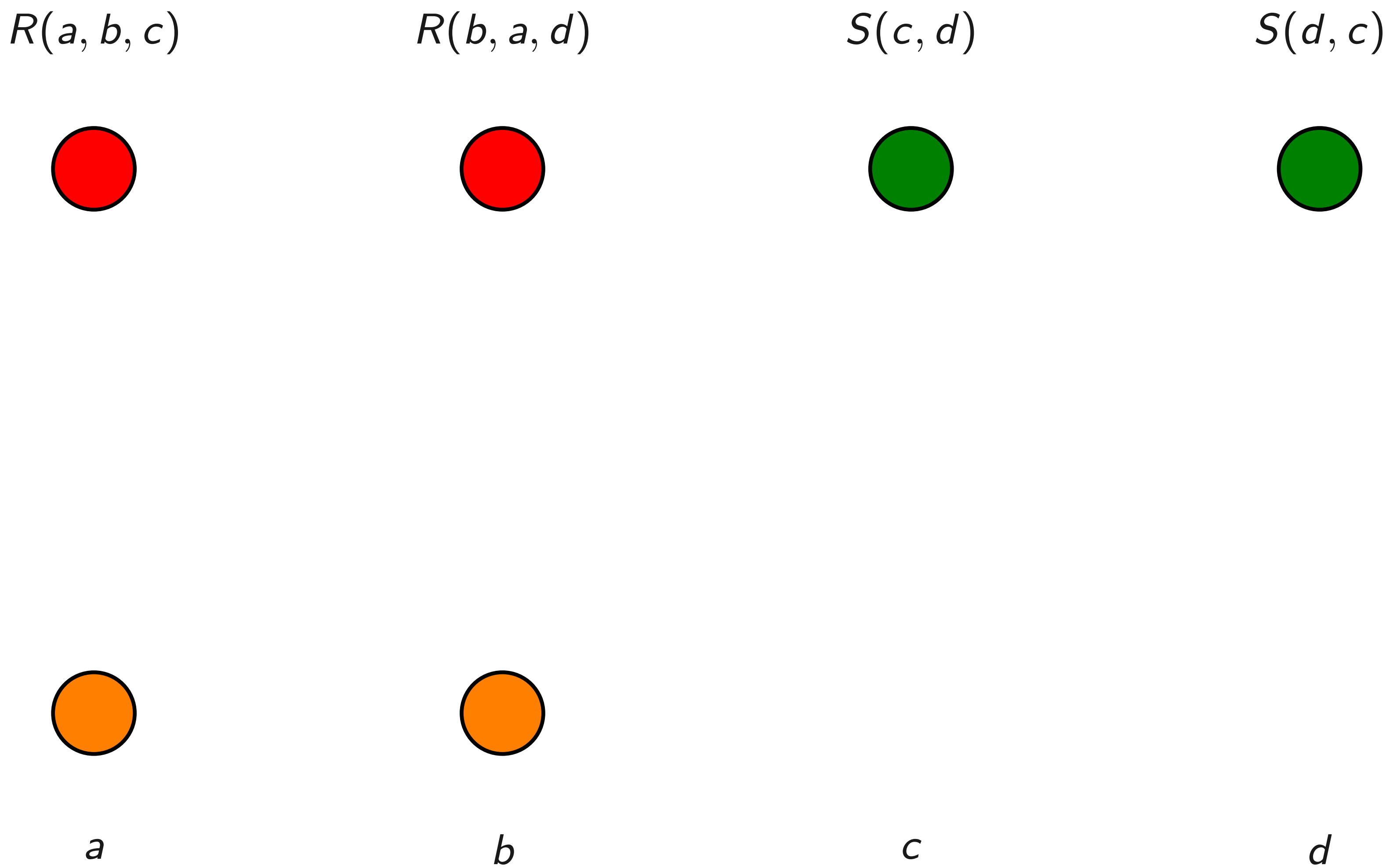
La construcción de G_I



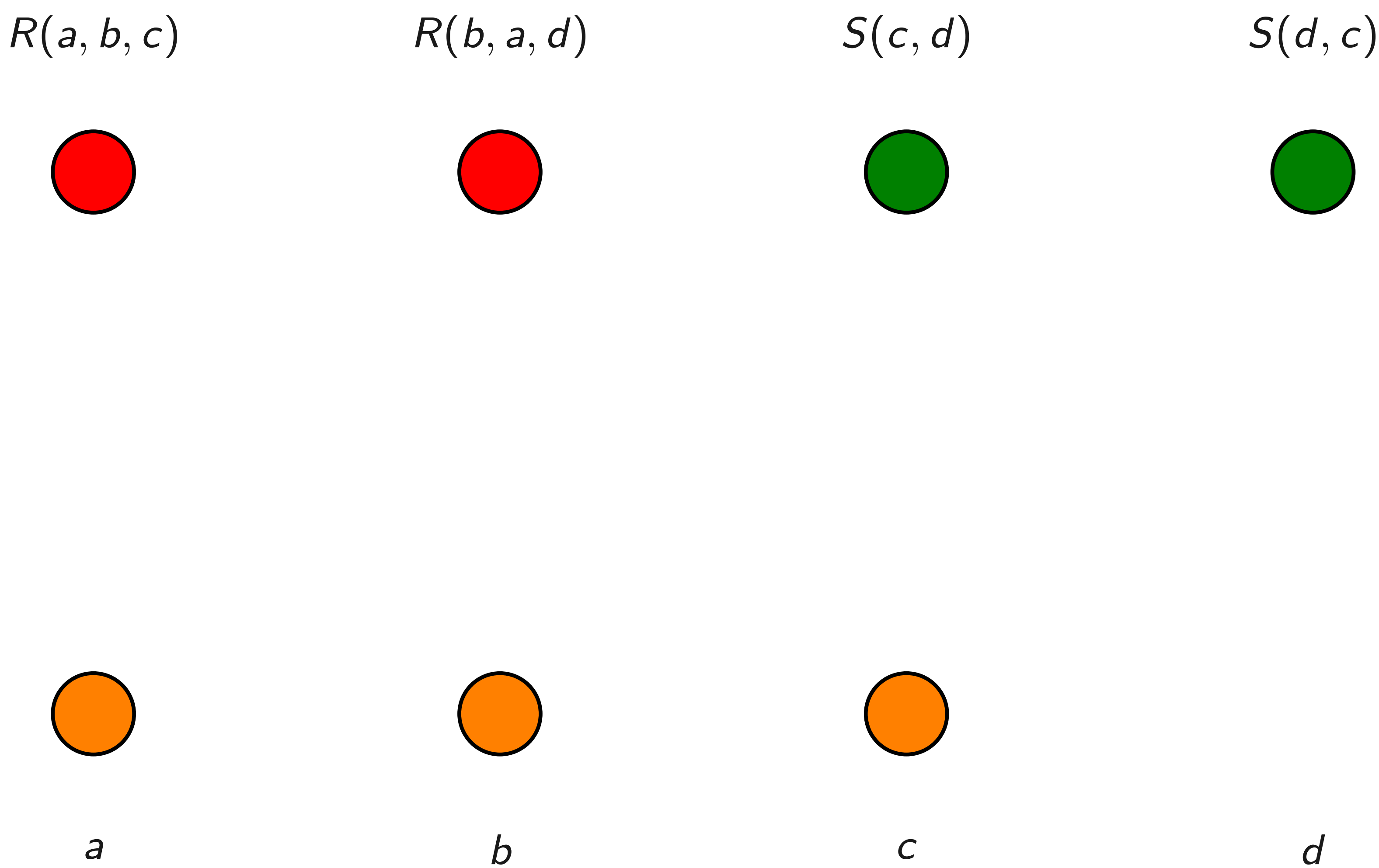
La construcción de G_I



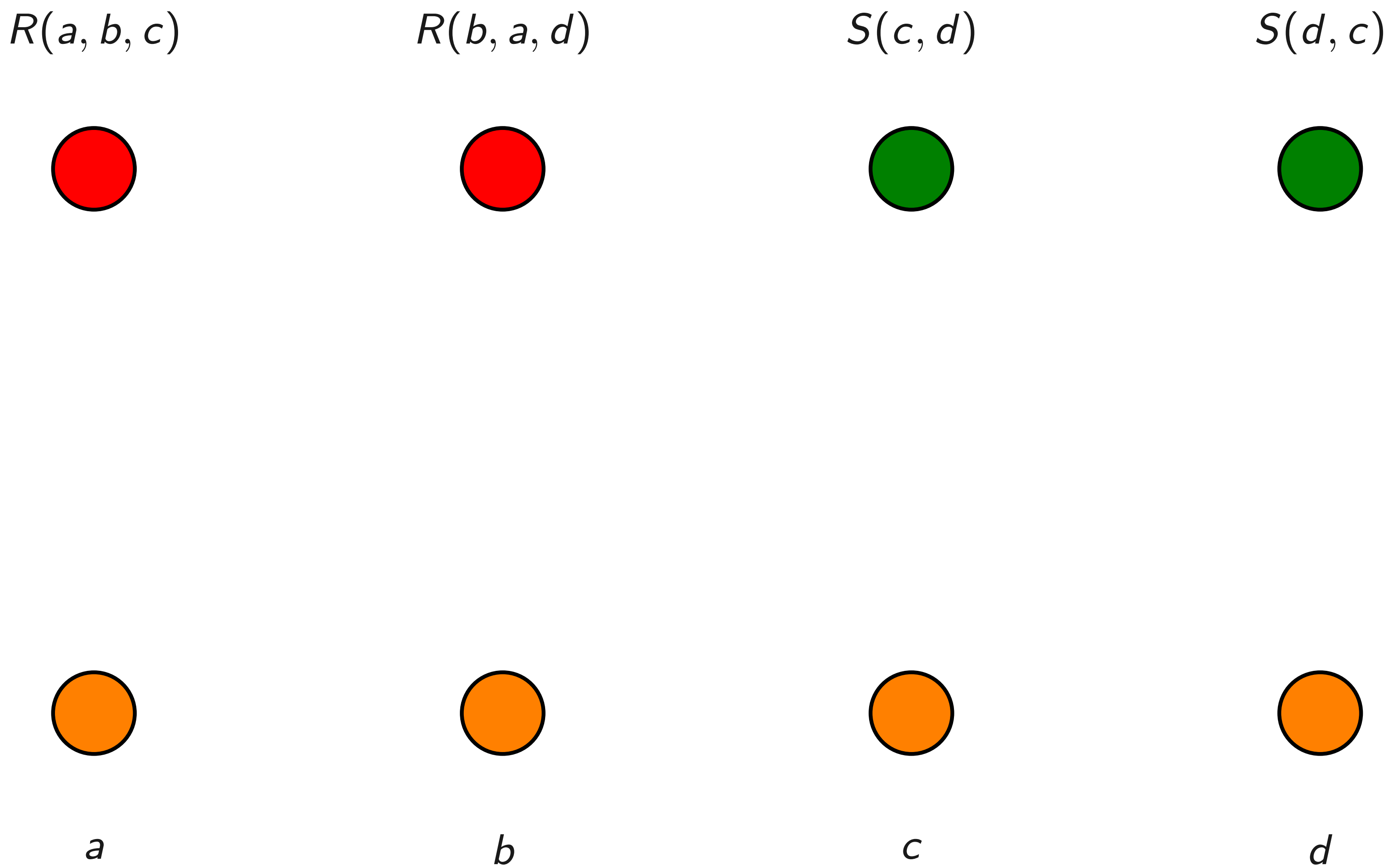
La construcción de G_I



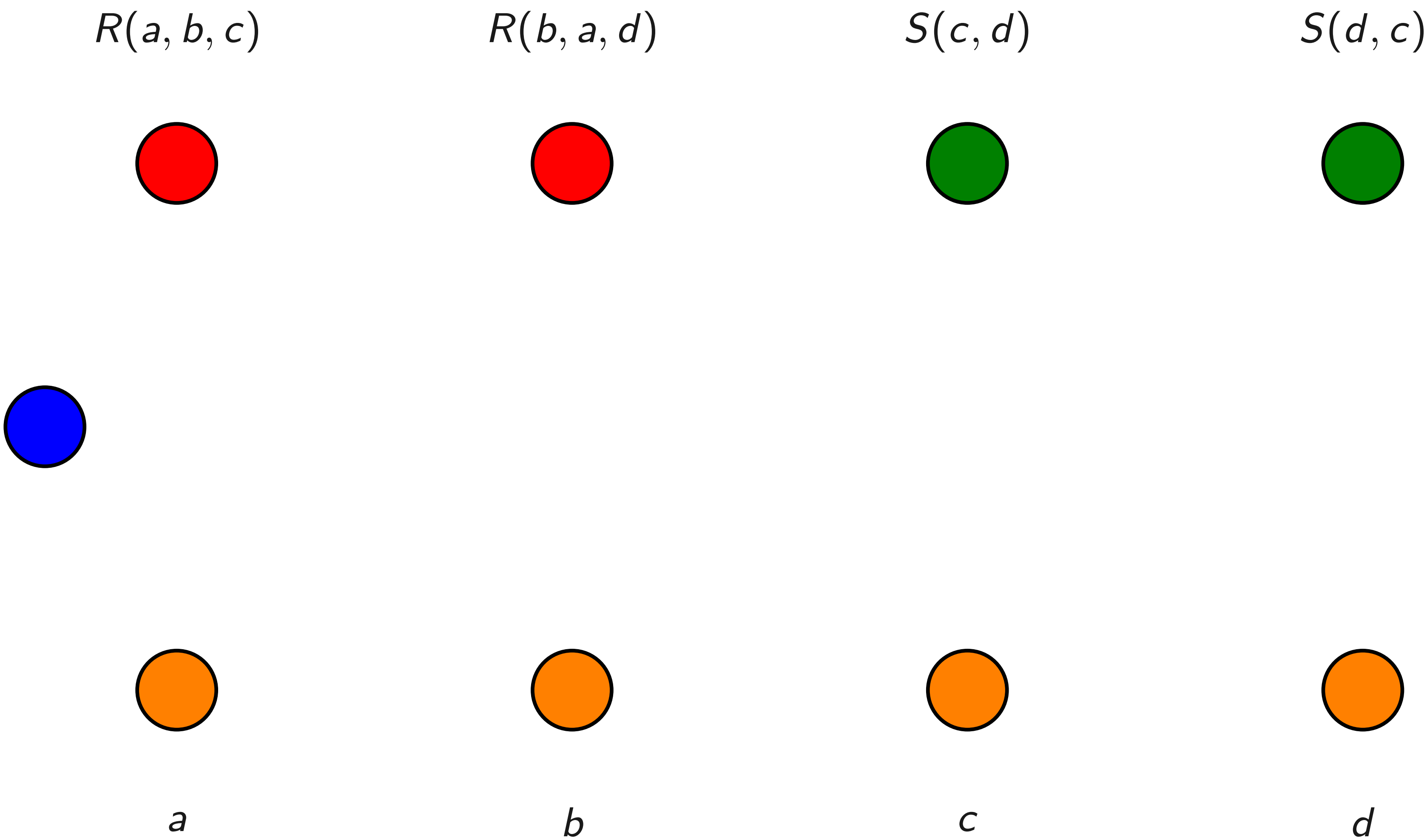
La construcción de G_I



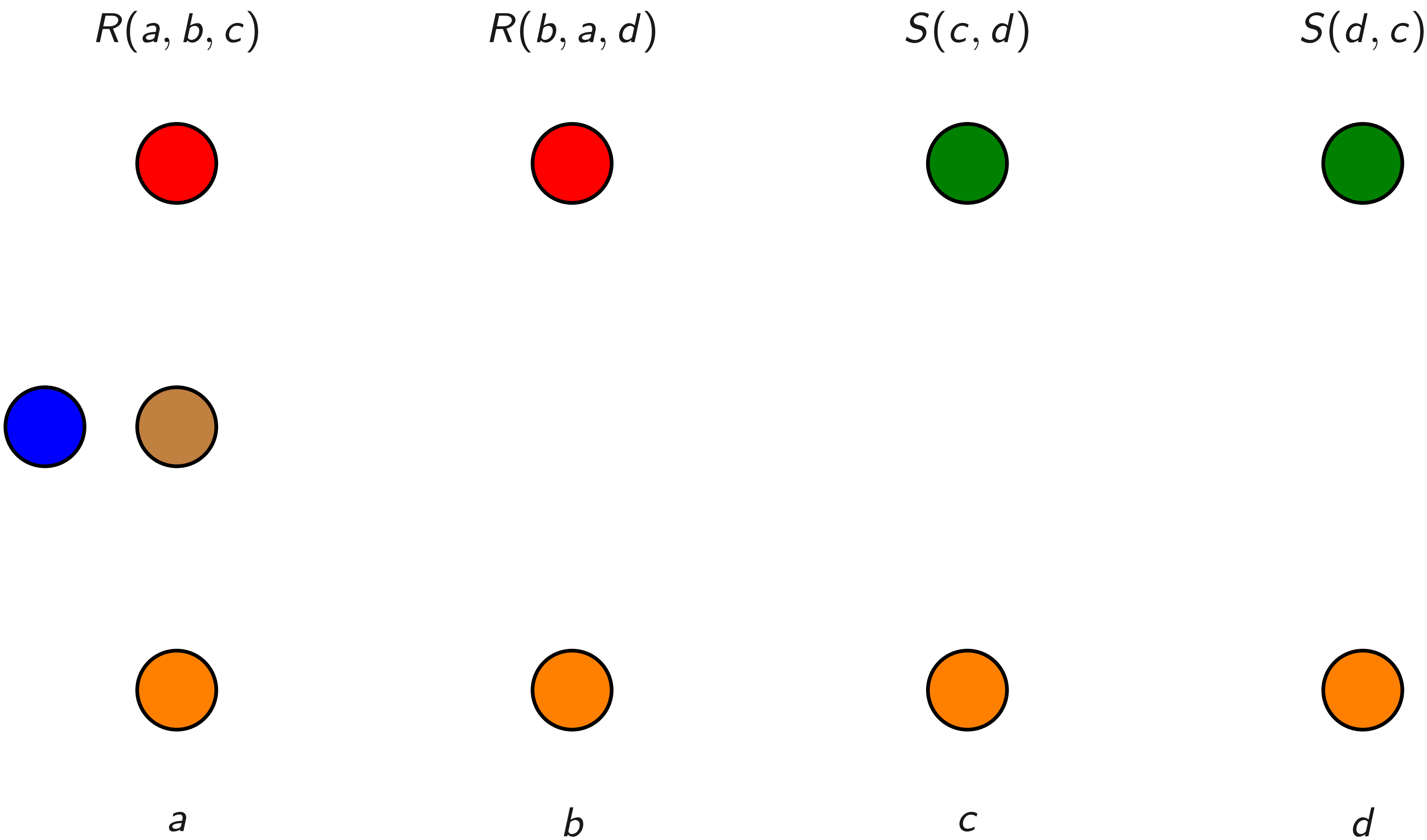
La construcción de G_I



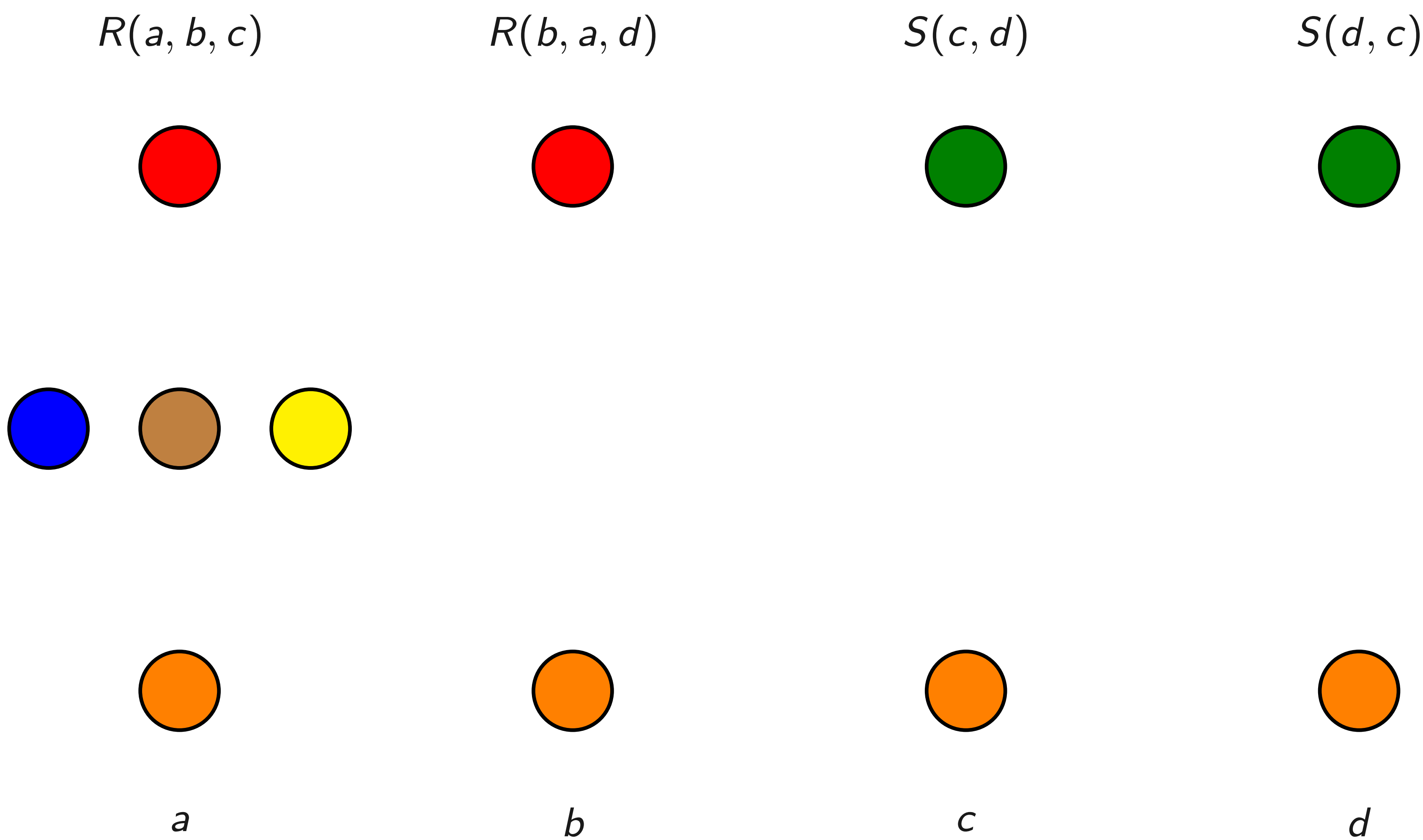
La construcción de G_I



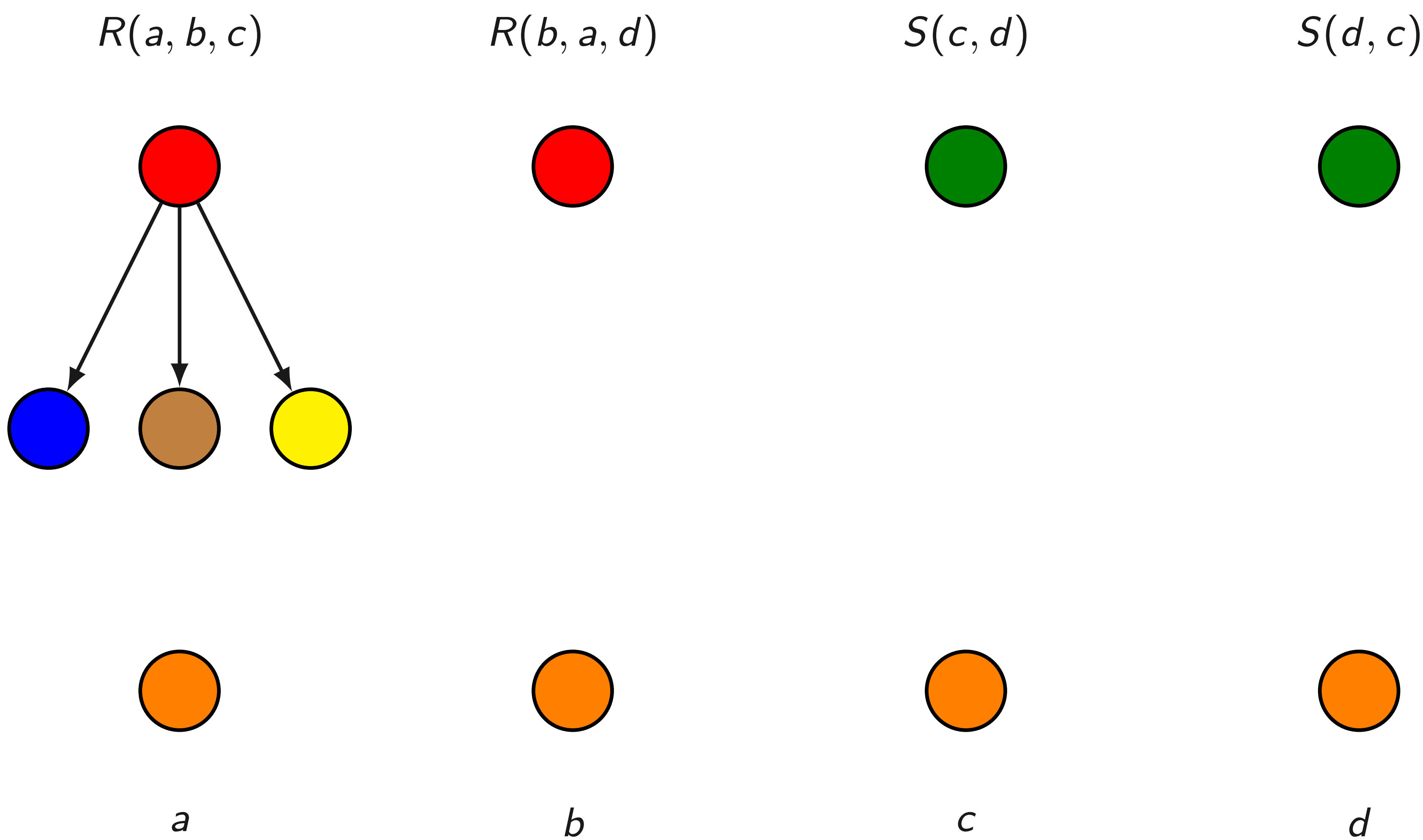
La construcción de G_I



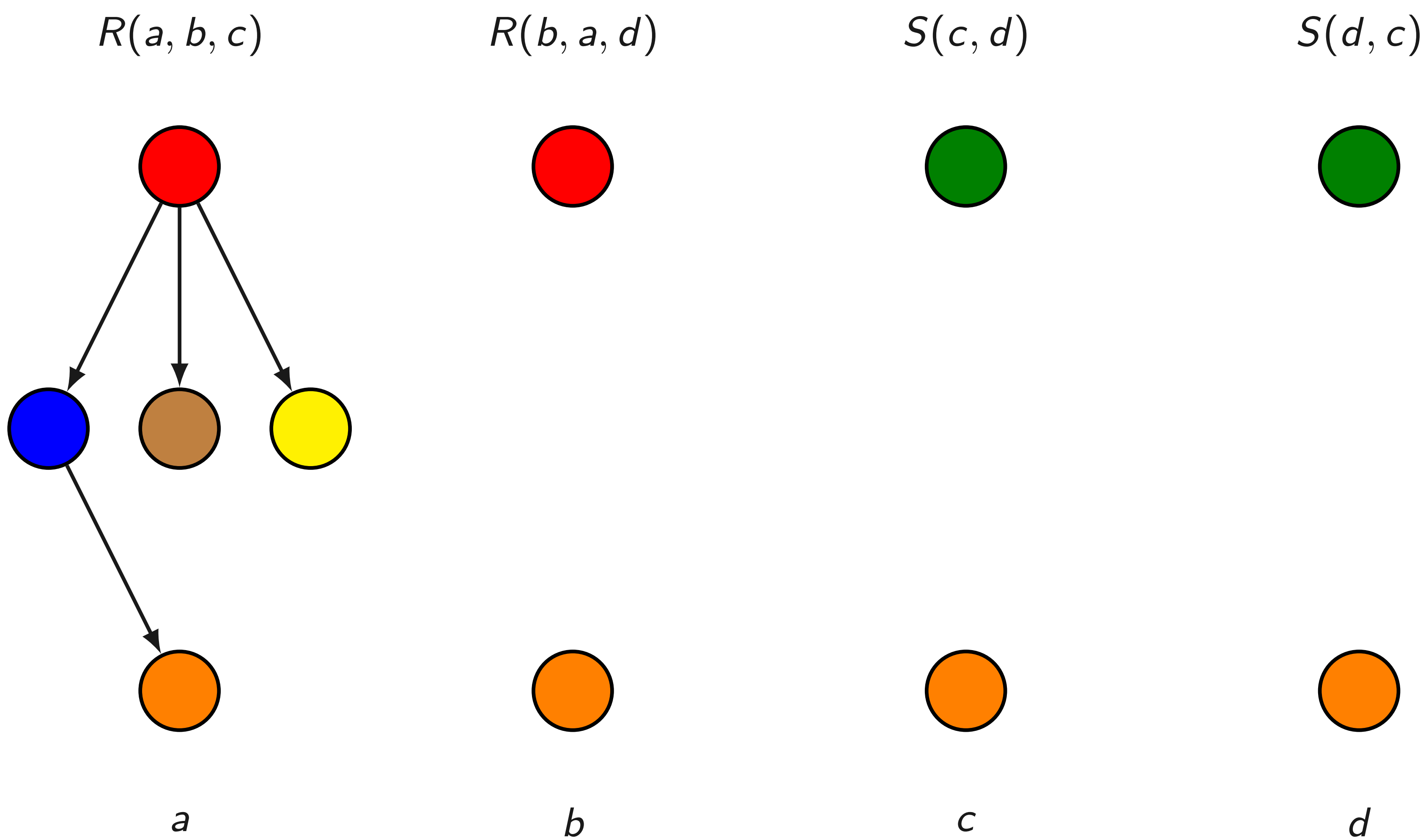
La construcción de G_I



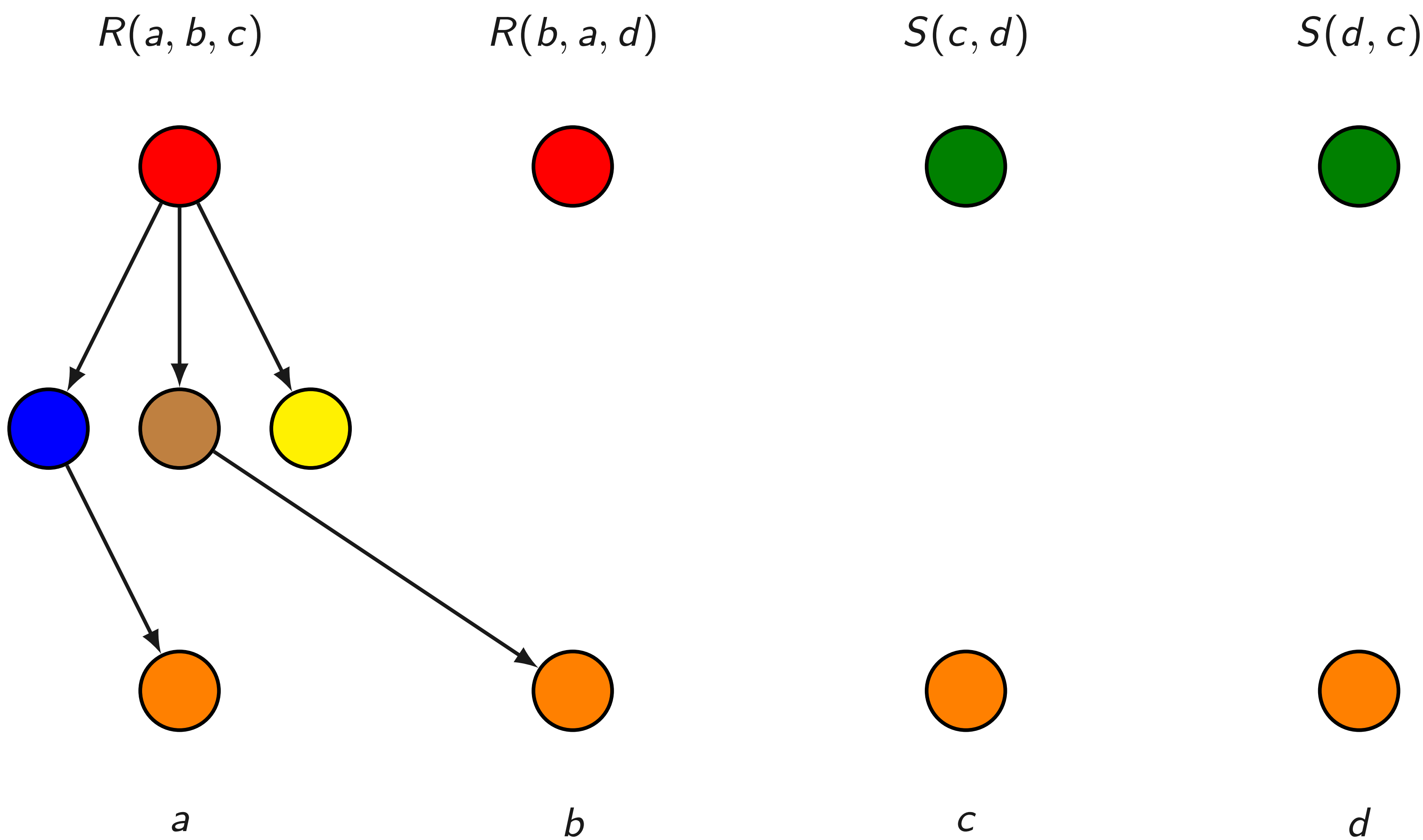
La construcción de G_I



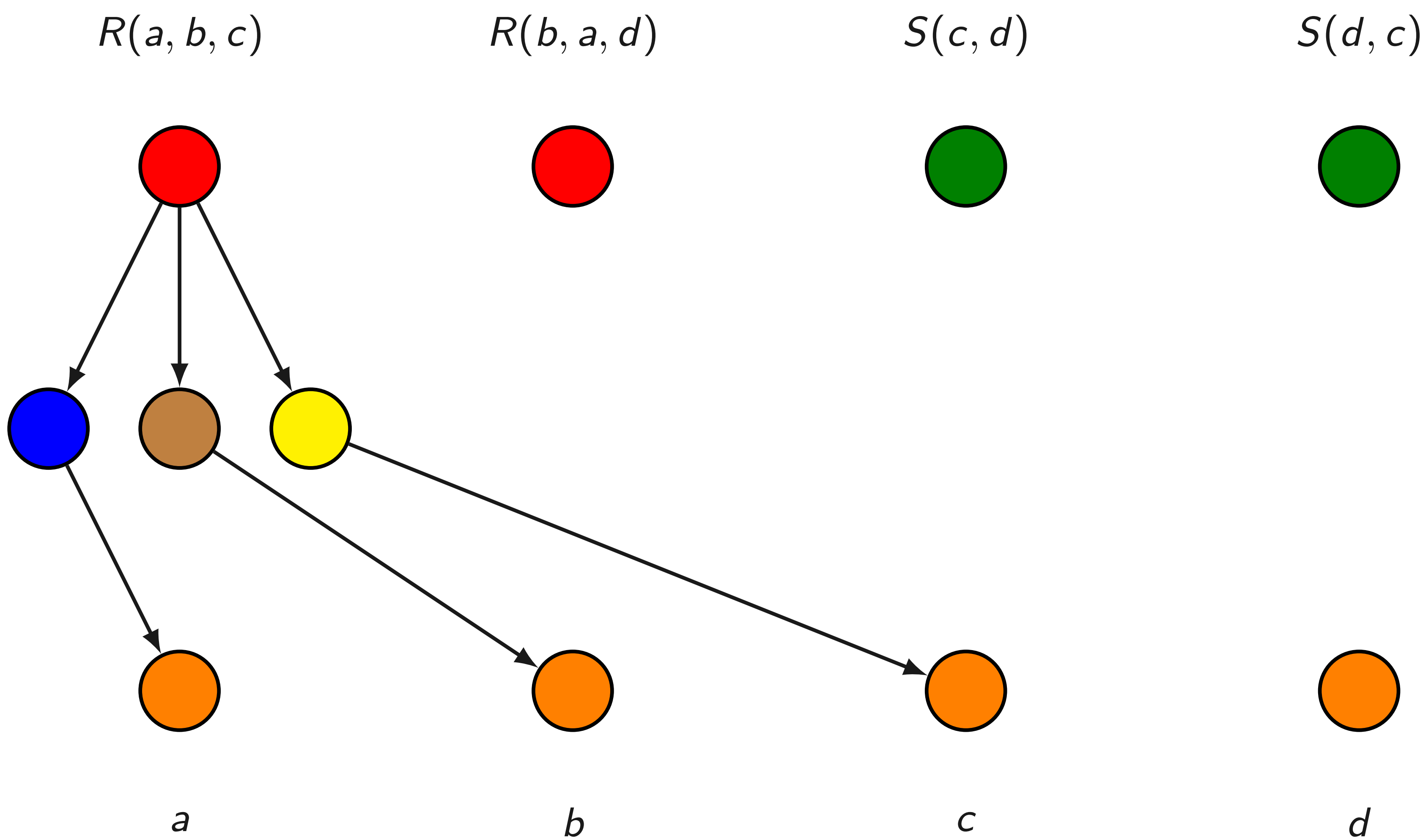
La construcción de G_I



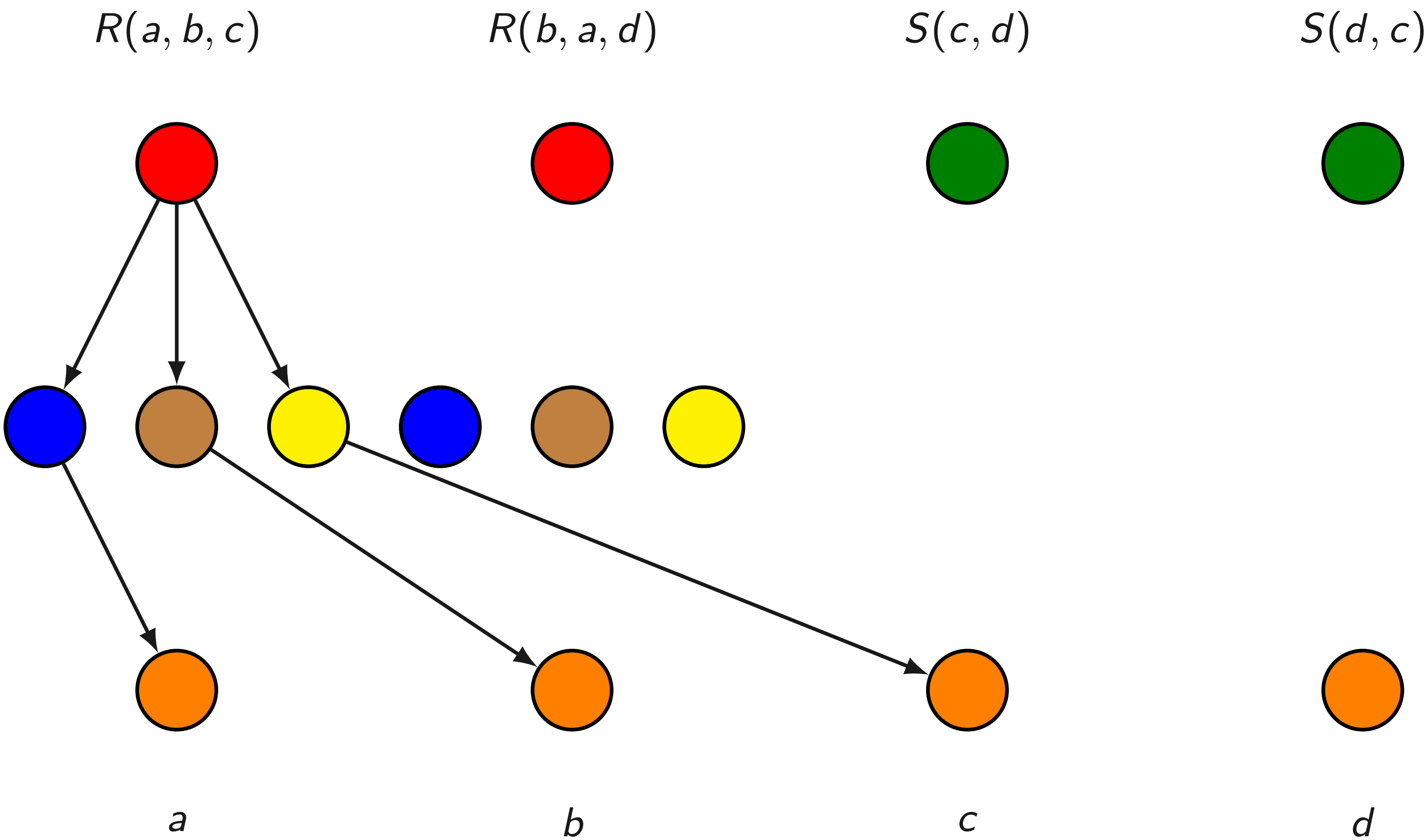
La construcción de G_I



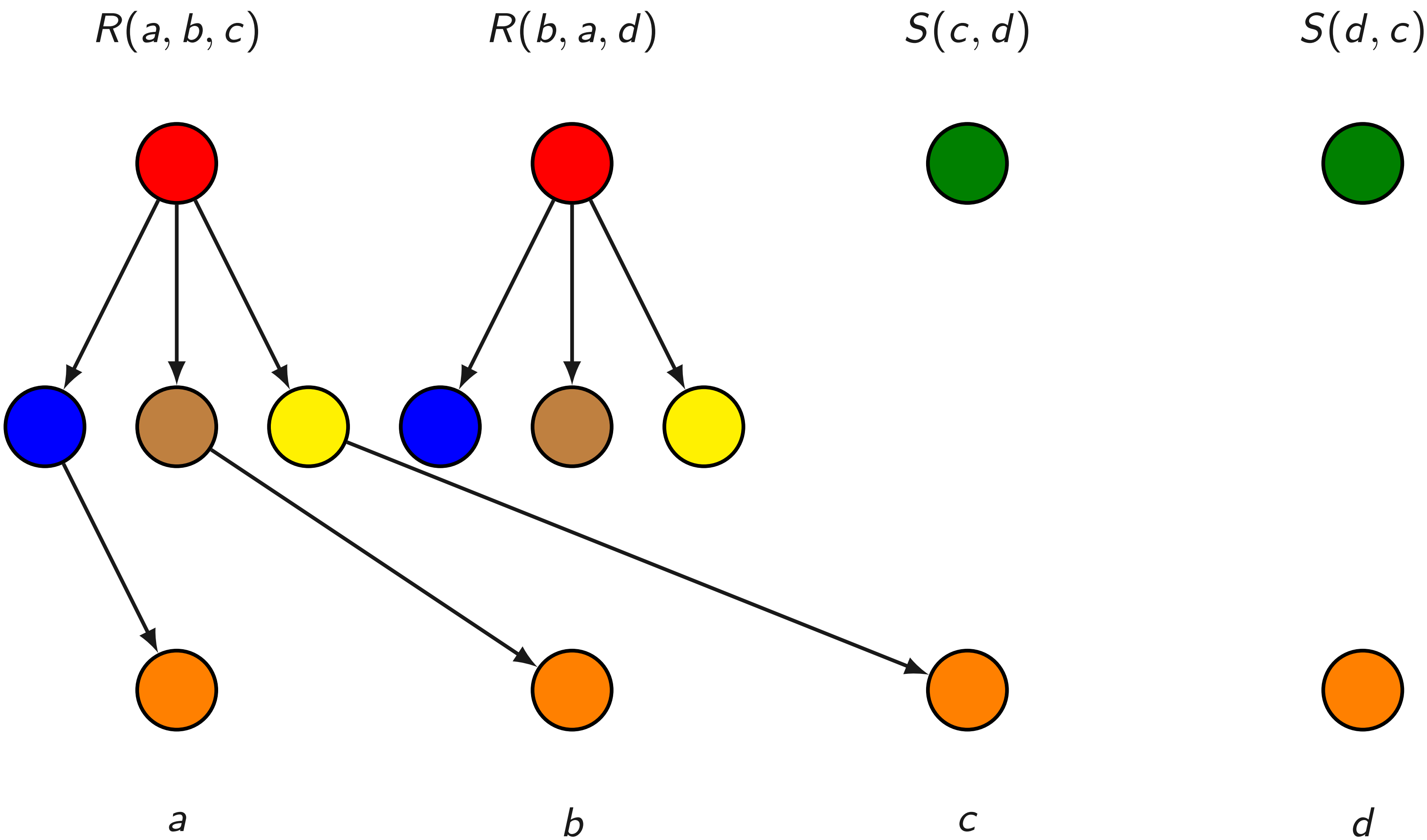
La construcción de G_I



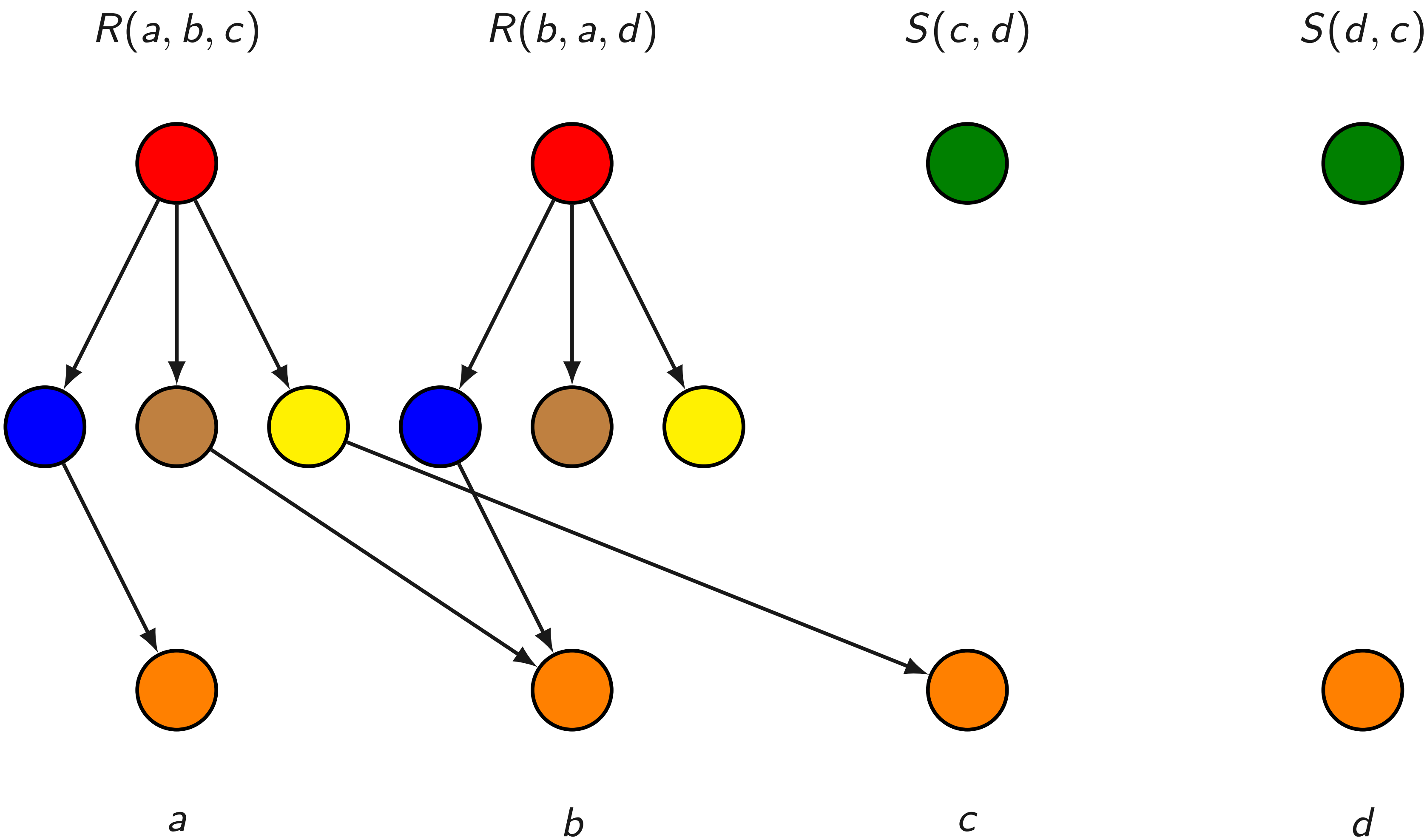
La construcción de G_I



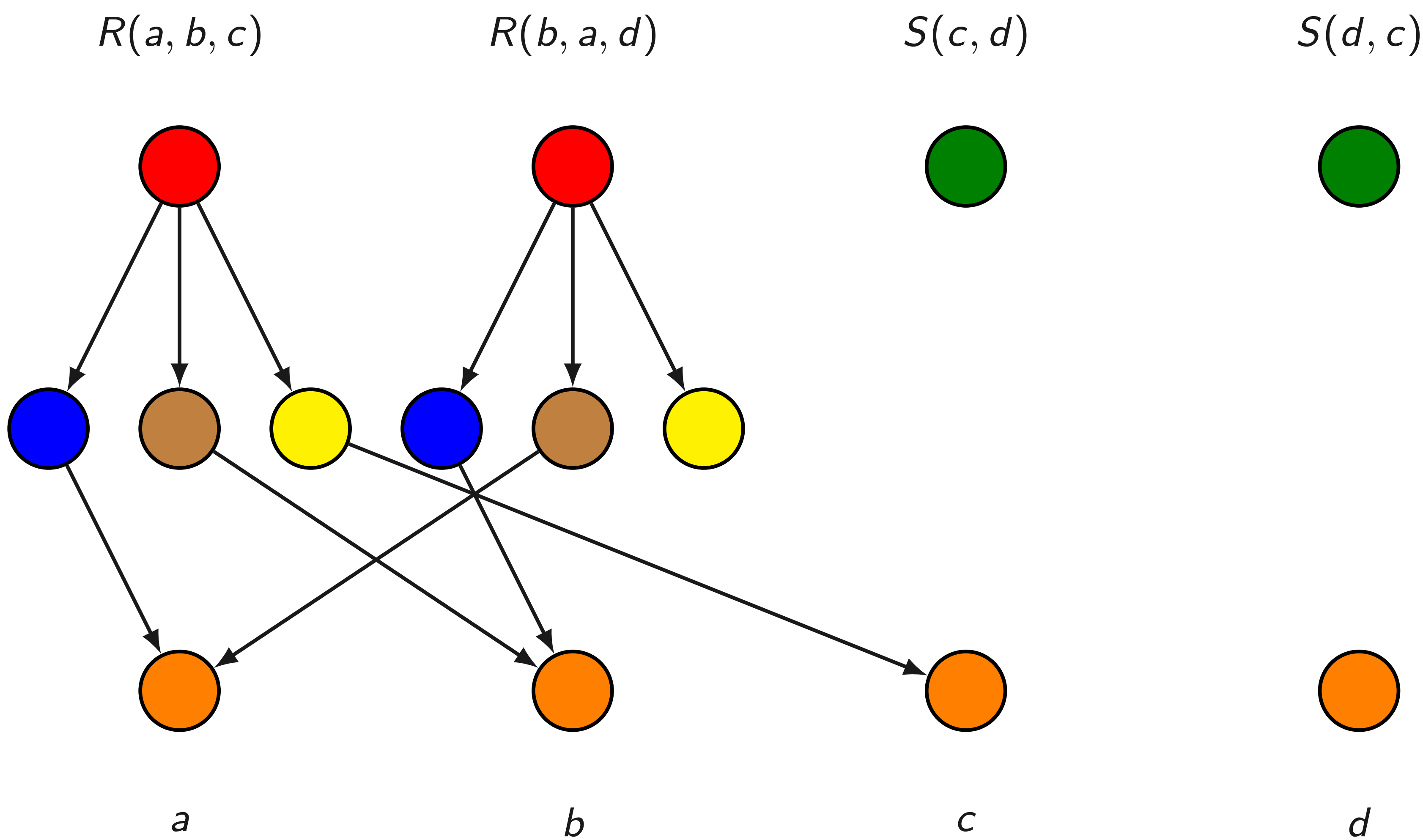
La construcción de G_I



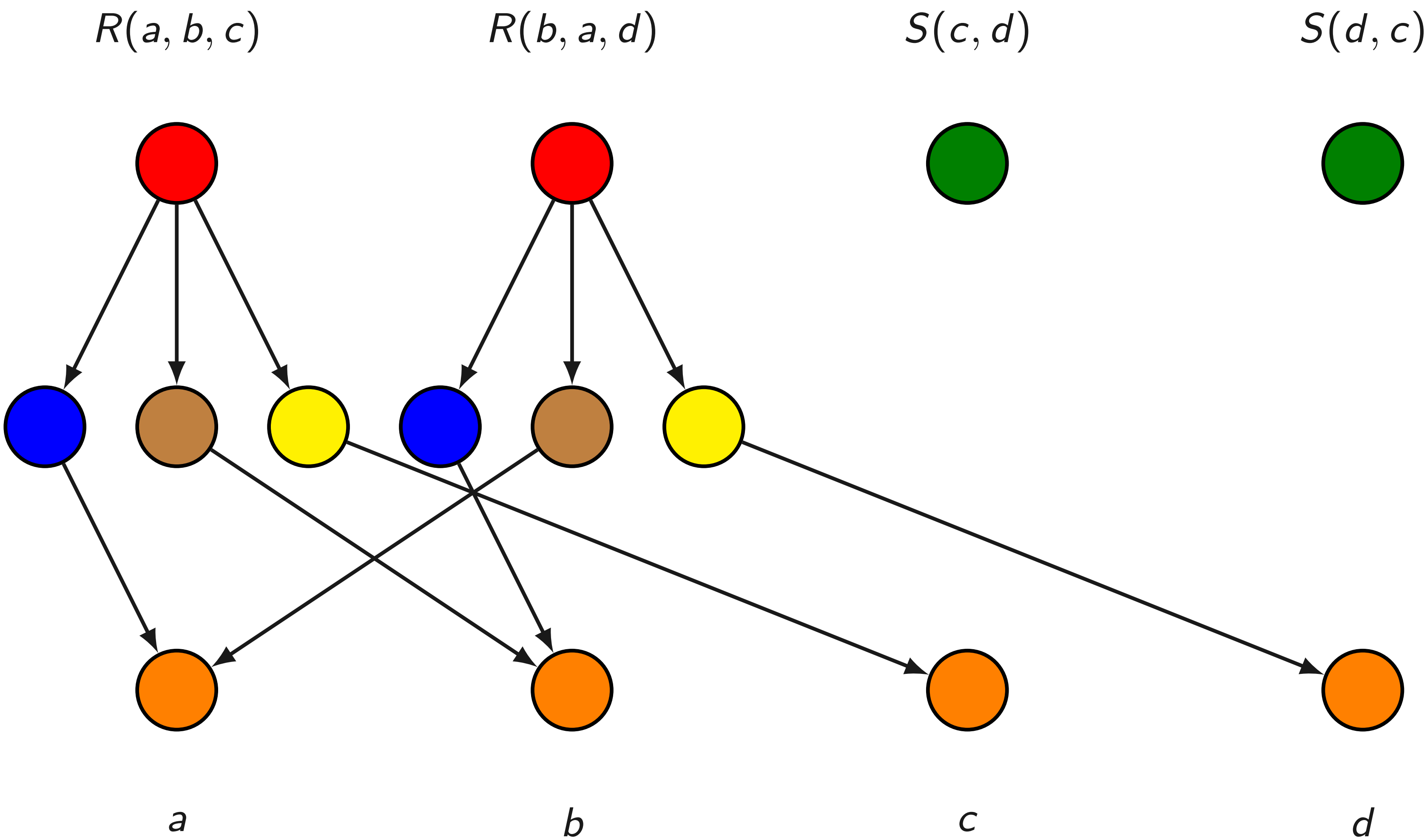
La construcción de G_I



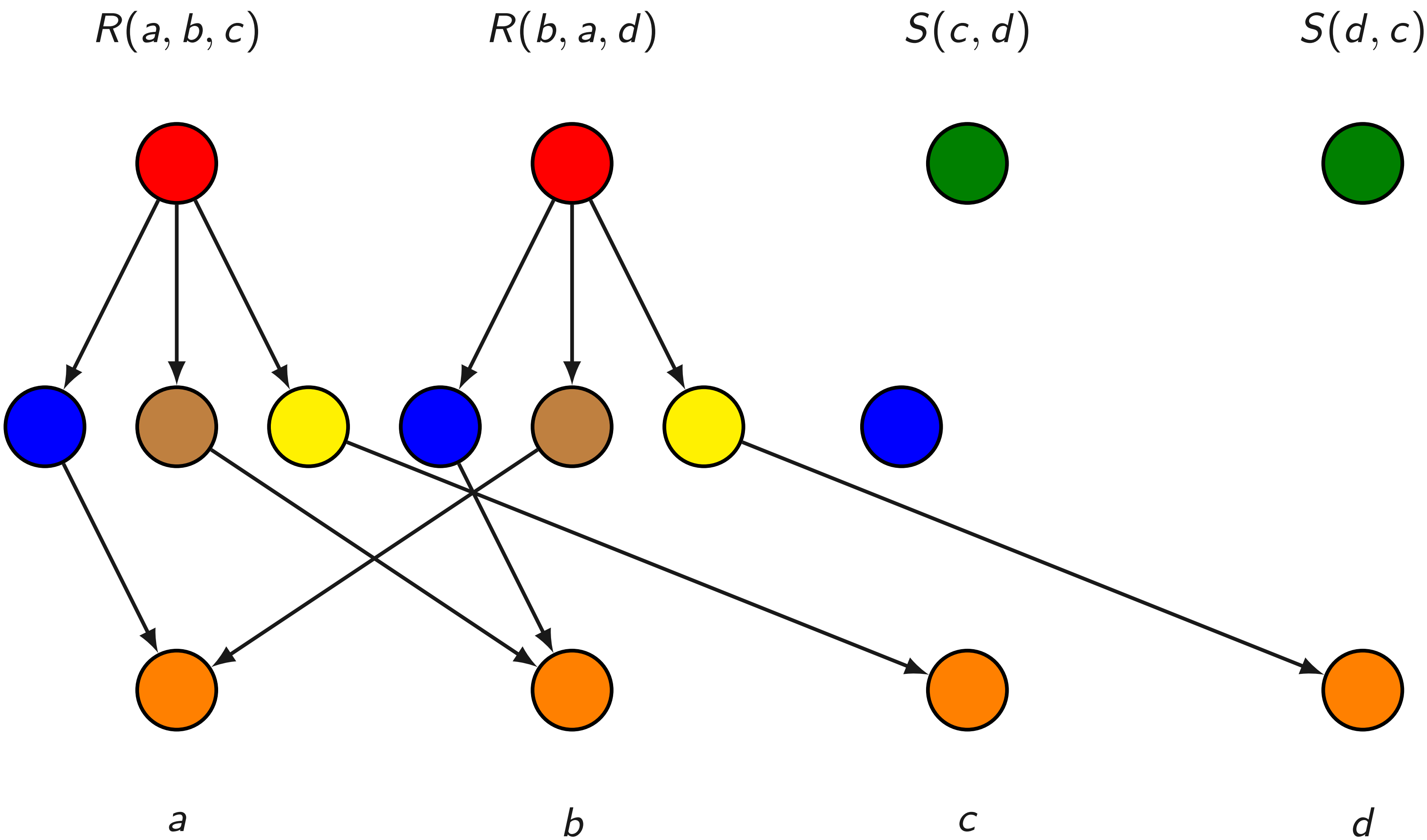
La construcción de G_I



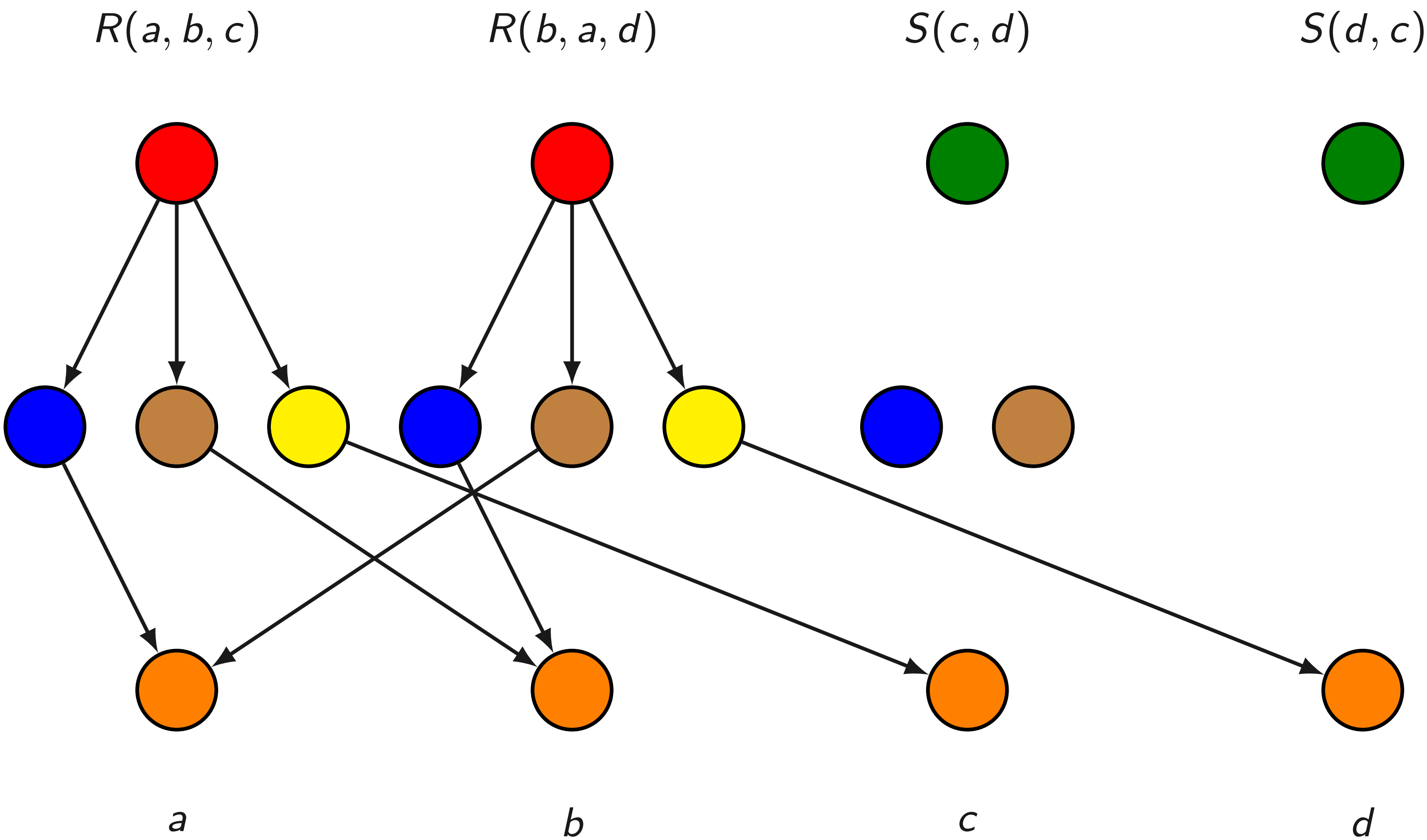
La construcción de G_I



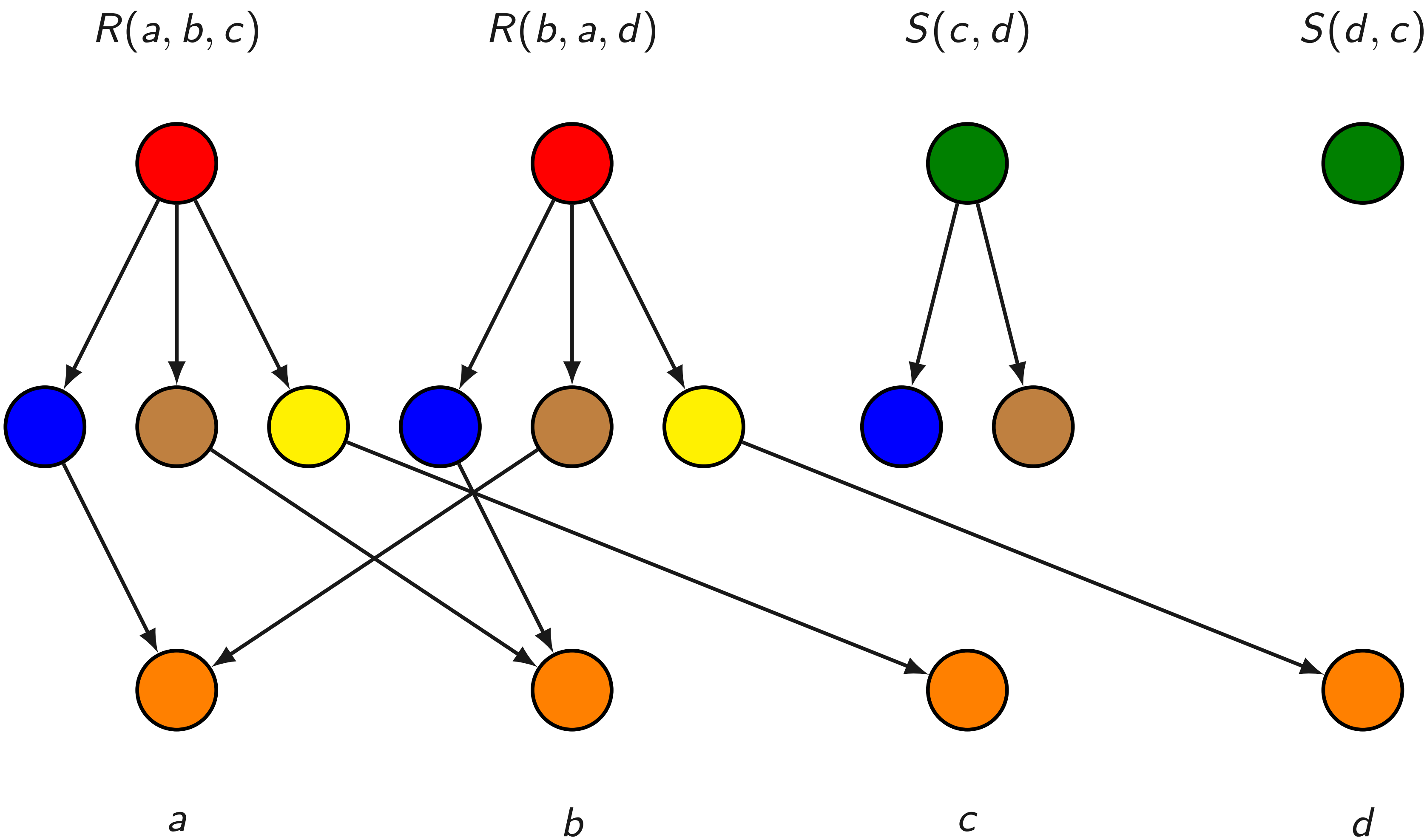
La construcción de G_I



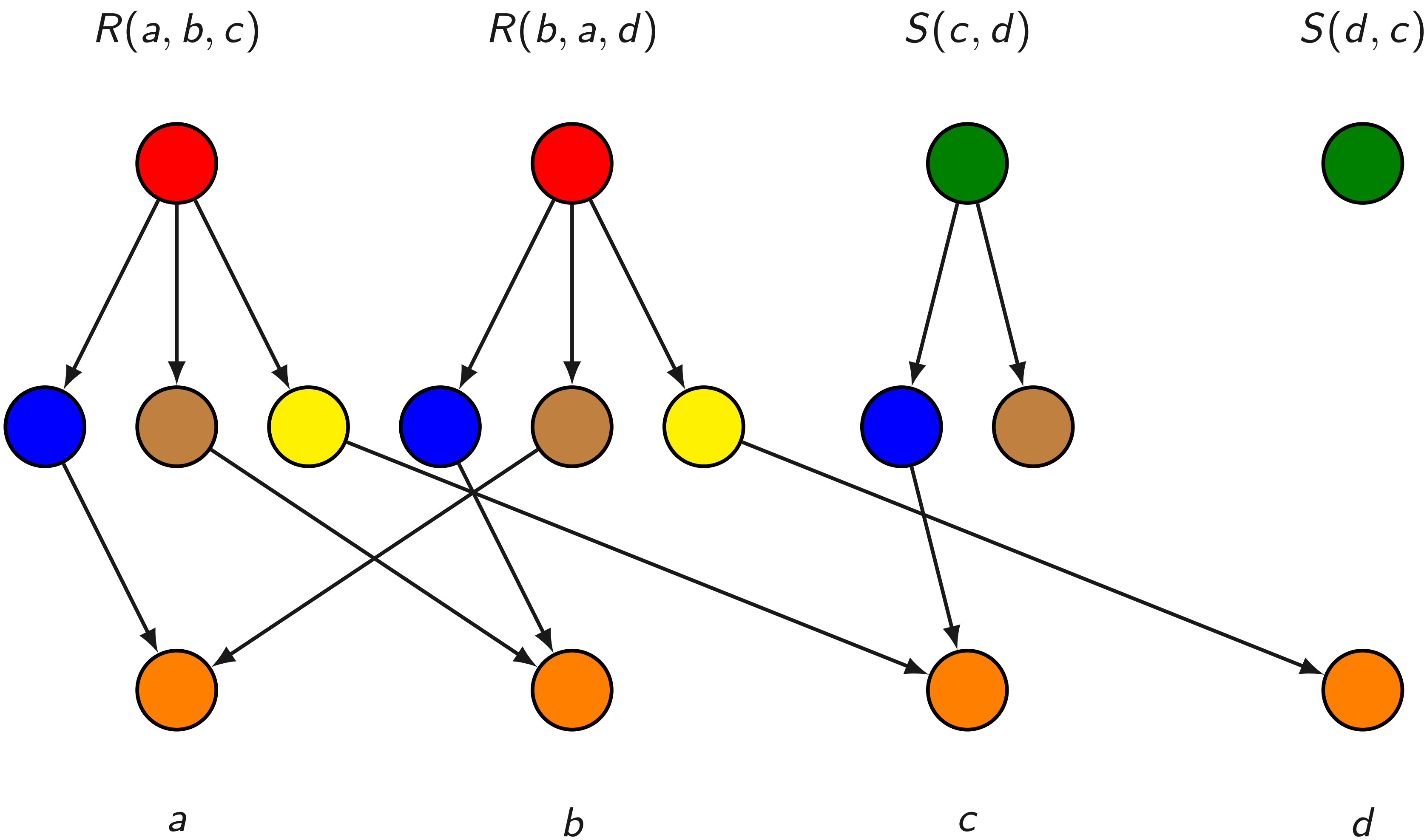
La construcción de G_I



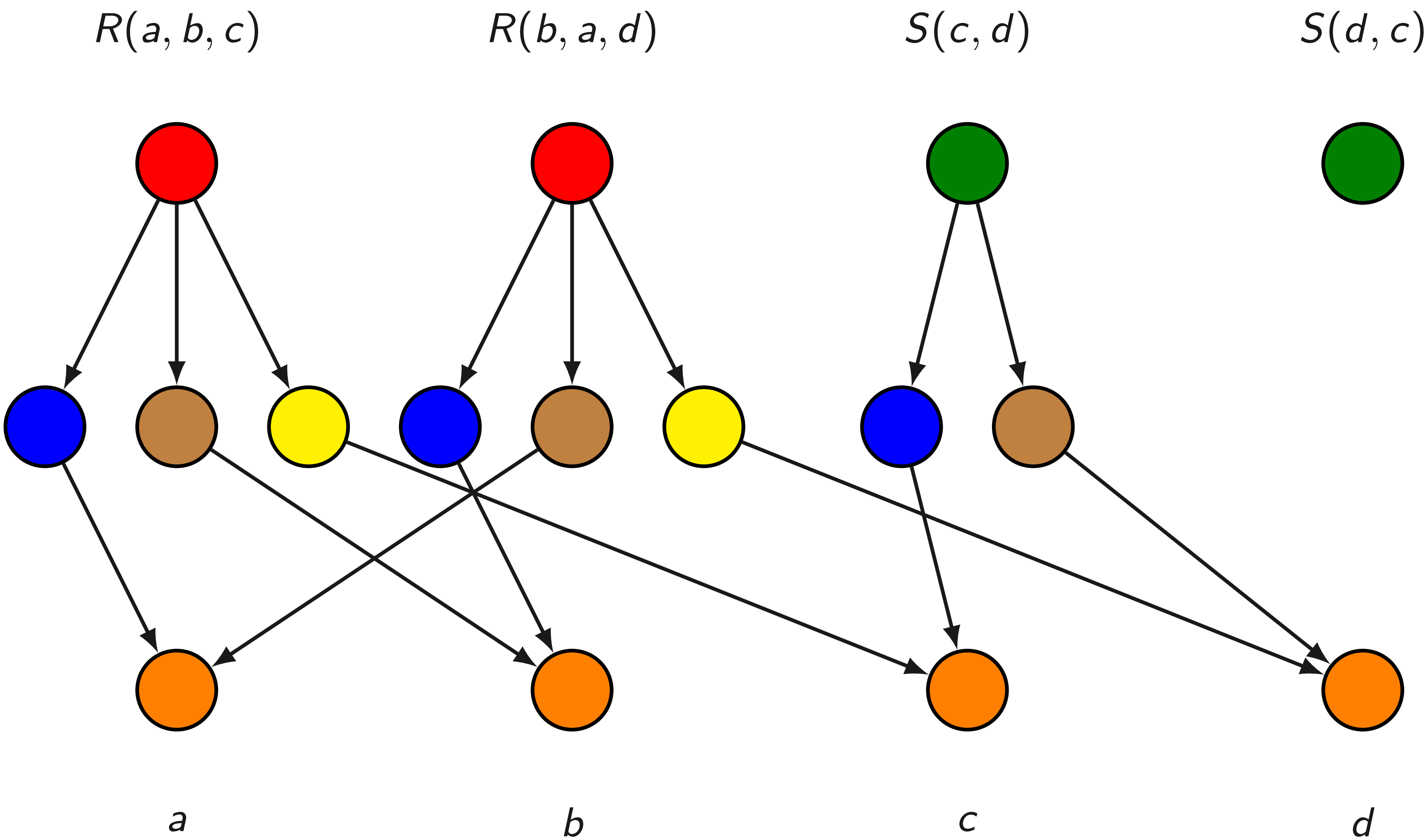
La construcción de G_I



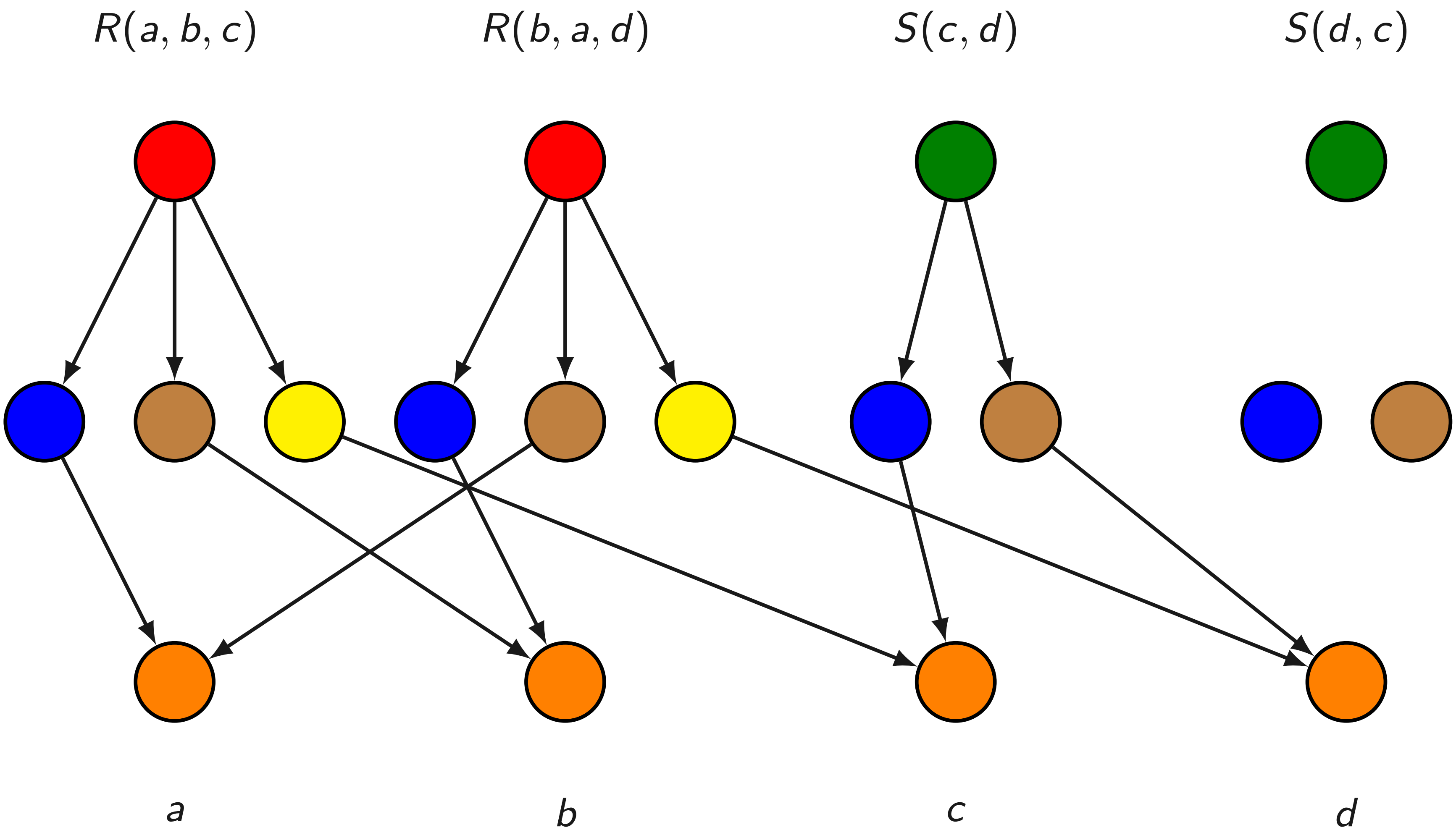
La construcción de G_I



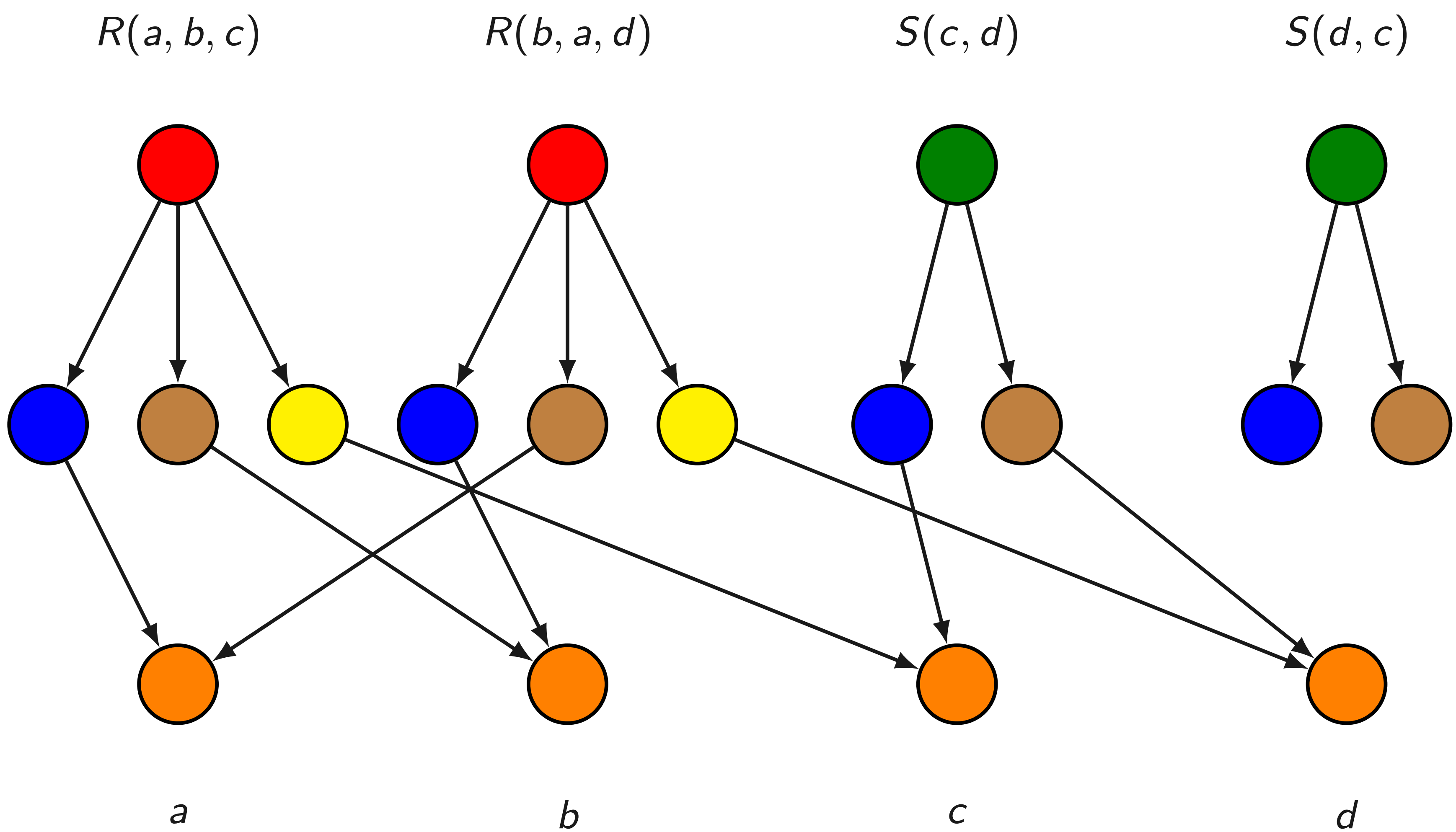
La construcción de G_I



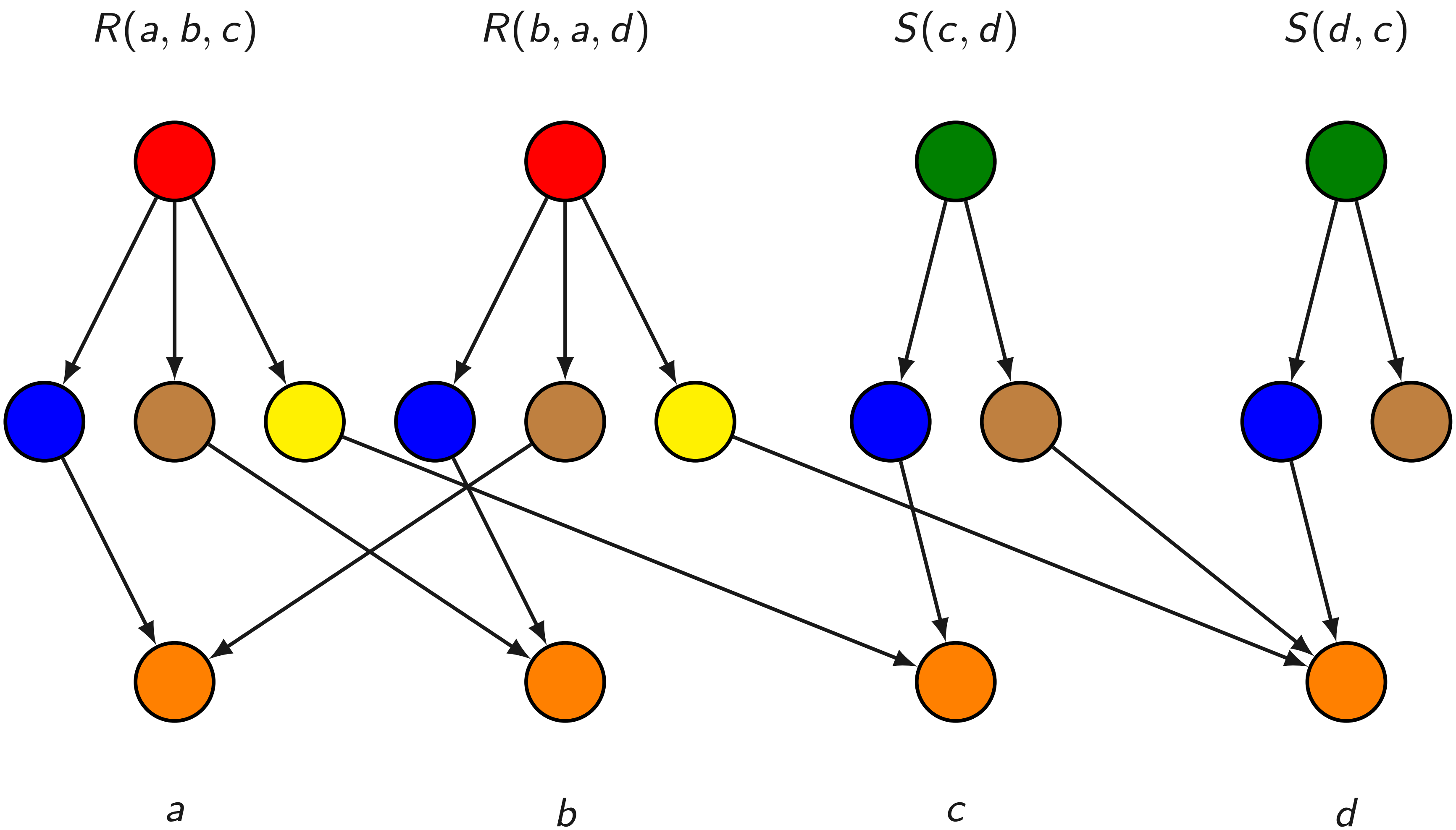
La construcción de G_I



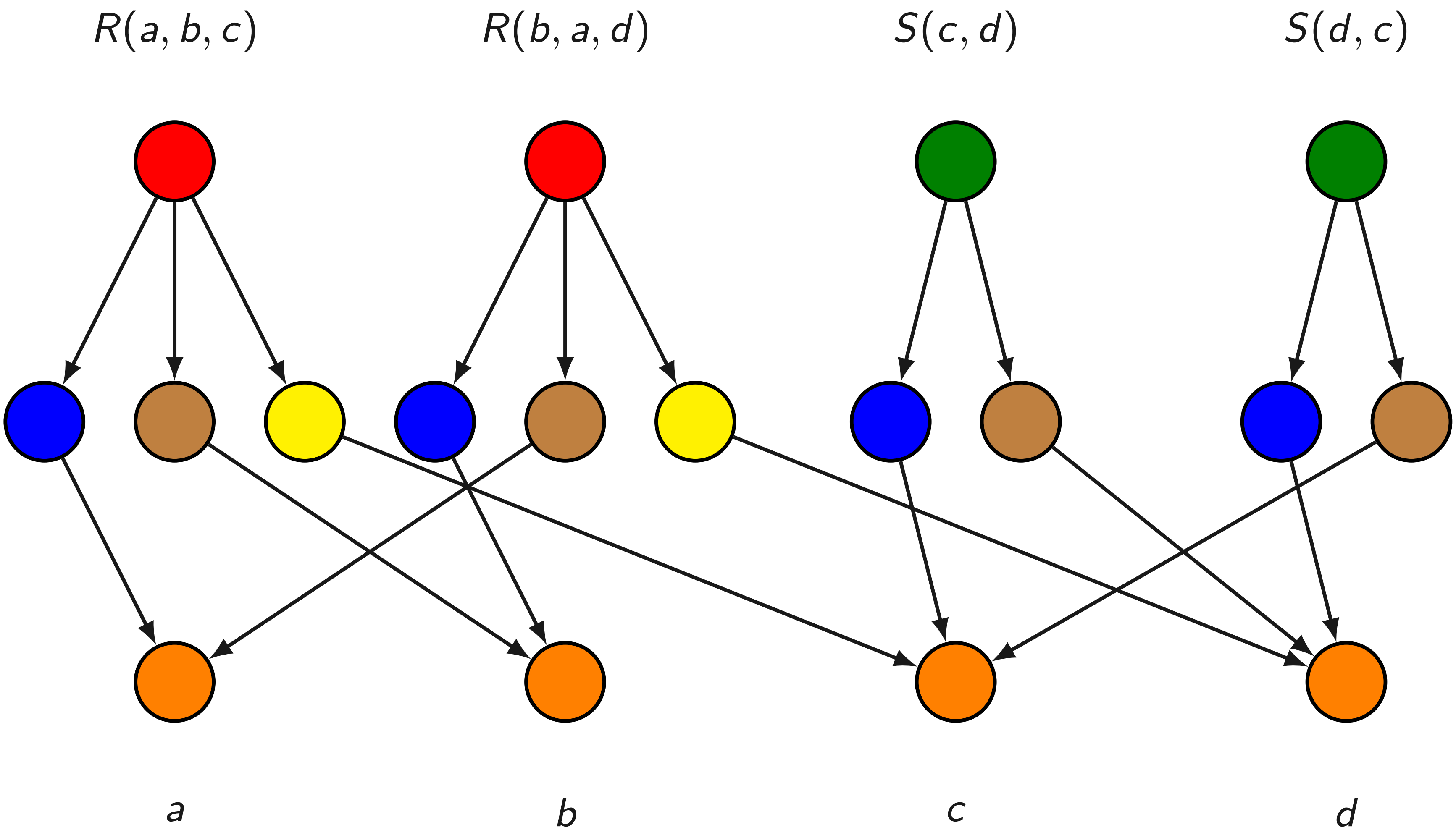
La construcción de G_I



La construcción de G_I



La construcción de G_I



El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

- ¿Cómo se hace esto?

El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

- ¿Cómo se hace esto?

Si la construcción se realiza sobre dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, entonces hay que ser consistente en el uso de los colores.

El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

- ¿Cómo se hace esto?

Si la construcción se realiza sobre dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, entonces hay que ser consistente en el uso de los colores.

- Los colores de las tuplas se asignan según la relación en el esquema relacional.

El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

- ¿Cómo se hace esto?

Si la construcción se realiza sobre dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, entonces hay que ser consistente en el uso de los colores.

- Los colores de las tuplas se asignan según la relación en el esquema relacional.
- La posición i en una relación siempre recibe el mismo color.

El termino de la demostración

Es claro cómo generalizar la construcción anterior para cualquier instancia I.

- ¿Cómo se hace esto?

Si la construcción se realiza sobre dos instancias I_1 e I_2 del mismo esquema relacional, entonces hay que ser consistente en el uso de los colores.

- Los colores de las tuplas se asignan según la relación en el esquema relacional.
- La posición i en una relación siempre recibe el mismo color.

Dejamos al lector demostrar que $(I_1, I_2) \in$ REL-ISO si y sólo si $(G_{I_1}, G_{I_2}) \in$ COL-GRAPH-ISO. $\square$

Definibilidad en lógica de predicados

Considere un esquema relacional $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ y una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados sobre este esquema.

- x_1, …, x_k son las variables libres de φ.

Definibilidad en lógica de predicados

Considere un esquema relacional $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ y una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados sobre este esquema.

- x_1, ..., x_k son las variables libres de φ.

Dada una instancia I de $\mathcal{L}$ con dominio D, la evaluación de φ sobre I se define como:

$$\varphi(I) \quad = \quad \{(a_1, \ldots, a_k) \in D^k \mid I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)\}$$

Definibilidad en lógica de predicados

Definibilidad en lógica de predicados

El problema de definibilidad en lógica de predicados se define de la siguiente forma:

Definibilidad en lógica de predicados

El problema de definibilidad en lógica de predicados se define de la siguiente forma:

$$\text{FO-DEF} = \{(I, S) \mid I \text{ es una instancia con dominio } D \text{ sobre}$$
$$\text{un esquema relacional } \mathcal{L},$$

Definibilidad en lógica de predicados

El problema de definibilidad en lógica de predicados se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{FO-DEF} = \{(I, S) \mid\ & I \text{ es una instancia con dominio } D \text{ sobre} \\ & \text{un esquema relacional } \mathcal{L}, S \subseteq D^k \text{ para } k \geq 1,\end{aligned}$$

Definibilidad en lógica de predicados

El problema de definibilidad en lógica de predicados se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{FO-DEF} = \{(I, S) \mid\ & I \text{ es una instancia con dominio } D \text{ sobre} \\ & \text{un esquema relacional } \mathcal{L}, S \subseteq D^k \text{ para } k \geq 1, \text{ y existe una} \\ & \text{fórmula } \varphi \text{ en lógica de predicados sobre } \mathcal{L} \text{ tal que } \varphi(I) = S\}\end{aligned}$$

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

SI

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

S

a	b

SI

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

SI

S

a	b

NO

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

SI

S

a	b

NO

S

a

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

SI

S

a	b

NO

S

a

NO

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R	
a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S
a
b

SI

S	
a	b

NO

S
a

NO

S	
a	a
b	b

Definibilidad en lógica de predicados

Ejemplo

Considere $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$ y la siguiente instancia I de $\mathcal{L}$:

R

a	b
b	a

¿Para cuál de los siguiente conjuntos S se tiene que $(I, S) \in$ FO-DEF?

S

a
b

SI

S

a	b

NO

S

a

NO

S

a	a
b	b

SI

La complejidad de FO-DEF

Teorema

FO-DEF es GI-completo.

La decidibilidad de FO-DEF

Dado un conjunto D, $S \subseteq D^k$ $(k \geq 1)$, y una función $f : D \to D$:

La decidibilidad de FO-DEF

Dado un conjunto D, $S \subseteq D^k$ ($k \geq 1$), y una función $f : D \to D$:

S es cerrado bajo f si para cada $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, se tiene que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Dado un conjunto D, $S \subseteq D^k$ ($k \geq 1$), y una función $f : D \to D$:

S es cerrado bajo f si para cada $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, se tiene que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

Lema

Sea I una instancia con dominio D y $S \subseteq D^k$ para $k \geq 1$. Entonces

La decidibilidad de FO-DEF

Dado un conjunto D, $S \subseteq D^k$ ($k \geq 1$), y una función $f : D \to D$:

S es cerrado bajo f si para cada $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, se tiene que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

Lema

Sea I una instancia con dominio D y $S \subseteq D^k$ para $k \geq 1$. Entonces

$$(I, S) \in \textit{FO-DEF}$$
$$\textit{si y sólo si}$$
$$\textit{para cada } f \in \mathit{Aut}(I), \textit{ se tiene que } S \textit{ es cerrado bajo } f.$$

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: $(\Rightarrow)$ Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

- Existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados tal que $\varphi(I) = S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

- Existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados tal que $\varphi(I) = S$.

Suponga que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ y $f \in \mathrm{Aut}(I)$.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

- Existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados tal que $\varphi(I) = S$.

Suponga que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ y $f \in \text{Aut}(I)$.

- Dado que $\varphi(I) = S$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

- Existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados tal que $\varphi(I) = S$.

Suponga que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ y $f \in \text{Aut}(I)$.

- Dado que $\varphi(I) = S$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

Dado que $f \in \text{Aut}(I)$ e $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$, conluimos que

$$I \quad \models \quad \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_k))$$

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que $(I, S) \in$ FO-DEF.

- Existe fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ en lógica de predicados tal que $\varphi(I) = S$.

Suponga que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$ y $f \in \text{Aut}(I)$.

- Dado que $\varphi(I) = S$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

Dado que $f \in \text{Aut}(I)$ e $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$, conluimos que

$$I \quad \models \quad \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_k))$$

Por lo tanto, concluimos que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$ dado que $\varphi(I) = S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Leftarrow$) Suponga que para cada $f \in \mathrm{Aut}(I)$, se tiene que S es cerrado bajo f.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Leftarrow$) Suponga que para cada $f \in \text{Aut}(I)$, se tiene que S es cerrado bajo f.

Dada una tupla $(a_1, \ldots, a_k) \in D^k$, defina una fórmula $\varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$ tal que para cada $(b_1, \ldots, b_k) \in D^k$:

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Leftarrow$) Suponga que para cada $f \in \mathrm{Aut}(I)$, se tiene que S es cerrado bajo f.

Dada una tupla $(a_1, \ldots, a_k) \in D^k$, defina una fórmula $\varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$ tal que para cada $(b_1, \ldots, b_k) \in D^k$:

$$I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(b_1, \ldots, b_k)$$
si y sólo si
existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que $f(a_i) = b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

La decidibilidad de FO-DEF

Demostración: ($\Leftarrow$) Suponga que para cada $f \in \text{Aut}(I)$, se tiene que S es cerrado bajo f.

Dada una tupla $(a_1, \ldots, a_k) \in D^k$, defina una fórmula $\varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$ tal que para cada $(b_1, \ldots, b_k) \in D^k$:

$$I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(b_1, \ldots, b_k)$$
$$\text{si y sólo si}$$
$$\text{existe } f \in \text{Aut}(I) \text{ tal que } f(a_i) = b_i \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

¿Cómo se define la fórmula $\varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$?

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1, \ldots, a_k) \in S} \varphi_{(a_1, \ldots, a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

Dado que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(a_1, \ldots, a_k)$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

Dado que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(a_1, \ldots, a_k)$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

- Se concluye que $S \subseteq \varphi(I)$.

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

Dado que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(a_1, \ldots, a_k)$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

- Se concluye que $S \subseteq \varphi(I)$.

Suponga que $I \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$.

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

Dado que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(a_1, \ldots, a_k)$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

- Se concluye que $S \subseteq \varphi(I)$.

Suponga que $I \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$.

- Tenemos que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(b_1, \ldots, b_k)$ para algún $(a_1, \ldots, a_k) \in S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Defina la siguiente fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) \quad = \quad \bigvee_{(a_1,\ldots,a_k)\in S} \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(x_1, \ldots, x_k)$$

Vamos a demostrar que $\varphi(I) = S$.

Dado que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(a_1, \ldots, a_k)$, tenemos que $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.

- Se concluye que $S \subseteq \varphi(I)$.

Suponga que $I \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$.

- Tenemos que $I \models \varphi_{(a_1,\ldots,a_k)}(b_1, \ldots, b_k)$ para algún $(a_1, \ldots, a_k) \in S$.
- Por lo tanto, existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que $f(a_i) = b_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

La decidibilidad de FO-DEF

Como $f \in \mathrm{Aut}(I)$, sabemos que S es cerrado bajo f.

La decidibilidad de FO-DEF

Como $f \in \text{Aut}(I)$, sabemos que S es cerrado bajo f.

Dado que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, tenemos que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Como $f \in \mathrm{Aut}(I)$, sabemos que S es cerrado bajo f.

Dado que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, tenemos que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

- Concluimos que $(b_1, \ldots, b_k) \in S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Como $f \in \text{Aut}(I)$, sabemos que S es cerrado bajo f.

Dado que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, tenemos que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

- Concluimos que $(b_1, \ldots, b_k) \in S$.

Concluimos que $\varphi(I) \subseteq S$.

La decidibilidad de FO-DEF

Como $f \in \text{Aut}(I)$, sabemos que S es cerrado bajo f.

Dado que $(a_1, \ldots, a_k) \in S$, tenemos que $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in S$.

- Concluimos que $(b_1, \ldots, b_k) \in S$.

Concluimos que $\varphi(I) \subseteq S$.

- Por lo tanto, $\varphi(I) = S$, de lo cual concluimos que $(I, S) \in$ FO-DEF. $\square$

FO-DEF es GI-hard

Vamos a demostrar que AUT-1-AFP $\in \mathrm{P}^{\text{FO-DEF}}$.

FO-DEF es GI-hard

Vamos a demostrar que AUT-1-AFP $\in$ $\mathsf{P}^{\text{FO-DEF}}$.

- De esto se concluye que FO-DEF es GI-hard.

FO-DEF es GI-hard

Vamos a demostrar que AUT-1-AFP $\in \mathrm{P}^{\text{FO-DEF}}$.

- De esto se concluye que FO-DEF es GI-hard.

Sea $G = (N, E)$ y $u \in N$.

- Tenemos que $(G, u) \in$ AUT-1-AFP si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $f(u) \neq u$.

FO-DEF es GI-hard

Sea I una instancia del esquema relacional $\{R(\cdot,\cdot)\}$ tal que $R^I = E$.

FO-DEF es GI-hard

Sea I una instancia del esquema relacional $\{R(\cdot, \cdot)\}$ tal que $R^I = E$.

Sea $S = \{u\}$.

FO-DEF es GI-hard

Sea I una instancia del esquema relacional $\{R(\cdot,\cdot)\}$ tal que $R^I = E$.

Sea $S = \{u\}$.

Tenemos que $(G, u) \in$ AUT-1-AFP si y sólo si $(I, S) \notin$ FO-DEF.

FO-DEF es GI-hard

Sea I una instancia del esquema relacional $\{R(\cdot, \cdot)\}$ tal que $R^I = E$.

Sea $S = \{u\}$.

Tenemos que $(G, u) \in$ AUT-1-AFP si y sólo si $(I, S) \notin$ FO-DEF.

- Concluimos que AUT-1-AFP $\in \mathrm{P}^{\text{FO-DEF}}$. $\square$