Isomorfismo de grafos

IIC3810

El problema de isomorfismo de grafos

El problema GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos G_1 y G_2, y la pregunta a responder es si los grafos son isomorfos.

El problema de isomorfismo de grafos

El problema GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos G_1 y G_2, y la pregunta a responder es si los grafos son isomorfos.

Llamamos COMP-GRAPH-ISO a la versión de computación del problema anterior.

El problema de isomorfismo de grafos

El problema GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos G_1 y G_2, y la pregunta a responder es si los grafos son isomorfos.

Llamamos COMP-GRAPH-ISO a la versión de computación del problema anterior.

- En este caso la entrada son dos grafos G_1 y G_2, y el problema es retornar un isomorfismo de G_1 a G_2.

El problema de isomorfismo de grafos

El problema GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos G_1 y G_2, y la pregunta a responder es si los grafos son isomorfos.

Llamamos COMP-GRAPH-ISO a la versión de computación del problema anterior.

- En este caso la entrada son dos grafos G_1 y G_2, y el problema es retornar un isomorfismo de G_1 a G_2.
- Si los grafos no son isomorfos entonces se debe retornar **no**.

El problema de isomorfismo de grafos

Dados dos grafos G_1 y G_2, definimos $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2)$ como el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

El problema de isomorfismo de grafos

Dados dos grafos G_1 y G_2, definimos $\#$GRAPH-ISO(G_1, G_2) como el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

- En este problema estamos contando el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

El problema de isomorfismo de grafos

Dados dos grafos G_1 y G_2, definimos $\#$GRAPH-ISO(G_1, G_2) como el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

- En este problema estamos contando el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

Queremos demostrar que los problemas de verificación, computación y conteo son polinomialmente equivalentes.

El problema de isomorfismo de grafos

Dados dos grafos G_1 y G_2, definimos $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2)$ como el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

- En este problema estamos contando el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

Queremos demostrar que los problemas de verificación, computación y conteo son polinomialmente equivalentes.

Esta forma de equivalencia es muy distinta a lo que conocemos para otros problemas *difíciles*.

El problema de isomorfismo de grafos

Dados dos grafos G_1 y G_2, definimos $\#$GRAPH-ISO(G_1, G_2) como el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

- En este problema estamos contando el número de isomorfismos de G_1 en G_2.

Queremos demostrar que los problemas de verificación, computación y conteo son polinomialmente equivalentes.

Esta forma de equivalencia es muy distinta a lo que conocemos para otros problemas *difíciles*.

- Por ejemplo, no tenemos este tipo de equivalencia para ningún problema NP-completo.

Los grafos coloreados

Una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre GRAPH-ISO y COMP-GRAPH-ISO son los grafos coloreados.

Los grafos coloreados

Una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre GRAPH-ISO y COMP-GRAPH-ISO son los grafos coloreados.

- Y también es una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre entre GRAPH-ISO y #GRAPH-ISO.

Los grafos coloreados

Una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre GRAPH-ISO y COMP-GRAPH-ISO son los grafos coloreados.

- Y también es una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre entre GRAPH-ISO y #GRAPH-ISO.

Un grafo coloreado es una tupla $G = (N, E, C)$ tal que:

Los grafos coloreados

Una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre GRAPH-ISO y COMP-GRAPH-ISO son los grafos coloreados.

- Y también es una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre entre GRAPH-ISO y #GRAPH-ISO.

Un grafo coloreado es una tupla $G = (N, E, C)$ tal que:

- (N, E) es un grafo.

Los grafos coloreados

Una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre GRAPH-ISO y COMP-GRAPH-ISO son los grafos coloreados.

- Y también es una herramienta fundamental para demostrar la equivalencia entre entre GRAPH-ISO y $\#$GRAPH-ISO.

Un grafo coloreado es una tupla $G = (N, E, C)$ tal que:

- (N, E) es un grafo.
- C es una función parcial de N a $\{1, \ldots, |N|\}$.

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

- f es una biyección de N_1 a N_2

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

- f es una biyección de N_1 a N_2
- $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$, para cada $(u, v) \in N_1 \times N_1$

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

- f es una biyección de N_1 a N_2
- $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$, para cada $(u, v) \in N_1 \times N_1$
- $C_1(u)$ está definido si y sólo si $C_2(f(u))$ está definido, para cada $u \in N_1$

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

- f es una biyección de N_1 a N_2
- $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$, para cada $(u, v) \in N_1 \times N_1$
- $C_1(u)$ está definido si y sólo si $C_2(f(u))$ está definido, para cada $u \in N_1$
- Si $C_1(u)$ está definido, entonces $C_1(u) = C_2(f(u))$, para cada $u \in N_1$

Los grafos coloreados

Un isomorfismo entre grafos coloreados tiene que respetar la coloración.

Dados dos grafos coloreados $G_1 = (N_1, E_1, C_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2, C_2)$, una función $f : N_1 \to N_2$ es un isomorfismo de G_1 en G_2 si:

- f es una biyección de N_1 a N_2
- $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$, para cada $(u, v) \in N_1 \times N_1$
- $C_1(u)$ está definido si y sólo si $C_2(f(u))$ está definido, para cada $u \in N_1$
- Si $C_1(u)$ está definido, entonces $C_1(u) = C_2(f(u))$, para cada $u \in N_1$

Un automorfismo para un grafo coloreado G es un isomorfismo de G en G.

Los grafos coloreados

El problema COL-GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos coloreados G_1 y G_2, y la pregunta responder es si los grafos son isomorfos.

Los grafos coloreados

El problema COL-GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos coloreados G_1 y G_2, y la pregunta responder es si los grafos son isomorfos.

Lema

$\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in P^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

Los grafos coloreados

El problema COL-GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos coloreados G_1 y G_2, y la pregunta responder es si los grafos son isomorfos.

Lema

$\textit{COL-GRAPH-ISO} \in P^{\textit{GRAPH-ISO}}$

Ejercicio

Demuestre el lema.

La equivalencia entre verificar y computar

Sea FP la clase de las funciones que pueden ser calculadas en tiempo polinomial.

La equivalencia entre verificar y computar

Sea FP la clase de las funciones que pueden ser calculadas en tiempo polinomial.

Lema

$\mathit{COMP\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$

La equivalencia entre verificar y computar

Sea FP la clase de las funciones que pueden ser calculadas en tiempo polinomial.

Lema

$\mathit{COMP\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$

Corolario

$\mathit{COMP\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

La equivalencia entre verificar y computar

Sea FP la clase de las funciones que pueden ser calculadas en tiempo polinomial.

Lema

$\mathit{COMP\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$

Corolario

$\mathit{COMP\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

Ejercicio

Demuestre el lema y el corolario.

La equivalencia entre verificar y contar

Ahora queremos demostrar que la verificación y el conteo son equivalentes.

La equivalencia entre verificar y contar

Ahora queremos demostrar que la verificación y el conteo son equivalentes.

- Necesitamos definir un problema intermedio para probar esta equivalencia.

La equivalencia entre verificar y contar

Ahora queremos demostrar que la verificación y el conteo son equivalentes.

- Necesitamos definir un problema intermedio para probar esta equivalencia.

Dado un grafo G, defina $\#\text{GRAPH-AUT}(G) = |\text{Aut}(G)|$.

La equivalencia entre verificar y contar

Ahora queremos demostrar que la verificación y el conteo son equivalentes.

- Necesitamos definir un problema intermedio para probar esta equivalencia.

Dado un grafo G, defina $\#\text{GRAPH-AUT}(G) = |\text{Aut}(G)|$.

Lema

$\#\textit{GRAPH-ISO} \in \textit{FP}^{\#\textit{GRAPH-AUT}}$

La demostración del primer lema

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos.

La demostración del primer lema

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos.

- Vamos a mostrar como calcular #GRAPH-ISO(G_1, G_2) en tiempo polinomial usando #GRAPH-AUT como oráculo.

La demostración del primer lema

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos.

- Vamos a mostrar como calcular #GRAPH-ISO(G_1, G_2) en tiempo polinomial usando #GRAPH-AUT como oráculo.

Si G_1 y G_2 tienen distintos números de nodos, entonces #GRAPH-ISO$(G_1, G_2) = 0$

La demostración del primer lema

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos.

- Vamos a mostrar como calcular $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2)$ en tiempo polinomial usando #GRAPH-AUT como oráculo.

Si G_1 y G_2 tienen distintos números de nodos, entonces $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = 0$

- Podemos verificar esta condición en tiempo polinomial.

La demostración del primer lema

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos.

- Vamos a mostrar como calcular $\#$GRAPH-ISO(G_1, G_2) en tiempo polinomial usando $\#$GRAPH-AUT como oráculo.

Si G_1 y G_2 tienen distintos números de nodos, entonces $\#$GRAPH-ISO$(G_1, G_2) = 0$

- Podemos verificar esta condición en tiempo polinomial.

Suponemos entonces que $|N_1| = |N_2| = n$

La demostración del primer lema

Sea $H_i = (N'_i, E'_i)$ un grafo definido a partir de G_i de la siguiente forma, para cada $i \in \{1, 2\}$.

La demostración del primer lema

Sea $H_i = (N_i', E_i')$ un grafo definido a partir de G_i de la siguiente forma, para cada $i \in \{1, 2\}$.

El conjunto de nodos N_i' se define como:

$$N_i' \quad = \quad N_i \cup \{u_{i,0}, u_{i,1}, \ldots, u_{i,n}\}$$

La demostración del primer lema

Sea $H_i = (N_i', E_i')$ un grafo definido a partir de G_i de la siguiente forma, para cada $i \in \{1, 2\}$.

El conjunto de nodos N_i' se define como:

$$N_i' \quad = \quad N_i \cup \{u_{i,0}, u_{i,1}, \ldots, u_{i,n}\}$$

El conjunto de arcos E_i' se define como:

$$E_i' \;=\; E_i \cup \{(u_{i,0}, v) \mid v \in N_i\} \cup \{(u_{i,j}, u_{i,j-1}) \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

La demostración del primer lema

Defina $H = H_1 \uplus H_2$

- Vale decir, H es la unión disjunta de H_1 con H_2.

La demostración del primer lema

Defina $H = H_1 \uplus H_2$

- Vale decir, H es la unión disjunta de H_1 con H_2.

Tenemos que:

La demostración del primer lema

Defina $H = H_1 \uplus H_2$

- Vale decir, H es la unión disjunta de H_1 con H_2.

Tenemos que:

- $|\mathrm{Aut}(H_i)| = |\mathrm{Aut}(G_i)|$ para $i \in \{1, 2\}$.

La demostración del primer lema

Defina $H = H_1 \uplus H_2$

- Vale decir, H es la unión disjunta de H_1 con H_2.

Tenemos que:

- $|\mathrm{Aut}(H_i)| = |\mathrm{Aut}(G_i)|$ para $i \in \{1, 2\}$.
- Si G_1 es isomorfo a G_2, entonces $|\mathrm{Aut}(H)| > |\mathrm{Aut}(H_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(H_2)| = |\mathrm{Aut}(G_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(G_2)|$.

La demostración del primer lema

Defina $H = H_1 \uplus H_2$

- Vale decir, H es la unión disjunta de H_1 con H_2.

Tenemos que:

- $|\mathrm{Aut}(H_i)| = |\mathrm{Aut}(G_i)|$ para $i \in \{1, 2\}$.
- Si G_1 es isomorfo a G_2, entonces $|\mathrm{Aut}(H)| > |\mathrm{Aut}(H_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(H_2)| = |\mathrm{Aut}(G_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(G_2)|$.
- Si G_1 no es isomorfo a G_2, entonces $|\mathrm{Aut}(H)| = |\mathrm{Aut}(H_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(H_2)| = |\mathrm{Aut}(G_1)| \cdot |\mathrm{Aut}(G_2)|$.

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#$GRAPH-AUT(G_1), $\#$GRAPH-AUT(G_2) y $\#$GRAPH-AUT(H):

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$, $\#\text{GRAPH-AUT}(G_2)$ y $\#\text{GRAPH-AUT}(H)$:

G_1 es isomorfo a G_2 si y sólo si
$$\#\text{GRAPH-AUT}(H) > \#\text{GRAPH-AUT}(G_1) \cdot \#\text{GRAPH-AUT}(G_2).$$

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$, $\#\text{GRAPH-AUT}(G_2)$ y $\#\text{GRAPH-AUT}(H)$:

G_1 es isomorfo a G_2 si y sólo si
$$\#\text{GRAPH-AUT}(H) > \#\text{GRAPH-AUT}(G_1) \cdot \#\text{GRAPH-AUT}(G_2).$$

Si el test falla, entonces sabemos que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = 0$.

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$, $\#\text{GRAPH-AUT}(G_2)$ y $\#\text{GRAPH-AUT}(H)$:

G_1 es isomorfo a G_2 si y sólo si

$$\#\text{GRAPH-AUT}(H) > \#\text{GRAPH-AUT}(G_1) \cdot \#\text{GRAPH-AUT}(G_2).$$

Si el test falla, entonces sabemos que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = 0$.

- Suponemos entonces que G_1 es isomorfo a G_2.

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$, $\#\text{GRAPH-AUT}(G_2)$ y $\#\text{GRAPH-AUT}(H)$:

G_1 es isomorfo a G_2 si y sólo si
$$\#\text{GRAPH-AUT}(H) > \#\text{GRAPH-AUT}(G_1) \cdot \#\text{GRAPH-AUT}(G_2).$$

Si el test falla, entonces sabemos que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = 0$.

- Suponemos entonces que G_1 es isomorfo a G_2.

Vamos a demostrar que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = \#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$ bajo este supuesto.

La demostración del primer lema

Podemos entonces decidir si G_1 es isomorfo a G_2 calculando $\#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$, $\#\text{GRAPH-AUT}(G_2)$ y $\#\text{GRAPH-AUT}(H)$:

$$G_1 \text{ es isomorfo a } G_2 \text{ si y sólo si}$$
$$\#\text{GRAPH-AUT}(H) > \#\text{GRAPH-AUT}(G_1) \cdot \#\text{GRAPH-AUT}(G_2).$$

Si el test falla, entonces sabemos que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = 0$.

- Suponemos entonces que G_1 es isomorfo a G_2.

Vamos a demostrar que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = \#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$ bajo este supuesto.

- Lo cual concluye la demostración de que $\#\text{GRAPH-ISO} \in \text{FP}^{\#\text{GRAPH-AUT}}$.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

- Para todo $g \in \mathrm{Aut}(G_1)$, la función $(f \circ g)$ es un isomorfismo de G_1 en G_2.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

- Para todo $g \in \mathrm{Aut}(G_1)$, la función $(f \circ g)$ es un isomorfismo de G_1 en G_2.
- Para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_1)$, si $(f \circ g_1) = (f \circ g_2)$, entonces $g_1 = g_2$.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

- Para todo $g \in \mathrm{Aut}(G_1)$, la función $(f \circ g)$ es un isomorfismo de G_1 en G_2.
- Para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_1)$, si $(f \circ g_1) = (f \circ g_2)$, entonces $g_1 = g_2$.
- Para todo isomorfismo f_1 de G_1 en G_2, existe $g \in \mathrm{Aut}(G_1)$ tal que $f_1 = (f \circ g)$.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

- Para todo $g \in \text{Aut}(G_1)$, la función $(f \circ g)$ es un isomorfismo de G_1 en G_2.
- Para todo $g_1, g_2 \in \text{Aut}(G_1)$, si $(f \circ g_1) = (f \circ g_2)$, entonces $g_1 = g_2$.
- Para todo isomorfismo f_1 de G_1 en G_2, existe $g \in \text{Aut}(G_1)$ tal que $f_1 = (f \circ g)$.
  - Esto se cumple para $g = f^{-1} \circ f_1$.

La demostración del primer lema

Sea f un isomorfismo de G_1 en G_2.

Tenemos que:

- Para todo $g \in \text{Aut}(G_1)$, la función $(f \circ g)$ es un isomorfismo de G_1 en G_2.
- Para todo $g_1, g_2 \in \text{Aut}(G_1)$, si $(f \circ g_1) = (f \circ g_2)$, entonces $g_1 = g_2$.
- Para todo isomorfismo f_1 de G_1 en G_2, existe $g \in \text{Aut}(G_1)$ tal que $f_1 = (f \circ g)$.
  - Esto se cumple para $g = f^{-1} \circ f_1$.

Concluimos que $\#\text{GRAPH-ISO}(G_1, G_2) = \#\text{GRAPH-AUT}(G_1)$. $\square$

Conteo de automorfismos y verificación

Lema

$\#\mathit{GRAPH\text{-}AUT} \in \mathit{FP}^{\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$

Conteo de automorfismos y verificación

Lema

$\#\mathit{GRAPH\text{-}AUT} \in \mathit{FP}^{\mathit{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$

Demostración: considere un grafo $G = (N, E)$ tal que $N = \{1, \ldots, n\}$.

Conteo de automorfismos y verificación

Lema

$\#GRAPH\text{-}AUT \in FP^{COL\text{-}GRAPH\text{-}ISO}$

Demostración: considere un grafo $G = (N, E)$ tal que $N = \{1, \ldots, n\}$.

Vamos a mostrar como calcular #GRAPH-AUT(G) en tiempo polinomial usando un oráculo para COL-GRAPH-ISO.

Conteo de automorfismos y verificación

Dado $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sea $G_k = (N, E, C_k)$ un grafo coloreado tal que:

- $C_k(i) = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Conteo de automorfismos y verificación

Dado $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sea $G_k = (N, E, C_k)$ un grafo coloreado tal que:

- $C_k(i) = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

En particular, tenemos que C_0 no está definida para ningún elemento de N.

Conteo de automorfismos y verificación

Dado $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sea $G_k = (N, E, C_k)$ un grafo coloreado tal que:

- $C_k(i) = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

En particular, tenemos que C_0 no está definida para ningún elemento de N.

- Tenemos que $|\mathrm{Aut}(G_0)| = |\mathrm{Aut}(G)|$.

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$.

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos a demostrar que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$, donde

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos a demostrar que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$, donde

$$I_k = \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Para cada $i \in N$, sea $f_i \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ tal que $f_i(k) = i$.

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$.

Vamos a demostrar que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$, donde

$$I_k \ = \ \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Para cada $i \in N$, sea $f_i \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ tal que $f_i(k) = i$.

Sea $\mathcal{T} : \{f_i \mid i \in N\} \times \mathrm{Aut}(G_k) \to \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ definida como $\mathcal{T}(f_i, g) = f_i \circ g$.

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos a demostrar que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$, donde

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Para cada $i \in N$, sea $f_i \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ tal que $f_i(k) = i$.

Sea $\mathcal{T} : \{f_i \mid i \in N\} \times \mathrm{Aut}(G_k) \to \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ definida como $\mathcal{T}(f_i, g) = f_i \circ g$.

- Vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ es una biyección.

La demostración del segundo lema

Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos a demostrar que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$, donde

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Para cada $i \in N$, sea $f_i \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ tal que $f_i(k) = i$.

Sea $\mathcal{T} : \{f_i \mid i \in N\} \times \mathrm{Aut}(G_k) \to \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ definida como $\mathcal{T}(f_i, g) = f_i \circ g$.

- Vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ es una biyección.
- Como $|\{f_i \mid i \in N\}| = |I_k|$, concluimos que $|\mathrm{Aut}(G_{k-1})| = |I_k| \cdot |\mathrm{Aut}(G_k)|$

La demostración del segundo lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

La demostración del segundo lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

Sea $i \in N$ y $g \in \mathrm{Aut}(G_k)$.

La demostración del segundo lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

Sea $i \in N$ y $g \in \mathrm{Aut}(G_k)$.

Tenemos que $(f_i \circ g) \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ puesto que:

La demostración del segundo lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

Sea $i \in N$ y $g \in \mathrm{Aut}(G_k)$.

Tenemos que $(f_i \circ g) \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ puesto que:

- $(f_i \circ g) : N \to N$ es una biyección.

La demostración del segundo lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

Sea $i \in N$ y $g \in \mathrm{Aut}(G_k)$.

Tenemos que $(f_i \circ g) \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$ puesto que:

- $(f_i \circ g) : N \to N$ es una biyección.
- $(f_i \circ g)(G_{k-1}) = f_i(g(G_{k-1})) = f_i(G_{k-1}) = G_{k-1}$.

La demostración del segundo lema

En segundo lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es 1-1.

La demostración del segundo lema

En segundo lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es 1-1.

Sean $i, j \in N$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_k)$ tal que $(f_i, g_1) \neq (f_j, g_2)$.

La demostración del segundo lema

En segundo lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es 1-1.

Sean $i, j \in N$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_k)$ tal que $(f_i, g_1) \neq (f_j, g_2)$.

- Tenemos que demostrar que $\mathcal{T}(f_i, g_1) \neq \mathcal{T}(f_j, g_2)$.

La demostración del segundo lema

En segundo lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es 1-1.

Sean $i, j \in N$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_k)$ tal que $(f_i, g_1) \neq (f_j, g_2)$.

- Tenemos que demostrar que $\mathcal{T}(f_i, g_1) \neq \mathcal{T}(f_j, g_2)$.

Como primer caso suponemos que $f_i \neq f_j$, lo cual significa que $i \neq j$.

La demostración del segundo lema

En segundo lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es 1-1.

Sean $i, j \in N$ y $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(G_k)$ tal que $(f_i, g_1) \neq (f_j, g_2)$.

- Tenemos que demostrar que $\mathcal{T}(f_i, g_1) \neq \mathcal{T}(f_j, g_2)$.

Como primer caso suponemos que $f_i \neq f_j$, lo cual significa que $i \neq j$.

Tenemos que $(f_i \circ g_1) \neq (f_j \circ g_2)$ puesto que $i \neq j$ y:

$$
\begin{aligned}
(f_i \circ g_1)(k) &= f_i(g_1(k)) = f_i(k) = i \\
(f_j \circ g_2)(k) &= f_j(g_2(k)) = f_j(k) = j
\end{aligned}
$$

La demostración del segundo lema

Como segundo caso suponemos que $i = j$ y $g_1 \neq g_2$.

La demostración del segundo lema

Como segundo caso suponemos que $i = j$ y $g_1 \neq g_2$.

Si suponemos que $f_i \circ g_1 = f_i \circ g_2$, entonces $f_i^{-1} \circ f_i \circ g_1 = f_i^{-1} \circ f_i \circ g_2$.

La demostración del segundo lema

Como segundo caso suponemos que $i = j$ y $g_1 \neq g_2$.

Si suponemos que $f_i \circ g_1 = f_i \circ g_2$, entonces $f_i^{-1} \circ f_i \circ g_1 = f_i^{-1} \circ f_i \circ g_2$.

- Concluimos entonces que $g_1 = g_2$, lo cual no lleva a una contradicción.

La demostración del segundo lema

Como segundo caso suponemos que $i = j$ y $g_1 \neq g_2$.

Si suponemos que $f_i \circ g_1 = f_i \circ g_2$, entonces $f_i^{-1} \circ f_i \circ g_1 = f_i^{-1} \circ f_i \circ g_2$.

- Concluimos entonces que $g_1 = g_2$, lo cual no lleva a una contradicción.

Tenemos entonces que $f_i \circ g_1 \neq f_i \circ g_2$.

La demostración del segundo lema

Como segundo caso suponemos que $i = j$ y $g_1 \neq g_2$.

Si suponemos que $f_i \circ g_1 = f_i \circ g_2$, entonces $f_i^{-1} \circ f_i \circ g_1 = f_i^{-1} \circ f_i \circ g_2$.

- Concluimos entonces que $g_1 = g_2$, lo cual no lleva a una contradicción.

Tenemos entonces que $f_i \circ g_1 \neq f_i \circ g_2$.

- Concluimos que la función $\mathcal{T}$ es 1-1.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $f \in \text{Aut}(G_{k-1})$.

- Tenemos que $f(k) = i$ para algún $i \in N$.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$.

- Tenemos que $f(k) = i$ para algún $i \in N$.

Defina g como $f_i^{-1} \circ f$.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$.

- Tenemos que $f(k) = i$ para algún $i \in N$.

Defina g como $f_i^{-1} \circ f$.

- Tenemos que $f_i^{-1} \circ f \in \mathrm{Aut}(G_k)$ puesto que $f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$, $f_i \in \mathrm{Aut}(G_{k-1})$, y $(f_i^{-1} \circ f)(k) = f_i^{-1}(f(k)) = f_i^{-1}(i) = k$.

La demostración del segundo lema

Finalmente, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $f \in \text{Aut}(G_{k-1})$.

- Tenemos que $f(k) = i$ para algún $i \in N$.

Defina g como $f_i^{-1} \circ f$.

- Tenemos que $f_i^{-1} \circ f \in \text{Aut}(G_k)$ puesto que $f \in \text{Aut}(G_{k-1})$, $f_i \in \text{Aut}(G_{k-1})$, y $(f_i^{-1} \circ f)(k) = f_i^{-1}(f(k)) = f_i^{-1}(i) = k$.

Tenemos que $\mathcal{T}(f_i, g) = f_i \circ g = f_i \circ f_i^{-1} \circ f = f$.

- Concluimos que $\mathcal{T}$ es una función sobre.

La demostración del segundo lema

Sabemos que $|\mathrm{Aut}(G)| = |\mathrm{Aut}(G_0)|$.

La demostración del segundo lema

Sabemos que $|\mathrm{Aut}(G)| = |\mathrm{Aut}(G_0)|$.

Por lo tanto, considerando que $|\mathrm{Aut}(G_n)| = 1$:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Aut}(G)| &= |\mathrm{Aut}(G_0)| \\
&= |I_1| \cdot |\mathrm{Aut}(G_1)| \\
&= |I_1| \cdot |I_2| \cdot |\mathrm{Aut}(G_2)| \\
&= \dots \\
&= \prod_{k=1}^{n} |I_k|
\end{aligned}$$

La demostración del segundo lema

Recuerde que:

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

La demostración del segundo lema

Recuerde que:

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \text{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Tenemos que mostrar que cada conjunto I_k se puede construir usando un oráculo para COL-GRAPH-ISO.

La demostración del segundo lema

Recuerde que:

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \mathrm{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Tenemos que mostrar que cada conjunto I_k se puede construir usando un oráculo para COL-GRAPH-ISO.

- ¿Cómo se hace esto?

La demostración del segundo lema

Recuerde que:

$$I_k \;=\; \{i \mid \text{existe } f \in \text{Aut}(G_{k-1}) \text{ tal que } f(k) = i\}$$

Tenemos que mostrar que cada conjunto I_k se puede construir usando un oráculo para COL-GRAPH-ISO.

- ¿Cómo se hace esto?

Concluimos que $\#\text{GRAPH-AUT} \in \text{FP}^{\text{COL-GRAPH-ISO}}$. $\square$

El resultado final

Teorema (Mathon)

$\#\mathit{GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

El resultado final

Teorema (Mathon)

$\#\mathit{GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

El resultado final

Teorema (Mathon)

$\#\mathit{GRAPH\text{-}ISO} \in \mathit{FP}^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- Recuerde que demostramos que COL-GRAPH-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{GRAPH-ISO}}$.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Hasta ahora hemos considerado grafos dirigidos.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Hasta ahora hemos considerado grafos dirigidos.

¿Cuál es la complejidad del problema de isomorfismo para grafos no dirigidos?

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Hasta ahora hemos considerado grafos dirigidos.

¿Cuál es la complejidad del problema de isomorfismo para grafos no dirigidos?

- ¿Es más simple que para el caso de grafos dirigidos?

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Hasta ahora hemos considerado grafos dirigidos.

¿Cuál es la complejidad del problema de isomorfismo para grafos no dirigidos?

- ¿Es más simple que para el caso de grafos dirigidos?

El problema UND-GRAPH-ISO tiene como entrada dos grafos G_1 y G_2 no dirigidos, y la pregunta a responder es si los grafos son isomorfos.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO es polinomialmente equivalente a UND-GRAPH-ISO.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO es polinomialmente equivalente a UND-GRAPH-ISO.

Este resultado es útil porque el problema de isomorfismo de grafos está mejor entendido en el caso de los grafos no dirigidos.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO es polinomialmente equivalente a UND-GRAPH-ISO.

Este resultado es útil porque el problema de isomorfismo de grafos está mejor entendido en el caso de los grafos no dirigidos.

De hecho, vamos a presentar el test de Weisfeiler-Lehman para isomorfismo de grafos no dirigidos.

El problema de isomorfismo para grafos no dirigidos

Vamos a demostrar que GRAPH-ISO es polinomialmente equivalente a UND-GRAPH-ISO.

Este resultado es útil porque el problema de isomorfismo de grafos está mejor entendido en el caso de los grafos no dirigidos.

De hecho, vamos a presentar el test de Weisfeiler-Lehman para isomorfismo de grafos no dirigidos.

- Es considerado el mejor algoritmo para isomorfismo de grafos.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Teorema

UND-GRAPH-ISO $\in P^{\textit{GRAPH-ISO}}$ *y GRAPH-ISO* $\in P^{\textit{UND-GRAPH-ISO}}$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Teorema

UND-GRAPH-ISO $\in P^{\textit{GRAPH-ISO}}$ *y GRAPH-ISO* $\in P^{\textit{UND-GRAPH-ISO}}$.

Demostración: es claro que UND-GRAPH-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{GRAPH-ISO}}$, por lo que sólo consideramos GRAPH-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{UND-GRAPH-ISO}}$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Teorema

$\mathit{UND\text{-}GRAPH\text{-}ISO} \in P^{\mathit{GRAPH\text{-}ISO}}$ y $\mathit{GRAPH\text{-}ISO} \in P^{\mathit{UND\text{-}GRAPH\text{-}ISO}}$.

Demostración: es claro que $\text{UND-GRAPH-ISO} \in \text{P}^{\text{GRAPH-ISO}}$, por lo que sólo consideramos $\text{GRAPH-ISO} \in \text{P}^{\text{UND-GRAPH-ISO}}$.

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos dirigidos con n nodos y m arcos cada uno.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Teorema

UND-GRAPH-ISO $\in$ $P^{\text{GRAPH-ISO}}$ *y GRAPH-ISO* $\in$ $P^{\text{UND-GRAPH-ISO}}$.

Demostración: es claro que UND-GRAPH-ISO $\in$ $\mathrm{P}^{\text{GRAPH-ISO}}$, por lo que sólo consideramos GRAPH-ISO $\in$ $\mathrm{P}^{\text{UND-GRAPH-ISO}}$.

Sean $G_1 = (N_1, E_1)$ y $G_2 = (N_2, E_2)$ dos grafos dirigidos con n nodos y m arcos cada uno.

- Si tienen distintos números de nodos o de arcos entonces sabemos que no son isomorfos, y esto es algo que podemos verificar en tiempo polinomial.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Para cada $i \in \{1, 2\}$, vamos a construir un grafo no dirigido H_i a partir de G_i.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Para cada $i \in \{1, 2\}$, vamos a construir un grafo no dirigido H_i a partir de G_i.

- Cada grafo H_i se construye en tiempo polinomial a partir de G_i.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Para cada $i \in \{1, 2\}$, vamos a construir un grafo no dirigido H_i a partir de G_i.

- Cada grafo H_i se construye en tiempo polinomial a partir de G_i.
- En la construcción consideramos $\ell = 2n + m$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Para cada $i \in \{1, 2\}$, vamos a construir un grafo no dirigido H_i a partir de G_i.

- Cada grafo H_i se construye en tiempo polinomial a partir de G_i.
- En la construcción consideramos $\ell = 2n + m$.

Vamos a mostrar que esta construcción es una reducción de tiempo polinomial:

$(G_1, G_2) \in$ GRAPH-ISO si y sólo si $(H_1, H_2) \in$ UND-GRAPH-ISO

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Para cada $i \in \{1, 2\}$, vamos a construir un grafo no dirigido H_i a partir de G_i.

- Cada grafo H_i se construye en tiempo polinomial a partir de G_i.
- En la construcción consideramos $\ell = 2n + m$.

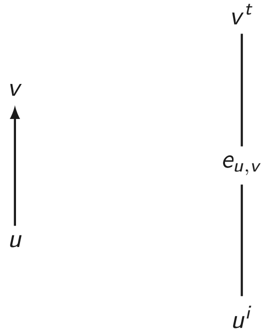
Vamos a mostrar que esta construcción es una reducción de tiempo polinomial:

$$(G_1, G_2) \in \text{GRAPH-ISO si y sólo si } (H_1, H_2) \in \text{UND-GRAPH-ISO}$$

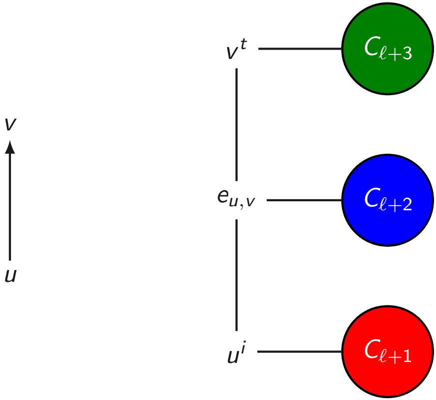
Concluimos que GRAPH-ISO $\in \mathrm{P}^{\text{UND-GRAPH-ISO}}$.

La construcción de H_i a partir de G_i

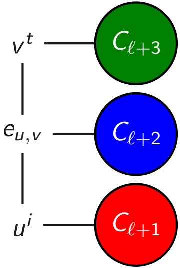
La construcción de H_i a partir de G_i



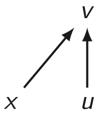
La construcción de H_i a partir de G_i

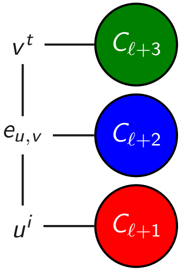


La construcción de H_i a partir de G_i

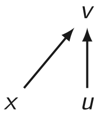


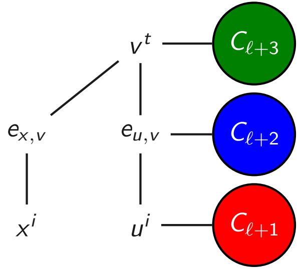
La construcción de H_i a partir de G_i



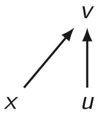


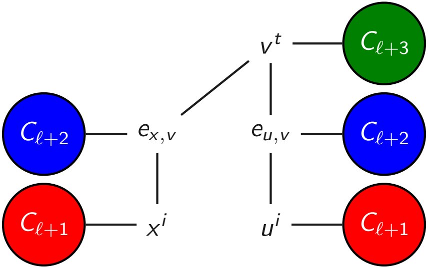
La construcción de H_i a partir de G_i



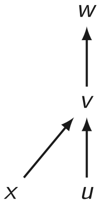


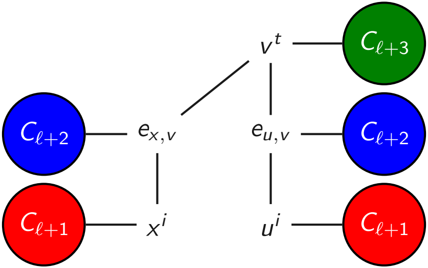
La construcción de H_i a partir de G_i



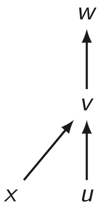


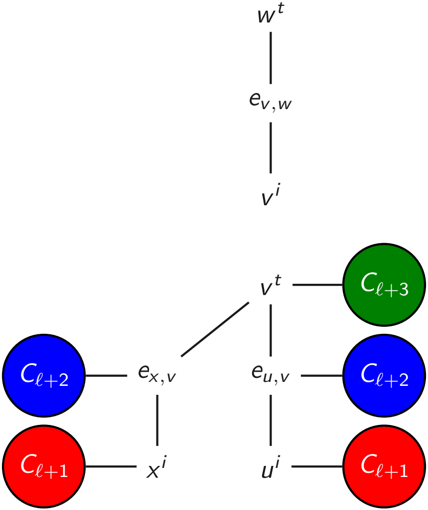
La construcción de H_i a partir de G_i



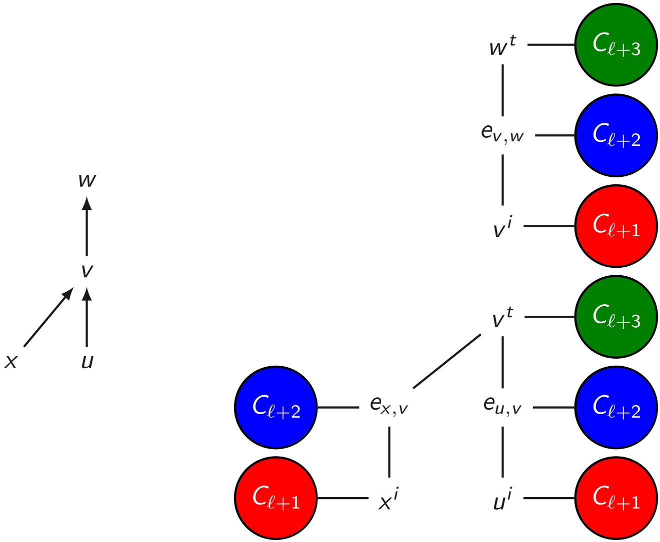


La construcción de H_i a partir de G_i

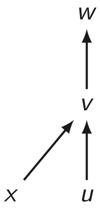


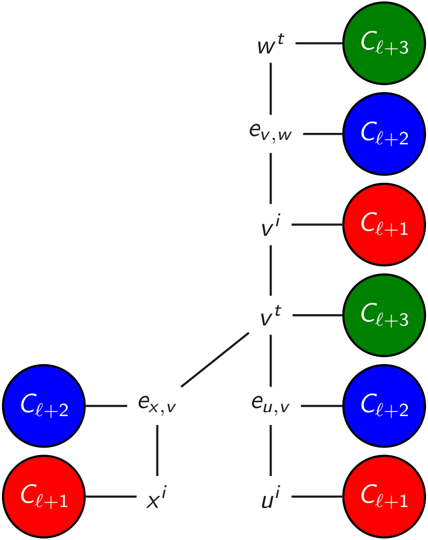


La construcción de H_i a partir de G_i



La construcción de H_i a partir de G_i





La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea g un isomorfismo de G_1 a G_2.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea g un isomorfismo de G_1 a G_2.

Definimos un isomorfismo h de H_1 a H_2 de la siguiente forma:

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea g un isomorfismo de G_1 a G_2.

Definimos un isomorfismo h de H_1 a H_2 de la siguiente forma:

- Para cada $u \in N_1$ y $x \in N_2$ tal que $g(u) = x$, se define $h(u^i) = x^i$ y $h(u^t) = x^t$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea g un isomorfismo de G_1 a G_2.

Definimos un isomorfismo h de H_1 a H_2 de la siguiente forma:

- Para cada $u \in N_1$ y $x \in N_2$ tal que $g(u) = x$, se define $h(u^i) = x^i$ y $h(u^t) = x^t$.
- Para cada $u, v \in N_1$ y $x, y \in N_2$ tal que $(u, v) \in E_1$, $g(u) = x$ y $g(v) = y$, se define $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea g un isomorfismo de G_1 a G_2.

Definimos un isomorfismo h de H_1 a H_2 de la siguiente forma:

- Para cada $u \in N_1$ y $x \in N_2$ tal que $g(u) = x$, se define $h(u^i) = x^i$ y $h(u^t) = x^t$.
- Para cada $u, v \in N_1$ y $x, y \in N_2$ tal que $(u, v) \in E_1$, $g(u) = x$ y $g(v) = y$, se define $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$.
- Se define h en los ciclos $C_{\ell+1}$, $C_{\ell+2}$ y $C_{\ell+3}$ de manera de ser consistente con las definiciones anteriores.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

Definimos un isomorfismo g de G_1 a G_2 de la siguiente forma:

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

Definimos un isomorfismo g de G_1 a G_2 de la siguiente forma:

- Si $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$, entonces $g(u) = x$ y $g(y) = v$.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

Definimos un isomorfismo g de G_1 a G_2 de la siguiente forma:

- Si $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$, entonces $g(u) = x$ y $g(y) = v$.

Para terminar la demostración es necesario probar que g es una función bien definida y que es una biyección.

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

Definimos un isomorfismo g de G_1 a G_2 de la siguiente forma:

- Si $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$, entonces $g(u) = x$ y $g(y) = v$.

Para terminar la demostración es necesario probar que g es una función bien definida y que es una biyección.

- ¿Cómo se hace esto?

La equivalencia para grafos dirigidos y no dirigidos

Sea h un isomorfismo de H_1 a H_2.

Definimos un isomorfismo g de G_1 a G_2 de la siguiente forma:

- Si $h(e_{u,v}) = e_{x,y}$, entonces $g(u) = x$ y $g(y) = v$.

Para terminar la demostración es necesario probar que g es una función bien definida y que es una biyección.

- ¿Cómo se hace esto?

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Veamos ahora el test de Weisfeiler-Lehman para isomorfismo de grafos no dirigidos.