La noción de minor

Definimos tres operaciones sobre un grafo:

- **Remover un vértice** u (y todas sus aristas incidentes)
- **Remover una arista** e (pero no sus vértices finales)
- **Contraer una arista** $e = \{u, v\}$
  - Remover u y v, añadir un nuevo vértice w cuyo vecindad es la unión de las vecindades de u y v, sin agregar loops sobre w y sacando aristas multiples

La noción de minor

subgrafo inducido: se obtiene al repetir *remover vértices*

subgrafo: se obtiene al repetir *remover vértices* + *remover arista*

minor: se obtiene al repetir *remover vértices* + *remover aristas* + *contraer aristas*

El orden inducido

$H \preceq G$ indica que H es un minor de G.

La relación $\preceq$ es refleja y transitiva.

La relación $\preceq$ **no** es antisimétrica.

- Si $H \preceq G$ y $G \preceq H$, entonces G y H son isomorfos.

La relación $\preceq$ es un **preorden.**

El orden inducido

Teorema (Robertson-Seymour): La relación $\preceq$ es un buen preorden.

$\preceq$ **no** contiene:

Cadenas infinitamente decrecientes: $G_1 \succ G_2 \succ G_3 \succ \dots$

Cadenas infinitas de elementos incomparables: $G_1, G_2,\ G_3, \dots$ tal que $G_i \not\preceq G_j$ y $G_j \not\preceq G_i$ para cada $i \neq j$

Exclusión de minors

Una clase de grafos $\mathcal{C}$ es cerrada bajo minors si para cada $G \in \mathcal{C}$ y cada H tal que $H \preceq G$, se tiene que $H \in \mathcal{C}$.

Ejemplo: la clase de los grafos planos es cerrada bajo minors.

Exclusión de minors

Una clase de grafos $\mathcal{C}$ excluye un minor H si para cada $G \in \mathcal{C}$ se tiene que $H \not\preceq G$.

Ejemplos:

- La clase de los bosques excluye a K_3.
- La clase de los grafos planos excluye a K_5.

Exclusión de minors

Una clase de grafos $\mathcal{C}$ es definida por exclusión de minors si existe un conjunto de grafos $\{H_1, \ldots, H_k\}$ tal que:

$$G \in \mathcal{C} \quad \text{si y sólo} \quad \text{si } H_i \not\preceq G \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}$$

Ejemplo: la clase de los grafos planos es definida por la exclusión de los minors K_5 y $K_{3,3}$.

El orden inducido

Corolario (Robertson-Seymour): Si $\mathcal{C}$ es una clase de grafos cerrada bajo minors, entonces $\mathcal{C}$ es definida por exclusión de minors.

Ejercicio: demuestre el corolario.

El orden inducido

Corolario (Robertson-Seymour): Si $\mathcal{C}$ es una clase de grafos cerrada bajo minors, entonces existe un algoritmo de tiempo polinomial que, dado G, decide si $G \in \mathcal{C}$.

Esto es consecuencia de dos resultados:

- Teorema de Robertson-Seymour.
- Fije un grafo H. El problema de verificar, dado un grafo G, si $H \preceq G$ se puede resolver en tiempo polinomial.

Minors y el algoritmo k-WL

Teorema (Grohe): Si $\mathcal{C}$ es una clase de grafos definida por exclusión de minors, entonces existe k tal que el algoritmo k-WL correctamente distingue si dos grafos en $\mathcal{C}$ son isomorfos.