FO-DEF está en GI

Vamos a demostrar que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$.

FO-DEF está en GI

Vamos a demostrar que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- De esto concluimos que FO-DEF $\in$ GI.

FO-DEF está en GI

Vamos a demostrar que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- De esto concluimos que FO-DEF $\in$ GI.

Sea I una instancia de un esquema relacional $\mathcal{L}$, sea D el dominio de I, y sea $S \subseteq D^k$ para $k \geq 1$.

FO-DEF está en GI

Vamos a demostrar que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- De esto concluimos que FO-DEF $\in$ GI.

Sea I una instancia de un esquema relacional $\mathcal{L}$, sea D el dominio de I, y sea $S \subseteq D^k$ para $k \geq 1$.

Queremos demostrar que existe $f \in \text{Aut}(I)$ y $t \in S$ tal que $f(t) \notin S$.

FO-DEF está en GI

Vamos a demostrar que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$.

- De esto concluimos que FO-DEF $\in$ GI.

Sea I una instancia de un esquema relacional $\mathcal{L}$, sea D el dominio de I, y sea $S \subseteq D^k$ para $k \geq 1$.

Queremos demostrar que existe $f \in \text{Aut}(I)$ y $t \in S$ tal que $f(t) \notin S$.

- De esto concluimos que $(I, S) \notin$ FO-DEF.

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

- Suponga que $t = (a_1, \dots, a_k)$ y $s = (b_1, \dots, b_k)$.

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

- Suponga que $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $s = (b_1, \ldots, b_k)$.

Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_1(\cdot), \ldots, C_k(\cdot)\}$.

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

- Suponga que $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $s = (b_1, \ldots, b_k)$.

Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_1(\cdot), \ldots, C_k(\cdot)\}$.

Defina una instancia I_1 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

- Suponga que $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $s = (b_1, \ldots, b_k)$.

Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_1(\cdot), \ldots, C_k(\cdot)\}$.

Defina una instancia I_1 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_1} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.

FO-DEF está en GI

Lo anterior es equivalente a demostrar que existe una tupla $s \in D^k \setminus S$ tal que $f(t) = s$.

- Suponga que $t = (a_1, \dots, a_k)$ y $s = (b_1, \dots, b_k)$.

Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_1(\cdot), \dots, C_k(\cdot)\}$.

Defina una instancia I_1 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_1} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_1} = \{a_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_2} = \{b_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_2} = \{b_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Tenemos que existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que $f(t) = s$ si y sólo si $(I_1, I_2) \in$ REL-ISO.

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^{I}$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_2} = \{b_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Tenemos que existe $f \in \text{Aut}(I)$ tal que $f(t) = s$ si y sólo si $(I_1, I_2) \in$ REL-ISO.

¿Está lista la demostración?

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_2} = \{b_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Tenemos que existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que $f(t) = s$ si y sólo si $(I_1, I_2) \in$ REL-ISO.

¿Está lista la demostración?

- No, ya que podemos necesitar una cantidad exponencial de llamadas a REL-ISO.

FO-DEF está en GI

De manera similar, defina una instancia I_2 sobre $\mathcal{L}'$ tal que:

- $R^{I_2} = R^I$ para cada $R \in \mathcal{L}$.
- $C_i^{I_2} = \{b_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Tenemos que existe $f \in \text{Aut}(I)$ tal que $f(t) = s$ si y sólo si $(I_1, I_2) \in$ REL-ISO.

¿Está lista la demostración?

- No, ya que podemos necesitar una cantidad exponencial de llamadas a REL-ISO.

Vamos a usar la idea anterior, pero realizando sólo una cantidad polinomial de llamadas a REL-ISO.

FO-DEF está en GI

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_\ell(t)$ para denotar el elemento a_ℓ.

FO-DEF está en GI

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_\ell(t)$ para denotar el elemento a_ℓ.

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{0, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_{\leq \ell}(t)$ para denotar la tupla $(a_1, \ldots, a_\ell)$.

FO-DEF está en GI

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_\ell(t)$ para denotar el elemento a_ℓ.

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{0, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_{\leq \ell}(t)$ para denotar la tupla $(a_1, \ldots, a_\ell)$.

- En particular, $\pi_{\leq 0}(t) = (\,)$

FO-DEF está en GI

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_\ell(t)$ para denotar el elemento a_ℓ.

Dada una tupla $t = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\ell \in \{0, \ldots, k\}$, utilizamos $\pi_{\leq \ell}(t)$ para denotar la tupla $(a_1, \ldots, a_\ell)$.

- En particular, $\pi_{\leq 0}(t) = (\,)$

Además, definimos $\pi_{\leq \ell}(S) = \{\pi_{\leq \ell}(t) \mid t \in S\}$.

FO-DEF está en GI

Lema

Dado $f \in Aut(I)$, se tiene que S no es cerrado bajo f si y sólo si existe una tupla $t \in S$ y $\ell \in \{0, \ldots, k\}$ tal que:

1. $f(\pi_{\leq \ell}(t)) \in \pi_{\leq \ell}(S)$, *y*
2. $f(\pi_{\leq \ell+1}(t)) \notin \pi_{\leq \ell+1}(S)$.

FO-DEF está en GI

Lema

Dado $f \in Aut(I)$, se tiene que S no es cerrado bajo f si y sólo si existe una tupla $t \in S$ y $\ell \in \{0, \dots, k\}$ tal que:

1. $f(\pi_{\leq \ell}(t)) \in \pi_{\leq \ell}(S)$, *y*
2. $f(\pi_{\leq \ell+1}(t)) \notin \pi_{\leq \ell+1}(S)$.

Ejercicio

Demuestre el lema.

FO-DEF está en GI

Usamos el lema en el siguiente algoritmo para verificar si $(I, S) \notin$ FO-DEF:

FO-DEF está en GI

Usamos el lema en el siguiente algoritmo para verificar si $(I, S) \notin$ FO-DEF:

for $i = 0$ **to** $k - 1$ **do**
    for each $t \in S$ **do**
        for each $s \in S$ **do**
            $B := \{a \in D \mid \pi_{i+1}(r) \neq a$ para cada $r \in S$ tal que $\pi_{\leq i}(r) = \pi_{\leq i}(s)\}$
            for each $a \in B$ **do**
                if VerISO(I, t, s, a) **then**
                    return true
return false

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que:

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que:

- $f(\pi_{\leq i}(t)) = \pi_{\leq i}(s)$, y

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que:

- $f(\pi_{\leq i}(t)) = \pi_{\leq i}(s)$, y
- $f(\pi_{i+1}(t)) = a$

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que:

- $f(\pi_{\leq i}(t)) = \pi_{\leq i}(s)$, y
- $f(\pi_{i+1}(t)) = a$

VerISO utiliza REL-ISO como un oráculo.

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \mathrm{Aut}(I)$ tal que:

- $f(\pi_{\leq i}(t)) = \pi_{\leq i}(s)$, y
- $f(\pi_{i+1}(t)) = a$

VerISO utiliza REL-ISO como un oráculo.

- ¿Cómo se implementa esta función?

FO-DEF está en GI

VerISO(I, t, s, a) retorna **true** si y sólo si existe $f \in \text{Aut}(I)$ tal que:

- $f(\pi_{\leq i}(t)) = \pi_{\leq i}(s)$, y
- $f(\pi_{i+1}(t)) = a$

VerISO utiliza REL-ISO como un oráculo.

- ¿Cómo se implementa esta función?

Esto concluye la demostración de que $\overline{\text{FO-DEF}} \in \text{P}^{\text{REL-ISO}}$. $\square$