Un protocolo interactivo para conteo

Defina el siguiente lenguaje:

$$\text{COUNT-CNF-SAT}^{\leq} = \{(\varphi, k) \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF y el número de valuaciones que satisface a } \varphi \text{ es menor o igual a } k\}$$

Un protocolo interactivo para conteo

Defina el siguiente lenguaje:

$$\text{COUNT-CNF-SAT}^{\leq} = \{(\varphi, k) \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF y el número de valuaciones que satisface a } \varphi \text{ es menor o igual a } k\}$$

Y además considere la siguiente función que recibe como entrada a una fórmula φ en CNF:

$$\#\text{CNF-SAT}(\varphi) = |\{\sigma \mid \sigma(\varphi) = 1\}|$$

Un protocolo interactivo para conteo

Defina el siguiente lenguaje:

$$\text{COUNT-CNF-SAT}^{\leq} = \{(\varphi, k) \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF y el número de valuaciones que satisface a } \varphi \text{ es menor o igual a } k\}$$

Y además considere la siguiente función que recibe como entrada a una fórmula φ en CNF:

$$\#\text{CNF-SAT}(\varphi) = |\{\sigma \mid \sigma(\varphi) = 1\}|$$

$\text{COUNT-CNF-SAT}^{\leq}$ y #CNF-SAT son polinomialmente equivalentes

- Si uno de los problemas se puede solucionar en tiempo polinomial, entonces el otro problema también

Un protocolo interactivo para conteo

Teorema

$\mathit{COUNT\text{-}CNF\text{-}SAT}^{\leq} \in \mathit{IP}[2n]$

Un protocolo interactivo para conteo

Teorema

$\mathit{COUNT\text{-}CNF\text{-}SAT}^{\leq} \in \mathit{IP}[2n]$

Ejercicio

Demuestre el teorema

La probabilidad de que el verificador sea engañado

En los protocolos aleatorizados anteriores, la probabilidad de que **V** sea engañado puede ser reducida a

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

para una constante ℓ arbitraria

La probabilidad de que el verificador sea engañado

En los protocolos aleatorizados anteriores, la probabilidad de que **V** sea engañado puede ser reducida a

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

para una constante ℓ arbitraria

Vamos a mostrar que esto se puede generalizar a cualquier lenguaje en IP

Un lema de amplificación para IP

Lema

Suponga que $\ell > 0$ y $L \in IP$. Entonces existe un verificador **V** *que funciona en tiempo polinomial (MT aleatorizada de tiempo polinomial) tal que para cada $w \in \Sigma^*$:*

- *Si $w \in L$, entonces existe demostrador* **D** *tal que*

$$\Pr((\mathbf{V}, \mathbf{D}) \text{ acepte } w) \quad \geq \quad 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

- *Si $w \notin L$, entonces para todo demostrador* **D'** *se tiene que*

$$\Pr((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } w) \quad \leq \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

Un lema de amplificación para IP

Lema

Suponga que $\ell > 0$ y $L \in IP$. Entonces existe un verificador **V** *que funciona en tiempo polinomial (MT aleatorizada de tiempo polinomial) tal que para cada $w \in \Sigma^*$:*

- *Si $w \in L$, entonces existe demostrador* **D** *tal que*

$$\Pr((\mathbf{V}, \mathbf{D}) \text{ acepte } w) \quad \geq \quad 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

- *Si $w \notin L$, entonces para todo demostrador* **D'** *se tiene que*

$$\Pr((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } w) \quad \leq \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

Ejercicio

Demuestre el lema

¿Cuál es el poder de IP?

Ya sabemos que NP $\subseteq$ IP y co-NP $\subseteq$ IP

- ¿Por que se tiene que NP $\subseteq$ IP?

¿Cuál es el poder de IP?

Ya sabemos que NP $\subseteq$ IP y co-NP $\subseteq$ IP

- ¿Por que se tiene que NP $\subseteq$ IP?

Además tenemos que BPP $\subseteq$ IP

¿Cuál es el poder de IP?

Ya sabemos que NP $\subseteq$ IP y co-NP $\subseteq$ IP

- ¿Por que se tiene que NP $\subseteq$ IP?

Además tenemos que BPP $\subseteq$ IP

- ¿Cómo se demuestra esto?

¿Cuál es el poder de IP?

¿Hay problemas en cada nivel de la jerarquía polinomial en IP? ¿Es cierto que PSPACE $\subseteq$ IP? ¿En qué clase está contenido IP?

¿Cuál es el poder de IP?

¿Hay problemas en cada nivel de la jerarquía polinomial en IP? ¿Es cierto que PSPACE $\subseteq$ IP? ¿En qué clase está contenido IP?

En las siguientes láminas vamos a caracterizar de manera precisa el poder de los protocolos interactivos.

Una caracterización de IP

Teorema (Shamir)

$IP = PSPACE$

Una caracterización de IP

Teorema (Shamir)

$IP = PSPACE$

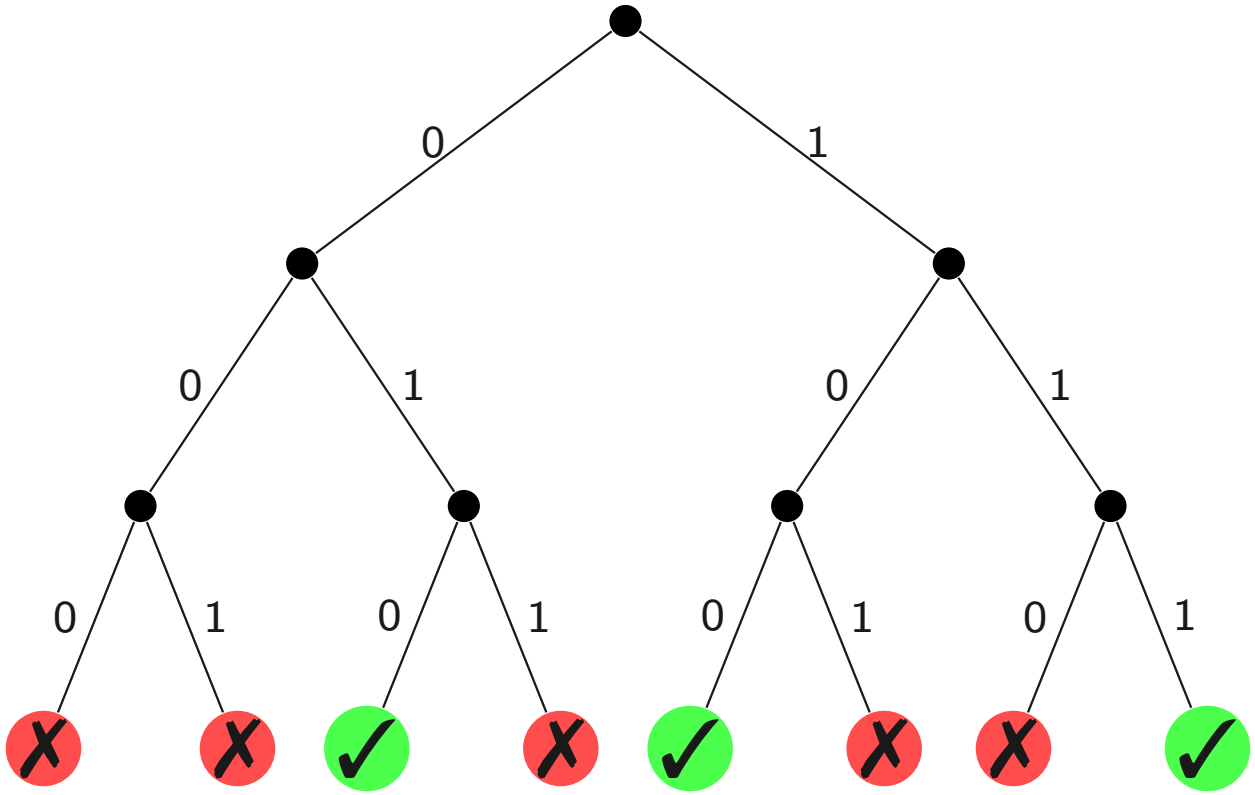
Ejercicio

Demuestre que IP $\subseteq$ PSPACE

- Para hacer esto, piense primero como demuestra directamente que BPP $\subseteq$ PSPACE, sin utilizar el teorema de Gács-Sipser-Lautemann

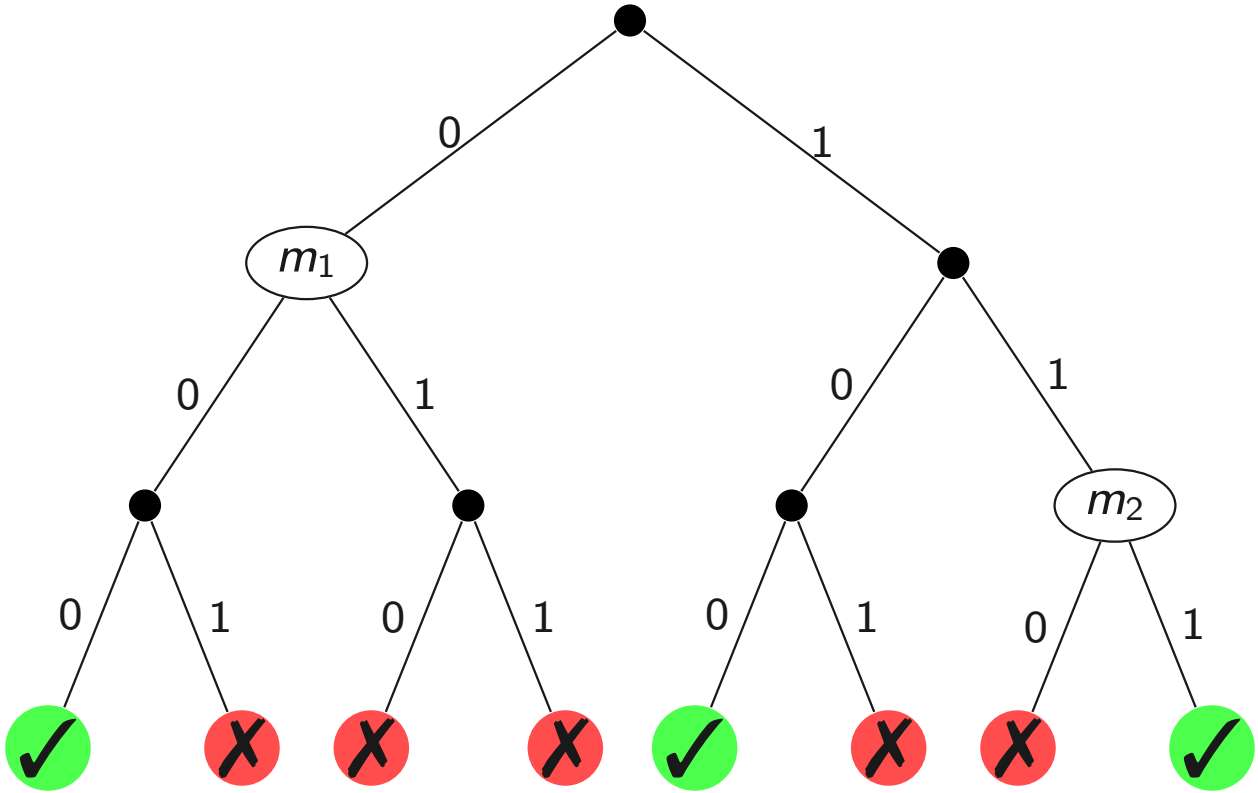
Una solución al ejercicio

Para demostrar que BPP $\subseteq$ PSPACE podemos usar la siguiente representación de la computación de una MT aleatorizada de tiempo polinomial:



Una solución al ejercicio

Para demostrar que IP $\subseteq$ PSPACE usamos una representación similar, pero distinguimos los nodos donde se usa un bit aleatorio de los nodos donde **D** entrega una respuesta:



Una solución al ejercicio

Suponemos que las respuestas de **D** consisten de un bit

Una solución al ejercicio

Suponemos que las respuestas de **D** consisten de un bit

- ¿Por qué podemos suponer esto?

Una solución al ejercicio

Suponemos que las respuestas de **D** consisten de un bit

- ¿Por qué podemos suponer esto?

El paso fundamental: queremos calcular la estrategia de **D** que maximiza la probabilidad de aceptar

Una solución al ejercicio

Suponemos que las respuestas de **D** consisten de un bit

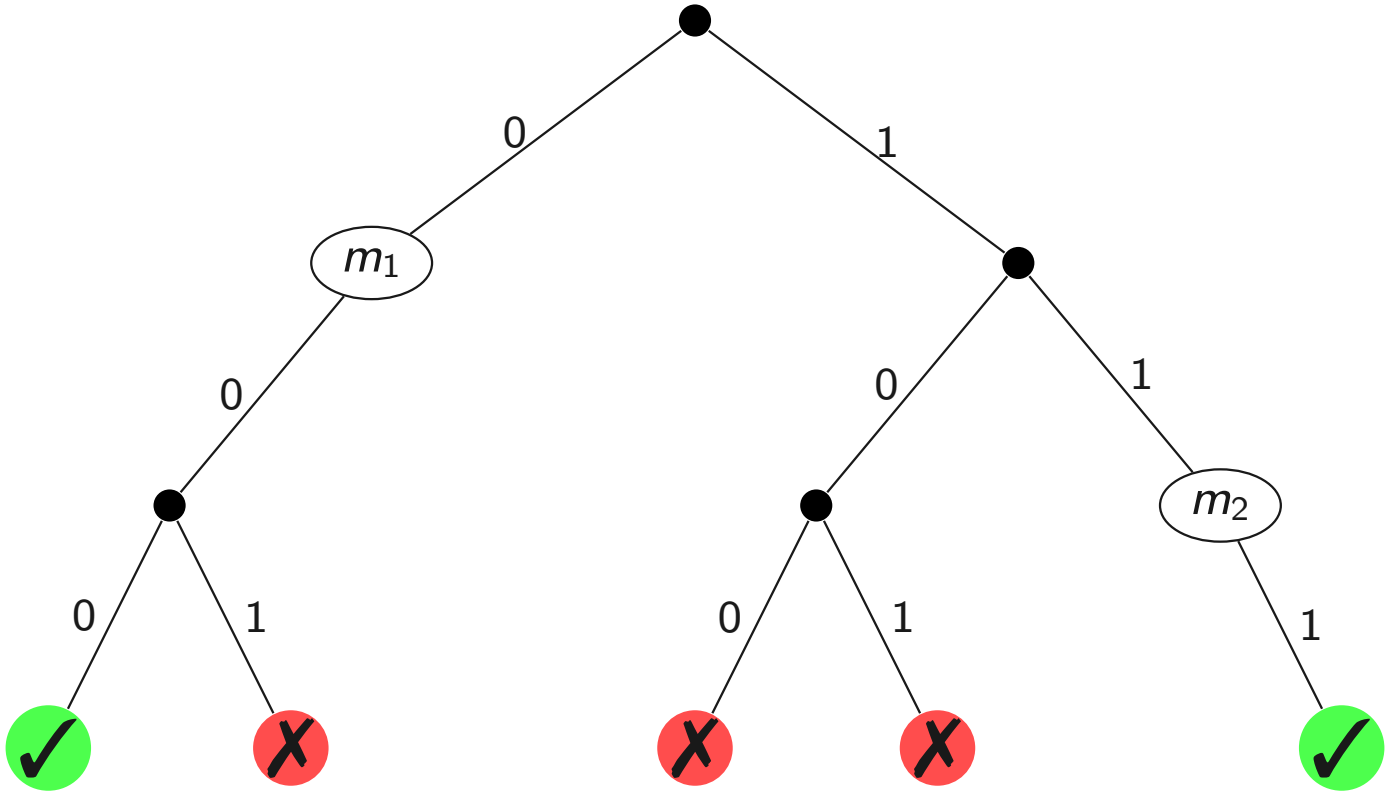
- ¿Por qué podemos suponer esto?

El paso fundamental: queremos calcular la estrategia de **D** que maximiza la probabilidad de aceptar

- ¿Cómo hacemos esto?

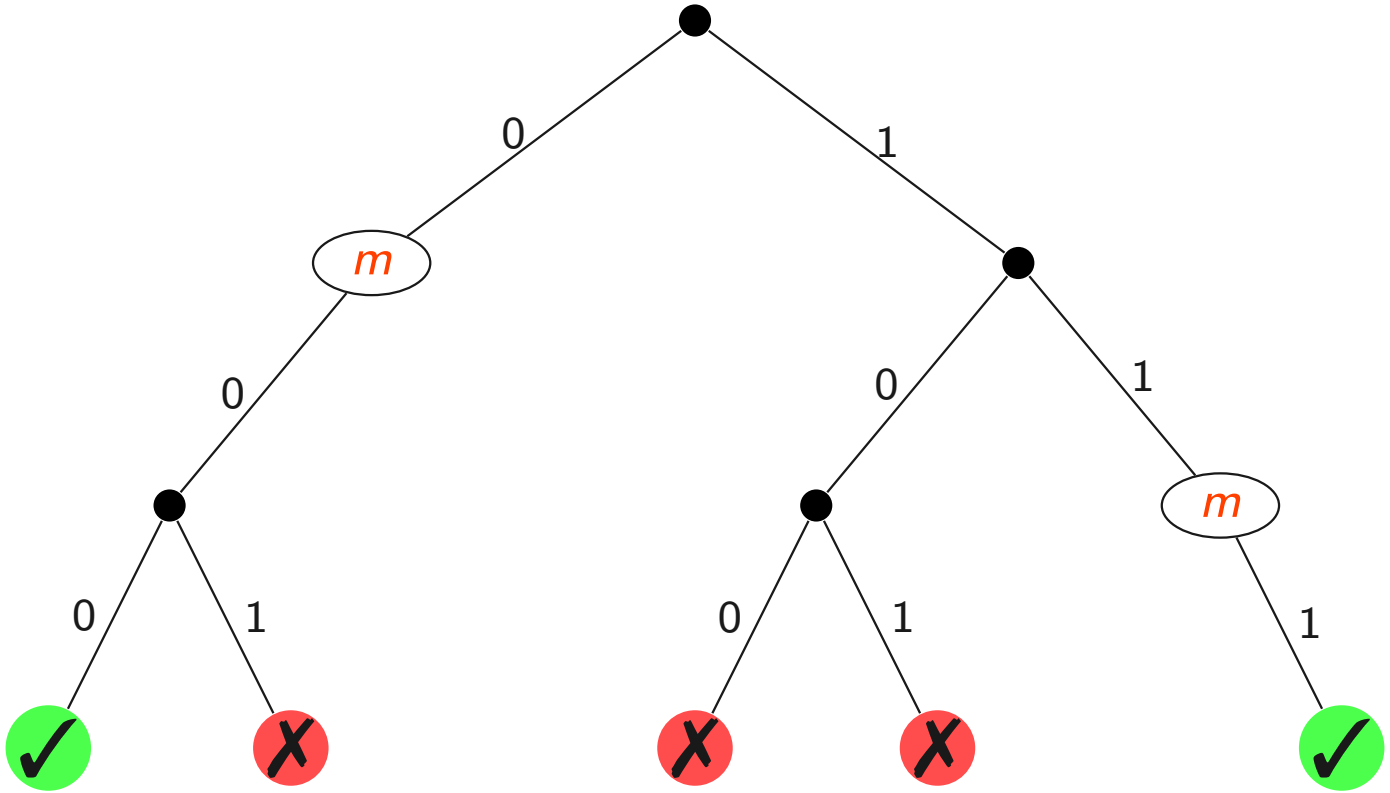
Una solución al ejercicio

La estrategia que maximiza la probabilidad de aceptar:



Una solución al ejercicio

Pero podemos tener un problema de consistencia:



Una solución al ejercicio

Condición de consistencia: **D** debe responder lo mismo si recibe la misma pregunta

Una solución al ejercicio

Condición de consistencia: **D** debe responder lo mismo si recibe la misma pregunta

Para terminar nos falta imponer la condición de consistencia en la ejecución de la MT de espacio polinomial que calcula la estrategia óptima de **D**

Una solución al ejercicio

Condición de consistencia: **D** debe responder lo mismo si recibe la misma pregunta

Para terminar nos falta imponer la condición de consistencia en la ejecución de la MT de espacio polinomial que calcula la estrategia óptima de **D**

Almacenar esta condición para verificar que la decisión sobre un nodo es consistente toma espacio exponencial

Una solución al ejercicio

Condición de consistencia: **D** debe responder lo mismo si recibe la misma pregunta

Para terminar nos falta imponer la condición de consistencia en la ejecución de la MT de espacio polinomial que calcula la estrategia óptima de **D**

Almacenar esta condición para verificar que la decisión sobre un nodo es consistente toma espacio exponencial

- Veamos en la pizarra cómo se soluciona este problema

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

Recuerde que una formula proposicional cuantificada es de la forma:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

donde cada $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula proposicional cuyas variables son x_1, ..., x_n

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

Recuerde que una formula proposicional cuantificada es de la forma:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

donde cada $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula proposicional cuyas variables son x_1, ..., x_n

Por ejemplo, las siguientes son fórmulas proposicionales cuantificadas:

$$\forall x \exists y \, x \wedge y$$
$$\forall x \exists y \, x \vee y$$

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta?

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta? No

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta? No
- ¿Es $\forall x \exists y\, x \vee y$ cierta?

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta? No
- ¿Es $\forall x \exists y\, x \vee y$ cierta? Sí

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta? No
- ¿Es $\forall x \exists y\, x \vee y$ cierta? Sí

QBF restringido al cuantificador $\exists$ corresponde a SAT

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

El problema QBF recibe como entrada una fórmula proposicional cuantificada, y verifica si esta fórmula es cierta

- ¿Es $\forall x \exists y\, x \wedge y$ cierta? No
- ¿Es $\forall x \exists y\, x \vee y$ cierta? Sí

QBF restringido al cuantificador $\exists$ corresponde a SAT

- Y además vimos que para cada nivel Σ_k^P $(k \geq 1)$ de la jerarquía polinomial, hay una restricción de QBF que es Σ_k^P-completo

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

Teorema

QBF es PSPACE-completo

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

Teorema

QBF es PSPACE-completo

Definimos CNF-QBF como el problema QBF restringido a las fórmulas

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ está en CNF

PSPACE $\subseteq$ IP: Dos problemas PSPACE-completos

Teorema

QBF es PSPACE-completo

Definimos CNF-QBF como el problema QBF restringido a las fórmulas

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ está en CNF

Teorema

CNF-QBF es PSPACE-completo

PSPACE $\subseteq$ IP

Teorema

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

PSPACE $\subseteq$ IP

Teorema

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Corolario

PSPACE $\subseteq$ *IP*

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Sea φ la siguiente fórmula en CNF-QBF:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $\psi(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ es una fórmula en CNF cuyas variables son x_1, …, x_n

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Sea φ la siguiente fórmula en CNF-QBF:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $\psi(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ es una fórmula en CNF cuyas variables son x_1, ..., x_n

Suponemos que:

- Cada cláusula en $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ no tiene literales complementarios ni repetidos
- $m \geq 2$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Sea φ la siguiente fórmula en CNF-QBF:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $\psi(x_1, \ldots, x_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ es una fórmula en CNF cuyas variables son x_1, ..., x_n

Suponemos que:

- Cada cláusula en $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ no tiene literales complementarios ni repetidos
- $m \geq 2$
  - Si $m = 1$ simplemente repetimos la cláusula para obtener $m = 2$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Al igual que para la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en $\mathsf{IP}[2n]$:

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Al igual que para la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$:

- Para cada literal ℓ, defina

$$\tau_\ell \quad = \quad \begin{cases} (1 - x_i) & \ell = x_i \\ x_i & \ell = \neg x_i \end{cases}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Al igual que para la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$:

- Para cada literal ℓ, defina

$$\tau_\ell \quad = \quad \begin{cases} (1 - x_i) & \ell = x_i \\ x_i & \ell = \neg x_i \end{cases}$$

- Para cada cláusula $C = (\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_k)$, defina

$$\tau_C \quad = \quad 1 - \prod_{i=1}^{k} \tau_{\ell_i}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Al igual que para la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$:

- Para cada literal ℓ, defina

$$\tau_\ell \quad = \quad \begin{cases} (1 - x_i) & \ell = x_i \\ x_i & \ell = \neg x_i \end{cases}$$

- Para cada cláusula $C = (\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_k)$, defina

$$\tau_C \quad = \quad 1 - \prod_{i=1}^{k} \tau_{\ell_i}$$

- Y defina

$$g(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad \prod_{i=1}^{m} \tau_{C_i}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Recuerde que para cada valuación $\sigma : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0, 1\}$, tenemos que:

- Si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 1$
- Si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 0$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Recuerde que para cada valuación $\sigma : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0, 1\}$, tenemos que:

- Si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 1$
- Si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 0$

En el caso de la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$ usamos la siguiente condición:

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} g(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad k$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Recuerde que para cada valuación $\sigma : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0, 1\}$, tenemos que:

- Si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 1$
- Si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 0$

En el caso de la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$ usamos la siguiente condición:

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} g(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad k$$

Para CNF-QBF nos gustaría usar una condición similar donde $\exists x_i$ corresponde a una suma y $\forall x_i$ corresponde a una multiplicación

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Recuerde que para cada valuación $\sigma : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{0, 1\}$, tenemos que:

- Si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 1$
- Si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = 0$

En el caso de la demostración de que COUNT-CNF-SAT está en IP$[2n]$ usamos la siguiente condición:

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} g(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad k$$

Para CNF-QBF nos gustaría usar una condición similar donde $\exists x_i$ corresponde a una suma y $\forall x_i$ corresponde a una multiplicación

- ¿Pero cómo se interpreta la salida de la expresión?

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\prod_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} g(a, b) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1)) \cdot (g(1,0) + g(1,1)) \\ &=\; (0 + 0) \cdot (0 + 1) \\ &=\; 0\end{aligned}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\prod_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} g(a, b) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1)) \cdot (g(1,0) + g(1,1)) \\ &=\; (0 + 0) \cdot (0 + 1) \\ &=\; 0\end{aligned}$$

Obtenemos el valor 0 que representa que la fórmula no es cierta

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y \, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \prod_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} g(a, b) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1)) \cdot (g(1,0) + g(1,1)) \\ &=\; (0 + 1) \cdot (1 + 1) \\ &=\; 2 \end{aligned}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \prod_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} g(a, b) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1)) \cdot (g(1,0) + g(1,1)) \\ &=\; (0 + 1) \cdot (1 + 1) \\ &=\; 2 \end{aligned}$$

Obtenemos el valor 2 que representa que la fórmula es cierta

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \prod_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} g(a, b) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1)) \cdot (g(1,0) + g(1,1)) \\ &=\; (0 + 1) \cdot (1 + 1) \\ &=\; 2 \end{aligned}$$

Obtenemos el valor 2 que representa que la fórmula es cierta

- El valor es mayor que 0. ¿Pero que representa?

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists x_{n+1}\, x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee x_{n+1}$. En este caso tenemos que:

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \;=\; 1 - (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \cdot (1 - x_{n+1})$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists x_{n+1}\, x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee x_{n+1}$. En este caso tenemos que:

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \;=\; 1 - (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \cdot (1 - x_{n+1})$$

Es posible demostrar que:

$$\prod_{a_1 \in \{0,1\}} \cdots \prod_{a_n \in \{0,1\}} \sum_{a_{n+1} \in \{0,1\}} g(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \;=\; 2^{2^n - 1}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists x_{n+1}\, x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee x_{n+1}$. En este caso tenemos que:

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \;=\; 1 - (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \cdot (1 - x_{n+1})$$

Es posible demostrar que:

$$\prod_{a_1 \in \{0,1\}} \cdots \prod_{a_n \in \{0,1\}} \sum_{a_{n+1} \in \{0,1\}} g(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \;=\; 2^{2^n - 1}$$

Obtenemos un valor mayor que 0 que representa que la fórmula es cierta

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists x_{n+1}\, x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee x_{n+1}$. En este caso tenemos que:

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \;=\; 1 - (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \cdot (1 - x_{n+1})$$

Es posible demostrar que:

$$\prod_{a_1 \in \{0,1\}} \cdots \prod_{a_n \in \{0,1\}} \sum_{a_{n+1} \in \{0,1\}} g(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \;=\; 2^{2^n - 1}$$

Obtenemos un valor mayor que 0 que representa que la fórmula es cierta

- Pero este número tiene 2^n dígitos en binario, por lo que el demostrador no se lo puede enviar al verificador

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: operadores $\exists x_i$ y $\forall x_i$

La solución al primer problema:

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: operadores $\exists x_i$ y $\forall x_i$

La solución al primer problema:

- $\exists x_i$ es considerado un operador que elimina la variable x_i a través del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\exists x_i\, g(x_1, \ldots, x_n) \;=\; & \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;+ \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;- \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: operadores $\exists x_i$ y $\forall x_i$

La solución al primer problema:

- $\exists x_i$ es considerado un operador que elimina la variable x_i a través del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\exists x_i\, g(x_1, \ldots, x_n) \;=\; & \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;+ \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;- \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

- $\forall x_i$ es considerado un operador que elimina la variable x_i a través del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\forall x_i\, g(x_1, \ldots, x_n) \;=\; & \\ & g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Tenemos entonces que la expresión

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

es igual a 0 o 1

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Tenemos entonces que la expresión

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

es igual a 0 o 1

El valor 0 significa que la fórmula $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$ no es cierta, y el valor 1 que $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$ es cierta

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y \, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y\, g(x, y) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1) - g(0,0) \cdot g(0,1)) \cdot \\ &\quad\; (g(1,0) + g(1,1) - g(1,0) \cdot g(1,1)) \\ &=\; (0 + 0 - 0) \cdot (0 + 1 - 0) \\ &=\; 0 \end{aligned}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \wedge y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; x \cdot y$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y\, g(x, y) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1) - g(0,0) \cdot g(0,1)) \cdot \\ &\quad\; (g(1,0) + g(1,1) - g(1,0) \cdot g(1,1)) \\ &=\; (0 + 0 - 0) \cdot (0 + 1 - 0) \\ &=\; 0 \end{aligned}$$

Obtenemos el valor 0 que representa que la fórmula no es cierta

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y \, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y\, g(x, y) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1) - g(0,0) \cdot g(0,1)) \cdot \\ &\quad\; (g(1,0) + g(1,1) - g(1,0) \cdot g(1,1)) \\ &=\; (0 + 1 - 0) \cdot (1 + 1 - 1) \\ &=\; 1 \end{aligned}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$

Ejemplo

Considere la fórmula $\forall x \exists y\, x \vee y$. En este caso tenemos que:

$$g(x, y) \;=\; 1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y\, g(x, y) \;&=\; (g(0,0) + g(0,1) - g(0,0) \cdot g(0,1)) \cdot \\ &\quad\; (g(1,0) + g(1,1) - g(1,0) \cdot g(1,1)) \\ &=\; (0 + 1 - 0) \cdot (1 + 1 - 1) \\ &=\; 1 \end{aligned}$$

Obtenemos el valor 1 que representa que la fórmula es cierta

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: un segundo problema

Ya sabemos cuál es la condición de la cual el demostrador debe convencer al verificador

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: un segundo problema

Ya sabemos cuál es la condición de la cual el demostrador debe convencer al verificador

Pero nos queda un problema por solucionar en la definición del protocolo

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

Considere la fórmula $\exists x_1 \cdots \exists x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, y recuerde que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en CNF con m cláusulas

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

Considere la fórmula $\exists x_1 \cdots \exists x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, y recuerde que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en CNF con m cláusulas

- Además, considere que el polinomio construido desde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es $g(x_1, \ldots, x_n)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

Considere la fórmula $\exists x_1 \cdots \exists x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, y recuerde que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en CNF con m cláusulas

- Además, considere que el polinomio construido desde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es $g(x_1, \ldots, x_n)$

En el protocolo para esta fórmula vamos a usar el siguiente polinomio:

$$h_1(x_1) \;=\; \exists x_2 \cdots \exists x_n \, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

Considere la fórmula $\exists x_1 \cdots \exists x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, y recuerde que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en CNF con m cláusulas

- Además, considere que el polinomio construido desde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es $g(x_1, \ldots, x_n)$

En el protocolo para esta fórmula vamos a usar el siguiente polinomio:

$$h_1(x_1) \;=\; \exists x_2 \cdots \exists x_n \, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

¿Puede dar una cota para el grado del polinomio $h_1(x_1)$?

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

Considere la fórmula $\exists x_1 \cdots \exists x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, y recuerde que $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula en CNF con m cláusulas

- Además, considere que el polinomio construido desde $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ es $g(x_1, \ldots, x_n)$

En el protocolo para esta fórmula vamos a usar el siguiente polinomio:

$$h_1(x_1) \;=\; \exists x_2 \cdots \exists x_n \, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

¿Puede dar una cota para el grado del polinomio $h_1(x_1)$?

- El grado de $h_1(x_1)$ está acotado por $m \cdot 2^n$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: un segundo problema

El demostrador no puede enviar un polinomio de grado $m \cdot 2^n$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

El demostrador no puede enviar un polinomio de grado $m \cdot 2^n$

- Un polinomio de grado exponencial puede tener un número exponencial de coeficientes

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: un segundo problema

El demostrador no puede enviar un polinomio de grado $m \cdot 2^n$

- Un polinomio de grado exponencial puede tener un número exponencial de coeficientes

¿Cómo podemos reducir el grado de los polinomios que vamos a construir?

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Para solucionar el segundo problema introducimos un operador de linearización

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Para solucionar el segundo problema introducimos un operador de linearización

- Este operador no elimina una variable

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Para solucionar el segundo problema introducimos un operador de linearización

- Este operador no elimina una variable
- El resultado de aplicar el operador sobre una variable x_i es un polinomio lineal en x_i

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Para solucionar el segundo problema introducimos un operador de linearización

- Este operador no elimina una variable
- El resultado de aplicar el operador sobre una variable x_i es un polinomio lineal en x_i

El operador Lx_i se define de la siguiente forma:

$$Lx_i\, g(x_1, \ldots, x_n) = (1 - x_i) \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_i \cdot g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Sea $h(x_1, \ldots, x_n) = Lx_i\, g(x_1, \ldots, x_n)$

- Note que $h(x_1, \ldots, x_n)$ tiene las mismas variables que $g(x_1, \ldots, x_n)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: linearización

Sea $h(x_1, \ldots, x_n) = Lx_i\, g(x_1, \ldots, x_n)$

- Note que $h(x_1, \ldots, x_n)$ tiene las mismas variables que $g(x_1, \ldots, x_n)$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la condición a verificar

De la propiedad anterior concluimos que:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n) \text{ es cierta}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: la condición a verificar

De la propiedad anterior concluimos que:

$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n) \text{ es cierta}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la condición a verificar

De la propiedad anterior concluimos que:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n) \text{ es cierta}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) = 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q_1 x_1 L x_1 Q_2 x_2 L x_1 L x_2 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} L x_1 \cdots L x_{n-1} Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la condición a verificar

De la propiedad anterior concluimos que:

$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n) \text{ es cierta}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) = 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Q_1 x_1 \, L x_1 \, Q_2 x_2 \, L x_1 \, L x_2 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} \, L x_1 \cdots L x_{n-1} \, Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

Por lo tanto, el demostrador debe convencer al verificador que la siguiente propiedad es cierta:

$$Q_1 x_1 \, L x_1 \, Q_2 x_2 \, L x_1 \, L x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n) \; = \; 1$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

La entrada del protocolo es $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, el cual es transformado en la siguiente expresión:

$$Q_1 x_1 \, L x_1 \, Q_2 x_2 \, L x_1 \, L x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

La entrada del protocolo es $\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$, el cual es transformado en la siguiente expresión:

$$Q_1 x_1 L x_1 Q_2 x_2 L x_1 L x_2 \cdots Q_n x_n \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

Tenemos $n + \frac{n(n-1)}{2}$ operadores en la expresión, a la cual denotamos como

$$O_1 O_2 \cdots O_{n + \frac{n(n-1)}{2}} \, g(x_1, \ldots, x_n),$$

donde cada O_i representa a $Q_j x_j$ o $L x_k$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \; g(x_1, \ldots, x_n)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza
4. **V** verifica si uno de los siguientes casos se cumple, y si no es así entonces rechaza

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \; g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza
4. **V** verifica si uno de los siguientes casos se cumple, y si no es así entonces rechaza
   - 4.1 $O_1 = \exists x_1$ y $h_1(0) + h_1(1) = 1$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \; g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza
4. **V** verifica si uno de los siguientes casos se cumple, y si no es así entonces rechaza
   - 4.1 $O_1 = \exists x_1$ y $h_1(0) + h_1(1) = 1$
   - 4.2 $O_1 = \forall x_1$ y $h_1(0) \cdot h_1(1) = 1$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza
4. **V** verifica si uno de los siguientes casos se cumple, y si no es así entonces rechaza
   - 4.1 $O_1 = \exists x_1$ y $h_1(0) + h_1(1) = 1$
   - 4.2 $O_1 = \forall x_1$ y $h_1(0) \cdot h_1(1) = 1$
5. **V** define el contador $i = 1$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

El protocolo funciona de la siguiente forma:

1. **V** le indica a **D** que el protocolo ha comenzado
2. **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_1(x_1)$ tal que

$$h_1(x_1) \quad = \quad O_2 \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}} \, g(x_1, \ldots, x_n)$$

3. Si el grado de $h_1(x_1)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza
4. **V** verifica si uno de los siguientes casos se cumple, y si no es así entonces rechaza
   - 4.1 $O_1 = \exists x_1$ y $h_1(0) + h_1(1) = 1$
   - 4.2 $O_1 = \forall x_1$ y $h_1(0) \cdot h_1(1) = 1$
5. **V** define el contador $i = 1$
6. **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_1 \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$, y se lo envía a **D**

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

$$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

   $$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

   7.2 Si el grado de $h_j(x_i)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

   $$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

   7.2 Si el grado de $h_j(x_i)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

   7.3 **V** verifica que alguna de las siguientes condiciones es cierta, y si no es así entonces rechaza

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

   $$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

   7.2 Si el grado de $h_j(x_i)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

   7.3 **V** verifica que alguna de las siguientes condiciones es cierta, y si no es así entonces rechaza

      7.3.1 $O_j = \exists x_i$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = h_j(0) + h_j(1)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

   $$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

   7.2 Si el grado de $h_j(x_i)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

   7.3 **V** verifica que alguna de las siguientes condiciones es cierta, y si no es así entonces rechaza

      7.3.1 $O_j = \exists x_i$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = h_j(0) + h_j(1)$

      7.3.2 $O_j = \forall x_i$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = h_j(0) \cdot h_j(1)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7. Los siguientes pasos se repiten para $j = 2, \ldots, n + \frac{n(n-1)}{2}$

   7.1 **D** le devuelve a **V** un polinomio $h_j(x_i)$ tal que

   $$h_j(x_i) \quad = \quad O_{j+1} \cdots O_{n+\frac{n(n-1)}{2}}\, g(r_1, \ldots, r_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$$

   7.2 Si el grado de $h_j(x_i)$ es mayor que $2m$ entonces **V** rechaza

   7.3 **V** verifica que alguna de las siguientes condiciones es cierta, y si no es así entonces rechaza

      7.3.1 $O_j = \exists x_i$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = h_j(0) + h_j(1)$

      7.3.2 $O_j = \forall x_i$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = h_j(0) \cdot h_j(1)$

      7.3.3 $O_j = L x_k$ y $h_{j-1}(s_{j-1}) = (1 - s_{j-1}) \cdot h_j(0) + s_{j-1} \cdot h_j(1)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7.4 **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_j \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7.4 **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_j \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$

7.5 Si $O_{j+1} = \exists x_{i+1}$ u $O_{j+1} = \forall x_{i+1}$, entonces **V** define $r_i = s_j$ y se incrementa el contador i en 1

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7.4 **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_j \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$

7.5 Si $O_{j+1} = \exists x_{i+1}$ u $O_{j+1} = \forall x_{i+1}$, entonces **V** define $r_i = s_j$ y se incrementa el contador i en 1

7.6 Si $j < n + \frac{n(n-1)}{2}$, entonces le envía s_j a **D**

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7.4 **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_j \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$

7.5 Si $O_{j+1} = \exists x_{i+1}$ u $O_{j+1} = \forall x_{i+1}$, entonces **V** define $r_i = s_j$ y se incrementa el contador i en 1

7.6 Si $j < n + \frac{n(n-1)}{2}$, entonces le envía s_j a **D**

8. **V** define $r_n = s_{n+\frac{n(n-1)}{2}}$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: el protocolo

7.4 **V** genera al azar con distribución uniforme un número entero $s_j \in \{0, \ldots, 2^{(n^2+n)m} - 1\}$

7.5 Si $O_{j+1} = \exists x_{i+1}$ u $O_{j+1} = \forall x_{i+1}$, entonces **V** define $r_i = s_j$ y se incrementa el contador i en 1

7.6 Si $j < n + \frac{n(n-1)}{2}$, entonces le envía s_j a **D**

8. **V** define $r_n = s_{n+\frac{n(n-1)}{2}}$

9. **V** verifica si $h_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n) = g(r_1, \ldots, r_n)$. Si es así entonces acepta, y en caso contrario rechaza

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

El protocolo tiene $n^2 + n$ rondas

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

El protocolo tiene $n^2 + n$ rondas

Si φ es cierta, entonces considerando un demostrador **D** que utiliza el polinomio $g(x_1, \ldots, x_n)$ obtenemos que:

$$\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D}) \text{ acepte } \varphi\big) \quad = \quad 1$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

El protocolo tiene $n^2 + n$ rondas

Si φ es cierta, entonces considerando un demostrador **D** que utiliza el polinomio $g(x_1, \ldots, x_n)$ obtenemos que:

$$\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D}) \text{ acepte } \varphi\big) \quad = \quad 1$$

Suponga que φ no es cierta.

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

El protocolo tiene $n^2 + n$ rondas

Si φ es cierta, entonces considerando un demostrador **D** que utiliza el polinomio $g(x_1, \ldots, x_n)$ obtenemos que:

$$\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D}) \text{ acepte } \varphi\big) \quad = \quad 1$$

Suponga que φ no es cierta. Nos falta demostrar que para cualquier demostrador **D'**:

$$\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } \varphi\big) \quad \leq \quad \frac{1}{4}$$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Suponga que **D'** está tratando de engañar a **V**

- **D'** está tratando de que **V** acepte φ, aunque φ no es cierta

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Suponga que **D'** está tratando de engañar a **V**

- **D'** está tratando de que **V** acepte φ, aunque φ no es cierta

Sean $h'_j(x_i)$ los polinomios generados por **D'**

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Suponga que **D'** está tratando de engañar a **V**

- **D'** está tratando de que **V** acepte φ, aunque φ no es cierta

Sean $h'_j(x_i)$ los polinomios generados por **D'**

Tenemos que $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Suponga que **D'** está tratando de engañar a **V**

- **D'** está tratando de que **V** acepte φ, aunque φ no es cierta

Sean $h'_j(x_i)$ los polinomios generados por **D'**

Tenemos que $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$

- Si $O_1 = \exists x_1$, entonces $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$ puesto que $h_1(0) + h_1(1) = 0$ y **D'** está tratando de demostrar a **V** que $h'_1(0) + h'_1(1) = 1$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Suponga que **D'** está tratando de engañar a **V**

- **D'** está tratando de que **V** acepte φ, aunque φ no es cierta

Sean $h'_j(x_i)$ los polinomios generados por **D'**

Tenemos que $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$

- Si $O_1 = \exists x_1$, entonces $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$ puesto que $h_1(0) + h_1(1) = 0$ y **D'** está tratando de demostrar a **V** que $h'_1(0) + h'_1(1) = 1$
- Si $O_1 = \forall x_1$, entonces $h'_1(x_1) \neq h_1(x_1)$ puesto que $h_1(0) \cdot h_1(1) = 0$ y **D'** está tratando de demostrar a **V** que $h'_1(0) \cdot h'_1(1) = 1$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si $h'_1(s_1) = h_1(s_1)$, entonces $\mathbf{D}'$ puede definir $h'_2(x_1) = h_2(x_1)$, y desde ahí puede engañar a $\mathbf{V}$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si $h'_1(s_1) = h_1(s_1)$, entonces $\mathbf{D}'$ puede definir $h'_2(x_1) = h_2(x_1)$, y desde ahí puede engañar a $\mathbf{V}$

- Puesto que

$$(1 - s_1) \cdot h'_2(0) + s_1 \cdot h'_2(1) = (1 - s_1) \cdot h_2(0) + s_1 \cdot h_2(1) = h_1(s_1) = h'_1(s_1)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si $h'_1(s_1) = h_1(s_1)$, entonces $\mathbf{D}'$ puede definir $h'_2(x_1) = h_2(x_1)$, y desde ahí puede engañar a $\mathbf{V}$

- Puesto que

$$(1 - s_1) \cdot h'_2(0) + s_1 \cdot h'_2(1) = (1 - s_1) \cdot h_2(0) + s_1 \cdot h_2(1) = h_1(s_1) = h'_1(s_1)$$

Pero si $h'_1(s_1) \neq h_1(s_1)$, entonces se debe tener que $h'_2(x_2) \neq h_2(x_2)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si $h'_1(s_1) = h_1(s_1)$, entonces $\mathbf{D}'$ puede definir $h'_2(x_1) = h_2(x_1)$, y desde ahí puede engañar a $\mathbf{V}$

- Puesto que

$$(1 - s_1) \cdot h'_2(0) + s_1 \cdot h'_2(1) = (1 - s_1) \cdot h_2(0) + s_1 \cdot h_2(1) = h_1(s_1) = h'_1(s_1)$$

Pero si $h'_1(s_1) \neq h_1(s_1)$, entonces se debe tener que $h'_2(x_2) \neq h_2(x_2)$

- Puesto que $(1 - s_1) \cdot h_2(0) + s_1 \cdot h_2(1) = h_1(s_1)$ y **D'** está tratando de demostrar que $(1 - s_1) \cdot h'_2(0) + s_1 \cdot h'_2(1) = h'_1(s_1)$

CNF-QBF está en $\mathsf{IP}[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si continuamos con este razonamiento vemos que **D'** logra engañar a **V** si la siguiente condición es cierta:

$$\bigvee_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} h_i'(s_i) = h_i(s_i)$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si continuamos con este razonamiento vemos que **D'** logra engañar a **V** si la siguiente condición es cierta:

$$\bigvee_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} h'_i(s_i) = h_i(s_i)$$

En particular, la condición $h'_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n) = h_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n)$ es equivalente a pedir que $h'_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n) = g(r_1, \ldots, r_n)$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Si continuamos con este razonamiento vemos que **D'** logra engañar a **V** si la siguiente condición es cierta:

$$\bigvee_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} h'_i(s_i) = h_i(s_i)$$

En particular, la condición $h'_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n) = h_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n)$ es equivalente a pedir que $h'_{n+\frac{n(n-1)}{2}}(r_n) = g(r_1, \ldots, r_n)$

- Esta es la última condición que se necesita para que **V** acepte

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Por definición del protocolo y dado que ninguna cláusula de φ tiene literales repetidos o complementarios, el grado de cada $h_i(x_i)$ y $h'_i(x'_i)$ es a lo más $2m$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

Por definición del protocolo y dado que ninguna cláusula de φ tiene literales repetidos o complementarios, el grado de cada $h_i(x_i)$ y $h'_i(x'_i)$ es a lo más $2m$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } \varphi\big) \\
&\quad = \mathbf{Pr}\left(\bigvee_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} h'_i(s_i) = h_i(s_i) \right) \\
&\quad = \mathbf{Pr}\left(\bigvee_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \left[h'_i(s_i) = h_i(s_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i-1} h'_j(s_j) \neq h_j(s_j) \right] \right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{Pr}\left(h'_i(s_i) = h_i(s_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{i-1} h'_j(s_j) \neq h_j(s_j) \right) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{Pr}\left(h'_i(s_i) = h_i(s_i) \;\middle|\; \bigwedge_{j=1}^{i-1} h'_j(s_j) \neq h_j(s_j) \right)
\end{aligned}$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } \varphi\big) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{Pr}\left(h_i'(s_i) = h_i(s_i) \;\middle|\; \bigwedge_{j=1}^{i-1} h_j'(s_j) \neq h_j(s_j) \right) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \frac{2m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad = \frac{(n + \frac{n(n-1)}{2})2m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad = \frac{(n^2 + n)m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

CNF-QBF está en IP$[n^2 + n]$: la probabilidad de error

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}\big((\mathbf{V}, \mathbf{D'}) \text{ acepte } \varphi\big) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{Pr}\left(h'_i(s_i) = h_i(s_i) \;\middle|\; \bigwedge_{j=1}^{i-1} h'_j(s_j) \neq h_j(s_j) \right) \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{n+\frac{n(n-1)}{2}} \frac{2m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad = \frac{(n + \frac{n(n-1)}{2})2m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad = \frac{(n^2 + n)m}{2^{(n^2+n)m}} \\
&\quad \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

□

Un corolario fundamental

Corolario

$IP = co\text{-}IP$

Un corolario fundamental

Corolario

$IP = co\text{-}IP$

Ejercicio

Demuestre el corolario

Un corolario fundamental

Corolario

$IP = co\text{-}IP$

Ejercicio

Demuestre el corolario

- Dado un protocolo interactivo para un lenguaje L, ¿cómo construye un protocolo interactivo para $\overline{L}$?

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Definimos la clase AM[k] como IP[k] pero con una restricción adicional:

> Cada vez que **V** envía una pregunta a **D** tiene que enviarle adicionalmente los bits aleatorios usados

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Definimos la clase AM[k] como IP[k] pero con una restricción adicional:

> Cada vez que **V** envía una pregunta a **D** tiene que enviarle adicionalmente los bits aleatorios usados

Suponga que **V** quiere enviar la pregunta u a **D**, y ha usado los bit aleatorios v en la cinta de bit aleatorios (desde el inicio del protocolo hasta el momento de enviar la pregunta)

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Definimos la clase AM[k] como IP[k] pero con una restricción adicional:

> Cada vez que **V** envía una pregunta a **D** tiene que enviarle adicionalmente los bits aleatorios usados

Suponga que **V** quiere enviar la pregunta u a **D**, y ha usado los bit aleatorios v en la cinta de bit aleatorios (desde el inicio del protocolo hasta el momento de enviar la pregunta)

- Entonces **V** escribe $\vdash u\#v\mathtt{BB}\cdots$ en la cinta de comunicación

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Hablamos entonces de protocolos interactivos con bits aleatorios públicos

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Hablamos entonces de protocolos interactivos con bits aleatorios públicos

- Note que **D** conoce los bits aleatorios usados por **V**, no conoce los que **V** podría usar en el futuro

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Hablamos entonces de protocolos interactivos con bits aleatorios públicos

- Note que **D** conoce los bits aleatorios usados por **V**, no conoce los que **V** podría usar en el futuro

¿Los protocolos interactivos con bit aleatorios públicos son menos poderosos?

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Hablamos entonces de protocolos interactivos con bits aleatorios públicos

- Note que **D** conoce los bits aleatorios usados por **V**, no conoce los que **V** podría usar en el futuro

¿Los protocolos interactivos con bit aleatorios públicos son menos poderosos?

- ¿Funciona el protocolo interactivo estudiado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos?

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Teorema

$$IP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} AM[n^k]$$

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Teorema

$$IP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} AM[n^k]$$

Ejercicio

Demuestre el teorema utilizando la demostración de que PSPACE $\subseteq$ IP

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Teorema

$$IP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} AM[n^k]$$

Ejercicio

Demuestre el teorema utilizando la demostración de que PSPACE $\subseteq$ IP

Tenemos entonces un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Teorema

$$IP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} AM[n^k]$$

Ejercicio

Demuestre el teorema utilizando la demostración de que PSPACE $\subseteq$ IP

Tenemos entonces un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

- ¿Cómo construye este protocolo?

¿Es necesario que la aleatoriedad sea privada?

Teorema

$$IP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} AM[n^k]$$

Ejercicio

Demuestre el teorema utilizando la demostración de que PSPACE $\subseteq$ IP

Tenemos entonces un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

- ¿Cómo construye este protocolo? ¿Tiene un número constante de rondas?

La clase de complejidad AM (Arthur-Merlin)

Para entender la complejidad de GRAPH-ISO necesitamos saber el número exacto de rondas de un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

La clase de complejidad AM (Arthur-Merlin)

Para entender la complejidad de GRAPH-ISO necesitamos saber el número exacto de rondas de un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

La siguiente clase de complejidad juega un papel fundamental en este estudio:

Definición

$AM = AM[2]$

La clase de complejidad AM (Arthur-Merlin)

Para entender la complejidad de GRAPH-ISO necesitamos saber el número exacto de rondas de un protocolo aleatorizado para $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ con bit aleatorios públicos

La siguiente clase de complejidad juega un papel fundamental en este estudio:

Definición

$AM = AM[2]$

Note que AM no es definida de manera análoga a IP

¿Cuál es el poder de AM?

No sabemos si AM $=$ IP

¿Cuál es el poder de AM?

No sabemos si AM $=$ IP

- Se sabe que AM $\subseteq \Pi_2^P$, así que se cree que no es cierto que AM $=$ IP

¿Cuál es el poder de AM?

No sabemos si AM = IP

- Se sabe que AM $\subseteq \Pi_2^P$, así que se cree que no es cierto que AM = IP

De hecho es un problema abierto si AM = co-AM

¿Cuál es el poder de AM?

No sabemos si AM = IP

- Se sabe que $\mathsf{AM} \subseteq \Pi_2^P$, así que se cree que no es cierto que AM = IP

De hecho es un problema abierto si AM = co-AM

- Pero sabemos que $\mathsf{BPP} \subseteq \mathsf{AM} \cap \text{co-AM} \subseteq \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P$

Un resultado fundamental: $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ está en AM

Teorema

$\overline{GRAPH\text{-}ISO} \in AM$

Un resultado fundamental: $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ está en AM

Teorema

$\overline{GRAPH\text{-}ISO} \in AM$

Este resultado es fundamental para entender la complejidad de GRAPH-ISO

Un resultado fundamental: $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ está en AM

Teorema

$\overline{\textit{GRAPH-ISO}} \in \textit{AM}$

Este resultado es fundamental para entender la complejidad de GRAPH-ISO

- Note que de este resultado concluimos que GRAPH-ISO $\in$ AM $\cap$ co-AM

Un resultado fundamental: $\overline{\text{GRAPH-ISO}}$ está en AM

Teorema

$\overline{\textit{GRAPH-ISO}} \in \textit{AM}$

Este resultado es fundamental para entender la complejidad de GRAPH-ISO

- Note que de este resultado concluimos que GRAPH-ISO $\in$ AM $\cap$ co-AM

Para hacer la demostración primero mostramos que AM es la extensión de BPP cuando consideramos no determinismo

Extendiendo la definición de BPP

Recuerde que un lenguaje L sobre un alfabeto Σ está en BPP si existe una MT probabilística M tal que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

- Si $w \in L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s) \text{ acepte}) \geq \frac{3}{4}$
- Si $w \notin L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s) \text{ acepte}) \leq \frac{1}{4}$

Extendiendo la definición de BPP

Recuerde que un lenguaje L sobre un alfabeto Σ está en BPP si existe una MT probabilística M tal que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

- Si $w \in L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s) \text{ acepte}) \geq \frac{3}{4}$
- Si $w \notin L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s) \text{ acepte}) \leq \frac{1}{4}$

Podemos extender la definición permitiendo a M ser no determinista

- $M(w,s)$ acepta si y sólo si existe una ejecución de M con entrada (w,s) que se detiene en un estado final

La clase de complejidad ND-BPP

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ. Entonces L está en ND-BPP si existe una MT probabilística no determinista M tal que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

- *Si $w \in L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s)$ acepte$) \geq \frac{3}{4}$*
- *Si $w \notin L$, entonces $\mathbf{Pr}_s(M(w,s)$ acepte$) \leq \frac{1}{4}$*

AM y ND-BPP son la misma clase

Teorema

$AM = ND\text{-}BPP$

AM y ND-BPP son la misma clase

Teorema

$AM = ND\text{-}BPP$

Ejercicio

Demuestre el teorema

AM y ND-BPP son la misma clase

Teorema

$AM = ND\text{-}BPP$

Ejercicio

Demuestre el teorema

Vamos a utilizar la caracterización de AM dada por ND-BPP en la demostración de que $\overline{\text{GRAPH-ISO}} \in \text{AM}$

Un poco de notación para grafos

Sin perdida de generalidad, suponemos desde ahora en adelante que si un grafo $G = (N, A)$ tiene n nodos, entonces $N = \{1, \ldots, n\}$

- Tenemos entonces 2^{n^2} grafos con n nodos

Un poco de notación para grafos

Sin perdida de generalidad, suponemos desde ahora en adelante que si un grafo $G = (N, A)$ tiene n nodos, entonces $N = \{1, \ldots, n\}$

- Tenemos entonces 2^{n^2} grafos con n nodos

Notación

Dado un grafo $G = (N, A)$ y una biyección $f : N \to N$, definimos $f(G)$ como un grafo (N, A') tal que para cada $(a, b) \in N \times N$:

$$(a, b) \in A \text{ si y sólo si } (f(a), f(b)) \in A'$$

Un poco de notación para grafos

Sin perdida de generalidad, suponemos desde ahora en adelante que si un grafo $G = (N, A)$ tiene n nodos, entonces $N = \{1, \ldots, n\}$

- Tenemos entonces 2^{n^2} grafos con n nodos

Notación

Dado un grafo $G = (N, A)$ y una biyección $f : N \to N$, definimos $f(G)$ como un grafo (N, A') tal que para cada $(a, b) \in N \times N$:

$$(a, b) \in A \text{ si y sólo si } (f(a), f(b)) \in A'$$

Note que G y $f(G)$ son grafos isomorfos en la definición anterior.

- De hecho f es un isomorfismo de G en $f(G)$

Los automorfismos de un grafo

Definición

Dado un grafo $G = (N, A)$ y una biyección $f : N \to N$, decimos que f es un automorfismo para G si $f(G) = G$

El conjunto de los automorfismos de un grafo G es denotado como $\mathrm{Aut}(G)$

- Note que si G tiene n nodos, entonces $|\mathrm{Aut}(G)| \leq n!$

Los automorfismos de un grafo

Definición

Dado un grafo $G = (N, A)$ y una biyección $f : N \to N$, decimos que f es un automorfismo para G si $f(G) = G$

El conjunto de los automorfismos de un grafo G es denotado como $\mathrm{Aut}(G)$

- Note que si G tiene n nodos, entonces $|\mathrm{Aut}(G)| \leq n!$

Ejercicio

Sea n un número natural arbitrario.

1. Construya un grafo G_1 con n nodos tal que $|\mathrm{Aut}(G_1)| = n!$
2. Construya un grafo G_2 con n nodos tal que $|\mathrm{Aut}(G_2)| = 1$

Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere el siguiente grafo $G = (N, A)$:

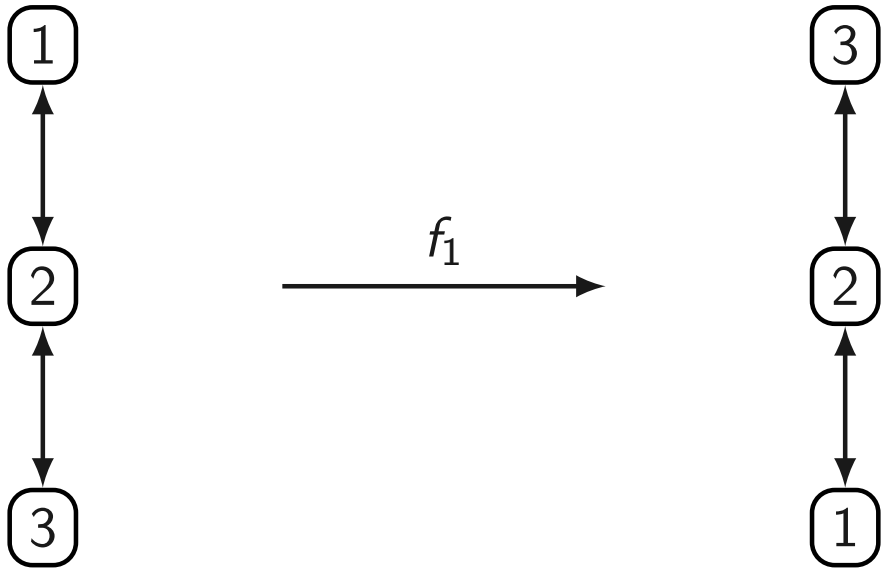
En este caso tenemos que $N = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere la biyección $f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 2$ y $f_1(3) = 1$:

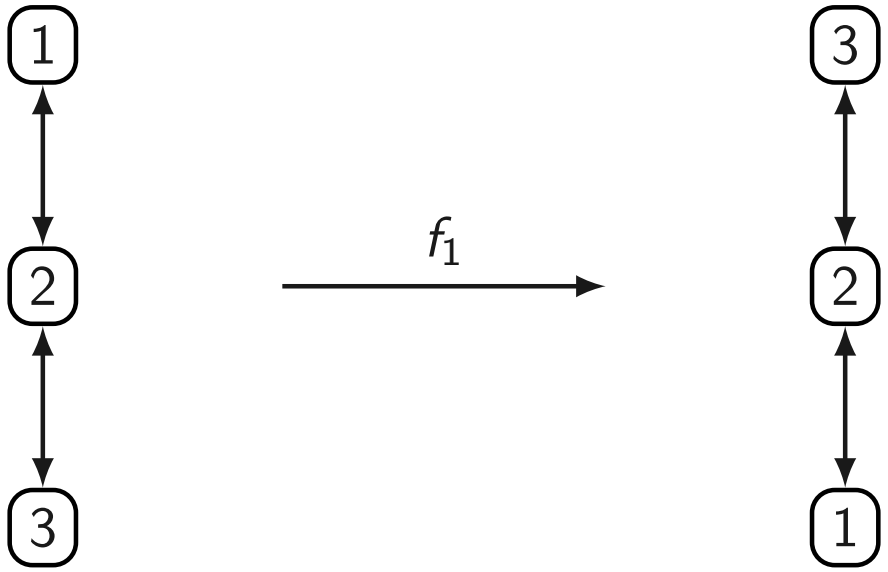
Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere la biyección $f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 2$ y $f_1(3) = 1$:



Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere la biyección $f_1(1) = 3$, $f_1(2) = 2$ y $f_1(3) = 1$:



f_1 es un automorfismo para G ya que $f_1(G) = G$

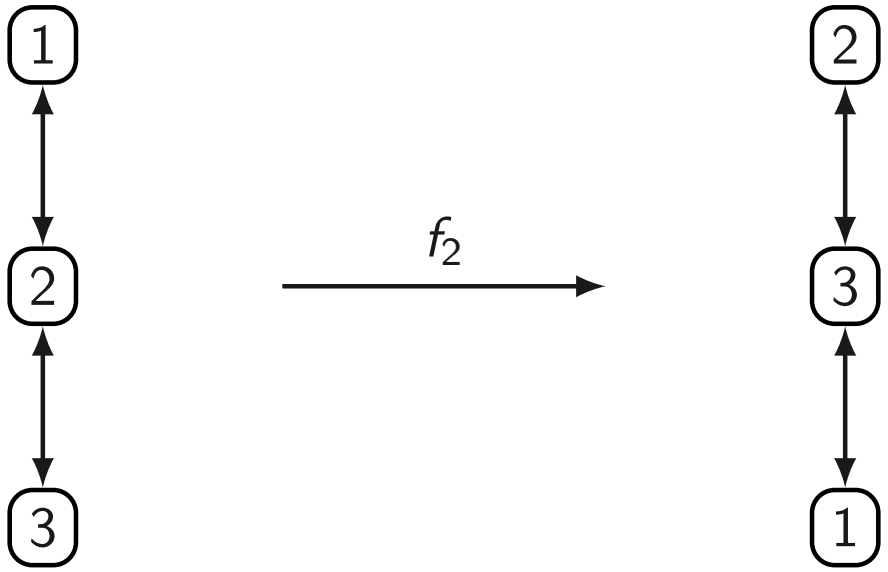
- En particular, si $f_1(G) = (N, A')$ entonces $A = A'$

Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere ahora la biyección $f_2(1) = 2$, $f_2(2) = 3$ y $f_2(3) = 1$:

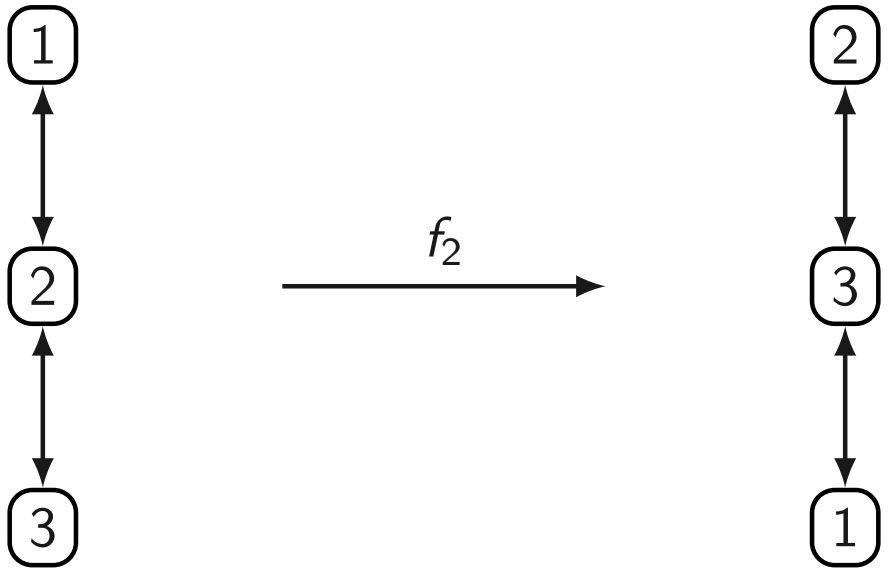
Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere ahora la biyección $f_2(1) = 2$, $f_2(2) = 3$ y $f_2(3) = 1$:



Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Considere ahora la biyección $f_2(1) = 2$, $f_2(2) = 3$ y $f_2(3) = 1$:

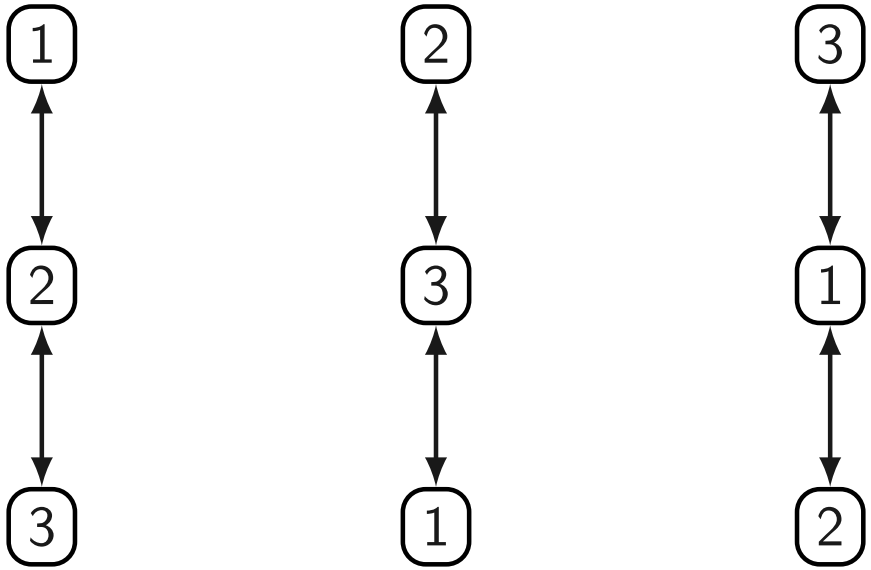


f_2 no es un automorfismo para G ya que $f_2(G) \neq G$

- En particular, el arco $(1, 2)$ está G pero no en $f_2(G)$

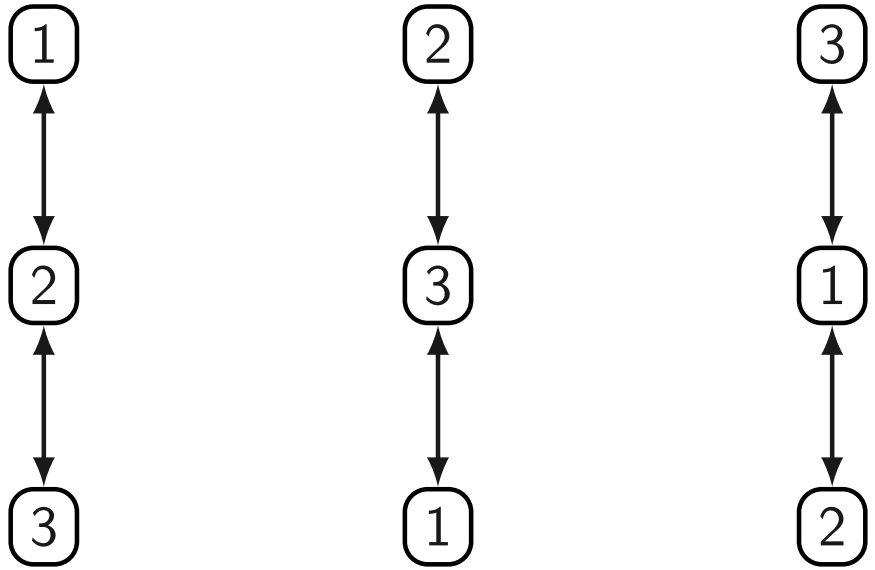
Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Para el caso de G tenemos seis biyecciones posibles que generan tres grafos distintos:



Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

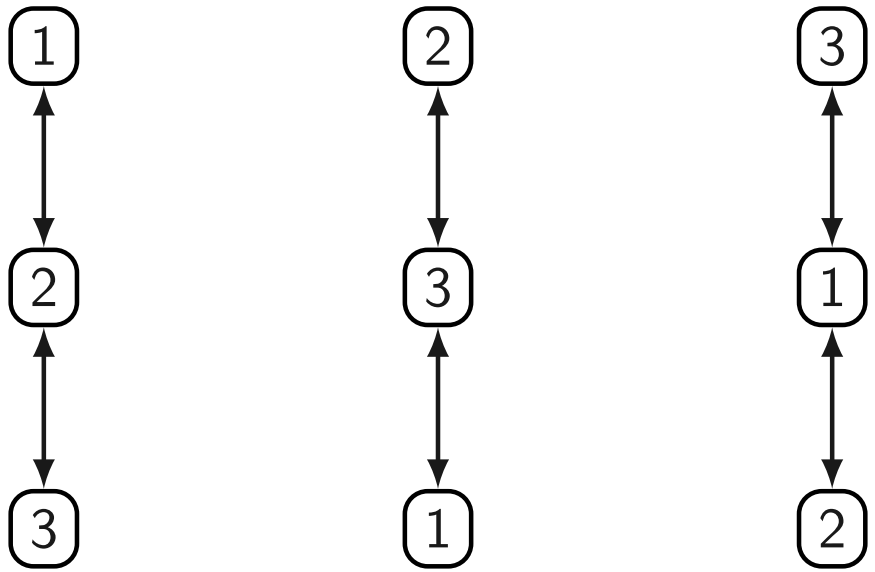
Para el caso de G tenemos seis biyecciones posibles que generan tres grafos distintos:



Tenemos entonces tres grafos distintos que son isomorfos a G

Contando el número de grafos isomorfos a un grafo

Para el caso de G tenemos seis biyecciones posibles que generan tres grafos distintos:



Tenemos entonces tres grafos distintos que son isomorfos a G

- Esto corresponde al número de biyecciones de tres elementos dividido por el número de automorfismo de G. ¿Tiene sentido esta interpretación? ¿Puede ser generalizada?

El número de grafos isomorfos a un grafo

Recuerde que estamos suponiendo que si un grafo tiene n nodos, entonces sus nodos son $1, \ldots, n$

El número de grafos isomorfos a un grafo

Recuerde que estamos suponiendo que si un grafo tiene n nodos, entonces sus nodos son $1, \ldots, n$

Lema

Sea G es un grafo con n nodos. El número de grafos isomorfos a G es:

$$\frac{n!}{|Aut(G)|}$$

El número de grafos isomorfos a un grafo

Recuerde que estamos suponiendo que si un grafo tiene n nodos, entonces sus nodos son $1, \ldots, n$

Lema

Sea G es un grafo con n nodos. El número de grafos isomorfos a G es:

$$\frac{n!}{|Aut(G)|}$$

Demostración: Sea $B = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ es una biyección}\}$

Defina $\sim$ como la siguiente relación sobre B. Para cada $f_1, f_2 \in B$:

$$f_1 \sim f_2 \quad \text{si y sólo si} \quad f_1(G) = f_2(G)$$

Demostración del lema

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre B

- ¿Por qué?

Demostración del lema

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre B

- ¿Por qué?

Sea $[f]_\sim$ la clase de equivalencia de $f \in B$

Demostración del lema

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre B

- ¿Por qué?

Sea $[f]_\sim$ la clase de equivalencia de $f \in B$

El número de clases de equivalencia de $\sim$ corresponde al número de grafos isomorfos a G

- ¿Por qué?

Demostración del lema

Vamos a demostrar las siguientes propiedades:

1. Si id es la función identidad sobre $\{1, \ldots, n\}$: $[\mathrm{id}]_\sim = \mathrm{Aut}(G)$
2. Para cada $f_1, f_2 \in B$: $|[f_1]_\sim| = |[f_2]_\sim|$

Demostración del lema

Vamos a demostrar las siguientes propiedades:

1. Si id es la función identidad sobre $\{1, \ldots, n\}$: $[\mathrm{id}]_\sim = \mathrm{Aut}(G)$
2. Para cada $f_1, f_2 \in B$: $|[f_1]_\sim| = |[f_2]_\sim|$

De esto concluimos que el número de clases de equivalencia de $\sim$ es $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$, que es lo que teníamos que demostrar.

- ¿Por qué?

Demostración del lema

En primer lugar tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{id}]_{\sim} &= \{f \in B \mid \mathrm{id} \sim f\} \\
&= \{f \in B \mid \mathrm{id}(G) = f(G)\} \\
&= \{f \in B \mid G = f(G)\} \\
&= \mathrm{Aut}(G)
\end{aligned}$$

Demostración del lema

Sean $f_1, f_2 \in B$

Demostración del lema

Sean $f_1, f_2 \in B$

En segundo lugar tenemos que demostrar que $|[f_1]_\sim| = |[f_2]_\sim|$

Demostración del lema

Sean $f_1, f_2 \in B$

En segundo lugar tenemos que demostrar que $|[f_1]_\sim| = |[f_2]_\sim|$

Para hacer esto vamos a construir una biyección $\mathcal{T} : [f_1]_\sim \to [f_2]_\sim$

Demostración del lema

Sean $f_1, f_2 \in B$

En segundo lugar tenemos que demostrar que $|[f_1]_\sim| = |[f_2]_\sim|$

Para hacer esto vamos a construir una biyección $\mathcal{T} : [f_1]_\sim \to [f_2]_\sim$

Para cada $f \in [f_1]_\sim$, se define $\mathcal{T}(f)$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}(f) \quad = \quad (f_2 \circ f_1^{-1} \circ f)$$

Demostración del lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

- Vale decir, si $f \in [f_1]_\sim$, entonces $\mathcal{T}(f) \in [f_2]_\sim$

Demostración del lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

- Vale decir, si $f \in [f_1]_\sim$, entonces $\mathcal{T}(f) \in [f_2]_\sim$

Si $f \in [f_1]_\sim$ tenemos que $f(G) = f_1(G)$. De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} f_2(f_1^{-1}(f(G))) &= f_2(f_1^{-1}(f_1(G))) \\ &= f_2(G) \end{aligned}$$

Demostración del lema

Primero tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ está bien definida.

- Vale decir, si $f \in [f_1]_\sim$, entonces $\mathcal{T}(f) \in [f_2]_\sim$

Si $f \in [f_1]_\sim$ tenemos que $f(G) = f_1(G)$. De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} f_2(f_1^{-1}(f(G))) &= f_2(f_1^{-1}(f_1(G))) \\ &= f_2(G) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\mathcal{T}(f)(G) = f_2(G)$

- Vale decir $f_2 \sim \mathcal{T}(f)$, de lo que concluimos que $\mathcal{T}(f) \in [f_2]_\sim$

Demostración del lema

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{T}$ es una función 1-1

Demostración del lema

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{T}$ es una función 1-1

Utilizando la asociatividad de la composición de funciones obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}(g) \quad &\Rightarrow \quad (f_2 \circ f_1^{-1} \circ f) = (f_2 \circ f_1^{-1} \circ g) \\
&\Rightarrow \quad (f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_2 \circ f_1^{-1} \circ f) = (f_1 \circ f_2^{-1}) \circ (f_2 \circ f_1^{-1} \circ g) \\
&\Rightarrow \quad (f_1 \circ (f_2^{-1} \circ f_2) \circ f_1^{-1} \circ f) = (f_1 \circ (f_2^{-1} \circ f_2) \circ f_1^{-1} \circ g) \\
&\Rightarrow \quad (f_1 \circ \mathrm{id} \circ f_1^{-1} \circ f) = (f_1 \circ \mathrm{id} \circ f_1^{-1} \circ g) \\
&\Rightarrow \quad ((f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f) = ((f_1 \circ f_1^{-1}) \circ g) \\
&\Rightarrow \quad (\mathrm{id} \circ f) = (\mathrm{id} \circ g) \\
&\Rightarrow \quad f = g
\end{aligned}
$$

Demostración del lema

Finalmente vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Demostración del lema

Finalmente vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $g \in [f_2]_\sim$ y defina f como $(f_1 \circ f_2^{-1} \circ g)$

Demostración del lema

Finalmente vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ es sobre.

Sea $g \in [f_2]_\sim$ y defina f como $(f_1 \circ f_2^{-1} \circ g)$

Tenemos que $f \in [f_1]_\sim$ ya que:

$$\begin{aligned} f(G) &= (f_1 \circ f_2^{-1} \circ g)(G) \\ &= f_1(f_2^{-1}(g(G))) \\ &= f_1(f_2^{-1}(f_2(G))) \\ &= f_1(G) \end{aligned}$$

Demostración del lema

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(f) &= (f_2 \circ f_1^{-1} \circ f) \\
&= (f_2 \circ f_1^{-1} \circ (f_1 \circ f_2^{-1} \circ g)) \\
&= (f_2 \circ (f_1^{-1} \circ f_1) \circ f_2^{-1} \circ g) \\
&= (f_2 \circ \mathsf{id} \circ f_2^{-1} \circ g) \\
&= ((f_2 \circ f_2^{-1}) \circ g) \\
&= (\mathsf{id} \circ g) \\
&= g
\end{aligned}$$

Demostración del lema

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(f) &= (f_2 \circ f_1^{-1} \circ f) \\
&= (f_2 \circ f_1^{-1} \circ (f_1 \circ f_2^{-1} \circ g)) \\
&= (f_2 \circ (f_1^{-1} \circ f_1) \circ f_2^{-1} \circ g) \\
&= (f_2 \circ \mathsf{id} \circ f_2^{-1} \circ g) \\
&= ((f_2 \circ f_2^{-1}) \circ g) \\
&= (\mathsf{id} \circ g) \\
&= g
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\mathcal{T}(f) = g$ □

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Dado un par de grafos (G_1, G_2), queremos definir un conjunto $\text{num}(G_1, G_2)$ con las siguientes propiedades:

1. Cada elemento de $\text{num}(G_1, G_2)$ es de tamaño polinomial en el tamaño de (G_1, G_2)
2. Cada elemento de $\text{num}(G_1, G_2)$ tiene un testigo de tamaño polinomial de su pertenencia al conjunto
3. Para grafos con n nodos, la cantidad de elementos de $\text{num}(G_1, G_2)$ es necesariamente mayor si G_1 y G_2 no son isomorfos.

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Ejemplo

Podríamos intentar definir $\text{num}(G_1, G_2)$ de la siguiente forma:

$$\text{num}(G_1, G_2) \quad = \quad \{f \mid f \text{ es un isomorfismo de } G_1 \text{ a } G_2\}$$

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Ejemplo

Podríamos intentar definir $\text{num}(G_1, G_2)$ de la siguiente forma:

$$\text{num}(G_1, G_2) \quad = \quad \{f \mid f \text{ es un isomorfismo de } G_1 \text{ a } G_2\}$$

Esta función satisface 1 y 2, pero no 3

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Vamos a considerar la siguiente definición del conjunto $\text{num}(G_1, G_2)$:

$$\text{num}(G_1, G_2) = \{(H, i, f) \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2, \\ i \in \{1, 2\} \text{ y } f \in \text{Aut}(G_i)\}$$

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Vamos a considerar la siguiente definición del conjunto $\text{num}(G_1, G_2)$:

$$\text{num}(G_1, G_2) = \{(H, i, f) \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2, \\ i \in \{1, 2\} \text{ y } f \in \text{Aut}(G_i)\}$$

$\text{num}(G_1, G_2)$ satisface las condiciones 1 y 2

- ¿Cómo se demuestra que satisface la condición 2?

Definiendo un testigo (probabilístico) para grafos no isomorfos

Vamos a considerar la siguiente definición del conjunto $\text{num}(G_1, G_2)$:

$$\text{num}(G_1, G_2) = \{(H, i, f) \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2, \\ i \in \{1, 2\} \text{ y } f \in \text{Aut}(G_i)\}$$

$\text{num}(G_1, G_2)$ satisface las condiciones 1 y 2

- ¿Cómo se demuestra que satisface la condición 2?

Vamos a demostrar que $\text{num}(G_1, G_2)$ además satisface la condición 3

El conjunto num(G_1, G_2) nos ayuda a distinguir

Lema

Sean G_1 y G_2 dos grafos con n nodos cada uno. Si G_1 es isomorfo a G_2, entonces se tiene que $|num(G_1, G_2)| = 2 \cdot n!$, si no se tiene que $|num(G_1, G_2)| \geq 4 \cdot n!$

El conjunto num(G_1, G_2) nos ayuda a distinguir

Lema

Sean G_1 y G_2 dos grafos con n nodos cada uno. Si G_1 es isomorfo a G_2, entonces se tiene que $|num(G_1, G_2)| = 2 \cdot n!$, si no se tiene que $|num(G_1, G_2)| \geq 4 \cdot n!$

¿Por qué en el lema sólo consideramos grafos con el mismo número de nodos?

- ¿Cómo manejamos el caso en el que los grafos tienen distinto número de nodos?

Demostración del lema

Primero suponemos que G_1 y G_2 son grafos isomorfos

- Recuerde que el número de grafos isomorfos a un grafo G con n nodos es $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$

Demostración del lema

Primero suponemos que G_1 y G_2 son grafos isomorfos

- Recuerde que el número de grafos isomorfos a un grafo G con n nodos es $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{num}(G_1, G_2)| &= |\{(H, i, f) \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2, \\
&\qquad\qquad i \in \{1, 2\} \text{ y } f \in \mathrm{Aut}(G_i)\}| \\
&= |\{H \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2\}| \cdot \\
&\qquad\qquad (|\mathrm{Aut}(G_1)| + |\mathrm{Aut}(G_2)|) \\
&= |\{H \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1\}| \cdot 2|\mathrm{Aut}(G_1)| \\
&= \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G_1)|} \cdot 2|\mathrm{Aut}(G_1)| \\
&= 2 \cdot n!
\end{aligned}$$

Demostración del lema

Suponemos ahora que G_1 y G_2 no son grafos isomorfos

Demostración del lema

Suponemos ahora que G_1 y G_2 no son grafos isomorfos

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\text{num}(G_1, G_2)| &= |\{(H, i, f) \mid H \text{ es un grafo isomorfo a } G_1 \text{ o } G_2, \\
&\qquad\qquad i \in \{1, 2\} \text{ y } f \in \text{Aut}(G_i)\}| \\
&= (|\{H_1 \mid H_1 \text{ es un grafo isomorfo a } G_1\}| + \\
&\quad |\{H_2 \mid H_2 \text{ es un grafo isomorfo a } G_2\}|) \cdot \\
&\qquad\qquad (|\text{Aut}(G_1)| + |\text{Aut}(G_2)|) \\
&= \left(\frac{n!}{|\text{Aut}(G_1)|} + \frac{n!}{|\text{Aut}(G_2)|}\right) \cdot (|\text{Aut}(G_1)| + |\text{Aut}(G_2)|) \\
&= n! \frac{(|\text{Aut}(G_1)| + |\text{Aut}(G_2)|)^2}{|\text{Aut}(G_1)| \cdot |\text{Aut}(G_2)|}
\end{aligned}$$

Demostración del lema

Para terminar la demostración usamos la siguiente observación:

Observación

Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $(a+b)^2 \geq 4ab$, puesto que:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab \end{aligned}$$

Demostración del lema

Para terminar la demostración usamos la siguiente observación:

Observación

Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $(a+b)^2 \geq 4ab$, puesto que:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \end{aligned}$$

Concluimos que $\frac{(|\mathrm{Aut}(G_1)|+|\mathrm{Aut}(G_2)|)^2}{|\mathrm{Aut}(G_1)|\cdot|\mathrm{Aut}(G_2)|} \geq 4$, de lo que obtenemos que $|\mathrm{num}(G_1, G_2)| \geq 4 \cdot n!$ □