Métodos Quantitativos
Aula 06

Regressão e Predição (Parte 1)

Roberto Massi de Oliveira
Alex Borges Vieira

Revisão: Coeficiente de Correlação

- Quando dispomos das amostras **x** e **y** de dados bivariados (e.g., peso e altura de um grupo de indivíduos), o coeficiente de correlação é dado por:

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

```
import numpy as np

x = [1.6, 1.7, 1.8, 1.9]
y = [60, 70, 80, 90]
xy = [x, y]

r = np.corrcoef(xy)
```

Revisão: Coeficiente de Correlação

- Varia de -1,0 a 1,0.

- Quando r > 0, à medida que **x** cresce também cresce **y** (em média)

- Quando r < 0, à medida que **x** cresce, **y** decresce (em média)

Revisão: Coeficiente de Correlação

- Ex. 07: Um aluno, com bastante dificuldade numa dada disciplina, foi estudando cada vez mais para melhorar suas notas a cada prova e evitar a reprovação. A tabela abaixo resume o número horas estudadas por dia antes de cada uma das 3 provas realizadas e a nota tirada nas mesmas. Qual o coeficiente de correlação entre as horas estudadas por dia e as notas?

Estudo/Dia	1 h	2 h	3 h
Nota	3,0	7,0	9,0

```python
import numpy as np

t = [1, 2, 3]
n = [3, 7, 10]
tn = [t, n]

r = np.corrcoef(tn)
```

r =

r(t,t)	r(t,n)
r(n,t)	r(n,n)

r =

1	0,997
0,997	1

Diagrama de Dispersão

- Ex. 01: Vamos imaginar uma amostra com variáveis **dependentes** resumidas na tabela a seguir:

x (investimento)	y (lucro)
95	1200
125	1000
150	1350
160	1700
200	1800
240	2390

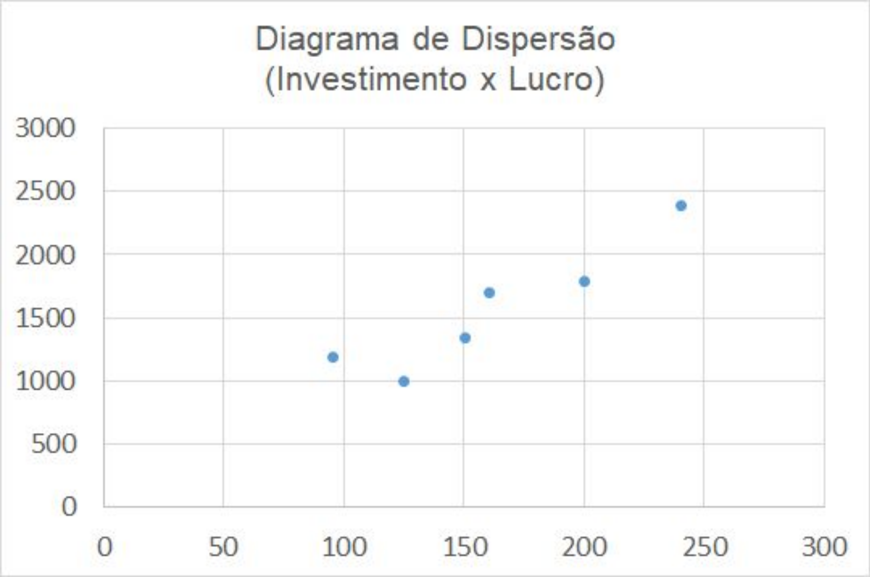


Diagrama de Dispersão

- Ex. 01: Vamos imaginar uma amostra com variáveis **dependentes** resumidas na tabela a seguir (correlação positiva e forte):

x (investimento)	y (lucro)
95	1200
125	1000
150	1350
160	1700
200	1800
240	2390

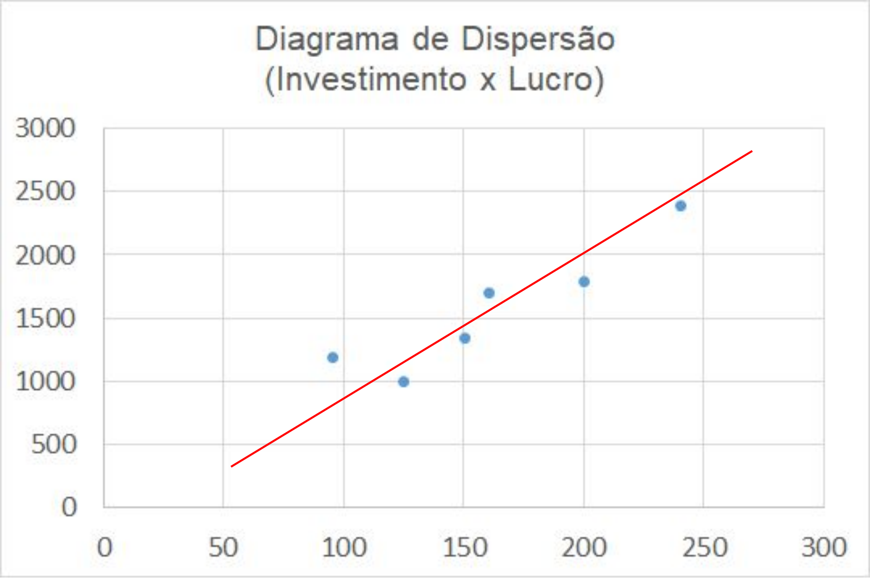


Diagrama de Dispersão

- Ex. 02: Vamos ver como seria o diagrama de dispersão para a amostra resumida na tabela a seguir:

x (preço)	y (vendas)
110	18
120	15
130	13
140	15
150	12
160	10

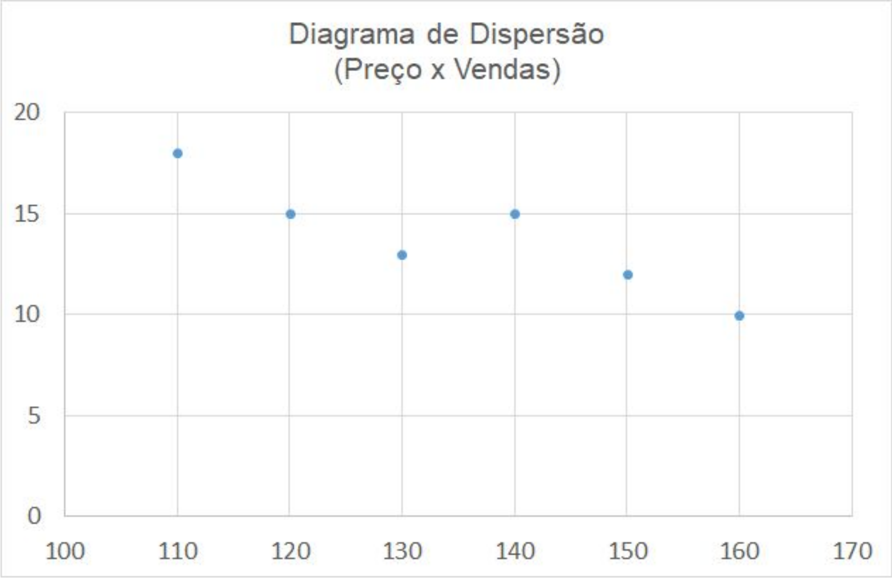


Diagrama de Dispersão

- Ex. 02: Vamos ver como seria o diagrama de dispersão para a amostra resumida na tabela a seguir (correlação negativa e forte):

x (preço)	y (vendas)
110	18
120	15
130	13
140	15
150	12
160	10

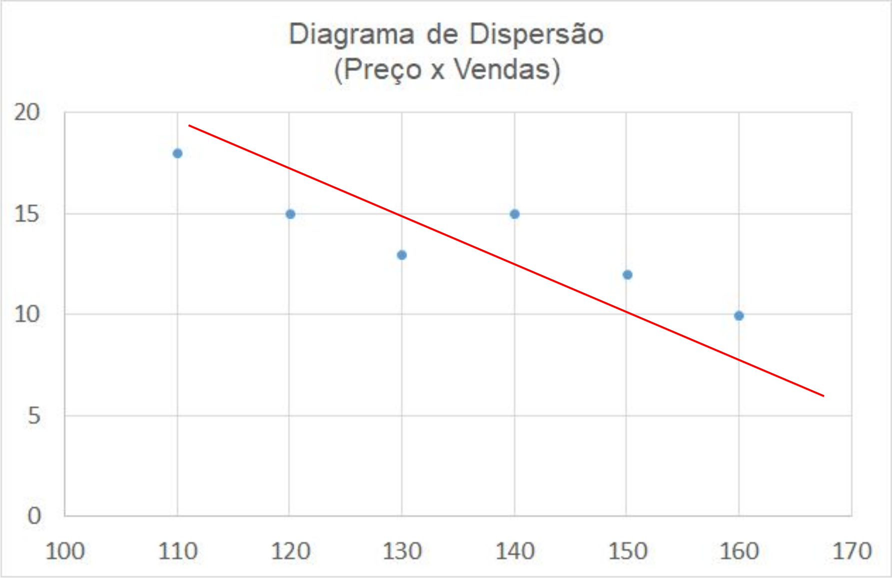
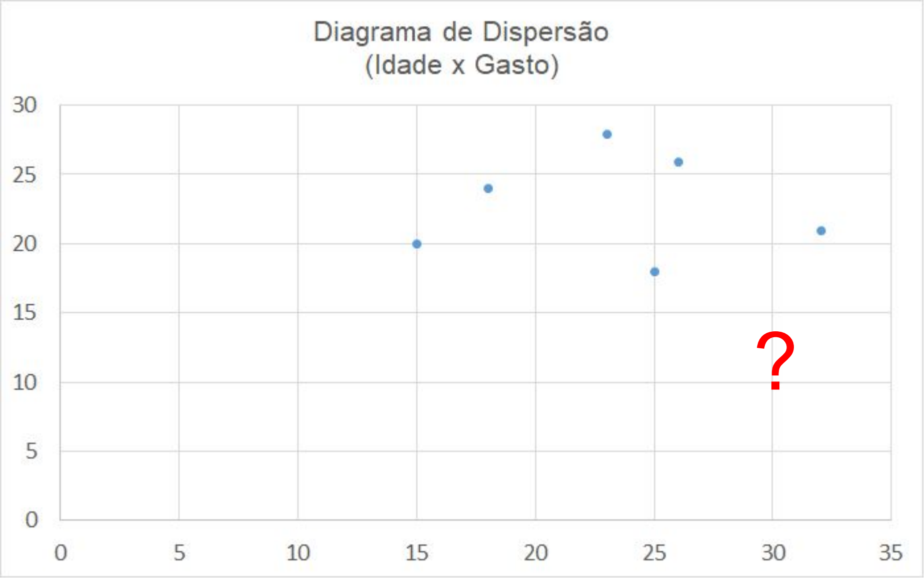


Diagrama de Dispersão

- Ex. 03: Vamos ver como seria o diagrama de dispersão para a amostra resumida na tabela a seguir (correlação fraca ou inexistente):

x (idade)	y (gastos)
15	27
18	25
23	23
25	21
26	28
40	22



Visão Geral: Regressão Linear Simples

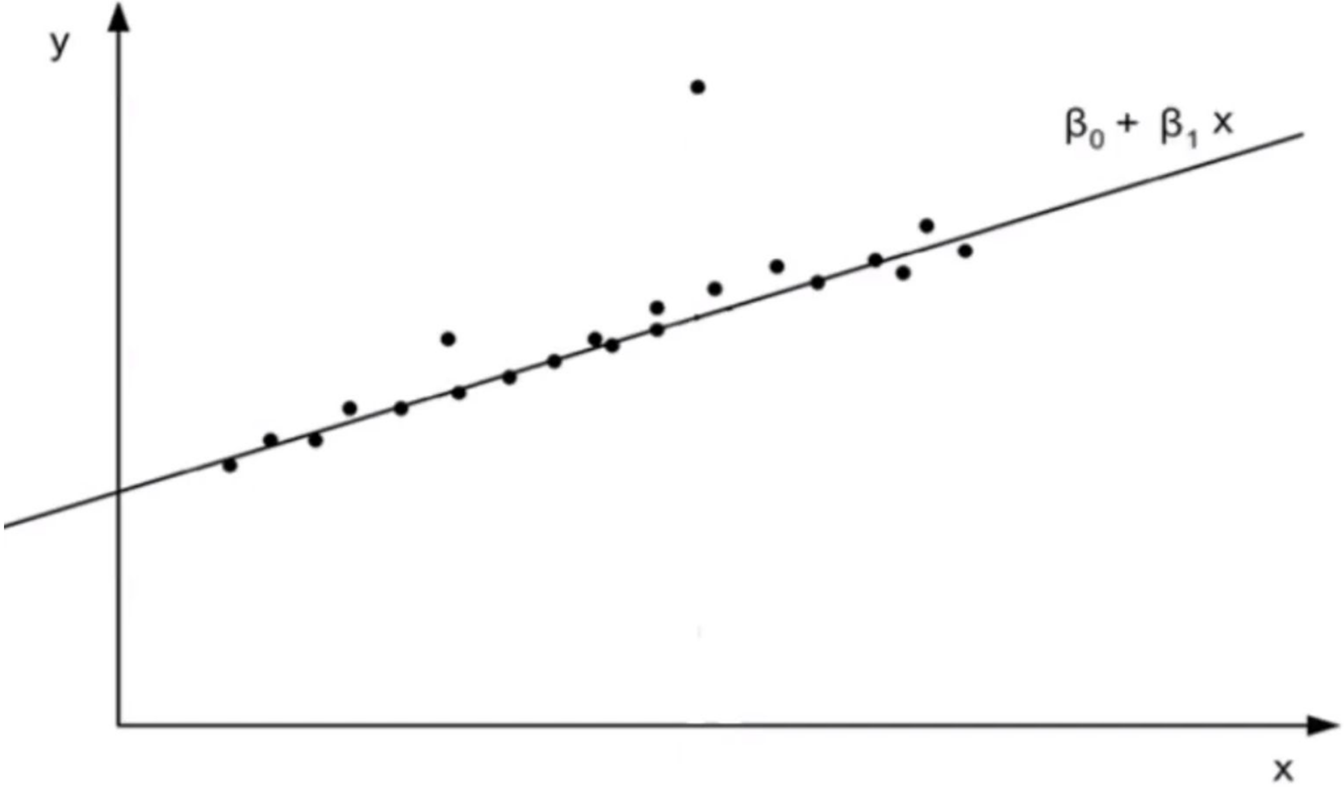
- Modela a relação entre duas variáveis

- Sendo essa relação linear, ela é matematicamente expressa por:

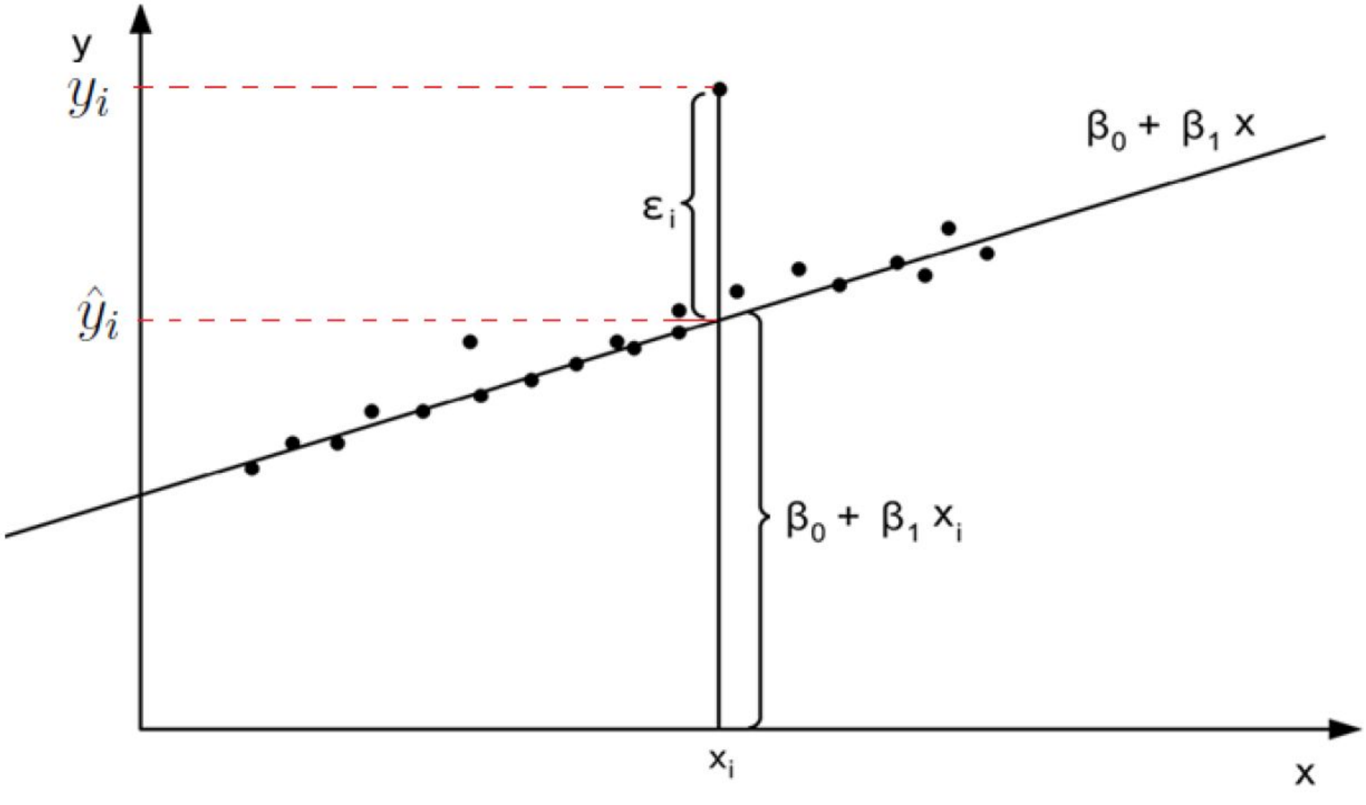
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

  - **y** é a variável **dependente** ou variável **resposta**
  - **x** é a variável **independente**, **regressora**, **explicativa** ou **previsora**
  - **ε** é o termo de **erro**. É a flutuação aleatória que ocorre ao tentar explicar a variável **y** por **x**. Seja por imperfeições do modelo, erros de medida, ou outras variáveis fora de controle.

Visão Geral: Regressão Linear Simples



Visão Geral: Regressão Linear Simples



Visão Geral: Regressão Linear Simples

- Usaremos uma amostra $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ para estimar os parâmetros do modelo β_0 e β_1
- Métodos de estimação:
  - Mínimos quadrados ordinários (MQO)
  - Máxima verossimilhança (MV)
  - Método dos momentos (MM)
  - Melhor estimador não-enviesado (BLUE)
- A seguir, faremos inferências acerca dos parâmetros β_0 e β_1
  - ex.: propriedades dos estimadores, intervalos de confiança, testes de hipótese

Visão Geral: Regressão Linear Múltipla

- Modelo linear:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

- Matematicamente, dizemos que as derivadas parciais de y em relação aos coeficientes de regressão não dependem desses coeficientes

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = 1; \ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} = x_1; \ \ldots; \frac{\partial y}{\partial \beta_p} = x_p$$

- Contra exemplo:

$$y_i = \beta_0 + e^{\beta_2 x_i} + \varepsilon_i$$

Visão Geral: Tipos de Regressão

- Modelo linear simples:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

- Modelo linear múltiplo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

- Modelo não-linear:

$$y_i = \beta_0 + e^{\beta_2 x_i} + \varepsilon_i$$

Visão Geral: Linearização de Modelos

- Transformar modelos não-lineares em modelos lineares
  - É menos complexo trabalhar com as propriedades de modelos lineares
- Dada a função com erros na forma multiplicativa:

$$y_i = \alpha\ e^{\beta x_i} \varepsilon_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Usando logaritmo em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \alpha\ e^{\beta t} \varepsilon \\ \ln y &= \ln \alpha + \beta t + \ln \varepsilon \end{aligned}$$

- Fazendo as substituições $z = \ln y,\ a = \ln a$:

$$z = a + \beta t + \ln \varepsilon$$

Objetivos da Regressão

- Previsão: influência das variáveis independentes **x** na variável resposta **y**

- Descrição dos dados ou explanação: usar modelos para sumarizar ou descrever dados

- Seleção de variáveis ou triagem: determinar a importância de cada variável independente **x** na determinação de **y**. Quanto menor a contribuição de determinada variável, maior a possibilidade de sua exclusão do modelo

- Controle da saída: modelo estimado pode ser usado para controlar a saída **y.** É possível encontrar um modelo ótimo para a variável de saída

Objetivos da Regressão

- Ex. 04: Utilizando um ajuste linear para estimar a tendência da série de consumo mensal de energia elétrica no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2005, obteve-se a equação

$$T_t = 68,445 + 4,242t.$$

Sabendo-se que o valor observado em fevereiro de 2006 foi $185,8$, calcule o erro absoluto de previsão associado à estimativa obtida para o mês de fevereiro de 2006, usando a equação apresentada, e assinale a opção correta.

Temos a seguinte equação de previsão:

$$T_t = 68,445 + 4,242t, \ t = 1, 2, \ldots, 24,$$

Para fevereiro de 2006, $t = 26$, com isso temos:

$$\widehat{T}_{26} = 68,445 + 4,242 \cdot 26 \approx 178,7 \Rightarrow e = T_{26} - \widehat{T}_{26} = 178,7 - 185,8 = 7,1$$

Objetivos da Regressão

- Ex. 04: Utilizando um ajuste linear para estimar a tendência da série de consumo mensal de energia elétrica no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2005, obteve-se a equação

$$T_t = 68,445 + 4,242t.$$

Sabendo-se que o valor observado em fevereiro de 2006 foi 185,8, calcule o erro absoluto de previsão associado à estimativa obtida para o mês de fevereiro de 2006, usando a equação apresentada, e assinale a opção correta.

Temos a seguinte equação de previsão:

$$T_t = 68,445 + 4,242t, \ t = 1, 2, \ldots, 24,$$

Resíduo:

$$\boxed{e_i = y_i - \hat{y}}$$

Para fevereiro de 2006, $t = 26$, com isso temos:

$$\widehat{T}_{26} = 68,445 + 4,242 \cdot 26 \approx 178,7 \Rightarrow e = T_{26} - \widehat{T}_{26} = 178,7 - 185,8 = 7,1$$

Regressão Linear Simples

- Pressupostos:
  - Aquilo que se supõe antecipadamente, que se deseja alcançar
  - Em resumo, assumimos algumas inferências estatísticas para facilitar os cálculos, geramos um modelo e vemos se o modelo se adequa ao comportamento das amostras
  - Ex.: Dado $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, pode-se pressupor que:

$$\mathrm{E}[\varepsilon_i | x_i] = 0;$$

$$\mathrm{Var}[\varepsilon_i | x_i] = \sigma^2, \forall i \in 1, \ldots, n \Rightarrow \text{homocedasticidade (variância constante)}.$$

$$\mathrm{Cov}[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, i \neq j.$$

Regressão Linear Simples

- Pressupostos:

Opcionalmente $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y) &= \mathrm{E}[\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i] \\
\mathrm{E}(y) &= \mathrm{E}[\alpha + \beta x_i] + \mathrm{E}[\varepsilon_i] \\
\mathrm{E}(y) &= \alpha + \beta x_i + \cancelto{0}{\mathrm{E}[\varepsilon_i]} \\
\mathrm{E}(y) &= \alpha + \beta x_i \\
\mathrm{Var}(y) &= \mathrm{Var}(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) = \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow y_i | x_i \sim \mathrm{N}\left(\alpha + \beta x_i, \sigma^2\right)$$

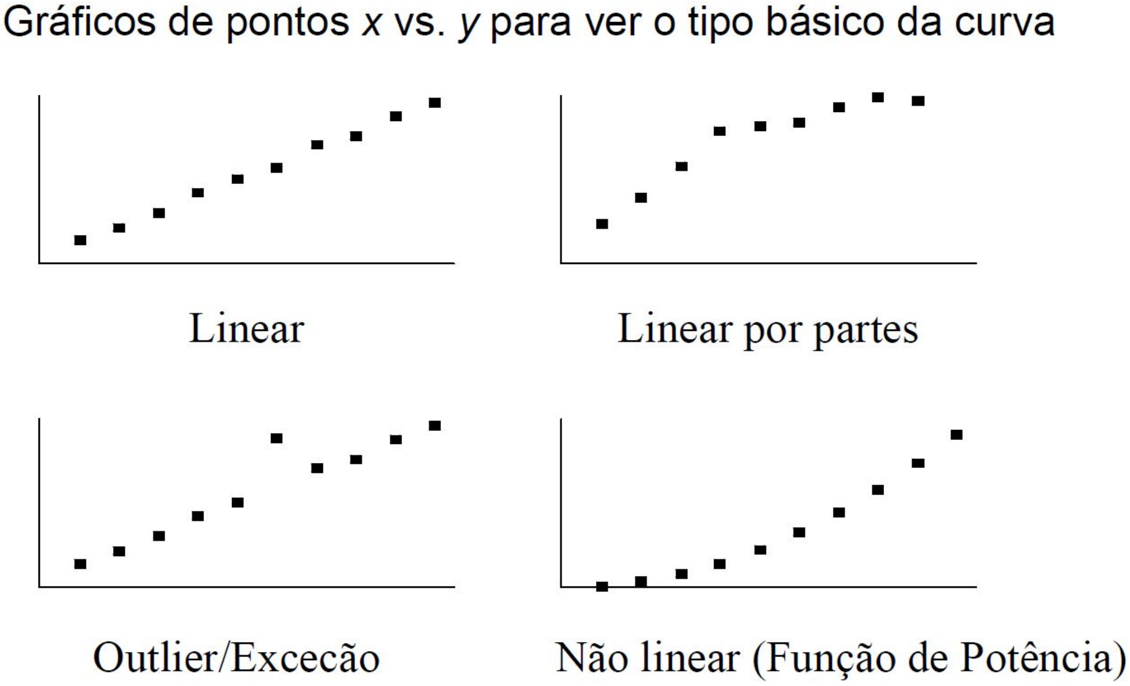
Portanto, no modelo vamos estimar a $\widehat{\mathrm{E}(y)}$.Por preguiça, chamamos essa estimativa de $\hat{y}$.

Teste Visual de Pressupostos

- Observação de gráficos é fundamental para verificar e formular pressupostos
- Alguns testes importantes:
  - Teste visual de linearidade
  - Teste visual de independência dos erros
  - Teste visual de erros normais
  - Teste visual de homocedasticidade (variância constante)
- Os testes podem ser realizados observando diagramas de dispersão

Teste Visual de Pressupostos

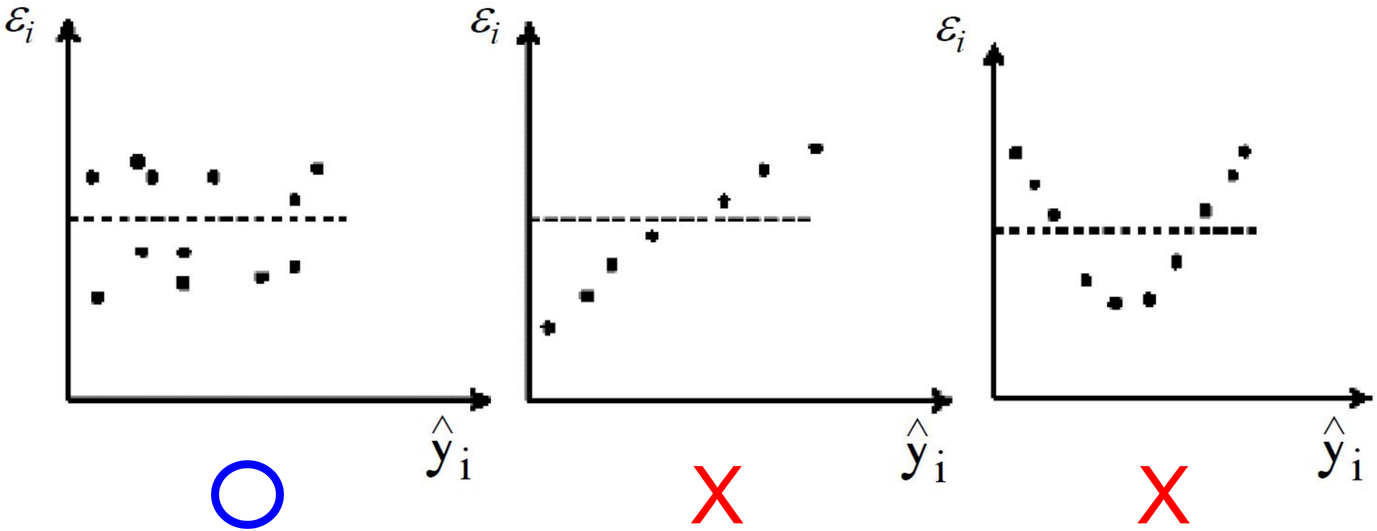
- Ex. (linearidade):



Teste Visual de Pressupostos

- Ex. (independência dos erros):

Gráfico de pontos ε_i versus $\hat{y}_i$
Não deve haver tendência visível



Teste Visual de Pressupostos

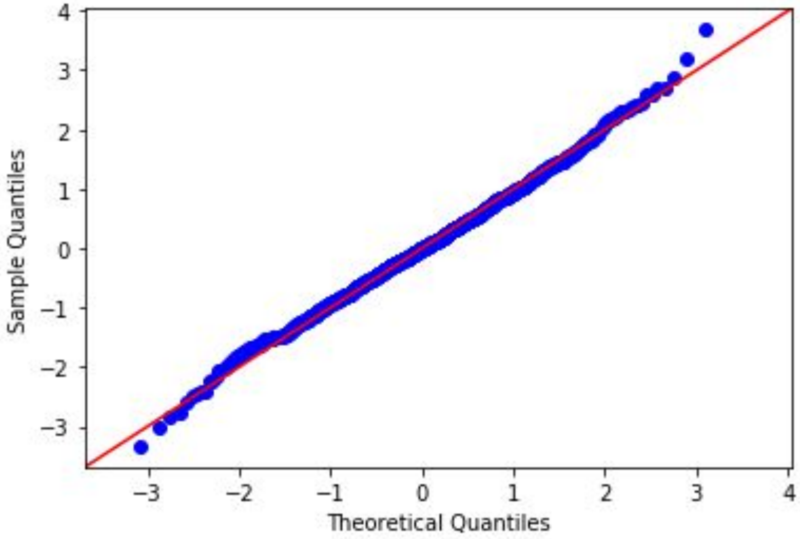
- Ex. (erros normais):

  Analizar o Q-Q plot (gráfico quantil-quantil)

  Caso os pontos plotados se aproximem da reta da normal, diz-se que os erros são normais

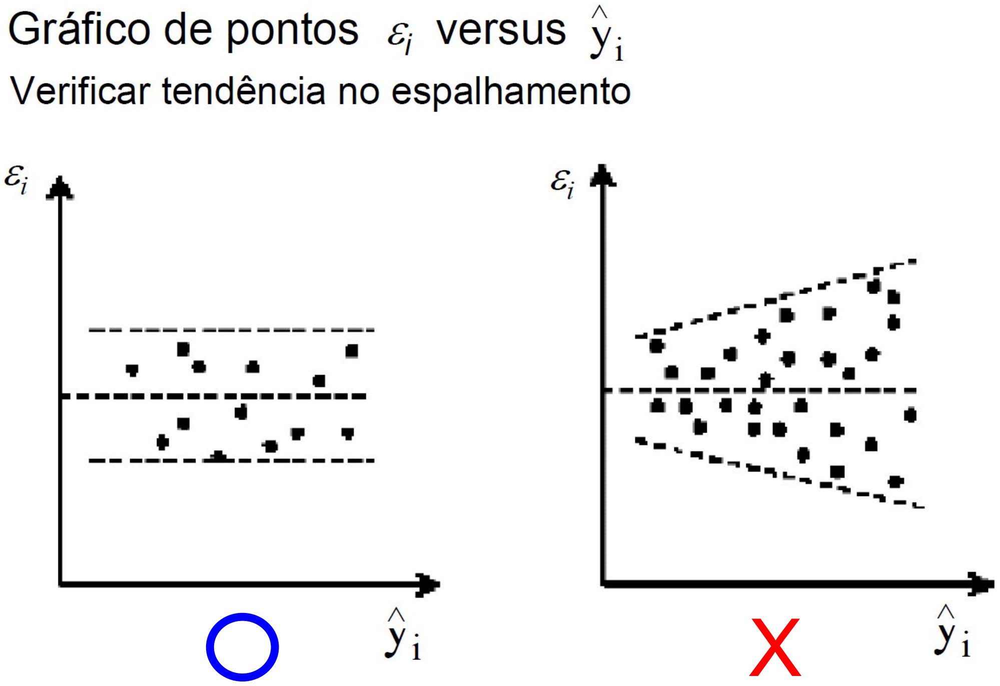
```python
import numpy as np
import statsmodels.api as sm
import pylab

sample = np.random.normal(0,1, 1000)

sm.qqplot(sample, line='45')
pylab.show()
```

https://www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.graphics.gofplots.qqplot.html



Teste Visual de Pressupostos

- Ex. (homocedasticidade):



Caso haja tendência ao espalhamento, usar regressão não-linear ou linearização

Método dos Mínimos Quadrados (MQO)

- Considerando o modelo: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
- Estimado por: $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x$
  - **Ao inserir pressupostos no modelo, transformamos parâmetros em estimadores**
  - Os parâmetros de $\hat{y}_i$ são calculados a partir de uma amostra
- Tomamos o erro aleatório (resíduo): $e_i = y_i - \hat{y}$
- Método dos mínimos quadrados:

$$\boxed{f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2 = 0}$$

Método dos Mínimos Quadrados (MQO)

- Os melhores parâmetros para regressão (que levam ao menor erro) são:

$$b_1 = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

- onde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$$

$$\sum xy = \sum x_i y_i \qquad \sum x^2 = \sum x_i^2$$

Método dos Mínimos Quadrados (MQO)

- Ex. 05: Tempo de execução de um query para várias palavras:

x	Palavras	3	5	7	9	10
y	Tempo	1.19	1.73	2.53	2.89	3.26

$\bar{x} = 6.8$, $\bar{y} = 2.32$, $\Sigma xy = 88.54$, $\Sigma x^2 = 264$

$$b_1 = \frac{88.54 - (5)(6.8)(2.32)}{264 - (5)(6.8)^2} = 0.29$$

$$b_0 = 2.32 - (0.29)(6.8) = 0.35$$

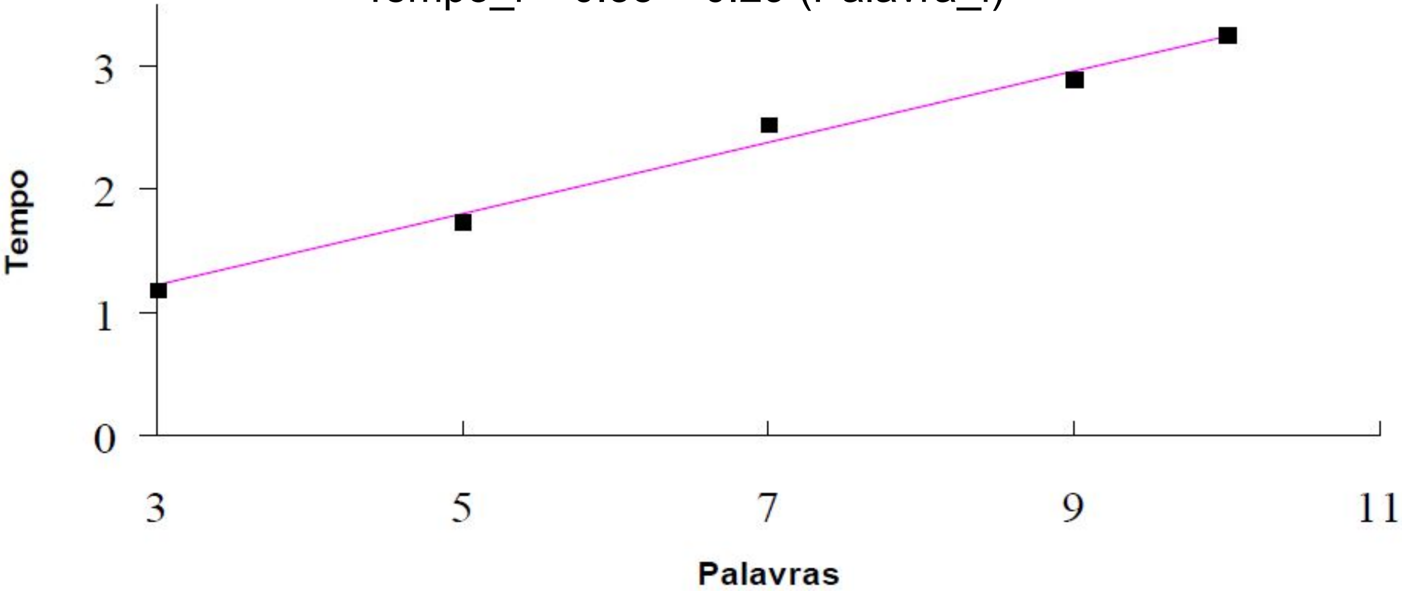
$$\boxed{b_1 = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}}$$

Método dos Mínimos Quadrados (MQO)

- Ex. 05:

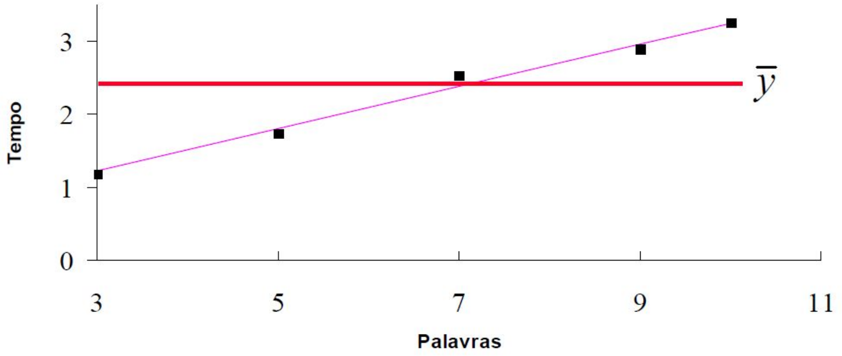
$$\hat{y}_i = 0.35 + 0.29\, x_i$$

Tempo_i = 0.35 + 0.29 (Palavra_i)



Qualidade da Regressão

- Vale lembrar que a média acompanhada do desvio padrão é uma boa estimativa de uma amostra
- Regressão provê uma melhor estimativa, mas ainda existem erros
    - Ex.: Gráfico da regressão (linha inclinada) e da média (linha horizontal)



- Podemos avaliar a qualidade da regressão pela alocação das fontes de erros

Qualidade da Regressão

- Algumas notações importantes:
  - SSE – Sum of Squared Errors (soma dos quadrados residuais, com regressão)

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

  - SST – Total Sum of Squares (soma dos quadrados residuais, sem regressão)

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) - n\bar{y}^2 = \text{SSY} - \text{SS0}$$

  - SSY – Sum of Squares of y
  - SS0 – Sum of Squares of $\bar{y}$
  - SSR – Sum of Squares explained by Regression (SSR = SST - SSE)

Qualidade da Regressão

- Para avaliar a qualidade da regressão:

  1. Calcule SST

  2. Calcule SSE

  3. Calcule o coeficiente de determinação (valor entre 0 e 1):

$$R^2 = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

- Quanto maior o coeficiente de determinação, melhor a regressão

Qualidade da Regressão

Ex. 06 (do ex. 05): Tempo de execução de um query para várias palavras:

SSE = $\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$

SST = $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - n\bar{y}^2$

SSR = SST - SSE

$R^2 = \frac{\text{SST} - \text{SSE}}{\text{SST}}$

x	Palavras	3	5	7	9	10
y	Tempo	1.19	1.73	2.53	2.89	3.26

$$n\bar{y}^2 = (5)(2.32)^2 = 26.9$$

$\Sigma y = 11.60$, $\Sigma y^2 = 29.79$, $\Sigma xy = 88.54$,

- SSE = 29.79-(0.35)(11.60)-(0.29)(88.54) = 0.05
- SST = 29.79-26.9 = 2.89
- SSR = 2.89-.05 = 2.84
  - R^2 = (2.89-0.05)/2.89 = 0.98

Inferências sobre β_0 e β_1

- Relembrando a equação do modelo de Regressão Linear e seu estimador:

$$\boxed{Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + \varepsilon_i} \qquad \boxed{\hat{y}_i = b_0 + b_1 x}$$

- Pressupostos:
  - b_0 e b_1 seguem distribuição normal
  - b_0 e b_1 possuem média dada por: $E(b_0) = \beta_0$ e $E(b_1) = \beta_1$
  - Dado que Var(b_0) e Var(b_1) são variâncias, seus cálculos são dados por:

$$Var(b_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \right] \qquad Var(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

Inferências sobre β_0 e β_1

- Estimador da variância σ^2 (QME - quadrado médio residual):
  - Relembrando SSE (soma dos quadrados residuais):

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

  - $QME = \frac{SSE}{n-2}$
  - Logo, o desvio padrão dos erros é dado por: $s_e = \sqrt{QME}$
  - Usando QME (também conhecido como MSE) no pressuposto sobre as variâncias, temos:

$$\boxed{S^2(b_0) = QME\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right]}$$

$$\boxed{S^2(b_1) = \frac{QME}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}$$

Inferências sobre β_0 e β_1

- Como vimos, o desvio padrão dos erros é dado por: $s_e = \sqrt{QME}$
- O cálculo do desvio padrão para b_0 e b_1 é dado por:

$$\boxed{s_{b_0} = s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}} \qquad \boxed{s_{b_1} = \frac{s_e}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}}$$

- O intervalo de confiança é obtido, usando a tabela-T, por:

$$b_i \pm t_{[1-\alpha, n-2]} s_{b_i}$$

Inferências sobre β_0 e β_1

- Ex. 07 (do ex. 05):

Tempo de execução de um query para várias palavras:

x	Palavras	3	5	7	9	10
y	Tempo	1.19	1.73	2.53	2.89	3.26

SSE = 0.05 (do ex. 06)

$$\text{MSE} = \text{QME} = \frac{\text{SSE}}{n-2}$$

então: MSE = 0.05/(5-2) = 0.05/3 = 0.017

$s_e = \sqrt{MSE} = 0.13$

Observe a alta qualidade da regressão do exemplo:

– $R^2 = 0.98$

– $s_e = 0.13$

Inferências sobre β_0 e β_1

- Ex. 07 (do ex. 05) continuação:

Lembre que $s_e = 0.13$, $n = 5$, $\Sigma x^2 = 264$, $\bar{x} = 6.8$

Assim

$$s_{b_0} = s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$s_{b_1} = \frac{s_e}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$s_{b_0} = 0.13\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(6.8)^2}{264 - 5(6.8)^2}} = 0.16$$

$$s_{b_1} = \frac{0.13}{\sqrt{264 - 5(6.8)^2}} = 0.004$$

$$b_i \pm t_{[1-\alpha, n-2]} s_{b_i}$$

Usando um intervalo de confiança de 90%:

$t_{0.90;3} = 2.353$

	80%	90%	2-Tail Confidence Level
df	0.20	0.10	2-Tail Alpha
1	3.0777	6.3138	
2	1.8856	2.9200	
3	1.6377	2.3534	

Assim, o intervalo b_0

$$0.35 \pm 2.353(0.16) = (-0.03, 0.73)$$

b_1 é

$$0.29 \pm 2.353(0.004) = (0.28, 0.30)$$

Predições Baseadas em ***m*** Amostras

- O estimador da regressão linear da predição é dado por: $y_p = b_0 + b_1 x_p$

- Desvio padrão para a média de ***m*** amostras, com predição, é dado por:

$$S_{y_{mp}} = s_e \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}}$$

- Quanto maior o ***m***, menor o desvio padrão

- Cálculo da predição com IC: $y_p \pm t_{[1-\alpha, n-2]} S_{y_{mp}}$

Predições Baseadas em ***m*** Amostras

- Ex. 08 (do ex. 05): Usando modelo desenvolvido, qual é o tempo **previsto** para uma execução com 8 palavras?

Tempo de execução de um query para várias palavras:

x	Palavras	3	5	7	9	10
y	Tempo	1.19	1.73	2.53	2.89	3.26

$\bar{x} = 6.8$, $\bar{y} = 2.32$, $\Sigma xy = 88.54$, $\Sigma x^2 = 264$

$$b_1 = \frac{88.54 - (5)(6.8)(2.32)}{264 - (5)(6.8)^2} = 0.29$$

$b_0 = 2.32 - (0.29)(6.8) = 0.35$

Tempo = 0.35 + 0.29(8) = 2.67

Desvio padrão de erros $s_e = 0.13$

$$S_{y_p} = 0.13\sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(8-6.8)^2}{264 - 5(6.8)^2}} = 0.14$$

90% do intervalo é então

$$2.67 \pm 2.353(0.14) = (2.34, 3.00)$$

Revisão

- Ex. 09: The number of disk I/O's and processing times of seven programs were measured as: (14,2), (16,5), (27,7), (42,9), (39,10), (50,13), (83,20).

For this data:

$n=7$, $\Sigma xy=3375$, $\Sigma x=271$, $\Sigma x^2=13{,}855$,
$\Sigma y=66$, $\Sigma y^2=828$, $\overline{x} = 38.71$, $\overline{y} = 9.43$.

Therefore,

$$b_1 = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum x^2 - n(\overline{x})^2} = 0.2438 \qquad b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x} = -0.0083$$

Modelo linear : CPU time = - 0.0083 + 0.2438 (#Disk I/Os)

Revisão

- Ex. 09:

	Disk I/O's x_i	CPU Time y_i	Estimate $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$	Error $e_i = y_i - \hat{y}_i$	Error^2 e_i^2
	14	2	3.4043	-1.4043	1.9721
	16	5	3.8918	1.1082	1.2281
	27	7	6.5731	0.4269	0.1822
	42	9	10.2295	-1.2295	1.5116
	39	10	9.4982	0.5018	0.2518
	50	13	12.1795	0.8205	0.6732
	83	20	20.2235	-0.2235	0.0500
Σ	271	66	66.0000	0.00	5.8690

Revisão

- Ex. 09: Verificação da qualidade do estimador

$$\begin{aligned}
\text{SSE} &= \Sigma y^2 - b_0\Sigma y - b_1\Sigma xy \\
&= 828 + 0.0083 \times 66 - 0.2438 \times 3375 = 5.87
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{SST} &= \text{SSY} - \text{SS0} = \Sigma y^2 - n(\bar{y})^2 \\
&= 828 - 7 \times (9.43)^2 = 205.71
\end{aligned}$$

$$\text{SSR} = \text{SST} - \text{SSE} = 205.71 - 5.87 = 199.84$$

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \frac{199.84}{205.71} = 0.9715$$

Modelo explica 97% da variacao: MUITO BOM!!!

Revisão

- Ex. 09: Desvio padrão dos erros e dos parâmetros

- The mean squared error is:

$$\text{QME} = \frac{\text{SSE}}{\text{n}-2} = \frac{5.87}{5} = 1.17$$

- The standard deviation of errors is:

$$s_e = \sqrt{\text{QME}} = \sqrt{1.17} = 1.0834$$

$$s_{b_0} = s_e \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}\right]^{1/2} = 1.0834 \left[\frac{1}{7} + \frac{(38.71)^2}{13,855 - 7 \times 38.71 \times 38.71}\right]^{1/2} = 0.8311$$

$$s_{b_1} = \frac{s_e}{[\Sigma x^2 - n\bar{x}^2]^{1/2}} = \frac{1.0834}{[13,855 - 7 \times 38.71 \times 38.71]^{1/2}} = 0.0187$$

$$b_i \pm t_{[1-\alpha, n-2]} s_{b_i}$$

Revisão

- Ex. 09: $\Rightarrow$ 90% confidence interval for b_0 is:

$$
\begin{aligned}
-0.0083 \mp (2.015)(0.8311) &= -0.0083 \mp 1.6747 \\
&= (-1.6830,\ 1.6663)
\end{aligned}
$$

Since, the confidence interval includes zero, the hypothesis that this parameter is zero cannot be rejected at 0.10 significance level. $\Rightarrow$ b_0 is essentially zero.

90% Confidence Interval for b_1 is:

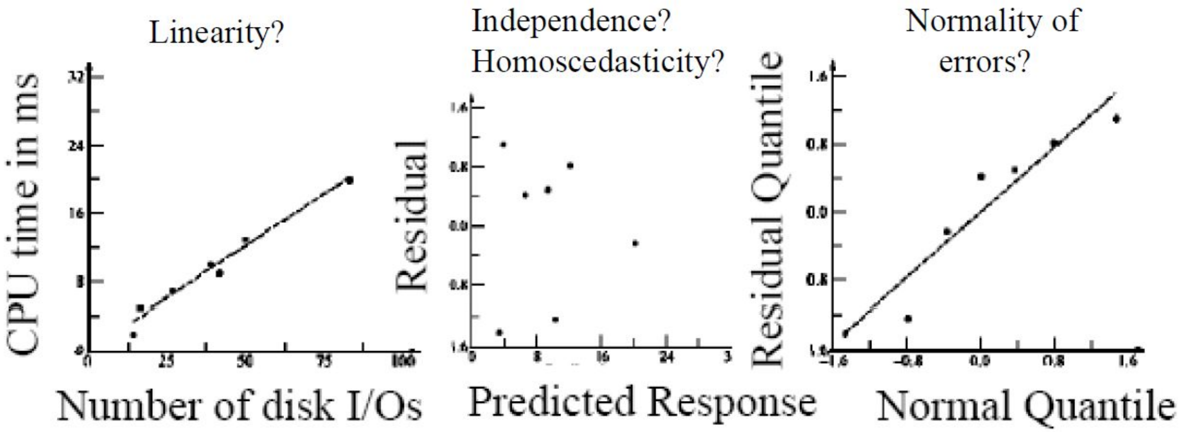
$$
\begin{aligned}
0.2438 \mp (2.015)(0.0187) &= 0.2438 \mp 0.0376 \\
&= (0.2061,\ 0.2814)
\end{aligned}
$$

Since the confidence interval does not include zero, the slope b_1 is significantly different from zero at this confidence level.

Revisão

Ex. 09: Testes visuais

Fazer gráficos separados para esses 2 testes



1. Relationship is linear
2. No trend in residuals ⇒ Seem independent
3. Linear normal quantile-quantile plot ⇒ Larger deviations at lower values but all values are small

AAG05 Tarefa em Dupla

- Desenvolva em Python exemplo tão completo quanto o exemplo “Revisão”:
    1. Escolher/Criar uma amostra bivariada para o exemplo
    2. Calcule o coeficiente de correlação e só vá para “3” caso a amostra bivariada tenha correlação forte (positiva ou negativa)
    3. Estimar parâmetros, verificar a qualidade, calcular os erros
    4. Calcular desvio padrão dos erros e dos parâmetros
    5. Calcular intervalo de confiança dos parâmetros para níveis de confiança de 90%, 95% e 99%
    6. Testar linearidade, independência de erros, erros normais, homocedasticidade (com gráficos)

- Regras:
    1. Funções prontas de bibliotecas python DEVEM ser usadas ao máximo possível
    2. Código e resultados devem ser explicados em Markdown com comandos LaTex
    3. Os formatos de entrega devem ser .pdf e .ipynb (código fonte+markdowns)
    4. Os dados devem ser entregues em anexo