Lista 3

1. (espaço de Baire) Seja $\mathbf{B} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o espaço das seqüências reais. Para x, y em $\mathbf{B}$ se $x \neq y$ seja $m(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$. Então de $d(x,x) = 0$ e para $x \neq y$,

$$d(x,y) = \frac{1}{m(x,y)}.$$

Verifique que d é uma ultramétrica.

2. Demonstre que o espaço de Baire é completo.

3. (teorema de Baire) Seja (X,d) completo e F_n fechado com interior vazio. Então $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ tem interior vazio. Sug.: Obtenha uma sucessão de bolas $B[x_n, r_n] \setminus F_n \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$ e tais que $r_n \downarrow 0$.

4. Definamos para $x \in \mathbf{B} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$|x| = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Então

$$\begin{aligned} |0| &= 0 \\ |-x| &= |x| \\ |x+y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

e $d(x,y) = |x-y|$ é uma métrica e x^k converge para x se e somente se $x^k(i)$ convergir para $x(i)$, $i \geq 1$.

5. Seja B de Banach. Seja $C \subset B$ fechado e simétrico e convexo. Se $\cup_{n=1}^{\infty} nC = B$ então 0 é ponto interior de C.

6. Seja $\mathscr{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ fechado limitado não–vazio}\}$. Para $A, B \in \mathscr{K}$ definimos

$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sup\{d(x,B) : x \in A\}, \\ h(A,B) &= \max\{e(A,B), e(B,A)\}. \end{aligned}$$

Demonstre que para $C \in \mathscr{K}$, $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$ e que h é uma métrica[1] em $\mathscr{K}$.

[1] Métrica de Hausdorff.

7. Sejam (X_i, d_i) métricos, $i \geq 1$. Demonstre que $\Pi_{i=1}^{\infty} X_i$ é métrico completo se e somente se cada X_i for completo.

8. Seja (X, d) métrico completo e $U \subset X$ aberto não–vazio. Definamos em U,
$$d_1(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|.$$
Verifique que d_1 é uma métrica que é equivalente à métrica d. E na métrica d_1, U é completo.

9. Seja $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua em $[0,1]$ e norma
$$\|f\|_1 = \sup_{0 \leq x \leq 1} \{|f(x)| + |f'(x)|\}.$$
Verifique que $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ é de Banach.

10. Verifique que $f(x) = \cos(\cos x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ é uma contração.