# 19/02

# Espaços Métricos

Um par $(X, d)$ é um espaço métrico se a função, $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tem para todos $x, y, z \in X$, as propriedades:

1. $d(x, y) \geqq 0$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

**Comentário 1** *$d$ é a função distância. Os axiomas (1,2,3) são portanto bem naturais: A distância entre pontos distintos é positiva. A distância entre $x$ e $y$ é igual à distância entre $y$ e $x$. E finalmente o axioma (4)–a desigualdade triangular–reflete a propriedade de que para os triângulos no plano, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

**Exemplo 1** *Um espaço com produto interno é um espaço métrico se $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.*

**Exemplo 2 (métrica discreta)** *Seja $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. $d$ é a métrica discreta.*

**Exemplo 3** *Se $Y \subset X$ e $d'(x, y) = d(x, y)$ para $(x, y) \in Y \times Y$ então $(Y, d')$ é um espaço métrico.*

**Exemplo 4** *No $\mathbb{R}^n$ temos a distância euclidiana, a distância do máximo e a distância da soma:*

$$d(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} & \textit{euclidiana} \\ \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} & \textit{max} \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| & \textit{soma.} \end{cases}$$

**Comentário 2** *Essas 3 distâncias são exemplos de distâncias definidas a partir de uma norma: a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma.*

**Definição 1 (espaço normado)** *Um par $(V, N)$ sendo $V$ um espaço vetorial (sobre o corpo dos reais) e $N : V \to [0, \infty)$ é um espaço normado se para todos $v, w \in V$ e $\lambda$ real,*

**i)** $N(v) = 0 \iff v = 0$

**ii)** $N(v+w) \leq N(v) + N(w)$

**iii)** $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

**Comentário 3** *Por simplicidade usamos* $\|v\| := N(v)$.

**Comentário 4** *A métrica associada à norma* $N$ *é* $d(v,w) = N(v-w)$.

**Definição 2** *Seja* $(X,d)$ *um espaço métrico.*

**i)** *A bola aberta de centro* $x \in X$ *e raio* $r > 0$ *é* $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

**ii)** *A bola fechada,* $B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ ;

**iii)** *A esfera:* $S(x,r) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$.

**Comentário 5** *No caso de um espaço normado,* $B[0,1] = \{y \in V : \|y\| \leq 1\}$ *é a bola unitária. Note que* $B(x,r) = x + rB(0,1)$ *nesse caso. E a métrica é invariante por translações,* $d(x,y) = d(x+z, y+z)$.

# A topologia dos espaços métricos

**Definição 3** *O par* $(X,\tau)$ *sendo* $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ *é um espaço topológico e* $\tau$ *uma topologia se*

**i)** $\{\emptyset, X\} \subset \tau$;

**ii)** *Se* $A, B \in \tau$ *então* $A \cap B \in \tau$;

**iii)** *Se* $A_i \in \tau$ *para todo* $i \in I$ *então* $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.

**Comentário 6** *Os elementos de* $\tau$ *são ditos abertos. Assim o conjunto vazio e* $X$ *são abertos. E a topologia é fechada por intersecções finitas e por uniões arbitrárias de seus elementos.*

**Definição 4** *Seja* $(X,d)$ *um espaço métrico. O conjunto* $U \subset X$ *é aberto se para todo* $x \in U$ *existir* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subset U$.

É imediato que o conjunto vazio e o espaço $X$ são abertos. Seja $\tau = \tau_d = \{U \subset X : U \text{ é aberto}\}$ a família dos subconjuntos abertos de $(X, d)$. Verifiquemos que $\tau$ é uma topologia.
**Demonstração:** (a) Sejam $U$ e $V$ abertos. Seja $z \in U \cap V$. Seja $r' > 0$ tal que $B(z, r') \subset U$. Seja $r'' > 0$ tal que $B(z, r'') \subset V$. Então se $r = \min\{r', r''\} > 0$, $B(z, r) \subset U \cap V$. (b) Verifiquemos que se $U_i \in \tau$ para $i \in I$ então $W = \cup_{i \in I} U_i \in \tau$. Seja $x \in W$. Existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_i$. Então $B(x, \epsilon) \subset W$. Terminando a demonstração.

**Lema 1** *A bola aberta é aberta.*

**Demonstração:** Para $z \in B(x, r)$ temos $d(x, z) < r$ e então $\delta = r - d(x, z) > 0$. Para $y \in B(z, \delta)$ temos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta = r$$

e portanto $B(z, \delta) \subset B(x, r)$.

**Definição 5** *$F \subset X$ é fechado se o complementar $F^c = X \setminus F$ for aberto.*

É imediato que $\emptyset$ e $X$ são fechados. A união finita de fechados é fechada. E a intersercção de uma família de fechados é fechada.

**Exemplo 5** *Na métrica discreta todo subconjunto de $X$ é aberto e é fechado.*

**Exemplo 6** *Em $\mathbb{R}$ os intervalos abertos são abertos e os intervalos fechados são fechados. O intervalo $(0, 1]$ não é aberto nem fechado. Os racionais não são nem abertos nem fechados em $\mathbb{R}$.*

**Exemplo 7** *Se $X = [0, 1]$ então $(0, 1]$ é aberto em $X$.*

**Definição 6** *Duas métricas em $X$, $d$ e $d'$ são equivalentes se definem a mesma topologia: $\tau_d = \tau_{d'}$. Isto se $U \subset X$ é aberto em $(X, d)$ se e somente se for aberto em $(X, d')$.*

**Exemplo 8** *Se $d$ é uma métrica em $X$ então $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ e $d''(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ são métricas equivalentes à $d$.*

Primeiramente verifiquemos que $d'$ e $d''$ são métricas.

$d''$) Se $d''(x,y)=0$ então $d(x,y)=0$ e logo $x=y$. Suponhamos, para obter uma contradição, que não vale a desigualdade triangular: existem $x,y,z$ tais que:

$$1 \geq d''(x,y) > d''(x,z) + d''(z,y).$$

Portanto $d''(x,z) = \min\{1, d(x,z)\} = d(x,z)$ e $d''(z,y) = d(z,y)$. Logo

$$d(x,y) \geq d''(x,y) > d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$$

contradição.

$d'$) Sejam $a = d(x,z), b = d(x,y)$ e $c = d(y,z)$. Sabemos que $a \leq b + c$. Então

$$\begin{aligned}
& d'(x,y) + d'(y,z) - d'(x,z) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{a}{1+a} = \\
& \frac{b(1+c)(1+a) + c(1+b)(1+a) - a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
& \frac{b(1+a+c+ac) + c(1+a+b+ab) - a(1+c+b+bc)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
& \frac{b+ba+bc+bac+c+ca+cb+cab-(a+ac+ab+abc)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
& \frac{b+c-a+bc+cb+cab}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Verifiquemos por exemplo que $d$ e $d''$ são equivalentes. Seja $B(x,r)$ a bola de centro $x$ e raio $r$ na métrica $d$ e $B''(x,r)$ a bola correspondente na métrica $d''$. Se $r > 1$, $B''(x,r) = X \in \tau_d$. Para $r < 1$, $B(x,r) = B''(x,r)$. Seja $U \in \tau_d$. Seja $x \in U$ e $0 < \epsilon < 1$ tal que $B(x,\epsilon) \subset U$. Então $B''(x,\epsilon) = B(x,\epsilon) \subset U$. Portanto $U \in \tau_{d''}$. Recíprocamente se $B''(x,\epsilon) \subset U$. Se $\epsilon > 1$, $U = X \in \tau_d$. Se $\epsilon \leq 1$, $B(x,\epsilon) = B''(x,\epsilon) \subset U$. Para verificar que $d$ e $d'$ são equivalentes, note que se $r < 1$,

$$B'(x,r) = \left\{y \in X : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < r\right\} = \left\{y \in X : d(x,y) < \frac{r}{1-r}\right\} = B\left(x, \frac{r}{1-r}\right).$$

Se $r \geq 1$, $B'(x,r) = X$. Portanto

$$\cup_i B'(x_i, r_i) = \cup_i B\left(x_i, \frac{r_i}{1-r_i}\right);$$
$$\cup_i B(x_i, r_i) = \cup_i B'\left(x_i, \frac{r_i}{1+r_i}\right).$$

**Teorema 1** *Seja $(X,d)$ espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Então $U \subset Y$ é aberto de $Y$ se e somente se existir $W \subset X$ aberto tal que $U = W \cap Y$.*

**Demonstração:** Notemos inicialmente que

$$B_Y(x,r) = \{y \in Y : d(x,y) < r\} = Y \cap B(x,r).$$

Seja $\tau(Y)$ a família dos subconjuntos abertos em $Y$. E $\tau$ os abertos de $X$. Então se $U \in \tau(Y)$, para todo $u \in U$ existe $\epsilon(u) > 0$ tal que $B_Y(u,\epsilon(u)) = Y \cap B(u,\epsilon(u)) \subset U$. Mas então $W = \cup_{u\in U} B(u,\epsilon(u)) \in \tau$ e $W \cap Y = U$. Suponhamos agora $W \in \tau$. Cada $w \in W$ existe $B(w,r(w)) \subset W$. Então

$$U = \cup_{w\in W} Y \cap B(w,r(w)) = \cup_{w\in W} B_Y(w,r(w)) \in \tau(Y) \text{ e } U = W \cap Y.$$

**Corolário 1** *Nas mesmas condições do teorema anterior, $F \subset Y$ é fechado de $Y$ se e somente se existir $H$ fechado em $X$ tal que $H \cap Y$.*

**Corolário 2** *Se $Y$ for fechado de $X$ então $F$ é fechado em $Y$ se e somente se for fechado em $X$.*

## Produto cartesiano de espaços métricos

Sejam $(X,d)$ e $(Y,\rho)$ espaços métricos. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser metrizado de uma forma natural. Definamos para $z = (x,y) \in X \times Y$ e $z' = (x',y') \in X \times Y$,

$$\overline{d}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + \rho(y,y').$$

Então verificamos de imediato que $\overline{d}$ é uma métrica em $X \times Y$. Outras métricas são possíveis: $\max\{d(x,x'),\rho(y,y')\}$ ou $\sqrt{d(x,x')^2 + \rho(y,y')^2}$. Podemos verificar com pouca dificuldade que essas métricas são equivalentes

# 21/02

## Produto finito de espaços métricos

Sejam $(X_i, d_i), i \leq N$ espaços métricos. Podemos metrizar $X = \Pi_{i=1}^{N} X_i$ de forma natural: se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i).$$

Outras possibilididades seriam

$$d'(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} d_i^2(x_i, y_i)};$$
$$d''(x, y) = \max_{i \leq N} d_i(x_i, y_i).$$

Se tivermos espaços normados, $(V_i, |\cdot|_i)_{i \leq N}$ definimos

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|_i.$$

A verificação de que $\|\cdot\|$ é uma norma é um exercício rotineiro.

## Produto infinito enumerável de espaços métricos

Sejam $(X_n, d_n)_{n \geq 1}$ espaços métricos e $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$. Uma métrica natural, análoga à do caso de um produto finito é

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{1}$$

**Comentário 7** *Note que usamos* $\frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \leq 1$ *e multiplicamos por* $2^{-n}$ *para garantir a convergência da série. O produto enumerável infinito de espaços normados é um espaço métrico mas não é um espaço normado.*

Um subconjunto, $M$, de um espaço métrico é limitado se existirem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $M \subset B(x, r)$. Isto é, $M$ é limitado se estiver contido em alguma bola aberta. Propriedades elementares:

**i)** um subconjunto de um conjunto limitado é limitado;

**ii)** a união de uma família finita de conjuntos limitados é limitada.

Se $M_1 \subset B(x,r)$ e $M_2 \subset B(y,s)$ temos

$$M_1 \cup M_2 \subset B(x, \max\{r, s + d(x,y)\}).$$

**Definição 7** *Se $A \subset X$ é limitado e não–vazio, o diâmetro de $A$ é* $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.

Por exemplo, o diâmetro de $B(x,r)$ é no máximo $2r$. Pois se $y, y' \in B(x,r)$, $d(y,y') \leq d(y,x) + d(x,y') < 2r$. E logo $\delta(B(x,r)) \leq 2r$. Na métrica discreta, $\delta(X) = 1$ se $\#X > 1$.

## Continuidade

Sejam $(X,d)$ e $(Y,\rho)$ espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x^0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(x^0) > 0$ tal que

$$d\left(x, x^0\right) < \delta \implies \rho\left(f(x), f\left(x^0\right)\right) < \epsilon.$$

Em outras palavras: Para todo bola $B_\rho(f(x^0), \epsilon)$ existe uma bola $B_d(x^0, \delta)$ tal que $f(B_d(x^0, \delta)) \subset B_\rho(f(x^0), \epsilon)$.

**Lema 2** *$f$ é contínua em $x^0$ se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto tal que $f(x^0) \in U$ existe $W \ni x^0$ aberto de $X$ tal que $f(W) \subset U$.*

**Definição 8** *$f : X \to Y$ é contínua em $X$ se para todo $x \in X$, $f$ for contínua em $x$.*

**Definição 9** *E $f$ é uniformemente contínua em $X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, \forall x', d(x,x') < \delta \implies \rho(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

**Lema 3** *$f : X \to Y$ é contínua em $X$ se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto, $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto.*

**Proposição 1** *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

**Demonstração:** Seja $W \subset Z$ aberto. Então $g^{-1}(W)$ é aberto de $Y$ e $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto.

**Exemplo 9** *Consideremos $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o produto cartesiano enumerável de $\mathbb{R}$. Seja*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

*A projeção $\pi_m : X \to \mathbb{R}$, $\pi_m(x) = x_m$ é contínua (uniformemente). Seja $\epsilon > 0$. Seja $\delta = \frac{1}{2^m} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Portanto se $d(x, y) < \delta$ temos $\frac{1}{2^m} \frac{|x_m - y_m|}{1+|x_m - y_m|} \le d(x, y) < \delta = \frac{1}{2^m} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ e então $|\pi_m(x) - \pi_m(y)| = |x_m - y_m| < \epsilon$.*

**Comentário 8** *De maneira análogo podemos demonstrar que $f(x) = (x_1, \dots, x_m)$ é contínua.*

## Seqüências e limites

Uma seqüência $(x_n)_{n \ge 1}$ no espaço métrico $X$ converge para $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $n' \ge 1$ tal que $n > n'$ implica $d(x, x_n) < \epsilon$.

**Notação 1** *Escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ quando existir o limite de $(x_n)_n$ e for $x$.*

**Proposição 2** *O limite quando existe é único*

**Demonstração:** Sejam $x \neq y$ limites de $(x_n)_n$. E $\epsilon > 0$. Então existem $n'$ e $n''$ tais que

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > n' \\ d(x_n, y) &< \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > n'' \end{aligned}$$

Então se $n > \max\{n', n''\}$, $d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon$. Então $d(x, y) = 0$ e $x = y$.

**Teorema 2** *Seja $f : X \to Y$. Então $f$ é contínua em $a \in X$ se e somente se para todo seqüência $x_n \in X$ com limite $a$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

**Demonstração:** Suponhamos $f$ contínua em $a$. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \implies \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$. Pela definição de limite existe $n'$ tal que $n > n'$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Portanto $n > n'$, temos $\rho(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. E portanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que $f$ fosse descontínua em $a$. Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \ge 1$ existe $x_n \in X$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $\rho(f(x_n), f(a)) \ge \epsilon$.

**Comentário 9** *Uma vantagem dos espaços métricos é podermos usar seqüências. Nos espaços topológicos, em geral, teoremas como o anterior não são válidos.*

## Fecho

Seja $(X, d)$ métrico. Para $A \subset X$ definimos $\mathscr{F} = \{F : A \subset F \subset X,\ F \text{ fechado}\}$. Então $\overline{A} := \cap \{F : F \in \mathscr{F}\}$ é fechado e é o menor subconjunto fechado que contém $A$. Dizemos que $\overline{A}$ é o fecho de $A$. As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $A$ é fechado se e somente se $A = \overline{A}$.

Por exemplo $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado por ser união de dois fechados. Agora $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$ e portanto $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ . E de $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ vem $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Também $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ e por fim $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ demonstrando a igualdade.

**Definição 10** *Seja $A \subset X$ não–vazio. Para $x \in X$ definimos a distância de $x$ a $A$ por*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Lema 4** *$d(x, A) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$.*

**Demonstração:** Se $x \in X \setminus \overline{A}$ então existe $r > 0$, $B(x, r) \subset X \setminus \overline{A}$ e portanto $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Logo $d(x, A) \geq r > 0$. Suponhamos $d(x, A) > 0$. Se $0 < r < d(x, A)$ temos $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Logo $F = X \setminus B(x, r) \supset A$, é fechado e $x \notin F \supset \overline{A}$. Portanto $x \notin \overline{A}$.

**Proposição 3** *A função distância é uniformemente contínua. Na verdade vale um pouco mais: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.*

**Demonstração:** Para $a \in A$, $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ e tomando o ínfimo novamente, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. Portanto $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Trocando os papéis de $x$ e $y$ obtemos $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ e $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

# 23/02

**Proposição 4** *$x \in \overline{A}$ se e somente se existe uma seqüência $(x_n)_n$ com $x_n \in A$ e $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

**Demonstração:** Se $x \in \overline{A}$ temos $d(x, A) = 0$. Portanto para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in A$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Temos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Suponhamos agora que $x_n \in A$ tem limite $x$. Portanto

Por isso, é recomendado praticar atividades físicas regularmente e aumentar o consumo de alimentos ricos em cálcio e vitamina D para evitar a osteopenia e a osteoporose.

$$d(x, A) \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n} \implies d(x, A) = 0 \implies x \in \overline{A}.$$

**Definição 11** *O ponto $x \in A$ é um ponto isolado de $A$ em $X$ se existir um aberto $U \subset X$ tal que $U \cap A = \{x\}$.*

É imediato da definição que $x$ é ponto isolado de $A$ se existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

**Exemplo 10** *Todo ponto de $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ é isolado. Nenhum ponto de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é isolado.*

**Exemplo 11** *O conjunto $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ tem ponto isolados, $\frac{1}{n}, n \neq 0$. Mas $0 \in A$ não é ponto isolado pois $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.*

**Definição 12** *O conjunto $P \subset X$ é perfeito se for fechado sem pontos isolados.*

1. *O conjunto $S \subset X$ é denso se o fecho de $S$ for $X$.*
2. *O espaço métrico $X$ é separável se existe $A \subset X$ enumerável e denso: $\overline{A} = X$.*
3. *O espaço métrico $X$ tem base enumerável se existir uma família enumerável de abertos, $\mathfrak{B} = \{B_n : n \geq 1\}$ tal que todo aberto de $X$ seja uma união de elementos de $\mathfrak{B}$.*

**Exemplo 12** *$\mathbb{R}^n$ é separável pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso. O conjunto funções contínuas reais de $[a, b]$ na métrica do sup é separável (mas não é imediato de se demonstrar). $l^\infty$ não é separável mas $l^1$ e $l^2$ são separáveis.*

**Teorema 3** *O espaço métrico $X$ é separável se e somente se tem base enumerável.*

**Demonstração:** Suponhamos $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em $X$. Então a família de bolas de centro $x_n$ e raio racional, $\{B(x_n, r) : n \geq 1, r \in \mathbb{Q}_{++}\}$, é enumerável. Seja $\{B_n : n \geq 1\}$ uma enumeração dessa família. Seja $U \subset X$ aberto e $x \in U$. Existe $B(x, r) \subset U$. Sem perda de generalidade $r$ é racional. Seja $n'$ tal que $d(x, x_{n'}) < r/2$. Então $B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right) \subset B(x, r) \subset U$. Então se $m$ é tal que $B_m = B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right)$ temos $x \in B_m \subset U$. Recíprocamente suponhamos que $\{B_n : n \geq 1\}$ seja base enumerável de abertos. Sem perda de generalidade, $B_n$ é não–vazio. Para cada $B_m$ seja $x_m \in B_m$. Então $\{x_m : m \geq 1\}$ é denso em $X$.

**Teorema 4** *Se $(X, d)$ é separável e $\{U_i : i \in I\}$ é uma família de abertos não–vazios dois a dois disjuntos, então $I$ é enumerável.*

**Demonstração:** Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em $X$. Para cada $i \in I$ existe $n$ tal que $x_n \in U_i$. Definimos então $f : I \to \mathbb{N}$,

$$f(i) = \min\{n : x_n \in U_i\}.$$

Note que se $i \neq j$ então $f(i) \neq f(j)$. Mas então $I$ é enumerável.

## Espaço métrico completo

Uma seqüência $(x_n)_n$ no espaço métrico $(X, d)$, é de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$ existir natural $n^0$ tal que $n, m \geq n^0$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

**Lema 5** *Toda seq. de Cauchy é limitada.*

**Demonstração:** Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em $X$. Existe $p$ natural tal que $n, m \geq p$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Em particular $d(x_n, x_p) \leq 1$ para $n \geq p$. Seja $M = \max\{1, d(x_1, x_p), \ldots, d(x_{p-1}, x_p)\}$. Portanto $\{x_n : n \geq 1\} \subset B[x_p, M]$.

**Proposição 5** *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

**Demonstração:** Suponhamos $\lim_n x_n = x$. Seja $n_0$ tal que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Então se $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

**Definição 13** *A seqüência $(y_n)_n$ é uma subseqüência de $(x_n)_n$ se existir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_n = x_{k(n)}$ para todo $n \geq 1$.*

**Lema 6** *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é, ela mesma, convergente.*

**Demonstração:** Seja $(x_n)_n$ de Cauchy e $\left(x_{k(n)}\right)_n$ subseqüência com limite $x$. Seja $\epsilon > 0$. Existe $n'$ tal que $n \geq n' \implies d\left(x_{k(n)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $n''$ tal que $n, m \geq n'' \implies d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Então para $n \geq n'''$, $p \geq \max\{k^{-1}(n''), n'\}$,

$$d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{k(p)}\right) + d\left(x_{k(p)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

**Exemplo 13** *No subespaço $Y = (0,1]$ de $X = [0,1]$ a seq. $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite em $X$ é $0 \notin Y$.)*

**Exemplo 14** *Para $X = \mathbb{Q}$, a seqüência $x_n = \frac{[n\sqrt{2}]}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite existe nos reais e é $\sqrt{2}$)*

**Definição 14** *Um espaço métrico é completo se toda seqüência de Cauchy for convergente.*

**Exemplo 15** *$X$ com a métrica discreta é completo: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Existe $n^0$ tal que $n, m \geq n^0$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Portanto $x_n = x_{n^0}$ se $n \geq n^0, m = n^0$.*

**Teorema 5** *Seja $(X, d)$ espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço completo. Então $Y$ é fechado.*

**Demonstração:** Seja $y \in \overline{Y}$ e seja $(y_n)_n \subset Y$ uma seqüência com limite $y$. Mas $(y_n)$ é de Cauchy em $X$ e pela mesma razão de Cauchy em $Y$. Mas $Y$ sendo completo $(y_n)$ converge para $x \in Y$. Mas então pela unicidade do limite $x = y \in Y$. Portanto $\overline{Y} = Y$ é fechado.

**Teorema 6** *$\mathbb{R}$ é completo na métrica usual.*

**Demonstração:** Seja $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ de Cauchy. A seq. é portanto limitada. Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$ para todo $n$. Seja $\alpha_n = \inf\{x_m : m \geq n\}$. A seq. $(\alpha_n)_n$ é crescente e limitada superiormente por $M$. Seja $x = \sup\{\alpha_n : n \geq 1\}$. É claro que $\lim_n \alpha_n = x$. Para cada $N$ existe $k(N) \geq N$, $\alpha_N \leq x_{k(N)} < \alpha_N + \frac{1}{N}$. Então $\lim_N x_{k(N)} = \lim_N \alpha_N = x$. Logo $(x_n)_n$ converge pois é de Cauchy e possui uma subseqüência convergente.

**Comentário 10** *Em princípio pode acontecer que $k(N) = k(N+1) = \ldots = k(N+p)$. Entretanto isso ocorre somente um número finito de vezez pois $k(N) \geq N$. O conjunto $Z = \{k(N) : N \geq 1\}$ sendo infinito podemos obter uma seq. estritamente crescente: $l^1 = \min Z$, $l^2 = \min\{Z \setminus \{l^1\}\}$ etc. Uma outra possibilidade é notar que $\left\{m : \alpha_N \leq x_m < x + \frac{1}{N}\right\}$ é infinito e incluir a condição $k(N) > k(N-1)$ para definir $k(N)$.*

**Teorema 7** *$\mathbb{R}^n$ é completo.*

**Demonstração:** Basta notar que $((x_p(1), \ldots, x_p(n)))_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ é de Cauchy se e somente se cada $(x_p(i))_p$, $i = 1, \ldots, n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $y_i = \lim_p x_p(i)$. Então $\lim_p x_p = y = (y_1, \ldots, y_n)$.

# 26/02

**Lema 7** *Se $F \subset X$ for fechado e $X$ completo então $F$ é completo.*

**Demonstração:** Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em $F$. Então $(x_n)_n$ é de Cauchy em $X$. Seja $x = \lim_n x_n \in X$. Mas $F$ sendo fechado $x \in F$.

**Teorema 8** *Todo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ é fechado (e completo)*

**Demonstração:** Seja $F$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Vou demonstrar que $F$ é fechado. Seja $\{v_1, \ldots, v_p\}$ uma base ortogonal de $F$ e a completemos a uma base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Então

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0, i = 1, \ldots, n-p\} = \cap_{i=1}^{n-p} \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0\}.$$

A função $f(y) = (y, v_{p+i})$ é contínua pois $|f(y) - f(z)| = |(y - z, v_{p+i})| \leq |y - z| |v_{p+i}|$ e $f^{-1}(\{0\}) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0\}$.

Para $(X, d)$ e $(M, \rho)$ espaços métricos:

**Definição 15** *Uma função $f : X \to M$ é limitada se existir uma bola aberta $B \subset M$ tal que $f(X) \subset B$. O conjunto, $\mathscr{B}(X, M)$, das funções limitadas de $X$ em $M$ possui uma métrica natural.. Seja para $f, g \in \mathscr{B}(X, M)$,*

$$d(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\} < \infty.$$

**Teorema 9** *Nas condições acima,*

**a)** *$\mathscr{B}(X, M)$ é métrico.*

**b)** *$\mathscr{B}(X, M)$ é completo se $M$ for completo.*

**Demonstração:** (a) Se $f(x) \neq g(x)$ vem $d(f, g) \geq \rho(f(x), g(x)) > 0$. É imediato que $d(f, g) = d(g, f)$. Desigualdade triangular: se $f, g, h \in \mathscr{B}(X, M)$. Então

$$\begin{aligned} \rho(f(x), h(x)) &\leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h) \\ &\implies d(f, h) = \sup_x \rho(f(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

(b) Seja $(f^p)_p \subset \mathscr{B}(X, M)$ de Cauchy. Então para cada $x \in X$, $(f^p(x))_{p \geq 1}$ de Cauchy em $M$. Seja $f(x) = \lim_{p \to \infty} f^p(x)$. Seja $p(1)$ tal que $d(f^p, f^{p+q}) < 1$ se $p \geq p(1)$, $q \geq 1$. Então

$$\rho\left(f^{p(1)}(x), f^p(x)\right) \leq 1, \forall x \in X.$$

No limite $p \to \infty$, $\rho\left(f^{p(1)}(x), f(x)\right) \leq 1$ e então $f(\cdot)$ é limitada pois $f^{p(1)}$ é limitada. Finalmente se $\epsilon > 0$ seja $N$ tal que $p, q \geq N$,

$$\rho\left(f^{p}(x), f^{q}(x)\right) \leq d\left(f^{p}, f^{q}\right) < \epsilon.$$

No limite $q$ tende ao infinito: para todo $x \in X$,

$$\rho\left(f^{p}(x), f(x)\right) \leq \epsilon$$

e portanto $d\left(f^{p}, f\right) \leq \epsilon$.

**Definição 16** *Seja* $\mathscr{C}_b(X, M) = \{f \in \mathscr{B}(X, M) : f$ *é contínua*$\}$.

**Corolário 3** $\mathscr{C}_b(X, M)$ *é completo se* $M$ *for completo.*

**Demonstração:** Basta demonstrar que $\mathscr{C}_b(X, M)$ é fechado em $\mathscr{B}(X, M)$. Seja então $f^p : X \to M$ limitada contínua e $f \in \mathscr{B}(X, M)$ limite de $f^p$. Seja $x^0 \in X$ dado e $x \in X$ qualquer. Seja $\epsilon > 0$ e $p(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$, $p \geq p(\epsilon)$

$$\rho\left(f^{p}(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) \leq \frac{\epsilon}{3},$$
$$\rho\left(f^{p}\left(x^{0}\right), f^{p(\epsilon)}\left(x^{0}\right)\right) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Existe $\delta > 0$ tal que $d\left(x, x^{0}\right) < \delta$, $\rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}\left(x^{0}\right)\right) < \frac{\epsilon}{3}$. Logo para $p \geq p(\epsilon)$,

$$\rho\left(f^{p}(x), f^{p}\left(x^{0}\right)\right) \leq$$
$$\rho\left(f^{p}(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) + \rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}\left(x^{0}\right)\right) + \rho\left(f^{p(\epsilon)}\left(x^{0}\right), f^{p}\left(x^{0}\right)\right) \leq \epsilon.$$

No limite, $\rho\left(f(x), f\left(x^{0}\right)\right) \leq \epsilon$.

## Completamento de espaços métricos

**Lema 8** *Seja* $(X, d)$ *métrico. Então* $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$.

**Demonstração:** Definindo $A = \{a\}$ na proposição 3 obtemos o resultado.

**Definição 17** *Sejam* $(X, d)$ *e* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *espaços métricos.*

1. *Uma função* $f : X \to \widetilde{X}$ *é uma imersão isométrica se*

$$d(x, y) = \widetilde{d}\left(f(x), f(y)\right), x, y \in X.$$

   *Se* $f(x) = f(y)$ *então* $d(x, y) = 0$ *e* $x = y$. *Toda imersão isométrica é injetiva e uniformemente contínua.*

*2. Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

**Definição 18** $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *é completamento de* $(X, d)$ *se* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *for completo e existir imersão isométrica* $f : X \to \widetilde{X}$ *com imagem densa em* $\widetilde{X}$.

**Teorema 10** *Todo espaço métrico possui um completamento.*

**Demonstração:** Seja $(M, \rho)$ métrico. Vou demonstrar que é isométrico a um subespaço de $\mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$.

Seja $a \in M$ fixo. E definamos para $x \in M$, $f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a)$. Então $|f_x(z)| \le \rho(x, a)$ e então $f_x$ é limitada. Temos

$$d(f_x, f_y) = \rho(x, y).$$

Para checar[1] isso,

$$\begin{aligned} \sup_m |f_x(m) - f_y(m)| &= \sup_m |\rho(x, m) - \rho(m, a) - (\rho(y, m) - \rho(m, a))| \\ &= \sup_m |\rho(x, m) - \rho(y, m)| = \rho(x, y). \end{aligned}$$

Portanto $\Theta : X \to \mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$ definida por $\Theta(x) = f_x$ é uma imersão isométrica. Seja $\widetilde{M} = \overline{\Theta(M)} \subset \mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$. Então $\widetilde{M}$ é o completamento de $M$ pois é fechado e $\mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$ é completo.

**Comentário 11** *Os espaços métricos podem possuir vários completamentos mas todos são isométricos entre si.*

**Teorema 11** *Sejam* $\left(\widetilde{M}, \widetilde{d}\right)$ *e* $\left(\widehat{M}, \widehat{d}\right)$ *completamentos de* $(M, d)$. *Então* $\widetilde{M}$ *e* $\widehat{M}$ *são isométricos.*

**Demonstração:** Seja $\phi : M \to \widetilde{M}$ imersão isométrica com image densa em $\widetilde{M}$ e seja $\psi : M \to \widehat{M}$ imersão isométrica com imagem densa em $\widehat{M}$. Definamos $f : \phi(M) \to \psi(M)$ por $f(\phi(x)) = \psi(x)$, $x \in M$. Temos

$$\hat{d}(\psi(x), \psi(y)) = \hat{d}(f(\phi(x)), f(\phi(y))) = \tilde{d}(\phi(x), \phi(y)).$$

Podemos extender $f$: Se $z \in \widetilde{M}$ existe $\phi(x_n) \to z$. Logo $(\phi(x_n))_n$ é de Cauchy e então $(\psi(x_n))_n$ é de Cauchy. Seja $f(z) = \lim_n \psi(x_n)$. Esta é a isometria procurada: Devemos verificar que a definição não depende da seq. $(x_n)$. Suponhamos $\phi(y_n) \to z$. Então se definirmos $x'_{2n} = x_n$ e $x'_{2n+1} = y_n$ temos $\lim \phi(x'_n) = z$ e portanto $(x'_n)_n$ é de Cauchy e logo $(\psi(x'_n))_n$ é de Cauchy e converge:

$$\lim \psi(x_n) = \lim \psi(x'_{2n}) = \lim \psi\left(x'_{2n+1}\right).$$

[1] O supremo é alcançado para $m = y$.

**Teorema 12** *Seja $(X,d)$ completo. E $F_n \supset F_{n+1}$ uma família de conjuntos fechados não–vazios de $X$ com $\delta(F_n) \to 0$. Então $\cap_n F_n \neq \emptyset$.*

**Demonstração:** Seja $x_n \in F_n$. Então $(x_n)_n$ é de Cauchy pois dado $\epsilon > 0$ e $p$ natural é tal que $\delta(F_k) < \epsilon$ sempre que $k \geq p$ então se $n, m \geq p$, $\{x_n, x_m\} \subset F_p$ e logo $d(x_n, x_m) \leq \delta(F_p) < \epsilon$. Agora $(x_n)$ sendo de Cauchy tem $x = \lim_n x_n$. Mas $x_m \in F_n$ se $m \geq n$ logo $x \in F_n$ para todo $n$ e $x \in \cap_n F_n$.

**Teorema 13** *Suponhamos que $(X,d)$ seja tal que toda família de fechados decrescente com diâmetro convergindo para 0 tem intersecção não vazia. Então $X$ é completo.*

**Demonstração:** Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Para $\epsilon = \frac{1}{N}$ existe $k(N)$ tal que $n, m \geq k(N) \implies d(x_n, x_m) < \frac{1}{N}$. Sem perda de generalidade $k(N)$ é estritamente crescente. Logo se $F_N = \overline{\{x_n : n \geq k(N)\}}$ temos $\delta(F_N) \leq \frac{1}{N}$ e $F_{N+1} \subset F_N$. Seja $x \in \cap_N F_N$. Então $\lim_n x_n = x$.

# 28/02

# Completamento de espaços normados

**Definição 19** *Um espaço normado completo é um espaço de Banach.*

**Definição 20** *Um espaço euclidiano completo é um espaço de Hilbert.*

**Teorema 14** *O completamento de um espaço normado é um espaço de Banach.*

**Demonstração:** Seja $(V, \|\|)$ um espaço normado. Sejam

$$\begin{aligned} c &= \left\{ x \in V^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \text{ é de Cauhy} \right\}; \\ c_0 &= \left\{ x \in V^{\mathbb{N}} : \lim_n x_n = 0 \right\}; \\ B &= c/c_0 = \{x + c_0 : x \in c\}. \end{aligned}$$

É fácil de se verificar que $c$ é um subespaço vetorial de $V^{\mathbb{N}}$ e $c_0$ é subespaço vetorial de $c$. Para $x \in c$ o limite $\lim_n \|x_n\|$ existe pois $(x_n)_n$ é de Cauchy e

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|.$$

Se $x + c_0 = y + c_0$ então $x - y \in c_0$ e

$$\|x_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n\| \implies \lim_n \|x_n\| \leq \lim_n \|y_n\|$$

pois $\lim_n x_n - y_n = 0$. Trocando $x$ com $y$ obtemos $\lim_n \|y_n\| \leq \lim_n \|x_n\|$ e então $\lim_n \|x_n\| = \lim_n \|y_n\|$. Portanto $\|x + c_0\| := \lim_n \|x_n\|$ está bem definida e vamos verificar que é uma norma em $B$. Se $\|x + c_0\| = 0$ para $x \in c$. Então $\lim_n \|x_n\| = 0$ e então $x \in c_0$. Para $\lambda$ real,

$$\|\lambda (x + c_0)\| = \|\lambda x + c_0\| = \lim_n \|\lambda x_n\| = |\lambda| \lim_n \|x_n\| = |\lambda| \|x + c_0\|.$$

Desigualdade triangular: se $x, y \in c$,

$$\begin{aligned} \|(x + c_0) + (y + c_0)\| &= \|x + y + c_0\| = \lim_n \|x_n + y_n\| \\ &\leq \lim_n \|x_n\| + \lim_n \|y_n\| = \|x + c_0\| + \|y + c_0\|. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que $B$ é de Banach. Seja $\left(x^N + c_0\right)_{N \geq 1}$ de Cauchy em $B, x^N \in c$. Para cada $N \geq 1$ existe $k(N)$ tal que

$$n, m \geq k(N) \implies \left\| x_m^N - x_n^N \right\| \leq \frac{1}{N}.$$

Sem perda de generalidade $k(N+1) > k(N)$. Seja $y_N = x^N_{k(N)}$ e $y = (y_N)_N$. Verifiquemos que $y \in c$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N_0$,

$$\left\|x^N - x^M + c_0\right\| \leq \epsilon \text{ se } N, M \geq N_0 \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Existe $n(\epsilon)$ tal que $n \geq n(\epsilon) \implies \left\|x^N_n - x^M_n\right\| < 2\epsilon$. Seja $n = \max\{n(\epsilon), k(N), k(M)\}$.

$$\|y_N - y_M\| \leq \left\|y_N - x^N_n\right\| + \left\|x^N_n - x^M_n\right\| + \left\|x^M_n - y_M\right\| \leq \frac{1}{N} + 2\epsilon + \frac{1}{M} \leq 4\epsilon.$$

Para demonstrar que $\left(x^N + c_0\right)_N$ converge para $y + c_0$ seja para dado $\epsilon > 0$, $n(\epsilon)$ tal que

$$n, m \geq n(\epsilon) \implies \|y_n - y_m\| \leq \epsilon.$$

Seja $N_0 \geq \max\left\{\frac{1}{\epsilon}, n(\epsilon)\right\}$. Então para $N \geq N_0$,

$$\left\|x^N_n - y_N\right\| = \left\|x^N_n - x^N_{k(N)}\right\| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{N_0} \leq \epsilon.$$

Então

$$\left\|x^N_n - y_n\right\| \leq \left\|x^N_n - y_N\right\| + \|y_N - y_n\| \leq 2\epsilon.$$

Ou seja $N \geq N_0$, $\left\|x^N - y + c_0\right\| = \lim_n \left\|x^N_n - y_n\right\| \leq 2\epsilon$. Resta demonstrar que $B$ é o completamento de $V$. Seja

$$\phi : V \to B$$
$$\phi(x) = (x, x, \ldots) + c_0.$$

Então $\|\phi(x)\| = \|x\|$. Densidade de $\phi(V)$. Seja $x \in c$. Dado $\epsilon > 0$ seja $N$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ se } n, m \geq N.$$

Então $\|x_n - x_N\| \leq \epsilon$. Logo $\lim_n \|x_n - x_N\| \leq \epsilon$. Portanto $\|x + c_0 - \phi(x_N)\| \leq \epsilon$.

**Comentário 12** *Uma demonstração semelhante permite demonstrar que o completamento de um espaço euclidiano é um espaço de Hilbert.*

# Método das aproximações sucessivas

**Definição 21** *Um ponto fixo de* $f : M \to M$ *é* $a \in M$ *tal que* $f(a) = a$.

**Definição 22** *Uma função* $f : M \to M$ *é uma contração (ou* $\lambda$ *contração) se existir* $0 < \lambda < 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), x, y \in M.$$

Uma contração tem no máximo um ponto fixo: se $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então

$$\begin{aligned} d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) &\implies (1-\lambda) d(x,y) \leq 0 \\ \implies d(x,y) = 0 &\implies x = y. \end{aligned}$$

**Teorema 15 (ponto fixo de Banach)** *Seja $(M,d)$ completo e $f : M \to M$ uma $\lambda$ contração. Então $f$ tem um único ponto fixo. Além disso a seqüência $x_{n+1} = f(x_n)$ com $x_0 \in M$ converge para o ponto fixo.*

**Demonstração:** Vou demonstrar que $(x_n)_n$ é de Cauchy. Temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1).$$

E para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + \lambda^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-1}\right) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ e $N$ tal que $\frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Então se $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Seja $a = \lim_{n \to \infty} x_n$. Então $a$ é um ponto fixo:

$$a = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right) = f(a).$$

**Comentário 13** *Vemos pela demonstração que $d(a, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$. A taxa de convergência é geométrica.*

**Teorema 16 (condição de Blackwell para uma contração)** *Para $X \subset \mathbb{R}^n$ seja $B(X) = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$. Seja $T : B(X) \to B(X)$ tal que*

**a)** *se $f, g \in B(X)$ e $f \leq g$ temos $Tf \leq Tg$*

**b)** *Existe $\beta \in (0,1)$ tal que $T(f+a) \leq Tf + \beta a$ se $a \geq 0$.*

*Então $T$ é uma contração.*

**Demonstração:** Para $f, g \in B(X)$, $f(x) \leq g(x) + |f(x) - g(x)| \leq g(x) + |f-g|_\infty$. Logo $f \leq g + |f-g|_\infty$.

Por (a),

$$Tf \leq T(g + |f-g|_\infty) \leq Tg + \beta |f-g|_\infty.$$

Trocando $f$ com $g$: $Tg \leq Tf + \beta |f-g|_\infty$. Portanto $|Tg - Tf|_\infty \leq \beta |f-g|_\infty$.

**Exemplo 16 (crescimento ótimo, um setor)** *O seguinte problema resume o aspecto matemático do problema:*

$$Tv\,(k) = \max_{0 \le y \le f(k)} \{U\,(f\,(k) - y) + \beta v\,(y)\}\,.$$

*Se* $v \le w$, $Tv \le Tw$ *e vale (a). E*

$$\begin{aligned} T\,(v + a)\,(k) &= \max_{0 \le y \le f(k)} \{U\,(f\,(k) - y) + \beta v\,(y) + \beta a\} \\ &= \max_{0 \le y \le f(k)} \{U\,(f\,(k) - y) + \beta v\,(y)\} + \beta a \\ &= T\,(v)\,(k) + \beta a. \end{aligned}$$

Outros exemplos em Stokey–Lucas.

# Compacidade em espaços métricos

**Definição 23** *Seja* $(X, d)$ *espaço métrico.*

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ *é uma cobertura de* $X$ *se* $\cup_{i \in I} U_i = X$.

2. *A cobertura* $\{U_i\}_{i \in I}$ *é uma cobertura aberta se cada* $U_i$ *for aberto.*

**Comentário 14** *A mesma definição vale para subespaços* $A \subset X$ *considerados com a métrica relativa. Nesse caso como os abertos de* $A$ *são da forma* $A \cap U_i$ *podemos escrever* $\cup_i U_i \supset A$ *no lugar de* $\cup_{i \in I} U_i \cap A = A$.

**Definição 24** *Se* $\{U_i\}_{i \in I}$ *é uma cobertura de* $X$, *se* $J \subset I$ *for tal que* $\cup_{i \in J} U_i = X$ *dizemos que* $\{U_i : i \in J\}$ *é uma subcobertura. A subcobertura é finita se* $J$ *for finito.*

**Definição 25** $(X, d)$ *é compacto se toda cobertura aberta de* $X$ *tem uma subcobertura finita.*

**Exemplo 17** *Todo conjunto finito é compacto.*

**Exemplo 18** $A = \left\{\frac{1}{n} : n \ge 1\right\}$ *não é compacto pois* $U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \infty\right) \supset \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \ge 1$ *é uma cobertura de* $A$ *que não possui subcobertura finita.*

*Pois qualquer família finita* $U_{n1} \cup U_{n2} \cup \ldots \cup U_{np} = U_m$ *sendo* $m = \max\{n1, \ldots, np\}$. *Então* $\frac{1}{m+1} \in A \setminus U_m$.

Se $K_1$e $K_2$ são compactos de $X$, $K_1 \cup K_2$ é compacto: Se $\cup_{i\in I} U_i \supset K_1 \cup K_2$ é cobertura aberta então existem $J_1$ e $J_2$ finitos tais que

$$\cup_{i\in J_1} U_i \supset K_1,$$
$$\cup_{i\in J_2} U_i \supset K_2$$

e portanto $\cup_{i\in J_1\cup J_2} U_i \supset K_1 \cup K_2$.

**Lema 9** *Se $K \subset X$ é compacto então $K$ é fechado.*

**Demonstração:** Seja $x \in X \setminus K$. Para cada $k \in K$, $B(x,r)$ e $B(k,r)$ são bolas abertas disjuntas se $r = r(k) = \frac{d(x,k)}{2}$. A cobertura de $K$, $\cup_{k\in K} B(k, r(k))$ possui subcobertura finita $B(k_1, r_1), B(k_2, r_2), \ldots, B(k_p, r_p)$, $r_i = r(k_i)$. Seja $0 < r < \min_{1\leq i\leq p} r_i$. Então

$$B(x,r) \cap B(k_i, r_i) \subset B(x, r_i) \cap B(k_i, r_i) = \emptyset, i \leq p \implies B(x,r) \cap K = \emptyset.$$

Portanto $K^c$ é aberto.

**Lema 10** *Se $X$ for compacto e $F \subset X$ fechado então $F$ é compacto.*

**Demonstração:** Seja $\{U_i : i \in I\}$ cobertura aberta de $F$. Seja $U_0 = F^c$. Então $\cup_{i\in I\cup\{0\}} U_i = X$. Seja $U_0, U_1, \ldots, U_n$ subcobertura finita:

$$U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n = X \implies U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supset F.$$

**Corolário 4** *Todo compacto é completo.*

**Demonstração:** Seja $\widehat{K}$ completamento do compacto $K$. Mas $K$ sendo compacto é fechado de $\widehat{K}$ . Logo $K = \overline{K} = \widehat{K}$.

# 01/03

**Teorema 17** *Seja $f : M \to N$ contínua. Se $K \subset M$ é compacto, $f(K) \subset N$ é compacto.*

**Demonstração:** Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ cobertura aberta de $f(K)$. Então de

$$K \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

vem que $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$é uma cobertura aberta de $K$. Seja $\{f^{-1}(U_i) : i \in J\}$ subcobertura finita de $K$. Então

$$f(K) \subset f\left(\cup_{i\in J} f^{-1}(U_i)\right) \subset \cup_{i\in J} U_i.$$

**Corolário 5** *Se $f : M \to N$ é contínua e bijetiva. Então se $M$ for compacto, $f$ é homeomorfismo.*

**Demonstração:** Devemos demonstrar que $f^{-1} : N \to M$ é contínua. Seja $F \subset M$ fechado. Então

$$F \text{ é compacto} \implies \left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F) \text{ é compacto} \implies f(F) \text{ é fechado.}$$

**Corolário 6** *Se $f : M \to \mathbb{R}$ for contínua e $M$ compacto então $f(M)$ é fechado limitado. Em particular $f$ tem máximo pois $\sup f(M) \in f(M)$ e mínimo pois $\inf f(M) \in f(M)$.*

**Definição 26** *A família de conjuntos $\{C_i : i \in I\}$ tem a propriedade da intersecção finita se $\cap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$ para todo $J$ finito.*

**Teorema 18** *O espaço métrico $M$ é compacto se e somente se toda família de fechados de $M$, $\{F_i : i \in I\}$, com a propriedade da intersecção finita tem intersecção não–vazia: $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

**Demonstração:** Suponhamos $M$ compacto. E $\{F_i : i \in I\}$ família de fechados com a propriedade da intersecção finita. Então se $U_i = F_i^c$ temos para $J$ finito,

$$\left(\cup_{i \in J} U_i\right)^c = \cap_{i \in J} U_i^c \neq \emptyset \implies \cup_{i \in J} U_i \neq M.$$

Portanto $\cup_{i \in I} U_i \neq M$ e logo $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Recíprocamente, seja $\cup_{i \in I} U_i = M$ cobertura aberta. Então $\cap_{i \in I} U_i^c = \emptyset$. Logo $\{U_i^c : i \in I\}$ não tem a propriedade de intersecção finita: existe $J$ finito, $\cap_{i \in J} U_i^c = \emptyset$ e logo $\cup_{i \in J} U_i = M$.

**Exemplo 19 (teorema de Dini)** *Seja $M$ compacto e $f_n : M \to \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos $f_n \leq f_{n+1}$ e $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ contínua. Então $f_n$ converge para $f$ uniformemente.*

*Para ver isto seja para $\epsilon > 0$ dado,*

$$F_n = \{x \in M : f(x) - \epsilon \geq f_n(x)\}.$$

*Então $F_n$ é fechado pela continuidade de $f_n$ e $f$. E $F_{n+1} \subset F_n$. De $\cap_n F_n = \emptyset$ vem que $\{F_n : n \geq 1\}$ não tem a propriedade de intersecção finita. Logo existe $n_0$ tal que $F_{n_0} = \emptyset$.*

**Definição 27** *O subespaço $Y$ do espaço métrico $X$ é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$ existem $W_1, W_2, \ldots, W_n$ com $\delta(W_i) < \epsilon$ e $\cup_{i=1}^n W_i \supset Y$. Alternativamente $Y \subset B(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon)$. E sem perda de generalidade $x_i \in Y$.*

É imediato que totalmente limitado é limitado.

**Definição 28** *Seja $A \subset X$. O ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de $A$ se para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Ou seja toda vizinhança de $x$ contém pontos de $A$ distintos de $x$. O conjunto dos pontos de acumulação de $A$ é denotado $A'$. É imediato que para todo $x \in A'$, toda vizinhança de $x$ é tem um número infinito de pontos de $A$.

**Lema 11** $\overline{A} = A \cup A'$

**Demonstração:** Seja $x \in \overline{A} \setminus A$ . Existe então $x_n \in A$ com limite $x$. Mas então a seqüência tem um número infinito de termos e portanto $x \in A'$. Suponhamo agora que $x \in A'$. Para todo $n$ existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (A \setminus \{x\})$. Portanto $\lim x_n = x$ e $x \in \overline{A}$.

**Teorema 19** *São equivalentes:*

**a)** *$X$ é compacto;*

**b)** *Todo subconjunto infinito de $X$ tem ponto de acumulação;*

**c)** *toda seqüência em $X$ possui subseqüência convergente;*

**d)** *$X$ é completo e totalmente limitado.*

**Demonstração:** (a) $\Longrightarrow$ (b). Suponhamos que $A \subset X$ não tem ponto de acumulação. Portanto $A$ é fechado e então compacto pois $X$ é compacto. Para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $A \cap B(a, r_a) = \{a\}$. Pela compacidade a cobertura $\{B(a, r_a), a \in A\}$ possui subcobertura finita $\{B(a_i, r_i) : i \leq N\}$e logo $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ é finito. (b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em $X$. Seja $A = \{x_n : n \geq 1\}$. Se $A$ for finito então existe $a \in A$ tal que $\{n : x_n = a\}$ é infinito e com isto temos uma subseqüência de $(x_n)_n$ que converge( para $a$.) Se $A$ for infinito. Seja $x \in A'$. Então para todo $n$ existe $k(n)$ tal que $x_{k(n)} \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \setminus \{x\}$ e $\lim_n x_{k(n)} = x$. (c) implica (d) Se $(x_n)_n$ for de Cauchy, a existência de uma subseqüência convergente por hipótese implica que $(x_n)$ converge. Logo $X$ é completo. Digamos para obter uma contradição que $X$ não seja totalmente limitado. Existe então $\epsilon > 0$ tal que $X$ não pode ser coberto por uma família finita de conjuntos com diâmetro inferior a $\epsilon$. Para $x_0 \in X$, $B(x_0, \epsilon) \neq X$. Seja $x_1 \in X \setminus B(x_0, \epsilon)$. Então existe $x_2 \in X \setminus (B(x_0, \epsilon) \cup B(x_1, \epsilon))$. Prosseguindo indutivamente dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ existe $x_{n+1} \in X \setminus \{B(x_0, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon)\}$. Se $\left(x_{k(n)}\right)_n$ for uma subseqüência convergente temos para algum $n$ que $d\left(x_{k(n+1)}, x_{k(n)}\right) < \epsilon$ contradição com $x_{k(n+1)} \in X \setminus \cup_{j=1}^{k(n+1)-1} B(x_j, \epsilon)$. (d) $\Longrightarrow$ (a) Seja $\{U_i : i \in I\}$

cobertura aberta de $X$ sem subcobertura finita. Sem perda de generalidade $U_i$ não–vazio. Sejam $V_1^N \cup V_2^N \cup \ldots \cup V_{k(N)}^N = X$ com $\delta\left(V_i^N\right) < \frac{1}{N}$. Sem perda de generalidade $V_i^N$ é fechado. Para $N = 1$ existe $j\,(1) \leq k\,(1)$ tal que $V_{j(1)}^1$ não tem subcobertura finita de $\{U_i\}_{i\in I}$. Então definido o processo para $N$ prosseguimos para $N+1$: $V_{j(N)}^N = V_1^{N+1} \cup \ldots V_{k(N+1)}^{N+1}$ cada um com diâmetro $<\frac{1}{N+1}$. Existe um $j\,(N+1) \leq k\,(N=1)$ para o qual a cobertura $\cup_{i\in I} U_i \supset V_{j(N+1)}^{N+1}$ não possui subcobertura finita. Seja $\{x^0\} = \cap_{N=1}^{\infty} V_{k(N)}^N$ que existe pois o espaço é completo. Seja $i^0 \in I$ tal que $x^0 \in U_{i^0}$. Para $N$ tal que $\frac{1}{N} < \delta\,(U_{i^0})$ temos que $V_{k(N)}^N \subset U_{i^0}$. Contradição.