Lista 2

1. Se $T : V \to W$ é linear então $V/\ker T$ é isomorfo a $T(V)$. Em particular $\dim V = \dim T(V) + \dim \ker T$. Sugestão: Considere $\phi : V/\ker T \to T(V)$, $\phi(x + \ker T) = T(x)$.

2. Sejam V e W espaços vetoriais. Então o produto cartesiano, $V \times W = \{(x, y) : x \in V, y \in W\}$ também é um espaço vetorial se definirmos

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w');$$
$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Verifique essa afirmação e calcule a dimensão de $V \times W$ para V e W de dimensão finita.

3. Seja V um espaço vetorial, e $\mathcal{L}(V, V)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $S : V \to V$. Fixe um vetor não nulo $u \in V$ e seja $\mathcal{L}_u = \{S \in \mathcal{L}(V, V) : u$ é um autovetor de $S\}$. Mostre que $\mathcal{L}_u$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}$.

4. Verifique que
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$
para o produto interno $\langle x, y\rangle$.

5. Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja S um conjunto ortogonal de vetores não nulos (isto é, se $x, y \in S$, então $\langle x, y\rangle = 0$). Mostre que S é um conjunto linearmente independente.

6. Seja $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f$ contínua$\}$ com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Seja W o espaço vetorial gerado for $\{f_i(\cdot) : i = 1, 2, 3\}$ sendo $f_i(t) = t^i$. Obtenha uma base ortonormal para W.

7. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ (sobre o corpo dos reais) com produto interno $< y, z >= \sum_{i=1}^{3} y_i z_i$. Seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ uma base ortonormal de

$\mathbb{R}^3$. A transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem a propriedade de que

$$\begin{aligned} Ax_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ Ax_2 &= x_2 + x_3, \\ Ax_3 &= x_1 + x_3. \end{aligned}$$

Escreva A^*x_1, A^*x_2, A^*x_3 em termos da base $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde A^* é a transformação adjunta de A.

8. Seja X um espaço com produto interno e de dimensão finita, e seja M um subespaço de X. Defina $M^\perp := \{y \in X \ : < x, y >= 0$ para todo $x \in M\}$, o subconjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de M. Mostre que $M^\perp$ é um subespaço vetorial de X.

9. Seja X um espaço com produto interno e de dimensão finita e seja M um subespaço de X. Mostre que $X = M \oplus M^\perp$.

10. Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Mostre que $S^\perp = [S]^\perp$.

11. Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Seja $S^{\perp\perp} = \left(S^\perp\right)^\perp$. Mostre que $[S] \subset S^{\perp\perp}$. Se X tem dimensão finita, mostre que $[S] = S^{\perp\perp}$.

12. Seja X um espaço com produto interno e seja $A : X \to X$ uma transformação linear sobrejetiva com a propriedade de que $\langle x, y \rangle =< Ax, Ay >$ para todos $x, y \in X$. Mostre que $A\left(U^\perp\right) = A(U)^\perp$ para todo subconjunto $U \subset X$.

13. Seja M um subespaço vetorial (de um espaço com produto interno de dimensão finita) invariante sob a transformação linear $T : X \to X$; isto é, $T(M) \subset M$. Mostre que $M^\perp$ é invariante sob a adjunta T^*.

14. Seja X um espaço com produto interno e de dimensão finita, e seja $T : X \to X$ uma transformação linear. Mostre que $\operatorname{ran}(A)^\perp = \ker(A^*)$, sendo $\operatorname{ran}(A) := \{Ax \ : \ x \in X\}$ a imagem de A e $\ker(A^*) := \{x \ : \ A^*x = 0\}$ é o núcleo de A^*.