1. Defina $\phi : V/\ker T \to T(V)$ por $\phi([v]) := T(v)$, onde $u \in [v]$ se $v - u \in \ker T$.

- **ϕ está bem definida:**

Tome $[v] = [v']$. Logo, $v' \in [v]$ e $v - v' \in \ker T$, isto é, $T(v - v') = 0_W$ ou $T(v) = T(v')$. Isto nos dá $\phi([v]) = T(v) = T(v') = \phi([v'])$ e ϕ está bem definida.

- **ϕ é linear:** Dados $[v], [u] \in V/\ker T$ e $\alpha \in K$, temos $\phi(\alpha[v] + [u]) = \phi([\alpha v + u]) = T(\alpha v + u) = \alpha T(v) + T(u) = \alpha\phi([v]) + \phi([u])$

- **ϕ é injetiva:** O zero de $V/\ker T$ é $[0_V]$, pois $[v] + [0_V] = [v + 0_V] = [v]$. Vou provar que $\phi([v]) = 0_W$ implica $[v] = [0_V]$.

Tome $\phi([v]) = 0_W$. Logo, $T(v) = 0_W$, isto é, $v \in \ker T$. Como $v - 0_V \in \ker T$, $0_V \in [v]$, o que equivale a $[v] = [0_V]$.

- **ϕ é sobrejetiva:** Tome $y \in T(V)$. Logo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = y$. Logo, $[v] \in V/\ker T$ nos dará $\phi([v]) = T(v) = y$.

A PÁGINA ANTERIOR PROVA QUE $V/\ker T \approx T(V)$.

EM PARTICULAR, $\dim V/\ker T = \dim T(V)$. SE ESTIVERMOS EM DIMENSÃO FINITA, VAMOS TER QUE $\dim V/\ker T = \dim V - \dim \ker T$ (PROVADO EM AULA). JUNTANDO OS DOIS FATOS ACIMA,

$$\dim T(V) = \dim V - \dim \ker T,$$

OU

$$\dim V = \dim T(V) + \dim \ker T. \quad \square$$

② TOME BASES $\mathcal{B}_V := \{v_1, \dots, v_n\}$ E $\mathcal{B}_W := \{w_1, \dots, w_m\}$ DE V E W. DEFINA $\mathcal{B} := \{(v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m)\}$. SE $\mathcal{B}$ FOR BASE DE $V \times W$, DIM $V \times W = n + m$. PORTANTO, VOU PROVAR QUE $\mathcal{B}$ É BASE DE $V \times W$.

- $\mathcal{B}$ É GERADOR: TOME $(v, w) \in V \times W$. COMO $v \in V$ E $w \in W$, EXISTEM $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ TAIS QUE $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = v$ E $\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = w$, POIS $\mathcal{B}_V$ É BASE DE V E $\mathcal{B}_W$ É BASE DE W. LOGO, TEMOS

$$(v, w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (0_V, w_i).$$

- $\mathcal{B}$ É L.I.: TOME $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ TAIS QUE $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (0_V, w_i) = (0_V, 0_W)$. LOGO, $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i\right) = (0_V, 0_W)$. LOGO, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V$ E $\sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = 0_W$. COMO $\mathcal{B}_V$ E $\mathcal{B}_W$ SÃO BASES, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0_K$, COMO QUERÍAMOS.

LOGO, $\mathcal{B}$ É L.I. ∎

3 TOME $T, S \in \mathcal{L}_u$ E $\alpha \in K$. COMO $T, S \in \mathcal{L}_u$ EXISTEM $\lambda_T, \lambda_S \in K$ TAIS QUE $T(u) = \lambda_T u$ E $S(u) = \lambda_S u$.

PORTANTO, TEMOS QUE

$$(\alpha T + S)(u) = \alpha T(u) + S(u) = \alpha(\lambda_T u) + \lambda_S u = (\alpha \lambda_T + \lambda_S) u.$$

PORTANTO, $\alpha \lambda_T + \lambda_S$ É AUTOVALOR DE $\alpha T + S$ ASSOCIADO AO AUTOVETOR u. LOGO, $\alpha T + S \in \mathcal{L}_u$.

(4) SEJA $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ A NORMA INDUZIDA PELO PRODUTO INTERNO. TEMOS ENTÃO QUE

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$= |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$. REARRANJANDO ISSO, TEMOS QUE

$$\frac{|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2}{2} = \langle x, y \rangle,$$ COMO QUERÍAMOS. ∎

5) TOME S ORTOGONAL COM $s \neq 0$ PARA TODO $s \in S$. QUERO PROVAR QUE S É L.I..

TOME $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ E $s_1, \dots, s_m \in S$ TAIS QUE

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = 0$. TOME s_j E NOTE QUE

$$0 = \langle 0, s_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i , s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle s_i, s_j \rangle = \lambda_j \langle s_j, s_j \rangle,$$

ONDE A ÚLTIMA IGUALDADE VALE PELA ORTOGONALIDADE DE S. COMO $s_j \neq 0$, $\langle s_j, s_j \rangle > 0$. LOGO, PODEMOS DIVIDIR DOS DOIS LADOS E TEREMOS $\lambda_j = 0$.

COMO j ERA ARBITRÁRIO, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, PROVANDO A INDEPENDÊNCIA DE S.

⑥ VAMOS ACHAR UMA BASE ORTOGONAL POR GRAM-SCHMIDT. COMO VISTO EM AULA, NOSSA BASE SERÁ $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ COM

$$b_1 := x, \quad b_2 := x^2 + \lambda b_1, \quad b_3 := x^3 + \nu b_2 + \mu b_1,$$

ONDE

$$\lambda = -\frac{\langle b_1, x^2\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}, \quad \nu = -\frac{\langle b_2, x^3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}, \quad \mu = -\frac{\langle b_1, x^3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}.$$

SABEMOS QUE FUNÇÕES f ÍMPARES SATISFAZEM

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

E FUNÇÕES g PARES SATISFAZEM

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx,$$

PARA QUALQUER $a \in \mathbb{R}$.

SABEMOS TAMBÉM QUE $f(x) = x^n$ É FUNÇÃO ÍMPAR PARA n ÍMPAR E É FUNÇÃO PAR PARA n PAR.

LOGO, $\lambda = -\frac{\langle x, x^2\rangle}{\langle x, x\rangle} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\langle x, x\rangle} = 0,$ NOS

DANDO $b_2 = x^2$.

ALÉM DISSO, $\gamma = -\dfrac{\langle x^2, x^3\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle} = -\dfrac{\int_{-1}^{1} x^5\,dx}{\langle x^2, x^2\rangle} = 0$ E

$$\mu = -\frac{\langle x, x^3\rangle}{\langle x, x\rangle} = -\frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = -\frac{\cancel{2}\int_{0}^{1} x^4\,dx}{\cancel{2}\int_{0}^{1} x^2\,dx} = -\frac{\left.\frac{x^5}{5}\right|_{x=0}^{x=1}}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1}} = -\frac{1/5}{1/3} = -\frac{3}{5}.$$

LOGO, $b_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$.

AGORA QUE A BASE FOI ORTOGONALIZADA, PRECISAMOS TRANSFORMAR OS VETORES EM UNITÁRIOS. A BASE FINAL SERÁ $\mathcal{B}^* := \left\{ \frac{x}{\|x\|}, \frac{x^2}{\|x^2\|}, \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\|x^3 - \frac{3}{5}x\|} \right\}$. VIMOS ACIMA QUE $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2\rangle} = \sqrt{\frac{2}{5}}$. TEREMOS (PELO WOLFRAM) $\left\|x^3 - \frac{3}{5}x\right\| = \sqrt{\frac{8}{175}}$. LOGO,

A BASE FINAL É $\mathcal{B}^* = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \sqrt{\frac{5}{2}}\,x^2, \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \right\}$.

7) PRIMEIRO, VAMOS ESCREVER $A^* x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$,

$A^* x_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$, $A^* x_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$. NOTE QUE TEMOS

$\langle A x_1, x_1 \rangle = \langle x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 \rangle = \langle 1 \cdot x_1, x_1 \rangle = 1$, PELA ORTONORMALIDADE. ALÉM DISSO,

$\langle x_1, A^* x_1 \rangle = \langle x_1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \rangle = \langle x_1, \alpha_1 x_1 \rangle = \alpha_1$, PELA ORTONORMALIDADE.

PELA DEFINIÇÃO DE ADJUNTA, $\langle A x_1, x_1 \rangle = \langle x_1, A^* x_1 \rangle$, OU $1 = \alpha_1$. CONTINUANDO,

$$\alpha_2 = \langle x_2, \alpha_2 x_2 \rangle = \langle x_2, A^* x_1 \rangle = \langle A x_2, x_1 \rangle = \langle 0 \cdot x_1, x_1 \rangle = 0,$$

$$\alpha_3 = \langle x_3, \alpha_3 x_3 \rangle = \langle x_3, A^* x_1 \rangle = \langle A x_3, x_1 \rangle = \langle 1 \cdot x_1, x_1 \rangle = 1,$$

$$\beta_1 = \langle x_1, \beta_1 x_1 \rangle = \langle x_1, A^* x_2 \rangle = \langle A x_1, x_2 \rangle = \langle 2 \cdot x_2, x_2 \rangle = 2,$$

$$\beta_2 = \langle x_2, \beta_2 x_2 \rangle = \langle x_2, A^* x_2 \rangle = \langle A x_2, x_2 \rangle = \langle 1 \cdot x_2, x_2 \rangle = 1,$$

$$\beta_3 = \langle x_3, \beta_3 x_3 \rangle = \langle x_3, A^* x_2 \rangle = \langle A x_3, x_2 \rangle = \langle 0 \cdot x_2, x_2 \rangle = 0,$$

$$\gamma_1 = \langle x_1, \gamma_1 x_1 \rangle = \langle x_1, A^* x_3 \rangle = \langle A x_1, x_3 \rangle = \langle 3 x_3, x_3 \rangle = 3,$$

$$\gamma_2 = \langle x_2, \gamma_2 x_2 \rangle = \langle x_2, A^* x_3 \rangle = \langle A x_2, x_3 \rangle = \langle 1 \cdot x_3, x_3 \rangle = 1 \quad \text{E}$$

$$\gamma_3 = \langle x_3, \gamma_3 x_3 \rangle = \langle x_3, A^* x_3 \rangle = \langle A x_3, x_3 \rangle = \langle 1 \cdot x_3, x_3 \rangle = 1.$$

LOGO,

$$A^* x_1 = x_1 + x_3$$

$$A^* x_2 = 2x_1 + x_2$$

$$A^* x_3 = 3x_1 + x_2 + x_3.$$

2,0

(8) TOME $y, z \in M^\perp$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. QUERO PROVAR QUE $\alpha y + z \in M^\perp$. TOME $m \in M$. LOGO,

$$\langle \alpha y + z, m \rangle = \alpha \langle y, m \rangle + \langle z, m \rangle = \alpha \cdot 0 + 0 = 0,$$ POIS $y, z \in M^\perp$.

COMO $m \in M$ ERA ARBITRÁRIO, $\alpha y + z \in M^\perp$. LOGO, $M^\perp$ É SUBESPAÇO VETORIAL. ∎

9 COMO X É FINITO, M TAMBÉM SERÁ.

TOME $B_M := \{m_1, \dots, m_p\}$ BASE ORTONORMAL DE M. DADO $x \in X$, VOU ACHAR $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ TAIS QUE SE DEFINIRMOS $m := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_i$, FAZEMOS COM QUE $x - m \in B_M^{\perp}$, ISTO É, $x - m$ É ORTOGONAL À BASE DE M. PARA ISSO, PRECISAMOS QUE A CONDIÇÃO $\langle x-m, m_j \rangle = 0$ PARA QUALQUER j.

ORAS, MAS ISSO É VERDADE SE $0 = \langle x-m, m_j \rangle =$

$$= \langle x, m_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle m_i, m_j \rangle \overset{\text{ORTONORMALIDADE}}{=} \langle x, m_j \rangle - \lambda_j.$$ ISSO IMPLICA EM $\lambda_j = \langle x, m_j \rangle$. PORTANTO, ACABEI DE MOSTRAR QUE DADO $x \in X$, $x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_i = \boxed{x - m \overset{*}{\in} B_M^{\perp}}$, COM $\lambda_i = \langle x, m_i \rangle$ PARA TODO i.

AGORA, VOU PROVAR QUE $X = M \oplus M^{\perp}$.

- $M \cap M^{\perp} = \{0\}$: TOME $m \in M$ E $m \in M^{\perp}$. LOGO, $\langle m, m \rangle = 0$. ISSO IMPLICA EM $m = 0$, COMO QUERÍAMOS.

- $X = M + M^{\perp}$: TOME $x \in X$. TOMANDO OS λ_i ACIMA E ESCREVENDO $m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_i$, PODEMOS DECOMPOR x EM $x = m + (x - m)$. COMO $m \in M$, BASTA PROVAR QUE $x - m \in M^{\perp}$. TOME $m' \in M$. LOGO, EXISTEM $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ TAIS QUE $m' = \sum_{i=1}^{p} \mu_i m_i$. ISSO NOS DÁ QUE $\langle x-m, m' \rangle = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \langle x-m, m_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot 0 = 0$, POR $*$. LOGO, $x - m \in M^{\perp}$. $\blacksquare$

10

- $S^\perp \subseteq [S]^\perp$: TOME $s^\perp \in S^\perp$. AGORA, TOME $s \in [S]$. PRECISO PROVAR QUE $\langle s, s^\perp \rangle = 0$. COMO $s \in [S]$, EXISTEM $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ E $s_1, \dots, s_m \in S$ TAIS QUE $s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i$. LOGO, $\langle s, s^\perp \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle s_i, s^\perp \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot 0 = 0$, POIS $s^\perp \in S^\perp$. LOGO, $s^\perp \in [S]^\perp$.

- $[S]^\perp \subseteq S^\perp$: TOME $s^\perp \in [S]^\perp$. AGORA, TOME $s \in S$. PRECISO PROVAR QUE $\langle s, s^\perp \rangle = 0$. COMO $s^\perp \in [S]^\perp$, $s^\perp$ É ORTOGONAL A QUALQUER ELEMENTO DE $[S]$. COMO $s \in [S]$, EM PARTICULAR VALE $\langle s, s^\perp \rangle = 0$, COMO QUERÍAMOS. LOGO, $s^\perp \in S^\perp$, O QUE TERMINA A PROVA. $\blacksquare$

11 • $[S] \subseteq S^{\perp\perp}$: TOME $s \in [S]$. LOGO, EXISTEM $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ E $s_1, \dots, s_m \in S$ TAIS QUE $s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i$. QUERO PROVAR QUE $\langle s, s^\perp \rangle = 0$ PARA TODO $s^\perp \in S^\perp$. PORTANTO, TOME $s^\perp \in S^\perp$. LOGO, $\langle s, s^\perp \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle s_i, s^\perp \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot 0 = 0$. LOGO, $s \in S^{\perp\perp}$.

• SE $\dim X < \infty$, $S^{\perp\perp} \subseteq [S]$: SABEMOS DO EXERCÍCIO 9 QUE $X = [S] \oplus [S]^\perp$. SABEMOS DO EXERCÍCIO 10 QUE $[S]^\perp = S^\perp$. LOGO, $X = [S] \oplus S^\perp$.

TOME $s \in S^{\perp\perp}$. QUERO PROVAR QUE $s \in [S]$.

COMO $s \in X$, PODEMOS DECOMPÔ-LO EM $s = y + z$, ONDE $y \in [S]$ E $z \in S^\perp$. AGORA, PROVO QUE $z = 0$. TEMOS $\langle z, z \rangle = \langle z, s - y \rangle = \langle z, s \rangle - \langle z, y \rangle = 0 - 0 = 0$. TEMOS $\langle z, s \rangle = 0$, POIS $z \in S^\perp$ E $s \in S^{\perp\perp}$. COMO $y \in [S]$ E $[S] \subseteq S^{\perp\perp}$, TEMOS $y \in S^{\perp\perp}$. LOGO, $\langle z, y \rangle = 0$. COMO $\langle z, z \rangle = 0$, SÓ PODE SER QUE $z = 0$. LOGO, $s = y$. COMO $y \in [S]$, $s \in [S]$.

10

12 • $A(U^\perp) \subseteq A(U)^\perp$: TOME $y \in A(U^\perp)$. QUERO PROVAR QUE $\langle y, z \rangle = 0$ PARA TODO $z \in A(U)$.

COMO $y \in A(U^\perp)$, EXISTE $u^\perp \in U^\perp$ TAL QUE $y = A(u^\perp)$.

TOME $z \in A(U)$. LOGO, EXISTE $u \in U$ TAL QUE $z = A(u)$.

LOGO, $\langle y, z \rangle = \langle Au^\perp, Au \rangle = \langle u^\perp, u \rangle = 0$, POIS $u^\perp \in U^\perp$ E $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ PARA TODO $x, y \in X$. LOGO, $y \in A(U)^\perp$.

• $A(U)^\perp \subseteq A(U^\perp)$: TOME $y \in A(U)^\perp$. QUERO PROVAR QUE EXISTE $u^\perp \in U^\perp$ TAL QUE $y = A(u^\perp)$. COMO A É SOBREJETIVA, EXISTE $z \in X$ TAL QUE $A(z) = y$. BASTA PROVAR QUE $z \in U^\perp$. TOME $u \in U$. LOGO,

$\langle z, u \rangle = \langle A(z), A(u) \rangle = \langle y, A(u) \rangle = 0$, POIS $y \in A(U)^\perp$.

LOGO, $y \in A(U^\perp)$. $\square$

(13) QUERO PROVAR QUE $T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

TOME $y \in T^*(M^\perp)$. LOGO, EXISTE $m^\perp \in M^\perp$ TAL QUE $y = T^*(m^\perp)$.

VOU PROVAR QUE $y \in M^\perp$. TOME $m \in M$. LOGO,

$\langle y, m \rangle = \langle T^*(m^\perp), m \rangle = \langle m^\perp, T(m) \rangle = 0$, POIS $T(m) \in T(M)$

E $T(M) \subseteq M$. LOGO, $y \in M^\perp$ COMO QUERÍAMOS. 1

(14) • $T(X)^\perp \subseteq \ker(T^*)$: TOME $y \in T(X)^\perp$.

VOU PROVAR QUE $T^*(y) = 0$. TEMOS QUE

$\langle T^*(y), T^*(y)\rangle = \langle y, T(T^*(y))\rangle = 0$, POIS $T(T^*(y)) \in T(X)$

E $y \in T(X)^\perp$. LOGO, $T^*(y) = 0$ E $y \in \ker(T^*)$.

• $\ker(T^*) \subseteq T(X)^\perp$: TOME $y \in \ker(T^*)$. VOU PROVAR

QUE DADO $z \in T(X)$, $\langle y, z\rangle = 0$.

TOME $z \in T(X)$. LOGO, EXISTE $x \in X$ COM $T(x) = z$.

TEMOS $\langle y, z\rangle = \langle y, T(x)\rangle = \langle T^*(y), x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, POIS

$y \in \ker(T^*)$. LOGO, $y \in T(X)^\perp$. $\blacksquare$