Lista 1

1. Seja K um corpo. Demonstre que:

   (a) se $a + b = a$ para algum $a \in K$ então $b = 0$.

   (b) Se $a + b = 0$ então $b = -a$.

   (c) Qual o valor de $-(-a)$?

   (d) Verifique que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ e que $a \cdot 0 = 0$.

   (e) Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

2. Verifique que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é um corpo.

3. Seja l^0 o conjunto das seqüências reais:

$$l^0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R},\, n \geq 1\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

   Verifique que l^0 é um espaço vetorial se definirmos

$$\begin{cases} (x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \\ \lambda \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}\,. \end{cases}$$

   Seja l^2 o espaço das seqüências reais de quadrado somável,

$$l^2 = \left\{ x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$

   Verifique que l^2 é um subespaço vetorial de l^0.

4. Seja $0 < p < \infty$ e $l^p = \{x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Então l^p é um subespaço vetorial de l^0.

5. Num espaço vetorial, $\lambda v = 0 \iff \lambda = 0$ ou $v = 0$.

6. Considere $V = \mathbb{R}$ sobre o corpo $K = \mathbb{Q}$. Então $\{1, \xi\}$ é independente se e somente se ξ for irracional.

7. Generalize o exercício anterior e demonstre que $\mathbb{R}$ sob o corpo dos racionais não possui base enumerável.

8. Qual a dimensão de $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sob os reais?

9. Seja V de dimensão finita. Para todo subespaço $U \subset V$ existe $W \subset V$, subespaço complementar: Isto é,

$$\begin{aligned} U + W &= V, \\ U \cap W &= \{0\} . \end{aligned}$$

10. Sejam U_1 e U_2 dois subespaços do espaço vetorial V. Mostre que $U_1 \cup U_2$ é um subespaço se e somente se $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$.

11. Seja $f \in V' \setminus \{0\}$. Demonstre que $f(V) = K$.

12. Encontre um espaço vetorial V e uma transformação linear injetiva $T : V \to V$ que não é invertível.

13. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Mostre que um subconjunto W de V é um subespaço se e somente se existe uma transformação linear $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $\ker T = W$.