Lista 2

1. Seja l^∞ o conjunto das seqüências limitadas reais. Para $x, y \in l^\infty$ definimos
$$|x-y|_\infty = \sup\{|x_n - y_n| : n \geq 1\}.$$
Vefique que $(l^\infty, |\cdot|_\infty)$ é um espaço normado.

2. Demonstre que l^∞ não é separável. Sugestão: Considere $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset l^\infty$ e note que se $x \neq x'$ estão em S, $|x - x'|_\infty = 1$.

3. Seja $Y = \{x \in l^\infty : \exists n \geq 1, \forall m \geq n, x_m = 0\}$. Então Y é um subespaço separável de l^∞.

4. Seja X um conjunto não–vazio e $F = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\}$. Então
$$|f - g_\infty| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$
é uma norma (denominada de norma do sup ou norma da convergência uniforme)

5. Seja $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$. Então verifique que
$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty x_n^2}$$
é uma norma obtida a partir do produto interno, $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

6. Seja $l^1 = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$. A função $|x|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ é uma norma em l^1.

7. Demonstre que l^1 e l^2 são separáveis.

8. Verifique que $[0,1]$ é fechado mas não é aberto de $\mathbb{R}$.

9. (a) O conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ não é fechado nos reais. Entretanto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ é fechado em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Justifique.

   (b) Para U aberto não–vazio de $\mathbb{R}$ defina para $x, y \in U$, $x \sim y$ se existir $(a,b) \subset U$ tal que $x, y \in (a,b)$. Demontre que $\sim$ é uma relação de equivalência e use isto para demonstrar que U é uma união enumerável de intervalos abertos[1] dois a dois disjuntos.

[1] os intervalos da forma (x, ∞) e $(-\infty, x)$ também são intervalos abertos.

10. Demonstre que num espaço métrico todo conjunto fechado é uma intersecção enumerável de conjuntos abertos. E que todo conjunto aberto é uma união enumerável de fechados.

11. Verifique que para espaços normados, $B(x,r) = x + rB(0,1)$ sempre que $r > 0$.

12. Seja $(B, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Demonstre que $+ : B \times B \to B$, $+(x,y) = x + y$ e $\cdot : \mathbb{R} \times B \to B$, $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ são funções contínuas.

13. Se M é um subconjunto limitado do espaço normado B e $\lambda_n \to 0$ então para toda seqüência $m_n \in M$, $\lim_n \lambda_n m_n = 0$.

14. Seja $Z = X \times Y$ sendo X e Y espaços métricos. Se $U \subset Z$ é aberto e $z = (x,y) \in U$ demonstre que existem $V \subset X$ e $W \subset Y$ abertos tais que $(x,y) \in V \times W \subset Z$.

15. Seja $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ sendo (X_n, d_n) métrico, $n \geq 1$. Seja $U \subset X$ aberto da métrica produto e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Demonstre que existe natural N e bolas abertas, $B(x_n, r_n) \subset X_n$ para $1 \leq n \leq N$ tais que

$$x \in \{z \in X : z_n \in B(x_n, r_n), 1 \leq n \leq N\} \subset U.$$

16. Seja $E = \Pi_{n=1}^{\infty} E_n$ o produto cartesiano dos espaços normados $(E_n, |\cdot|_n)$, $E_n \neq \{0\}$. Então E não é normado. Sugestão: Se $\|\cdot\|$ é uma norma em E que define a mesma topologia que a métrica do produto cartesiano, note que $M = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ é aberto e limitado (na norma). Seja $0 \in U \subset M$, U aberto na métrica do produto cartesiano. Pelo exercício anterior existe N tal que

$$\{z \in E : z = (0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)\} \subset U.$$

Mas então temos uma contradição com exercício 13: se $\lambda_n \neq 0$ tende a 0, podemos para cada $m > N$, encontrar $x_m^n \in E_m$ tal que $\|\lambda_n x_m^n\|_m = 1$ e portanto $z^n = \left(0, \ldots, x_{N+1}^n, x_{N+2}^n, \ldots\right) \in M$ mas $d(\lambda_n z^n, 0) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|\lambda_n x_m^n|}{1+|\lambda_n x_m^n|} = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} > 0$.

17. Sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ normas equivalentes[2] em V. Demonstre que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $v \in V$, $\epsilon \|v\| \leq \|v\|' \leq \frac{1}{\epsilon} \|v\|$.

[2]Ou seja normas que definem métricas equivalentes.

18. Para $A \subset X$ definamos o interior de A,

$$\mathring{A} = \operatorname{int} A := \cup \{U \subset A : U \text{ é aberto}\}.$$

Verifique as propriedades:

   (a) $A \subset B \subset X \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$

   (b) $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$

   (c) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

   (d) $\cup_{i \in I} \operatorname{int} A_i \subset \operatorname{int}(\cup_{i \in I} A_i)$.

19. Demonstre que $\mathring{A} = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

20. Um espaço métrico (X, ρ) é dito ultramétrico se para todos x, y, z em X,

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

Demonstre que num espaço ultramétrico todo ponto da bola $B(x, r)$ é centro da mesma.

21. Seja $f : X \to Z$ contínua e sobrejetora. Se X for separável, Z também é.

22. Sejam (X_n, d_n) espaços métricos, $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ o produto cartesiano com a métrico usual do produto, $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$. Demonstre que

   a. Se cada X_n for separável, X é.

   b. A projeção $f : X \to X_1 \times \ldots \times X_N$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_N)$ é contínua.

   c. Se $f^k \in X$ para $k \geq 1$ e $\lim_{k \to \infty} f^k(n) = f(n) \in X_n, n \geq 1$. Então $\lim_{k \to \infty} f^k = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ na métrica de X.

23. Sejam V e W espaços normados e $T : V \to W$ linear. Então

   (a) T é contínua se e somente se for contínua na origem.

   (b) T é contínua na origem se e somente se $\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$. E nesse caso temos $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|, x \in V$.

24. Seja B um espaço de Banach. Suponhamos que $B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$ para n natural. Então $\cap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \neq \emptyset$.

25. Seja (X, d) completo. Existe $\tilde{d} \leq 1$ métrica e equivalente a d e tal que $\left(X, \tilde{d}\right)$ é completo.

26. Seja (X, d) métrico completo. Uma função $f : X \to X$ é uma contração se existir $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \lambda d\left(x, y\right).$$

    Demonstre que se f tem ponto fixo o ponto fixo é único.

27. (continuação) Seja $x_0 \in X$ e $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$. Demonstre que $\left(x_n\right)_n$ converge. E o limite é um ponto fixo de f.