1 TEMOS QUE VERIFICAR QUE É ESPAÇO MÉTRICO E QUE d TAMBÉM É ULTRAMÉTRICA.

- $d(x,y) \geq 0$: COMO $m(x,y) \in \mathbb{N}$, $d(x,y) \geq 0$.
- $d(x,y) = d(y,x)$: COMO $m(x,y)$ É SIMÉTRICA, $d(x,y)$ TAMBÉM É.
- $d(x,x) = 0$: POR DEFINIÇÃO.
- $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$: SE $x \neq y$, ENTÃO $m(x,y) > 0$.

LOGO, $d(x,y) > 0$.

- $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\}$: TOME x, y, z COM

$x \neq y$, $x \neq z$ E $y \neq z$. SEJA $n := m(x,y)$ E $k := m(y,z)$

SE $k \leq n$, ENTÃO $d(x,y) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} = d(y,z)$ E ACABAMOS.

SUPONHA ENTÃO $k > n$. ISSO SIGNIFICA QUE $x_m = y_m$ PARA $m = 1, \dots, n-1$, QUE $x_n \neq y_n$ E QUE $y_m = z_m$ PARA $m = 1, \dots, n-1, n, \dots, k-1$. LOGO, $x_m = z_m$ PARA $m = 1, \dots, n-1$ E $x_n \neq z_n$. LOGO, $m(x,z) = n$. PORTANTO, $d(x,y) = d(x,z) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\}$, COMO QUERÍAMOS.

- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$: A PROPRIEDADE DE ULTRAMÉTRICA IMPLICA NA DESIGUALDADE TRIANGULAR, POIS

$\max\{d(x,z), d(y,z)\} \leq d(x,z) + d(y,z)$. ∎

(2) A NOTAÇÃO PARA $y \in B$ SERÁ $y := (y[1], y[2], \dots)$.

TOME $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq B$ COM x_m CAUCHY. PRECISO PROVAR QUE $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CONVERGE.

PRIMEIRO, PROVO QUE DADO $k \in \mathbb{N}$, $x_m[k]$ FICA CONSTANTE PARA m GRANDE. TOME $\frac{1}{k} > 0$. EXISTE m_k TAL QUE SE $m \geq m_k$ TEMOS $d(x_m, x_{m_k}) = \frac{1}{m(x_m, x_{m_k})} < \frac{1}{k}$, POIS A SEQUÊNCIA É CAUCHY. ISSO SIGNIFICA QUE $k < m(x_m, x_{m_k})$, OU SEJA, $x_m[k] = x_{m_k}[k]$ PARA $m \geq m_0$, COMO QUERÍAMOS.

SEM PERDA DE GENERALIDADE, $m_k < m_{k+1}$. ASSIM, DEFINA $x[k] := x_{m_k}[k]$ E $x := (x[1], x[2], \dots)$. VOU PROVAR QUE $x_m \to x$.

TOME $\varepsilon > 0$. LOGO, EXISTE $k \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\frac{1}{k} < \varepsilon$. AGORA, TOME m_k COMO ACIMA. SE $m \geq m_k$, TEREMOS PELO EXERCÍCIO 1 $d(x, x_m) \leq \max\{d(x, x_{m_k}), d(x_{m_k}, x_m)\} < \frac{1}{k} < \varepsilon$, COMO QUERÍAMOS. LOGO, B É COMPLETO. $\blacksquare$

3. PRIMEIRO, SE $INT(F) = \emptyset$, TEMOS PELO EXERCÍCIO 19 DA LISTA 3 QUE $\emptyset = INT(F) = (\widetilde{F^C})^C$, OU QUE $X = \widetilde{F^C} =: \widetilde{A}$, ISTO É, UM CONJUNTO TEM INTERIOR VAZIO SE, E SOMENTE SE SEU COMPLEMENTO É DENSO. PORTANTO, PROVAR QUE $INT\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = \emptyset$ PARA F_m FECHADOS COM $INT(F_m) = \emptyset$ É O MESMO QUE PROVAR QUE $\overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m} = X$ PARA A_m ABERTOS COM $\widetilde{A_m} = X$, POIS $\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)^C = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m^C$. PORTANTO, VOU PROVAR O TEOREMA DE BAIRE COM ABERTOS.

TOME A_m ABERTOS DENSOS. PROVAR QUE $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ É DENSO É O MESMO QUE PROVAR QUE DADO QUALQUER W ABERTO $W \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \neq \emptyset$. VAMOS LÁ. TOME W ABERTO. COMO A_1 É DENSO, $W \cap A_1 \neq \emptyset$. COMO $W \cap A_1$ É ABERTO NÃO-VAZIO, EXISTE $B[x_1, r_1] \subseteq W \cap A_1$. COMO $B(x_1, r_1) \subseteq W$ E É ABERTO, PELA DENSIDADE DE A_2 VALE $B(x_1, r_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. PORTANTO, TEMOS $B[x_2, r_2] \subseteq B(x_1, r_1) \cap A_2$. FAZENDO ISSO RECURSIVAMENTE, VALE $B[x_{m+1}, r_{m+1}] \subseteq B(x_m, r_m) \cap A_{m+1}$. TOMANDO A SEQUÊNCIA $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ DE MODO QUE $r_m \to 0$, TEMOS PELO TEOREMA 12 DAS NOTAS DE AULA QUE $\bigcap_{m=1}^{\infty} B[x_{m+1}, r_{m+1}] \neq \emptyset$

PORTANTO, TEMOS PARA TODO n, $x \in B[x_n, r_n] \subseteq A_n$ E $x \in B[x_1, r_1] \subseteq W$. LOGO, $x \in W$ E $x \in A_n$ PARA TODO n. LOGO, $x \in W \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, COMO QUERÍAMOS. LOGO, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ É DENSO EM X. $\blacksquare$

(4) • $\boxed{\|0\| = 0}$ TEMOS $\|0\| = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\frac{1}{m^2}} = 0$, TOMANDO

$m \to \infty$.

• $\boxed{\|x\| = \|-x\|}$ TEMOS $\|-x\| = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (-x_i)^2 + \frac{1}{m^2}} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \frac{1}{m^2}} = \|x\|$

• $\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ SUPONHA, POR ABSURDO, QUE

EXISTEM x, y COM $\|x+y\| > \|x\| + \|y\|$. LOGO, TEMOS

$m, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ TAIS QUE $\|x+y\| > \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \frac{1}{m^2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \frac{1}{m^2}}$.

NO ENTANTO, SUPONDO SEM PERDA DE GENERALIDADE QUE $m \geq m$, VALE

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \frac{1}{m^2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \frac{1}{m^2}} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \frac{1}{m^2}} \geq$$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2 + \frac{1}{m^2}} \geq \|x+y\|$, UM ABSURDO. LOGO, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

• $\boxed{d(x,x) = 0}$ $d(x,x) = \|x-x\| = \|0\| = 0$.

• $\boxed{d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y}$ $d(x,y) = 0 = \|x-y\|$. COMO PARA TODO

$m \in \mathbb{N}$ $\sqrt{\frac{1}{m^2}} > 0$, SÓ CONSEGUIREMOS $\|x-y\| = 0$ SE O ÍNFIMO FOR

ATINGIDO COM $m \to \infty$, ISTO É, $\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$.

COMO $(x_i - y_i)^2 \geq 0$ PARA TODO $i \in \mathbb{N}$, SÓ TEREMOS A SOMA IGUAL A ZERO SE $x_i = y_i$ PARA TODO $i \in \mathbb{N}$. ISTO É, $x = y$.

- $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad$ $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ $\quad$ $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\|$

$\leq \|x-z\| + \|y-z\| = d(x,z) + d(y,z)$.

LOGO, d É MÉTRICA.

AGORA, PROVO $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq B$ COM $x_m \to x$ SE É SOMENTE SE $x_m[k] \to x[k]$ PARA TODO k.

($\Leftarrow$) TOME $x_m[k] \to x[k]$ PARA TODO k. TOME $\varepsilon > 0$.

TEMOS $d(x_m, x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^{j} (x_m[i] - x[i])^2 + \frac{1}{j^2}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_m[i] - x[i])^2 + \frac{1}{N^2}}$

PARA TODO $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. TOME N TAL QUE $\frac{1}{N^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$ E m_k TAL QUE $m \geq m_k$ IMPLIQUE $|x_m[k] - x[k]|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N}$, $k = 1, \dots, N$.

TOMANDO $m_0 := \max\{m_1, \dots, m_N\}$, TEMOS $d(x_m, x) < \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$,

COMO QUERÍAMOS.

$\Rightarrow$) TOME $x_m \to x$. SUPONHA, POR ABSURDO, QUE EXISTA $k \in \mathbb{N}$ TAL QUE $x_m[k] \not\to x[k]$. LOGO, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE PARA TODO $m \in \mathbb{N}$ EXISTE $N(m) \geq m$ TAL QUE $|x_{N(m)}[k] - x[k]| > \delta \geq \min\{\frac{1}{k}, \delta\} =: r$

O QUE SIGNIFICA $x_m \to x$? SIGNIFICA QUE PARA TODO $\varepsilon > 0$ EXISTE m_ε TAL QUE SE $n \geq m_\varepsilon$, ENTÃO

$$d(x_n, x) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_n[i] - x[i])^2 + \frac{1}{m^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m(n)} (x_n[i] - x[i])^2 + \frac{1}{m(n)^2}} < \varepsilon$$

ONDE $m(n) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. SUPONHA, POR ABSURDO, QUE VALE $k > m(N(m_r)) =: m(\ell)$. LOGO, $r > d(x_\ell, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m(\ell)} (x_\ell[i] - x[i])^2 + \frac{1}{m(\ell)^2}}$

$\geq \frac{1}{m(\ell)} > \frac{1}{k} \geq r$, ABSURDO. LOGO, $m(\ell) \geq k$

PORTANTO, TEMOS $r > d(x_\ell, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m(\ell)} (x_\ell[i] - x[i])^2 + \frac{1}{m(\ell)^2}}$

$$\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m(\ell)} (x_\ell[i] - x[i])^2} = \sqrt{\sum_{i \neq k} (x_\ell[i] - x[i])^2 + (x_\ell[k] - x[k])^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_\ell[k] - x[k])^2} > \sqrt{r^2} = r,$$ ABSURDO. LOGO,

$x_m[k] \to x[k]$ PARA TODO $k \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

5 · $\boxed{0 \in C}$ COMO $\bigcup_{n=1}^{\infty} nC = \mathbb{R}$, C NÃO É VAZIO.

TOME $x \in C$. PELA SIMETRIA, $-x \in C$. PELA CONVEXIDADE,

$\frac{1}{2}(x + (-x)) \in C$, ISTO É, $0 \in C$.

· $\boxed{0 \in \text{INT } C}$ PELO EXERCÍCIO 3, EXISTE

$m \in \mathbb{N}$ TAL QUE mC NÃO TEM INTERIOR VAZIO.

LOGO, EXISTE $y \in mC$ E $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(y, \varepsilon) \subseteq mC$.

COMO $y = mx$ COM $x \in C$, TEMOS $B(x, \frac{\varepsilon}{m}) \subseteq C$. LOGO,

x É INTERIOR DE C. PELA SIMETRIA, $B(-x, \frac{\varepsilon}{m}) \subseteq C$.

PELA CONVEXIDADE, $B(0, \frac{\varepsilon}{m}) \subseteq C$. LOGO, 0 É INTERIOR

DE C.

⑥ $\boxed{\cdot\, e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)}$ TOME $A, B, C \in \mathcal{K}$.

LEMBRE-SE QUE $d(x,B) = \inf\{d(x,y) : y \in B\}$. COMO OS CONJUNTOS SÃO LIMITADOS, TEMOS $e(A,B) < \infty$ E PODEMOS FAZER OPERAÇÕES ALGÉBRICAS LIVREMENTE SOBRE e.

PORTANTO, DADOS $a \in A$, $b \in B$ E $c \in C$, TEMOS

$d(a,C) \leq d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$. COMO O LADO ESQUERDO É UMA COTA INFERIOR PARA O LADO DIREITO E $c \in C$ ERA ARBITRÁRIO, TOMANDO O ÍNFIMO TEMOS $d(a,C) \leq d(a,b) + d(b,C)$.

COMO $d(b,C) \leq e(B,C)$, TEMOS $d(a,C) \leq d(a,b) + e(B,C)$.

COMO $d(a,C) - e(B,C) \leq d(a,b)$ É COTA INFERIOR PARA $b \in B$, TEMOS $d(a,C) - e(B,C) \leq d(a,B)$. LOGO, TEMOS $d(a,C) \leq d(a,B) + e(B,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$. COMO O LADO DIREITO É COTA SUPERIOR PARA $a \in A$, TOMANDO O SUPREMO TEMOS $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$, COMO QUERÍAMOS.

AGORA, PROVO QUE h É MÉTRICA.

• $h(A,B) < \infty$: PELA COMPACIDADE DE A E B, $e(A,B) < \infty$ E $e(B,A) < \infty$.

• $h(A,A) = 0$: COMO $h(A,A) = e(A,A)$, BASTA PROVAR QUE $e(A,A) = 0$. TEMOS $e(A,A) = \sup_{x \in A} d(x,A)$. COMO A É COMPACTO, O SUPREMO É ATINGIDO EM A. LOGO, $e(A,A) = d(x^*,A)$ COM $x^* \in A$. COMO $d(x^*,A) = \inf_{x \in A} d(x^*,x)$, BASTA TOMAR $x = x^*$ E O ÍNFIMO SERÁ ATINGIDO. LOGO, $e(A,A) = d(x^*,x^*) = 0$.

• $h(A,B) = 0 \Rightarrow A = B$: TOME $A \neq B$. ISSO SIGNIFICA QUE EXISTE $x \in A$ COM $x \notin B$ OU $x \in B$ COM $x \notin A$. SEM PERDA DE GENERALIDADE, SUPONHA O PRIMEIRO. LOGO, $x \in A$ E $x \notin \bar{B} = B$, PELA FECHADEZA. PELO LEMA 4 DAS NOTAS DE AULA, $d(x,B) > 0$. LOGO, $0 < d(x,B) \leq \sup_{y \in A} d(y,B) = e(A,B) \leq h(A,B)$.

• $h(A,B) = h(B,A)$: $h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\} = \max\{e(B,A), e(A,B)\} = h(B,A)$.

- $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$: COMO PROVAMOS, TEMOS

$e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$. TEMOS

TAMBÉM $e(C,A) \leq e(C,B) + e(B,A) \leq h(C,B) + h(B,A)$

$= h(A,B) + h(B,C)$, PELA SIMETRIA. LOGO, VALE

$h(A,C) = \max\{e(A,C), e(C,A)\} \leq h(A,B) + h(B,C)$.

7 $\Rightarrow$ SUPONHA X_i COMPLETO PARA TODO i.

TOME $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ CAUCHY. VOU PROVAR QUE CONVERGE.

TOME $\varepsilon > 0$. SABEMOS QUE EXISTE n_k TAL QUE $n, m \geq n_k$

IMPLICA $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. ISSO DÁ $\frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_n[k], x_m[k])}{1 + d_k(x_n[k], x_m[k])} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

PARA TODO k. REARRANJANDO, $d_k(x_n[k], x_m[k]) < \varepsilon$.

LOGO, $(x_n[k])_{n=1}^{\infty}$ É CAUCHY PARA TODO k.

COMO X_k É COMPLETO, $x_n[k] \to x[k]$.

AGORA, TOME $\varepsilon > 0$ E $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE

$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. SABEMOS QUE EXISTE n_k TAL QUE

$d_k(x_n[k], x[k]) < \frac{\varepsilon}{2}$ SE $n \geq n_k$, $k = 1, \ldots, N$. TOMANDO

$n_0 := \max\{n_1, \ldots, n_k, N\}$, TEMOS QUE SE $n \geq n_k$, VALE

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x_n[k], x[k])}{1 + d_k(x_n[k], x[k])} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_n[k], x_m[k])}{1 + d_k(x_n[k], x_m[k])} +$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_n[k], x_m[k])}{1 + d_k(x_n[k], x_m[k])} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$ ONDE

$x := (x[1], x[2], \ldots)$. LOGO, $x_n \to x$ E X É

COMPLETO.

($\Leftarrow$) TOME X COMPLETO. TOME $k \in \mathbb{N}$ E $(x_m[k])_{m=1}^{\infty} \subseteq X_k$ CAUCHY. DEFINA $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq X$ POR

$$x_m := (x[1], \dots, x[k-1], x_m[k], x[k+1], \dots),$$

ONDE $x[i] \in X_i$ PARA $i \neq k$. ISTO É, A SEQUÊNCIA $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CONSTANTE EXCETO PARA A COORDENADA k.

TOME $\varepsilon > 0$. LOGO, EXISTE m_0 TAL QUE SE $n, m \geq m_0$, ENTÃO $d_k(x_n[k], x_m[k]) < \varepsilon$. ISSO NOS DÁ

$$d(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_n[i], x_m[i])}{1 + d_i(x_n[i], x_m[i])} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x_n[k], x_m[k])}{1 + d_k(x_n[k], x_m[k])}$$

$$< d_k(x_n[k], x_m[k]) < \varepsilon.$$

LOGO, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CAUCHY.

COMO X É COMPLETO, $x_m \to x$. TOME $\varepsilon > 0$ E m_0 TAL QUE $d(x_m, x) < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. TEMOS

DISSO $\frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(x_m[k], x[k])}{1 + d_k(x_m[k], x[k])} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, OU MANIPULANDO,

$d_k(x_m[k], x[k]) < \varepsilon$. LOGO, $x_m[k] \to x[k]$. PORTANTO, X_k É COMPLETO. COMO k ERA ARBITRÁRIO, TODO X_k SERÁ COMPLETO. $\triangle$

(8) • $d_1(x,y) < \infty$: PELAS NOTAS DE AULA, $d(x,A)=0$ SE, E SOMENTE SE, $x \in \bar{A}$. COMO U É ABERTO E A MÉTRICA d_1 É DEFINIDA EM U, $x \in U$ IMPLICA EM $x \notin \overline{U^c}$. LOGO, NÃO SÓ $d_1(x,y) < \infty$ COMO É UMA FUNÇÃO BEM DEFINIDA.

• $d_1(x,x)=0$: $d_1(x,x) = d(x,x) + \left| \frac{1}{\cancel{d}(x,U^c)} - \frac{1}{\cancel{d}(x,U^c)} \right| = 0$

• $d_1(x,y)=0 \Rightarrow x=y$: TOME $x \neq y$. LOGO,

$d_1(x,y) \geq d(x,y) > 0$.

• $d_1(x,y) = d_1(y,x)$: $d_1(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right|$

$= d(y,x) + \left| \frac{1}{d(y,U^c)} - \frac{1}{d(x,U^c)} \right| = d_1(y,x)$

• $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(y,z)$: $d_1(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} + \frac{1}{d(z,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right|$

$\leq d(x,z) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} \right| + d(y,z) + \left| \frac{1}{d(y,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} \right|$

$= d_1(x,z) + d_1(y,z)$

- d E d_1 SÃO EQUIVALENTES:

TOME U ABERTO EM d COM $x \in U$.

LOGO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. DADO

$y \in B_1(x, \varepsilon)$, TEMOS $d(x,y) \leq d_1(x,y) < \varepsilon$. LOGO, $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

PORTANTO, $B_1(x, \varepsilon) \subseteq U$ E U É ABERTO EM d_1.

TOME U ABERTO EM d_1 COM $x \in U$. LOGO,

EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B_1(x, \varepsilon) \subseteq U$.

PROVA DE QUE

U É ABERTO EM d

LOGO, AS MÉTRICAS SÃO EQUIVALENTES.

______ // ______ // ______

- **U É COMPLETO COM d_1:**

TOME $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq U$ CAUCHY EM d_1. PELA EQUIVALÊNCIA, $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq U$ É CAUCHY EM d. COMO $U \subseteq X$ E X É COMPLETO POR d, $x_m \xrightarrow{d} x \in \bar{U}$.

SE $x \in U$, PODEREMOS AFIRMAR PELA EQUIVALÊNCIA QUE $x_m \xrightarrow{d_1} x \in U$, TERMINANDO A QUESTÃO.

SUPONHA, POR ABSURDO, QUE $x \notin U$. LOGO, $x \in U^c$. COMO $d(x_m, U^c) \leq d(x_m, x)$, TEMOS $d(x_m, U^c) \to 0$, POIS $d(x_m, x) \to 0$. COMO $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CAUCHY EM d_1, DADO $\varepsilon > 0$ TEMOS

$$d_1(x_m, x_n) = d(x_m, x_n) + \left| \frac{1}{d(x_m, U^c)} - \frac{1}{d(x_n, U^c)} \right| < \varepsilon$$

PARA m, n SUFICIENTEMENTE GRANDES. MAS FIXANDO n E TOMANDO m SUFICIENTEMENTE GRANDE, O QUE ESTÁ NO MÓDULO EXPLODE, UM ABSURDO. LOGO, $x \in U$. ∎

9 TOME $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1([0,1], \mathbb{R})$ CAUCHY COM $\|\cdot\|_1$. PRECISO PROVAR QUE A SEQUÊNCIA CONVERGE.

DEFINA $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. DADO $x \in [0,1]$, TEMOS QUE $|f(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq \|f\|_1$, O QUE IMPLICA EM $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$. PELO MESMO ARGUMENTO, $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_1$.

LOGO, DADO $\varepsilon > 0$ E n_0 TAL QUE $n, m \geq n_0$ IMPLICAM $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$, TEMOS $\max\{\|f_n - f_m\|_\infty, \|f_n' - f_m'\|_\infty\} \leq \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$.

LOGO, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ E $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ SÃO CAUCHY EM $C([0,1], \mathbb{R})$ COM $\|\cdot\|_\infty$. PELO TEOREMA 9b), TEMOS QUE $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ E $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, COM f E g CONTÍNUAS. COMO A SEQUÊNCIA DE DERIVADAS DE f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE, ENTÃO O LIMITE DEVE SER A DERIVADA, ISTO É, $g = f'$. LOGO, TEMOS $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$.

POR FIM, BASTA PROVAR QUE $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$. MAS ISSO VEM IMEDIATAMENTE POR $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. ORAS, TEMOS $\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty$. COMO $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ E $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f'$, VAI VALER $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$.

4

10 PELO TEOREMA DO VALOR MÉDIO, DADOS $x, y \in \mathbb{R}$,

EXISTE $c \in (x,y)$ TAL QUE $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$.

LOGO, $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y) \leq |f'(c)|\,|x-y|$. TEMOS TAMBÉM

$\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$, OU $f(y)-f(x) = f'(c)(y-x) \leq |f'(c)|\,|x-y|$.

LOGO, $|f(x)-f(y)| \leq |f'(c)|\,|x-y|$.

AGORA, CALCULO $f'(x)$. TEMOS $\dfrac{\partial \cos(\cos x)}{\partial x} = -\text{sen}(\cos x)\cdot(-\text{sen}\, x)$

$= \text{sen}(\cos x) \cdot \text{sen}\, x$. MAS NOTE QUE PARA TODO $x \in \mathbb{R}$

$\text{sen}(\cos x)\cdot \text{sen}\, x \leq \text{sen}(\cos x) \leq \max\limits_{y\in[-1,1]} \text{sen}(y) = \text{sen}(1) < 1.$

LOGO, TEMOS $|f(x)-f(y)| \leq |f'(c)|\,|x-y| \leq \text{sen}(1)\,|x-y|$.

COMO $\text{sen}\, 1 < 1$, ISTO É UMA CONTRAÇÃO. $\blacksquare$