Lista convexidade

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ convexa. Então f é continua em $U = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Sugestão: Obtenha um simplexo n dimensional contido em U. Nesse simplexo f é uniformemente limitada superiormente.

2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $y \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que existe $\bar{k} \in K$ tal que $\left|y - \bar{k}\right| = \inf\{|y-k| : k \in K\}$. Faça um exemplo mostrando que o ponto $\bar{k}$ não é único em geral.

3. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Então existe ponto de C à mínima distância de y e esse ponto é único.

4. (continuação) Seja $\bar{c}$ o ponto à mínima distância de $y \notin C$. Então o hiperplano com normal $b = y - \bar{c}$ separa estritamente y de C.

5. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Então $\overline{\operatorname{con} S}$ é a intersecção dos semi–espaços fechados que contém S.

6. Seja $C \subsetneq \mathbb{R}^n$ convexo fechado ilimitado e $C \setminus \operatorname{ri} C \neq \emptyset$. Demonstre que existe uma função linear não constante em C e que alcança seu máximo em C.

7. Verifique que a norma de um espaço vetorial é uma função convexa.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável convexa e limitada. Então f é constante.

9. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ seja posivamente homogênea, $f(rx) = rf(x)$ se $r > 0$. Demonstre que f é convexa se e somente se $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

10. Demonstre que se f for positivamente homogênea convexa própria,
$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m), \lambda_i > 0, i \leq m.$$

11. A função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ é quase–convexa se $f(rx + (1-r)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$. Verifique que f convexa é quase–convexa. E que se f é quase–convexa, então $\{x : f(x) < \alpha\}$ e $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ são convexos.

12. Verifique que são convexas:

a) $f(x) = e^{\alpha x}, -\infty < \alpha < \infty$;

b) $f(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ x^p & x \geq 0 \end{cases}$ sendo $1 \leq p$;

c) $f(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -x^p & x \geq 0 \end{cases}$ para $0 \leq p \leq 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -x^p & x > 0 \end{cases}$ para $p \leq 0$;

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & |x| < \alpha \\ \infty & |x| \geq \alpha \end{cases}$;

f) $f(x) = -\log x$ se $x > 0$ e $f(x) = \infty$ se $x \leq 0$.

13. Demonstre que $f(x) = d(x, C)$ sendo C convexo é uma função convexa.

14. Seja f convexa no $\mathbb{R}^n$ e duas vezes continuamente diferenciável no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in U$, a matriz hessiana, $Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{ij}$ é positiva semi–definida: $\langle y, Qy \rangle \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

15. (continuação) Se Q for positiva definida ($\langle y, Qy \rangle > 0$ se $y \neq 0$), f é estritamente convexa.

16. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ matriz simétrica 2×2. Demonstre que A é positiva semi–definida se e somente se $a \geq 0$ e $ad - b^2 \geq 0$. Como ficam essas condições se $-A$ for positiva semi–definida? Quais as condições para A ser positiva definida?

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Então:

    (a) Se $x < y$, $x' < y'$, $x \leq x'$ e $y \leq y'$ então $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$. Sugestão: Considere primeiro $x = x'$ e depois o caso $y = y'$.

    (b) f tem derivada à direita, $f^+(x) = f'(x, 1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e à esquerda, $f^-(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x, -1)$ em todo ponto

    (c) f^+e f^- são crescentes.

    (d) Se uma das derivadas laterais for contínua em x^0 então f é diferenciável em x^0.

    (e) Se $f^-(x^0) \leq m \leq f^+(x^0)$ então $f(x) \geq m(x - x^0) + f(x^0)$, $x \in \mathbb{R}$.

18. Seja $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ contínua e côncava, $i = 1, \ldots, I$. Seja $\omega \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $X = \left\{(x_1, \ldots, x_I) \in \left(\mathbb{R}^n_+\right)^I : \sum_{i=1}^I x_i \leq \omega\right\}$. Definamos a conjunto de possibilidades de utilidade

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^I : \exists x \in X, u_i \leq U_i(x_i), 1 \leq i \leq I\right\}.$$

Demonstre que U é fechado, convexo.

19. (continuação) A fronteira de Pareto, UP, é definida pelos vetores $u \in U$ tais que não existe $u' \in U$, $u' \geq u$ e $u' \neq u$. Demonstre que para $\bar{u} \in UP$ existe $\lambda \in \mathbb{R}^I_+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda \cdot \bar{u} = \max\{\lambda \cdot u : u \in U\}$.

20. Encontre os hiperplanos suporte do triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$.

21. Verifique usando o lema de Farkas que o sistema não tem solução:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$(x, y, z) \geq 0.$$

22. Seja $p_1 > 0, p_2 > 0$. Usando multiplicadores de Kuhn–Tucker resolva

$$\begin{aligned} &\max \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \\ &p \cdot (x, y) \leq 2 \\ &x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

23. Determine os subgradientes de $f(x) = |x|, x \in (-\infty, \infty)$.

24. Seja $f(x,y) = x^a y^b$, $(x,y) \geq 0$. Sendo $a > 0, b > 0$. Determine os valores de (a,b) para os quais f é côncava. Verifique quais os $(a,b) >> 0$ tais que f é estritamente côncava para $(x,y) >> 0$.