02/02

Análise II

Monitor: Marcelo Gelati

Programa:

- Álgebra linear;
- Teoria dos espaços métricos;
- Otimização
- Análise convexa.

Álgebra linear

Corpo comutativo

Seja um conjunto K munido de uma adição $+ : K \times K \to K$ e uma multiplicação $\cdot : K \times K \to K$. É muito conveniente usar a seguinte notação: $a + b = +(a, b)$ e $ab = \cdot(a, b)$. Às vezes por ênfase escrevemos $a \cdot b$ no lugar de ab. Então K é um corpo (comutativo) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

I. $a + b = b + a$ para todos a, b em K (comutatividade da adição)

II. $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos a, b, c em K (associatividade da adição)

III. Existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$ para todo a em K (elemento neutro da adição)

IV. Para todo $a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. (elemento inverso aditivo)

V. $ab = ba$ para todos a, b em K (comutatividade da multiplicação[1])

VI. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade do produto)

VII. Existe $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$ (elemento neutro da multiplicação)

VIII. Para todo $a \in K$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. (elemento inverso da multiplicação)

[1]Essa propriedade do produto é que define um corpo comutativo.

IX. $a(b+c) = ab + ac$ (distributividade da multiplicação com respeito à adição)

X. $1 \neq 0$.

Exemplo 1 *$K = \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante. Depois temos $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{Q}$.*

Exemplo 2 (corpo finito) *$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ com $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ e $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ é um corpo com dois elementos.*

Comentário 1 *Para todo primo p existe um corpo com p elementos. O número de elementos de um corpo finito é primo.*

Proposição 1 *Os elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*

Por exemplo se O' também for elemento neutro da adição: $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$.

Proposição 2 *Para todo $a \in K$, $a \cdot 0 = 0$.*

Demonstração: Seja $b = a \cdot 0$. Então

$$b + b = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 = b.$$

Portanto somando $-b$:

$$0 = b + -b = (b + b) + -b = b + (b + -b) = b + 0 = b.$$

Espaço vetorial

Um espaço vetorial sob o corpo K é uma tripla, $(V, +, \cdot)$ tal que: V é um conjunto, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : K \times \ V \to V$ com as seguintes propriedades:

I. Comutatividade da adição: $v + w = w + v$ para todo v, w elementos de V;

II. Elemento neutro da adição: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \forall v \in V$;

III. Inverso da adição: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;

IV. Associatividade: $v + (w + u) = (v + w) + u$;

V. para $\lambda, \mu \in K$ e $v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$;

VI. $1 \cdot v = v$;

VII. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$;

VIII. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Notação 1 *Frequentemente vamos omitir o ponto. Assim* $\lambda v = \lambda \cdot v$. *E vamos passar a escrever os escalares preferencialmente com letras gregas.*

O corpo associado a um espaço vetorial é denominado de corpo de escalares.

Exemplo 3 *O espaço vetorial mais simples é* $V = \{0\}$. *Se* K *é um corpo,* $V = K$ *é um espaço vetorial se* $\lambda \cdot v = \lambda v$ *(a multiplicação em* K*).*

Exemplo 4 K^n *é um espaço vetorial: Se* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n, \lambda \in K$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n); \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n); \\ 0 &= (0, \ldots, 0), -x = (-x_1, \ldots, -x_n). \end{aligned}$$

sendo $x_i + y_i$ *a soma dos escalares* x_i *e* y_i *e* λx_i *o produto dos escalares* λ *e* x_i. *Assim* $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$ *são espaços vetorias sobre, respectivamente,* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Exemplo 5 *O espaço das funções contínuas de* $[a, b]$ *em* $\mathbb{R}$, *denotado* $\mathscr{C}$ *é um espaço vetorial sob* $K = \mathbb{R}$. *A soma de* $f, g \in \mathscr{C}$ *é* $(f + g)(t) = f(t) + g(t), a \leq t \leq b$. *E* $(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t)$.

Dependência linear

Definição 1 *Seja* V *um espaço vetorial sob o corpo* K. *Os vetores,* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *são linearmente dependentes se existirem escalares,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *nem todos nulos tais que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$.

Exemplo 6 *Toda família finita,* $v_1, v_2, \ldots, v_m$, *que contém a origem é linearmente dependente. Pois se, digamos,* $v_1 = 0$ *então*

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m &= 0, \\ (1, 0, \ldots, 0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Comentário 2 *Naturalmente se os vetores não forem linearmente dependentes dizemos que são linearmente independentes. Assim*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Definição 2 *Um vetor x é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ se existirem escalares $(\lambda_i)_{i=1}^m$ tais que $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.*

Lema 1 *Suponhamos y uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_p$ e que por sua vez cada x_i seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$. Então y é combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$.*

A demonstração é imediata. Se $y = \sum_{j=1}^p \mu_j x_j$ e $x_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i$ temos para $\gamma_i = \sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij}$

$$y = \sum_{j=1}^p \mu_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^m \gamma_i v_i.$$

Teorema 1 *Suponhamos que $v_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Existe então $k \geq 2$ tal que v_k seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$.*

Demonstração: Seja $k \leq n$ o primeiro natural tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes. Então $k \neq 1$ pois $v_1 \neq 0$ é linearmente independente. Portanto $k \geq 2$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

nem todos α_i nulos. Mas então $\alpha_k \neq 0$ pela escolha de k. Portanto

$$v_k = (-\alpha_1)\, \alpha_k^{-1} v_1 + \ldots + (-\alpha_{k-1})\, \alpha_k^{-1} v_{k-1}.$$

Comentário 3 *É claro que se v_k for combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$ então $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ e $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Pois se $v_k = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ escolhemos $\mu_k = -1, \mu_j = 0$ para $j > k$ e obtemos $\sum_i \mu_i v_i = 0$.*

Definição 3 *Um conjunto $\mathcal{G} \subset V$ é gerador se todo vetor de V for uma combinação linear de elementos de $\mathcal{G}$.*

Bases

Definição 4 (base) *Uma base do espaço vetorial V é um conjunto $\mathfrak{X} \subset V$ gerador e linearmente independente.*

Definição 5 *O espaço vetorial tem dimensão finita se existir uma base finita.*

Exemplo 7 *K^n tem dimensão n. Se $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathfrak{X} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

é uma base: para $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) =$$
$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

E se $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = 0$ então $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Rightarrow x_i \equiv 0$.

Teorema 2 *Todo espaço vetorial possui uma base.*

Comentário 4 *A demonstração será omitida pois envolve o lema de Zorn que não temos tempo para estudar.*

Exemplo 8 *Uma base de $\mathbb{R}$ considerado como espaço vetorial sob $K = \mathbb{Q}$ é denominada base de Hamel. Toda base de Hamel é infinita. Pois se $b_1, b_2, \ldots, b_p$ são reais, o conjunto das combinações lineares*

$$r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_p b_p, r_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq p$$

é enumerável e portanto $\neq \mathbb{R}$.

Teorema 3 *Duas bases finitas de V tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gerador e $\mathfrak{X} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ linearmente independente. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente pois y_m é combinação linear de $x_1, \ldots, x_n$. Pelo teorema 1 existe x_i combinação linear de $y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}$. Podemos então eliminar x_i da lista. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador. Se $m = 1$ então $n \geq 1$. Se $m > 1$ repetimos o processo:

$$y_{m-1}, y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Portanto podemos remover um $x_j, j \neq i$. Se $m > n$ o conjunto dos "xs" vai acabar antes dos "ys", uma contradição com a independencia linear dos ys. Então $m \leq n$. Sejam agora $\mathcal{G}$ e $\mathfrak{X}$ bases. Revertendo os papéis podemos considerar $\mathfrak{X}$ gerador e $\mathcal{G}$ linearmente independente. Então $m \geq n$ e finalmente $m = n$.

Corolário 1 *Se V tem um conjunto gerador finito então V tem dimensão finita.*

Corolário 2 *Se V tem dimensão n então $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.*

Definição 6 *Um subconjunto não–vazio de V, W, é um subespaço vetorial se*

$$W + W \subset W,$$
$$K \cdot W \subset W.$$

Comentário 5 *Todo subespaço contém a origem de V. E W também é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar restritas à W.*

05/02

Subespaços

Definição 7 *Um subconjunto W do espaço vetorial V é um subespaço de V se for um espaço vetorial com a soma e multiplicação herdadas de V. Ou seja: $0 \in W$ e*

$$v, w \in W \implies v + w \in W;$$
$$\lambda \in K, w \in W \implies \lambda w \in W.$$

Por exemplo $-w = (-1) \cdot w \in W$. Em geral W não–vazio é um subespaço se e somente se para todo $x, y \in W$ e $\lambda \in K$, $\lambda x + y \in W$. Os subespaços $\{0\}$ e V são subespaços triviais. O núcleo e a imagem de uma transformação linear são subespaços.

Lema 2 *Se W_i é subespaço de V para cada $i \in I$ então $\cap_{i \in I} W_i$ também é um subespaço de V.*

A verificação é imediata: se $x, y \in \cap_{i \in I} W_i$ e $\lambda \in K$ então para todo $i \in I$, $x, y \in W_i \implies \lambda x + y \in W_i$ e logo $\lambda x + y \in \cap_{i \in I} W_i$.

Definição 8 *Seja $S \subset V$. Definimos o espaço vetorial gerado por S:*

$$[S] = \cap \{W \subset V : W \text{ é subespaço e contém } S\}.$$

Lema 3 *$[S]$ coincide com o conjunto de combinações lineares $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ com $n \geq 1, \lambda_i \in K$ e $v_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: Seja $A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_i \in K, v_i \in S, 1 \leq i \leq n, n \geq 1.\}$. É imediato que $S \subset A \subset [S]$. Sejam agora $w_1, w_2 \in A$ e $\mu \in K$. Para cada $i = 1, 2$ existem $v_{ij} \in S, \theta_{ij} \in K$ e $n_i \geq 1$ tais que $w_i = \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij}$. Então

$$\sum_i \mu_i w_i = \sum_i \mu_i \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij} = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i \theta_{ij} v_{ij} \in A.$$

Portanto A sendo espaço vetorial, $A \supset [S]$ e logo $A = [S]$.

Exemplo 9 *Se U e W são subespaços de V, $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ é um subespaço. E $[U \cup W] = U + W$.*

Para verificarmos notemos que $x, y \in U + W$ $\alpha, \beta \in K$, então

$$x = u + w, y = u' + w', \alpha x + \beta y =$$
$$\alpha (u + w) + \beta (u' + w') = (\alpha u + \beta u') + (\alpha w + \beta w') \in U + W.$$

Portanto $U + W$ é um subespaço e contém $[U \cup W]$. E $[U \cup W] \supset U + W$

Definição 9 *U e W são subespaços complementares de V se*

$$U + W = V;$$
$$U \cap W = \{0\}.$$

Nesse caso dizemos que V é soma direta de U e W.

Lema 4 *Se $v_1, \ldots, v_p$ são linearmente independentes do espaço de dimensão finita V, existem $v_{p+1}, \ldots, v_n$ em V tais que $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V.*

Demonstração: Se $v_1, \ldots, v_p$ for gerador já temos uma base e não temos nada a fazer. Se não for gerador existe $v_{p+1} \in V \setminus [v_1, \ldots, v_p]$. Então $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}$ é linearmente independente. Se a familia for geradora terminamos. Caso não seja existe $v_{p+2} \in V$ que não é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{p+1}$. E portanto $v_1, \ldots, v_{p+1}, v_{p+2}$ é l.i. Prosseguindo indutivamente obtemos uma seqüência $v_1, \ldots, v_{p+k}$ l.i. sempre que $v_1, \ldots, v_{p+k-1}$ não for gerador. Esse processo termina quando $p + k = \dim V$. E então obtemos uma base de V.

Teorema 4 *Todo subespaço de V possui um subespaço complementar.*

Demonstração: Seja W subespaço de V. Seja $w_1, \ldots, w_k$ base de W. Prolonguemos essa base a uma base de V: $w_1, \ldots, w_n$. Seja $H = [w_{k+1}, \ldots, w_n]$. Então $W + H = V$ e $W \cap H = \{0\}$. Pois se $x \in V$ temos $x = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + (\lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n) \in W + H$. Se $z \in W \cap H$ então

$$z = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = \lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n$$
$$\lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n - \lambda_1 w_1 - \ldots - \lambda_k w_k = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i.$$

Teorema 5 $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ base de $U \cap W$. Podemos, aplicando o teorema 2, completar $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ para obter uma base de U: existem $u_1, \ldots, u_k \in U$ tais que

$$v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$$

seja uma base de U. Aplicando o teorema 2 novamente existem $w_1, \ldots, w_t$ tais que

$$v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$$

é uma base de W. Note que $p + k = \dim U$ e $p + t = \dim W$. Verifiquemos que

$$v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t$$

é base de $U + W$:

gerador Seja $x \in U + W$. Então $x = u + w$ sendo $u \in U$ e $w \in W$. Existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_k$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j.$$

Existem $\lambda_1', \ldots, \lambda_p'$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$ escalares tais que

$$w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j$$

e então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i + \lambda_i'\right) v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j. \end{aligned}$$

l.i. Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = 0.$$

Então $\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j \in U \cap W$. Existe então $\gamma_i, i \leq p$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i \implies \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i + \sum_{j=1}^{t} \left(-\theta_j\right) w_j = 0.$$

Pela independência linear de $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$ obtemos $\theta_j = 0, 1 \leq j \leq t$. Considerando agora

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j = 0$$

vem $\lambda_i = 0$ e $\mu_j = 0$ pela independência linear de $v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$. Finalmente temos

$$\dim\left(U + W\right) + \dim\left(U \cap W\right) = p + k + t + p = \dim U + \dim W.$$

Transformações lineares

Se V e W são espaços vetoriais sob o corpo K. Uma função $T : V \to W$ é linear se for aditiva e homogênea:

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T(a) + T(b), a, b \in V \\ T(\lambda a) &= \lambda T(a), \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

Note que $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$. E $T(-v) = (-1)T(v) = -T(v)$. Podemos juntar as condições numa só:

$$\begin{aligned} T(\lambda a + b) &= \lambda T(a) + T(b), \lambda \in K \text{ ou ainda} \\ T(\lambda a + \mu b) &= \lambda T(a) + \mu T(b), \lambda, \mu \in K. \end{aligned}$$

Notação 2 *O conjunto dos zeros de T é o núcleo (ou o kernel) de T. É denotado* $\ker T$. *A imagem de T é $T(V)$:*

$$\begin{aligned} \ker T &= \{v \in V : T(v) = 0\}; \\ T(V) &= \operatorname{ran} T = \{T(v) : v \in V\}. \end{aligned}$$

Ambos são subespaços vetoriais.

Lema 5 *$T : V \to W$ linear é injetiva se e somente se $T(v) = 0$ implica $v = 0$.*

Demonstração: Se T for injetiva, $T(v) = 0 = T(0)$ e então $v = 0$. Reciprocamente suponhamos $\ker T = \{0\}$. Se $T(v) = T(w)$ então $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$ e então $v - w = 0 \implies v = w$.

Lema 6 *Se T é injetiva e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i. então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ é l.i.*

Demonstração: Pois se $\sum_i \lambda_i T(v_i) = 0$ pela linearidade $T\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = 0 \implies \sum_i \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i$.

A família das transformações lineares entre V e W, $\mathscr{L}(V, W)$, é um espaço[2] vetorial. Se $S, T \in \mathscr{L}(V, W)$ e $\lambda \in K$, $v \in V$,

$$\begin{aligned} (S + T)(v) &:= S(v) + T(v); \\ (\lambda S)(v) &= \lambda S(v). \end{aligned}$$

Definição 10 *Os funcionais lineares de V são as transformações lineares entre V e K.*

[2] Verificação: exercício.

Escrevemos V' ou às vezes V^* para denotar $\mathscr{L}(V,K)$. Dizemos que V' é o espaço dual de V. O espaço V'', bi–dual.

Teorema 6 *Seja $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Sejam $\alpha_i, 1\le i\le n$ escalares. Existe um e único $y'\in V'$ tal que $\langle v_i, y'\rangle := y'(v_i)=\alpha_i$, $i=1,2,\ldots,n$.*

Demonstração: Existência. Para $x=\sum_i \lambda_i v_i$ seja $y'(x)=y'\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i$. Temos y' bem definida pois λ_i é unívocamente determinado por x (lema 2) Vamos verificar a linearidade: Se $y=\sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ e $r\in K$ temos $rx+y=\sum_i (r\lambda_i+\mu_i)v_i$. Logo

$$y'(rx+y)=\sum_i (r\lambda_i+\mu_i)\alpha_i = r\sum_i \lambda_i\alpha_i+\sum_i \mu_i\alpha_i = ry'(x)+y'(y)$$

É imediato que $y'(v_i)=\sum_{j\neq i} 0\alpha_j+1\alpha_i=\alpha_i$. Unicidade: óbvio.

Seja[3] $\delta_{ij}=1$ se $i=j$ e $\delta_{ij}=0$ se $i\neq j$.

Teorema 7 *Se $\{v_1,\ldots,v_n\}$ é uma base de V existe $\{y^1,\ldots,y^n\}$ base[4] de V' tal que $\langle v_j, y^i\rangle=\delta_{ij}$, $i,j\le n$.*

Demonstração: Seja para $j\le n$, $y^j\in V'$ tal que $\langle v_i, y^j\rangle=\delta_{ij}$. Verifiquemos que $\{y^1,\ldots,y^n\}$ é base de V'. Seja $y'\in V'$. Seja $\alpha_i=y'(v_i)$. Então $y'=\sum_j \alpha_j y^j$ pois

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y'\right\rangle = \sum_i \lambda_i \langle v_i, y'\rangle = \sum_i \lambda_i\alpha_i.$$

Agora

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j\right\rangle = \sum_i \lambda_i\delta_{ij}=\lambda_j$$

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \alpha_j y^j\right\rangle = \sum_j \alpha_j \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j\right\rangle = \sum_j \alpha_j\lambda_j = \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y'\right\rangle.$$

Falta a independência linear: Se $\sum_j \alpha_j y^j=0$ então $\sum_j \alpha_j y^j(v_i)=\alpha_i=0$.

Corolário 3 $\dim V'=\dim V$.

[3] "Delta de Kronecker"
[4] chamada de base dual

07/02.

Reflexividade do bidual

Dado $x \in V$ podemos definir um funcional $\Phi_x : V' \to K$ do bidual V'' da seguinte maneira:

$$\Phi_x(y') := \langle x, y' \rangle := y'(x).$$

É imediato de se verificar que Φ_x é linear.

Teorema 8 (reflexividade) *Para todo $z'' \in V''$ existe um único $x \in V$ tal que*

$$\langle z'', y' \rangle = \Phi_x(y') = \langle x, y' \rangle, \forall y' \in V'.$$

Demonstração: Seja $\Theta : V \to V''$, $\Theta(x) = \Phi_x$ para $x \in V$. Verifiquemos que Θ é linear: para $v, w \in V$ e r real, para todo $y' \in V'$,

$$\Theta(rv + w)(y') = y'(rv + w) = ry'(v) + y'(w) = r\Theta(v)(y') + \Theta(w)(y') = \\ (r\Theta(v) + \Theta(w))(y').$$

Portanto $\Theta(rv + w) = r\Theta(v) + \Theta(w)$. Injetividade: Se $\Theta(v) = 0$ então $y'(v) = 0$ para todo $y' \in V'$. Se $v \neq 0$ seja $v = v_1, v_2, \ldots, v_n$ base de V. Então pelo teorema 6, para $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ existe $y' \in V'$ tal que $y'(v) = y'(v_1) = 1 \neq 0$. Logo $v = 0$. Agora $\dim V = \dim V''$ e Θ sendo linear injetiva, temos Θ sobrejetora.

Isomorfismo entre espaços vetoriais

Definição 11 *Os espaços V e W sob o corpo K são isomorfos se existir $T : V \to W$ linear, injetiva e sobrejetora.*

Comentário 6 *É imediato de se verificar que $T^{-1} : W \to V$ é linear, injetiva e sobrejetora.*

É imediato que espaços isomorfos tem a mesma dimensão. O próximo resultado é mais preciso.

Teorema 9 *Se V tem dimensão n sob o corpo K então V é isomorfo a K^n.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V. Para cada $x \in V$ existem únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Então

$$T(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

está bem definida. É imediato que $T(x) = 0 \iff x = 0$. Sejam $x, y \in V$ e $\lambda \in K$. Então se $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ e $y = \sum_i \mu_i x_i$ temos $x + y = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) x_i$ e então $T(x + y) = (\lambda_i + \mu_i)_{i=1}^n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) = T(x) + T(y)$. E de $\theta x = \sum_i \theta \lambda_i x_i$ vem $T(\theta x) = \theta T(x)$.

Comentário 7 *Esse isomorfismo depende da escolha de uma base e isso limita (um pouco) a sua utilidade.*

Espaço quociente

Definição 12 *Uma relação de equivalência no conjunto X é uma relação binária, $\sim$, tal que para todos $x, y, z \in X$:*

1. $x \sim x$;
2. $x \sim y \implies y \sim x$;
3. $x \sim y$ *e* $y \sim z$ *então* $x \sim z$.

Para $x \in X$ seja $\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$. É imediato de se verificar que se $\bar{x} \neq \bar{y}$ então $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Definimos $X/\sim = \{\bar{x} : x \in X\}$.

Definição 13 *Seja W um subespaço de V. Para $x, y \in V$ defina*[5] $x \sim y$ *se* $x - y \in W$. *Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência em V:*

1. $x \sim x$ *pois* $x - x = 0 \in W$
2. $x \sim y \implies y \sim x$ *pois se* $x - y \in W$ *então* $y - x = -(x - y) = (-1) \cdot (x - y) \in W$
3. $x \sim y$ *e* $y \sim z \implies x \sim z$ *pois* $x - z = (x - y) + (y - z) \in W + W \subset W$.

Os elementos equivalentes a x,

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in W\} = \{y : y \in x + W\} = x + W.$$

Para $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e $\lambda \in K$ definimos

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$
$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}.$$

Fica como exercício verificar que o quociente V/W com essa soma e produto por escalar é um espaço vetorial. É o espaço quociente de V por W. (corresponde a L no exemplo acima) Casos extremos: V/V é isomorfo à $\{0\}$ e $V/\{0\}$ é isomorfo à V.

Teorema 10 *Sejam W e U espaços complementares de V. Então V/W é isomorfo a U.*

[5] x é equivalente a y

Demonstração: Seja $T : U \to V/W$, $T(u) = u + W$. Notemos que T é linear pois

$$T(\alpha u + \beta u') = (\alpha u + \beta u') + W = \alpha(u + W) + \beta(u' + W) = \alpha T(u) + \beta T(u').$$

Se $T(u) = \bar{0} = W$ temos que $u + W = W$ e logo $u \in W \cap U = \{0\} \implies u = 0$. T é sobrejetora pois se $x \in V$ temos $x = u + w$ e $x + W = u + W$ portanto $T(u) = x + W$.

Corolário 4 *Se V tem dimensão finita e W é subespaço de V,* $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Anulador

Seja $S \subset V$. O anulador de S, denotado S^0, é o conjuntos dos funcionais lineares $y' \in V'$ tais que $y'(s) = 0$ para todo $s \in S$. É imediato que se $y'(S) = \{0\}$ então $y'(x) = 0$ para $x \in [S]$.

Teorema 11 *Seja $\mathcal{M}$ subespaço m dimensional de V. Então* $\dim \mathcal{M}^0 = n - m$.

Demonstração: É fácil de se verificar que o anulador de $\mathcal{M}$ é um subespaço vetorial de V'. Seja $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n\}$ sendo $\{x_1, \ldots, x_m\}$ base de $\mathcal{M}$. Seja $\mathfrak{X}' = \{y^1, \ldots, y^n\}$ base dual. Seja $\mathfrak{N}$ o subsespaço gerado por $\{y_{m+1}, \ldots, y_n\}$. Temos $\dim \mathfrak{N} = n - m$. Quero demonstrar que $\mathcal{M}^0 = \mathfrak{N}$. Para $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$,

$$\left\langle x, y^j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \left\langle x_i, y^j \right\rangle = 0.$$

Logo $\mathfrak{N} \subset \mathcal{M}^0$. Seja agora $y' \in \mathcal{M}^0$. Existem $\mu_j, j \le n$, $y' = \sum_{l=1}^{n} \mu_l y^l$. Mas se $i \le m$,

$$0 = \langle x_i, y' \rangle = \left\langle x_i, \sum_{l=1}^{n} \mu_l y^l \right\rangle = \sum_l \mu_l \left\langle x_i, y^l \right\rangle = \mu_i$$

Assim $y' \in \mathfrak{N}$ e $\mathcal{M}^0 \subset \mathfrak{N}$ demonstrando a igualdade.

Comentário 8 *O anulador do anulador, $\mathcal{M}^{00}$, é formalmente um subconjunto de V''. Mas a reflexividade do bidual permite considerá–lo em V. No próximo teorema uso a identificação de V'' com V na definição do anulador de $\mathcal{M}^0$.*

Teorema 12 *Se V tem dimensão finita e $\mathcal{M}$ é subespaço de V, $\mathcal{M}^{00} := \left(\mathcal{M}^0\right)^0 = \mathcal{M}$.*

Demonstração: Seja $m \in \mathcal{M}$. Seja $z^m \in V''$ elemento correspondente dado pelo teorema da reflexividade (teorema 7):

$$\langle m, y' \rangle = \langle y', z^m \rangle, \forall y' \in V'.$$

. Então para $y' \in \mathcal{M}^0$,

$$0 = \langle m, y' \rangle = \langle y', z^m \rangle \implies m \in \mathcal{M}^{00}.$$

Assim $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{00}$. Mas $\dim \mathcal{M}^{00} = n - \dim \mathcal{M}^0 = n - (n - m) = m$. Portanto $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{00}$.
Dem. alternativa. Seja $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n\}$ base de V sendo $\{x_1, \ldots, x_m\}$ base de $\mathcal{M}$. Seja $\mathfrak{X}' = \{y^1, \ldots, y^n\}$ base dual. Para $m \in \mathcal{M}$ temos $\langle m, y' \rangle = 0$ para todo $y' \in \mathcal{M}^0$. Logo $m \in \mathcal{M}^{00}$. Agora se $x \in V \setminus \mathcal{M}$. Então $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ e $(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ pois $x \notin \mathcal{M}$. Seja $j \geq m + 1$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Então $y^j \in \mathcal{M}^0$ e $\langle x, y^j \rangle = \lambda_j \neq 0$. Logo $x \notin \mathcal{M}^{00}$.

Espaços com produto interno

(A partir de agora $K = \mathbb{R}$.)

Definição 14 *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *linearidade na primeira variável: $\langle rx + y, z \rangle = r \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;*
2. *Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$*
3. *Positiva definida: $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ somente se $x = 0$.*

Definição 15 *Um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno é um espaço euclidiano.*

Definição 16 *A função $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é a norma euclidiana. Os vetores de norma 1 são vetores unitários.*

Exemplo 10 *Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno usual: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.*

Exemplo 11 *Se $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s) g(s) ds$ é um produto interno.*

Suponha que $f \neq 0$. Então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq 0$ e logo $f^2(x) > 0$. Sem perda de generalidade $a < x < b$. Seja $0 < \epsilon < f^2(x)$. Pela continuidade de f existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (x - \delta, x + \delta) \subset [a, b]$ então $f^2(s) > \epsilon$. Logo

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(s) ds \geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} f^2(s) ds > \epsilon \cdot 2\delta > 0.$$

Exemplo 12 *Para $x, y \in l^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$ é um produto interno em l^2.*

09/02

Definição 17 *Os vetores x, y são ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$.*

O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. E é o único vetor que é ortogonal a si mesmo.

Teorema 13 (Cauchy-Schwarz) *Para x, y no espaço euclidiano E,*

$$|\langle x, y\rangle| \leqq |x|\,|y| \qquad (*)$$

E vale a igualdade se e somente se x, y são linearmente dependentes.

Demonstração: Seja $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2 =< x + \lambda y, x + \lambda y >$. É imediato que $f(\lambda) \geq 0$. Expandindo o produto interno,

$$f(\lambda) = \langle x, x\rangle + 2\lambda \langle x, y\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle .$$

Esse polinômio do segundo grau se tiver duas raízes distintas assumirá também valores negativos, uma impossibilidade. Portanto o discriminante

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \leqq 0.$$

E obtemos (*). Suponhamos que vale a igualdade $\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle = 0$. Se $y = 0$ temos igualdade e x, y são linearmente dependentes. Se $y \neq 0$. Então $\lambda_0 = -\frac{2\langle x,y\rangle}{2\langle y,y\rangle} = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ é tal que $f(\lambda_0) = 0$. Mas então $|x + \lambda_0 y|^2 = 0$ e $x = -\lambda_0 y$.

Corolário 5 (desigualdade triangular) a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) *com igualdade se $xy = 0$ ou se $y \neq 0$, $x = \lambda y$ e $\lambda \geq 0$.*

Demonstração: Temos elevando ao quadrado e usando $f(1)$:

$$|x + y|^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
$$\iff (x, y) \leq |x|\,|y| .$$

No caso de igualdade obtemos $\langle x, y\rangle = |x|\,|y|$ e se $y \neq 0$ vem de $x = \lambda y$ vem $\lambda \langle y, y\rangle = |\lambda|\,|y|\,|y|$ o que implica $\lambda \geq 0$.

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Uma base do espaço euclidiano E, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é ortonormal se os vetores forem ortogonais entre si e cada um unitário. Ou seja $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. Dada uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ podemos pelo método de Gram–Schmidt transformala numa base ortonormal de uma forma natural. Primeiramente notemos que se $\{b_1, \ldots, b_n\}$ é ortogonal então $\left\{\frac{b_i}{|b_i|} : i \leq n\right\}$ é uma base ortonormal. Basta então obter uma base ortogonal. Seja $b_1 = a_1 \neq 0$. Para $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ vamos escolher λ para $(b_2, b_1) = 0$:

$$(a_2 + \lambda b_1, b_1) = (a_2 + \lambda b_1, a_1) = (a_2, a_1) + \lambda (a_1, a_1) = 0 \iff \lambda = -\frac{(a_2, a_1)}{|a_1|^2}.$$

Temos $b_2 \neq 0$ e ortogonal a b_1. Agora seja $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$. Agora

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_3, b_1) = 0 \\ (b_3, b_2) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_1) = 0 \\ (a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_2) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (a_3, b_1) + \mu (b_1, b_1) = 0 \\ (a_3, b_2) + \nu (b_2, b_2) = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja $\mu = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)}$ e $\nu = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)}$. Prosseguindo indutivamente obtemos a base procurada.

Dualidade para espaços euclidianos

A dualidade nos espaços euclidianos é mais simples. Temos $E' = E$.

Teorema 14 (Riesz) *Seja E espaço euclidiano de dimensão n. Seja E' o espaço dos funcionais lineares. Para cada $f \in E'$ existe um e único $x \in E$ tal que $f(z) = (x, z), z \in E$.*

Demonstração: Para $x \in E$ seja $f_x(y) = (x, y), y \in E$. Temos que f_x é linear. Se $f_x = 0$ temos $f_x(x) = (x, x) = 0$ e logo $x = 0$. Portanto $\Theta(x) = f_x$ é linear, injetiva. Portanto $\Theta(E) = E'$ pois $\dim E = \dim E'$.

Adjunto

Sejam E e F espaços euclidianos. E $T : E \to F$ linear. A adjunta de T é $T^* : F \to E$ tal que

$$(Tx, y) = (x, T^* y).$$

E $T^{**} = T$! Vamos particularizar para $E = F$. Então $T : E \to E$ é auto–adjunta[6] se $T^* = T$: $(Tx, y) = (x, Ty), \forall x, y \in E$.

[6] Se analisarmos a representação matricial, a matriz será simétrica.

Exemplo 13 *Definamos* $T : V \to V$ *linear tal que*

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j.$$

Então

$$(T(e_i), e_k) = a_{ki}.$$

Agora

$$(e_i, T(e_k)) = \left(e_i, \sum_j a_{jk} e_j \right) = a_{ik}.$$

Se os dois são iguais então $a_{ik} = a_{ki}$*.*

Definição 18 *Um autovalor de* T *é um escalar* λ *tal que existe um vetor* $v \neq 0$ *tal que* $T(v) = \lambda v$*. (o vetor é então um autovetor)*

Comentário 9 *No caso o espaço* $[v]$ *é invariante:* $T([v]) \subseteqq [v]$*. É possível dois autovetores terem o mesmo autovalor associado.*

Teorema 15 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *autoadjunto. Então* T *tem* n *autovetores, mutualmente ortogonais.*

Demonstração: Seja $F(x) = \frac{(x,T(x))}{(x,x)}, x \neq 0$. Temos que F é contínua para $x \neq 0$. Note que $F(rx) = \frac{(rx,T(rx))}{(rx,rx)} = F(x)$ sempre que $r \neq 0$. O conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ é compacto e portanto existe $\min F(S)$. Seja e_1 um vetor unitário que alcança o mínimo: $F(e_1) = \min F(S) = \inf \{F(x) : |x| = 1\} = \inf \{F(x) : x \neq 0\}$. Vou demonstrar que e_1 é um autovetor. Para $x = |x| e$,

$$F(x) = F(e) \geq F(e_1).$$

Seja $y \in \mathbb{R}^n$. Então $f(t) = F(e_1 + ty)$ e $f'(0) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(e_1 + ty, Te_1 + tTy)}{(e_1 + ty, e_1 + ty)}, \\ f'(0) &= (e_1, Ty) + (y, Te_1) - 2(e_1, Te_1)(e_1, y) \\ f'(0) &= 2(Te_1, y) - 2(e_1, Te_1)(e_1, y) = 0 \\ &\implies Te_1 = (e_1, Te_1) e_1. \end{aligned}$$

Continuando para obter uma representação na forma diagonal.

Lema 7 *Seja* T *auto–adjunto. Se* $J \subset E$ *é invariante,* $J^\perp$ *é invariante.*

Demonstração: Seja y ortogonal a J. Então $(Ty, x) = (y, Tx) = 0$ se $x \in J$. Logo $T(J^\perp) \subset J^\perp$. Prosseguimos indutivamente e pronto.