1 VOU COLOCAR OS AXIOMAS DE CORPO PARA USAR NAS PROVAS. SEJA CORPO K.

A1) $\forall a,b \in K$, $a+b=b+a$; A2) $\forall a,b,c \in K$, $(a+b)+c=a+(b+c)$;

A3) $\exists 0_K \in K$ T.Q. $\forall a \in K$, $a+0_K=a$; A4) $\forall a \in K$, $\exists -a \in K$ T.Q. $a+(-a)=0_K$;

M1) $\forall a,b \in K$, $a\cdot b=b\cdot a$; M2) $\forall a,b,c \in K$, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

M3) $\exists 1_K \in K$ T.Q. $\forall a \in K$, $a\cdot 1_K=a$; M4) $\forall a \in K, a\neq 0$, $\exists a^{-1} \in K$ T.Q. $a\cdot a^{-1}=1_K$;

D1) $\forall a,b,c \in K$, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$; N1) $0_K \neq 1_K$.

—— // —— // ——

ITEM a) TOME $a,b,c \in K$ COM $a+b=a+c$. SOMANDO $-a$ DOS DOIS LADOS, $-a+(a+b)=-a+(a+c)$. POR A2), $(-a+a)+b=(-a+a)+c$. POR A1), $(a+(-a))+b=(a+(-a))+c$. POR A4), $0+b=0+c$. POR A3), $b=c$.

COMO POR A3) $a+b=a=a+0$, TEMOS O CASO PARTICULAR DO QUE MOSTREI ACIMA COM $c=0$. LOGO, $b=0$.

—— // —— // ——

ITEM b) TOME $a, b \in K$ COM $a+b=0$. SOMANDO $-a$ DOS DOIS LADOS E USANDO OS AXIOMAS COMO NO ITEM a), TEMOS $-a+(a+b)=-a+0$, OU $(-a+a)+b=-a$, OU $0+b=-a$, OU $b=-a$.

ITEM c) POR A1) E A4), TEMOS QUE $-a+a=0$. PELO ITEM b), TEMOS QUE $a=-(-a)$.

ITEM d) NOTE QUE $a\cdot 0+a\cdot 0 \overset{D1)}{=} a\cdot(0+0) \overset{A3)}{=} a\cdot 0$.

LOGO, PELO ITEM a), $a\cdot 0=0$.

AGORA, VOU PROVAR QUE $-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$.

NOTE QUE $(-a)\cdot b+a\cdot b \overset{A1),D1)}{=} ((-a)+a)\cdot b \overset{A4)}{=} 0\cdot b=0$, ESTA ÚLTIMA IGUALDADE PELO QUE ACABEI DE PROVAR. PELO ITEM b), $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

PORTANTO, PELO ITEM c), TEMOS $a\cdot b=-(-a\cdot b)$. USANDO O QUE ACABEI DE PROVAR DUAS VEZES E USANDO A1), TEMOS QUE $a\cdot b=-(-a\cdot b)=-((-a)\cdot b)=-(b\cdot(-a))=(-b)\cdot(-a)=(-a)\cdot(-b)$.

ITEM e) TOME $a \cdot b = 0$. SE $a=0$, ACABAMOS.

SUPONHA $a \neq 0$. LOGO, POR M4), TEMOS

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$. POR M2) E ITEM d), TEMOS

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$. POR M1), $(a \cdot a^{-1}) \cdot b = 0$. POR M4),

$1 \cdot b = 0$. POR M1) E M3), $b = 0$.

1

② TOME $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. LOGO, $x = a + b\sqrt{3}$,

$y = c + d\sqrt{3}$, $z = e + f\sqrt{3}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$

TODAS AS PROVAS ABAIXO USAM O FATO DE QUE $\mathbb{R}$ É UM CORPO.

A1) $x + y = (a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (c + d\sqrt{3}) + (a + b\sqrt{3}) = y + x$

A2) $x + (y + z) = (a + b\sqrt{3}) + \left((c + d\sqrt{3}) + (e + f\sqrt{3})\right) =$

$\left((a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3})\right) + (e + f\sqrt{3}) = (x + y) + z$

A3) O ELEMENTRO DA ADIÇÃO DE $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ É $0_{\sqrt{3}} := 0 + 0\sqrt{3}$, POIS

$x + 0_{\sqrt{3}} = (a + b\sqrt{3}) + (0 + 0\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} = x$

A4) O INVERSO ADITIVO DE x É $-x := -a + (-b)\sqrt{3}$, POIS

$x + (-x) = (a + b\sqrt{3}) + \left((-a) + (-b)\sqrt{3}\right) = 0 + 0\sqrt{3} = 0_{\sqrt{3}}$

M1) $xy = (a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (c + d\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}) = yx$

M2) $x(yz) = (a + b\sqrt{3})\left((c + d\sqrt{3})(e + f\sqrt{3})\right) = \left((a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3})\right)(e + f\sqrt{3}) = (xy)z$

M3) O ELEMENTO NEUTRO DA MULTIPLICAÇÃO É $1_{\sqrt{3}} := 1 + 0\sqrt{3}$, POIS

$x \cdot 1_{\sqrt{3}} = (a + b\sqrt{3})(1 + 0\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} = x$

M4) O INVERSO MULTIPLICATIVO DE $x \neq 0_{\sqrt{3}}$ TEM QUE SER DIVIDIDO EM CASOS.

- $x = a + 0\sqrt{3}$ IMPLICA EM $x^{-1} := a^{-1} + 0\sqrt{3}$, POIS

$x \cdot x^{-1} = (a + 0\sqrt{3})(a^{-1} + 0\sqrt{3}) = a \cdot a^{-1} = 1 + 0\sqrt{3} = 1_{\sqrt{3}}$

- $x = 0 + b\sqrt{3}$ IMPLICA EM $x^{-1} := 0 + \frac{1}{3b}\sqrt{3}$, POIS

$x \cdot x^{-1} = (0 + b\sqrt{3})\left(0 + \frac{1}{3b}\sqrt{3}\right) = \frac{b}{3b} \cdot 3 = 1 + 0\sqrt{3} = 1_{\sqrt{3}}$

- $x = a + b\sqrt{3}$, $a, b \neq 0$, IMPLICA EM $x^{-1} := \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}$,

POIS $x \cdot x^{-1} = (a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})}{a^2 - 3b^2} =$

$= \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} = 1 + 0\sqrt{3} = 1_{\sqrt{3}}$

NOTE QUE x^{-1} ESTÁ BEM DEFINIDO, POIS $a^2 - 3b^2 \neq 0$. SE FOSSE $a^2 - 3b^2 = 0$, TERÍAMOS $|a| = \sqrt{3}\,|b|$. COMO $b \in \mathbb{Q}$, TERÍAMOS a IRRACIONAL POR CAUSA DO $\sqrt{3}$, UM ABSURDO.

D1) $x(y+z) = (a + b\sqrt{3})\left((c + d\sqrt{3}) + (e + f\sqrt{3})\right) = (a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) + (a + b\sqrt{3})(e + f\sqrt{3}) =$

$xy + z$

N1) $0_{\sqrt{3}} \neq 1_{\sqrt{3}}$, POIS $0 + 0\sqrt{3} \neq 1 + 0\sqrt{3}$

3 VOU COLOCAR OS AXIOMAS DE ESPAÇO VETORIAL PARA USAR NAS PROVAS. SEJA V ESPAÇO VETORIAL SOBRE CORPO K.

E1) $\forall u, v \in V$, $u + v = v + u$; E2) $\forall u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u+v) + w$;

E3) $\exists 0_V \in V$ T.Q. $\forall u \in V$, $u + 0_V = u$; E4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$ T.Q. $u + (-u) = 0_V$;

E5) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall u \in V$, $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$; E6) $\forall u \in V$, $1_K \cdot u = u$;

E7) $\forall \alpha \in K$, $\forall u, v \in V$, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

E8) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall u \in V$, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

―――― " ―― " ――――

- VOU PROVAR QUE l^0 É ESPAÇO VETORIAL.

TOME $x, y, z \in l^0$. LOGO, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$.

TOME $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. TODAS PROVAS ABAIXO USAM O FATO DE QUE $\mathbb{R}$ É UM CORPO.

E1) $x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n + x_n)_{n=1}^{\infty} = y + x$

E2) $x + (y + z) = (x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n + z_n)_{n=1}^{\infty} = \left(x_n + (y_n + z_n)\right)_{n=1}^{\infty} =$

$= \left((x_n + y_n) + z_n\right)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} + (z_n)_{n=1}^{\infty} = (x + y) + z$

E3) O ELEMENTO NEUTRO DE ℓ^0 É $0_\ell := (0)_{n=1}^{\infty}$, POIS

$$x + 0_\ell = (x_n + 0)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x$$

E4) O INVERSO DE x É $-x := (-x_n)_{n=1}^{\infty}$, POIS

$$x + (-x) = (x_n + (-x_n))_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty} = 0_\ell$$

E5) $\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha(\beta x_n))_{n=1}^{\infty} = ((\alpha\beta) x_n)_{n=1}^{\infty} =$

$= (\alpha\beta)(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha\beta) x$

E6) $1 \cdot x = (1 \cdot x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x$

E7) $\alpha(x+y) = \alpha(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha(x_n + y_n))_{n=1}^{\infty} = (\alpha x_n + \alpha y_n)_{n=1}^{\infty}$

$= (\alpha x_n)_{n=1}^{\infty} + (\alpha y_n)_{n=1}^{\infty} = \alpha x + \alpha y$

E8) $(\alpha + \beta) x = (\alpha + \beta)(x_n)_{n=1}^{\infty} = ((\alpha + \beta) x_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha x_n + \beta x_n)_{n=1}^{\infty}$

$= (\alpha x_n)_{n=1}^{\infty} + (\beta x_n)_{n=1}^{\infty} = \alpha x + \beta x$

NOTE TAMBÉM QUE A SOMA E A MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR ESTÃO BEM DEFINIDAS, JÁ QUE DE FATO SE $x, y \in \ell^0$ E $\alpha \in \mathbb{R}$ TEMOS $\alpha x + y \in \ell^0$, POIS

$\alpha x + y = (\alpha x_n + y_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ E $\alpha x_n + y_n \in \mathbb{R}$.

• VOU PROVAR QUE ℓ^2 É SUBESPAÇO.

* $\ell^2 \subseteq \ell^0$: POR DEFINIÇÃO

* $0_{\ell^0} \in \ell^2$: COMO $\sum_{n=1}^{\infty} 0^2 = 0 < \infty$, $0_{\ell^0} \in \ell^2$

* $x, y \in \ell^2 \Rightarrow x+y \in \ell^2$: ANTES, NOTE QUE DADOS $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \leq a^2 + 2\max\{a^2, b^2\} + b^2 \leq$$

$$a^2 + 2(a^2+b^2) + b^2 = 3(a^2+b^2).$$ LOGO, TEMOS

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 3(x_n^2 + y_n^2) = 3\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right) < \infty,$$

POIS TODAS SÉRIES SÃO FINITAS DADO QUE $x, y \in \ell^2$.

LOGO, $x+y \in \ell^2$.

* $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \ell^2 \Rightarrow \alpha x \in \ell^2$: $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 x_n^2 =$

$= \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, POIS $x \in \ell^2$. LOGO, $\alpha x \in \ell^2$.

19

④ * $\ell^p \subseteq \ell^0$: POR DEFINIÇÃO

* $0_\ell \in \ell^p$: COMO $\sum_{n=1}^{\infty} |0|^p = 0 < \infty$, $0_\ell \in \ell^p$

* $x, y \in \ell^p \Rightarrow x+y \in \ell^p$: ANTES, NOTE QUE *

$|x+y| \leq |x| + |y| \leq 2 \max\{|x|, |y|\}$. LOGO, PARA $p>0$, TEMOS

$|x+y|^p \leq (2 \max\{|x|, |y|\})^p = 2^p \max\{|x|^p, |y|^p\} \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)$. LOGO,

TEMOS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^p(|x_n|^p + |y_n|^p)\right) = 2^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + 2^p \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$,

POIS $x, y \in \ell^p$. LOGO, $x+y \in \ell^p$.

* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \ell^p \Rightarrow \alpha x \in \ell^p$: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p = |\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$,

POIS $x \in \ell^p$. LOGO, $\alpha x \in \ell^p$ $\blacktriangle$

(5) SEJA V ESPAÇO VETORIAL SOBRE O CORPO K E 0_V E 0_K SEUS ZEROS, RESPECTIVAMENTE. TOME $\alpha \in K$ E $u \in V$.

$\Leftarrow$) SE $\alpha = 0_K$, ENTÃO $0_K \cdot u + 0_K \cdot u \overset{E8)}{=} (0_K + 0_K) \cdot u \overset{A3)}{=} 0_K \cdot u \overset{E3)}{=} 0_K \cdot u + 0_V$

SOMANDO $-(0_K \cdot u)$ DOS DOIS LADOS E USANDO E2) E E4), TEMOS $0_K \cdot u = 0_V$.

SE $u = 0_V$, ENTÃO $\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V \overset{E7)}{=} \alpha(0_V + 0_V) \overset{E3)}{=} \alpha 0_V \overset{E3)}{=} \alpha 0_V + 0_V$

E USANDO O MESMO ARGUMENTO ACIMA, $\alpha \cdot 0_V = 0_V$.

$\Rightarrow$) SEJA $\alpha u = 0_V$. SE $\alpha = 0_K$, ACABAMOS. SE $\alpha \neq 0$, MULTIPLICANDO POR α^{-1} DOS DOIS LADOS TEMOS

$\alpha^{-1}(\alpha u) \overset{*}{=} \alpha^{-1} \cdot 0_V$ TEMOS $u \overset{E6)}{=} 1_K \cdot u \overset{M4)}{=} (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot u \overset{E5)}{=} \alpha^{-1}(\alpha \cdot u)$

$\overset{*}{=} \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V$, ESSA ÚLTIMA IGUALDADE PELO QUE PROVAMOS ACIMA. LOGO, $u = 0_V$ $\square$

(6) $\Rightarrow$ SUPONHA $\{1, \xi\}$ INDEPENDENTE.

LOGO, ξ NÃO PODE SER 0. SE ξ FOR RACIONAL, PODEMOS ESCREVER $1 = \frac{1}{\xi} \cdot \xi$, OU SEJA, 1 É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE ξ. UM ABSURDO.

LOGO, ξ É IRRACIONAL.

$\Leftarrow$ VOU PROVAR A CONTRAPOSITIVA.

SUPONHA $\{1, \xi\}$ DEPENDENTE. LOGO, EXISTEM $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ NÃO TODOS NULOS TAIS QUE

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \xi = 0$. SE $\alpha_2 = 0$, ENTÃO $0 = \alpha_1 \cdot 1 = \alpha_1$, ABSURDO.

LOGO, $\alpha_2 \neq 0$. TEMOS ENTÃO, REARRANJANDO, QUE

$\xi = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, UM RACIONAL. $\blacksquare$

(7) • PROVE QUE SE $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, ENTÃO $\{q, \xi\}$ É INDEPENDENTE SE, E SOMENTE SE, ξ É IRRACIONAL.

$\Rightarrow$) $\{q, \xi\}$ INDEPENDENTE IMPLICA $\xi \neq 0$. SE ξ FOR RACIONAL, $\xi = \left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot q$, ABSURDO. LOGO, ξ É IRRACIONAL

$\Leftarrow$) $\{q, \xi\}$ DEPENDENTE IMPLICA $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ NÃO TODOS NULOS COM $\alpha_1 q + \alpha_2 \xi = 0$. SE $\alpha_2 = 0$, ENTÃO $\alpha_1 = 0$, ABSURDO.

COM $\alpha_2 \neq 0$, TEMOS $\xi = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot q$, UM RACIONAL.

TOME B BASE DE $\mathbb{R}$. SUPONHA, POR ABSURDO, $B = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ENUMERÁVEL. DEFINA $B_m := \{x_1, \dots, x_m\}$. AGORA, NOTE QUE $\operatorname{SPAN} B_m$ É ENUMERÁVEL, POIS PODEMOS CRIAR A FUNÇÃO $g: \mathbb{Q}^m \to \operatorname{SPAN} B_m$, DADA POR $g(q_1, \dots, q_m) := \sum_{i=1}^{m} q_i x_i$ E ELA É SOBREJETIVA. LOGO $\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{SPAN} B_m$ É ENUMERÁVEL.

COMO $\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{SPAN} B_m = \operatorname{SPAN} B$ E $\operatorname{SPAN} B = \mathbb{R}$, ACABAMOS DE PROVAR QUE $\mathbb{R}$ É ENUMERÁVEL, UM ABSURDO. LOGO, B SÓ PODE SER NÃO ENUMERÁVEL.

8 UMA BASE PARA $\mathbb{C}$ É $\{1, i\}$.

- $\{1, i\}$ É GERADOR: DADO $x \in \mathbb{C}$, SABEMOS QUE $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. LOGO, a, b SÃO ESCALARES E ISSO MOSTRA QUE x É COMBINAÇÃO LINEAR DE 1 E i (POIS $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$).

- $\{1, i\}$ É L.I.: TOME $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ TAIS QUE $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i = 0$. ISSO IMPLICA QUE $\alpha_2 = 0$, POIS 0 NÃO TEM PARTE IMAGINÁRIA. LOGO, $\alpha_1 = 0$. LOGO, O CONJUNTO É L.I..

PORTANTO, A DIMENSÃO DE $\mathbb{C}$ SOBRE OS REAIS É 2.

⑨ TOME V COM DIMENSÃO FINITA.

TOME $U \subseteq V$ SUBESPAÇO. VOU CONSTRUIR $W \subseteq V$ TAL QUE: 1) W É SUBESPAÇO, 2) $U + W = V$, 3) $U \cap W = \{0\}$.

PRIMEIRO, SEJA $\dim V = n$, $\dim U = m$ COM $m < n$ (O CASO $m = n$ É TRIVIAL, POIS AÍ $W := \{0\}$ É O SUBESPAÇO COMPLEMENTAR). DEFINA $p := n - m$.

AGORA, TOME BASE $\{u_1, \dots, u_m\}$ DE U. COMO $m < n$, ESSE CONJUNTO NÃO PODE SER BASE DE V. TOME $w_1 \in V$ INDEPENDENTE DESSA BASE. SE $\{u_1, \dots, u_m, w_1\}$ NÃO FOR BASE DE V, ACHE $w_2 \in V$ INDEPENDENTE DESSE CONJUNTO. REPITA ISSO ATÉ ACHAR $w_1, \dots, w_p$ TAIS QUE $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p\}$ SEJA BASE DE V. O CONJUNTO DADO POR $W := \text{GER}\{w_1, \dots, w_n\}$ SERÁ O NOSSO SUBESPAÇO COMPLEMENTAR.

1) W É SUBESPAÇO: VALE, POIS TODO CONJUNTO GERADOR É SUBESPAÇO VETORIAL

2) $U + W = V$:

$\boxed{V \subseteq U+W}$ TOME $v \in V$. COMO $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p\}$ É BASE DE V, EXISTEM $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_p \in K$ TAIS QUE $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i w_i$. COMO $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in U$ E $\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \in W$, $v \in U+W$. LOGO, $V \subseteq U+W$

$\boxed{U+W \subseteq V}$ TOME $x = u + w$, COM $u \in U$ E $w \in W$. COMO $\{u_1, \dots, u_m\}$ É BASE DE U E $\{w_1, \dots, w_p\}$ É BASE DE W, EXISTEM $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_p \in K$ TAIS QUE $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = u$ E $\sum_{j=1}^{p} \beta_i w_i = w$ COMO $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p\}$ É BASE DE V, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i w_i \in V$. LOGO, $u + w = x \in V$.

3) $U \cap W = \{0\}$: TOME $x \in U \cap W$. LOGO, EXISTEM $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_p \in K$ TAIS QUE $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ E $x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i w_i$.
LOGO, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i w_i$, OU $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i w_i = 0$. COMO $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p\}$ É INDEPENDENTE, $\alpha_i = \beta_j = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, p$. LOGO, $x = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot u_i = 0$. LOGO, $U \cap W \subseteq \{0\}$. COMO U E W SÃO SUBESPAÇOS, $0 \in W$ E $0 \in U$. LOGO, $0 \in U \cap W$. LOGO, $\{0\} = U \cap W$.

(10) $\Rightarrow$) TOME $W := U_1 \cup U_2$ SUBESPAÇO. PRECISO PROVAR QUE $U_1 \subseteq U_2$ OU $U_2 \subseteq U_1$. SUPONHA QUE $U_1 \subseteq U_2$. ENTÃO, ACABAMOS. AGORA, SUPONHA $U_1 \not\subseteq U_2$. OU SEJA, EXISTE $u \in U_1$ TAL QUE $u \notin U_2$. PRECISO PROVAR QUE $U_2 \subseteq U_1$. TOME $v \in U_2$.

LOGO, $v \in W$, TAMBÉM TEMOS $u \in W$. COMO W É SUBESPAÇO, TEMOS QUE $u + v \in W$. SUPONHA, POR ABSURDO, QUE $u + v \in U_2$. LOGO, $u + v + (-v) = u \in U_2$, POIS $v, -v \in U_2$ E U_2 É SUBESPAÇO. MAS ISSO É UM ABSURDO. LOGO, $u + v \in U_1$ (POIS $W = U_1 \cup U_2$).

COMO $u \in U_1$ E U_1 É SUBESPAÇO, TEMOS QUE $-u \in U_1$. ISSO IMPLICA QUE $-u + u + v = v \in U_1$, COMO QUERÍAMOS.

$\Leftarrow$) VAMOS SUPOR $U_1 \subseteq U_2$, POIS A PROVA COM $U_2 \subseteq U_1$ É ANÁLOGA. VOU PROVAR QUE $W := U_1 \cup U_2$ É SUBESPAÇO.

* $0_V \in W$: COMO $U_1 \subseteq W$ E $0_V \in U_1$, TEMOS $0_V \in W$.

* $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$: SE $u, v \in W$, ENTÃO $u \in U_1$ OU $u \in U_2$ E $v \in U_1$ OU $v \in U_2$. COMO $U_1 \subseteq U_2$ DE QUALQUER JEITO $u, v \in U_2$. COMO U_2 É SUBESPAÇO, $u+v \in U_2$. LOGO, $u+v \in W$.

* $\alpha \in K, u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$: SE $u \in W$, ENTÃO $u \in U_1$ OU $u \in U_2$. COMO SÃO SUBESPAÇOS, $\alpha u \in U_1$ OU $\alpha u \in U_2$. LOGO, $\alpha u \in W$.

11 TOME $f: V \to K$ LINEAR COM $f \neq 0$. OU SEJA, $f \in V' \setminus \{0\}$. PARA PROVAR QUE $f(V) = K$, PRECISAMOS TOMAR $\alpha \in K$ E ACHAR $u \in V$ TAL QUE $f(u) = \alpha$.

TOME $\alpha \in K$. COMO $f \neq 0$, EXISTE $v \in V$ TAL QUE $f(v) = \beta \neq 0$. MULTIPLICANDO AMBOS OS LADOS POR $\frac{\alpha}{\beta}$, TEMOS $\frac{\alpha}{\beta} f(v) = \frac{\alpha}{\beta} . \beta = \alpha$. COMO f É LINEAR,

$\frac{\alpha}{\beta} f(v) = f\left(\frac{\alpha}{\beta} v\right)$. DEFININDO $u := \frac{\alpha}{\beta} v$, TERMINAMOS

A PROVA.

12 VAMOS PEGAR O ESPAÇO DAS SEQUÊNCIAS ℓ^0 E DEFINIR $T: \ell^0 \to \ell^0$ POR $T(x) := (0, x_1, x_2, \dots)$, OU SEJA, A TRANSFORMAÇÃO DESLOCA TODAS COORDENADAS PARA DIREITA E COLOCA ZERO NA PRIMEIRA COORDENADA.

* T É LINEAR: TOME $x, y \in \ell^0$ E $\alpha \in \mathbb{R}$.

$T(\alpha x + y) = (0, \alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots) = \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + (0, y_1, y_2, \dots) =$
$= \alpha T(x) + T(y)$.

* T É INJETIVA: SABEMOS QUE T É INJETIVA SE, E SOMENTE SE, $\ker T = \{0\}$. VOU PROVAR ISSO. TOME $x \in \ell^0$ TAL QUE $T(x) = 0_\ell$ LOGO, $(0, x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots)$, O QUE IMPLICA $x_m = 0$ PARA TODO $m \in \mathbb{N}$. LOGO, $x = 0_\ell$

* T NÃO É SOBREJETIVA: TOME A SEQUÊNCIA $y := (1, 1, \dots) \in \ell^0$. INDEPENDENTE DO $x \in \ell^0$ QUE PEGUEMOS, $T(x)$ TERÁ A PRIMEIRA COORDENADA NULA. LOGO, $T(x) \neq y$ PARA TODO $x \in \ell^0$. LOGO, T NÃO É SOBREJETIVA. ISSO IMPLICA QUE T NÃO É BIJETIVA E PORTANTO NÃO TEM INVERSA.

(13) $\Leftarrow$ TOME $T: V \to \mathbb{R}^n$ COM V SUBESPAÇO E SUPONHA $\ker T = W$. SEJA $0_{\mathbb{R}^n} := (0, 0, \ldots, 0)$ O VETOR NULO DO $\mathbb{R}^n$. SABEMOS QUE $\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

* $0 \in \ker T$: $T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_{\mathbb{R}^n}$. LOGO, $0_V \in \ker T$.

* $u, v \in \ker T \Rightarrow u + v \in \ker T$: $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_{\mathbb{R}^n} + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$, POIS $u, v \in \ker T$ E T É LINEAR.

* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \ker T \Rightarrow \alpha u \in \ker T$: $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$, POIS $u \in \ker T$ E T É LINEAR.

LOGO, $W = \ker T$ É SUBESPAÇO.

$\Rightarrow$ TOME $W \subseteq V$ SUBESPAÇO VETORIAL COM DIMENSÃO $m \leq n$. DEFINA $p := n - m$. TOME $\{w_1, \ldots, w_m\}$ BASE DE W E $\{w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_p\}$ BASE DE V. AGORA, DEFINA $T(w_i) := 0_{\mathbb{R}^n}$ PARA $i = 1, \ldots, m$ E $T(v_i) := (0, \ldots, \underset{\text{POSIÇÃO } i}{1}, 0, \ldots, 0)$ PARA $i = 1, \ldots, p$.

PARA $v \in V$, PEGUE A COMBINAÇÃO LINEAR $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i v_i$ (QUE EXISTE, POIS $\{w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_p\}$ É BASE DE V) E

DEFINA $T(v) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(w_i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i T(v_i) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, 0, \dots, 0)$.

NOTE QUE $T(w_i)$ E $T(v_i)$ VÃO COINCIDIR COM A DEFINIÇÃO DE $T(v)$ DADA ACIMA. AGORA, IREI TER QUE PROVAR QUE T É LINEAR E $\ker T = W$.

* T É LINEAR: TOME $u, v \in V$ E $\lambda \in \mathbb{R}$.

ESCREVA $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,u} w_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,u} v_i$ E $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,v} w_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,v} v_i$.

TEMOS $\lambda u + v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\lambda u+v} w_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,\lambda u+v} v_i$. PELA UNICIDADE DOS ESCALARES DA REPRESENTAÇÃO DA BASE,

$\alpha_{i,\lambda u+v} = \lambda \alpha_{i,u} + \alpha_{i,v}$ PARA $i = 1, \dots, m$ E $\beta_{i,\lambda u+v} = \lambda \beta_{i,u} + \beta_{i,v}$

PARA $i = 1, \dots, p$.

AGORA, NOTE QUE $T(\alpha u + v) = (\beta_{1,\alpha u+v}, \dots, \beta_{p,\alpha u+v}, 0, \dots, 0) =$

$= (\lambda \beta_{1,u} + \beta_{1,v}, \dots, \lambda \beta_{p,u} + \beta_{p,v}, 0, \dots, 0) = \lambda(\beta_{1,u}, \dots, \beta_{p,u}, 0, \dots, 0) + (\beta_{1,v}, \dots, \beta_{p,v}, 0, \dots, 0)$

$= \lambda T(u) + T(v)$. LOGO, T É LINEAR.

* $W = \ker T$:

$\boxed{W \subseteq \ker T}$ TOME $w \in W$. LOGO, $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$.

PORTANTO, $T(w) = T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(w_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$. LOGO, $w \in \ker T$

$\boxed{\ker T \subseteq W}$ TOME $u \in \ker T$. LOGO,

$T(u) = 0$. COMO $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i v_i$ E

$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(w_i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i T(v_i) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, 0, \dots, 0),$$ ISSO

IMPLICA QUE $\beta_i = 0$ PARA $i = 1, \dots, p$. LOGO,

$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i$ E PORTANTO $u \in W$.