AGOSTO DE 2024

PESQUISA OPERACIONAL

Aplicações em Transporte Aéreo

Marcelo Xavier Guterres, Ph.d

Produzido por:

Marcelo Xavier Guterres, Ph.d

Aprovado por:

Marcelo Xavier Guterres
Professor Associado II do Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Sumário

1 Pesquisa Operacional **1**
1.1 Pesquisa Operacional (PO) 1
1.2 Resumo: O que é a Pesquisa Operacional? 2
1.3 Origens da Pesquisa Operacional 3
1.4 Pesquisa Operacional no Brasil 3
1.5 Pesquisa Operacional e o Futuro 3
1.6 Pesquisa Operacional e suas Técnicas 4
1.7 O que o CPLEX Optimizer pode fazer por seus negócios? 4
1.8 Pesquisa Operacional e suas técnicas 5
1.9 Programação Matemática 6
1.10 Programação Linear 6
1.11 Programação inteira 7
1.12 Programação não linear 8
1.13 Princípios do Processo de Modelagem 10
1.13.1 Conceito intuitivo de Modelo 10
1.13.2 Classificação dos modelos 10
1.13.3 O processo de modelagem 11
1.14 Padrões para a Construção de Modelos de Otimização 14

2 Introdução à Programação Linear **16**
2.1 O Problema de Solving 16
2.2 Programação Linear 18
2.3 Código R com LpSolve 19
2.4 Leitura Complementar 20

3 Modelagem de Problemas Reais **22**
3.1 Caso ITABr 22
3.2 Caso LCL Investimentos 23
3.3 Caso LCL Correios e Malotes 23
3.4 Caso LCL Tintas Ltda 24
3.5 Caso LCL Armazéns e Comércio 25
3.6 Caso LCL Restaurantes 25

3.7 Rede de Transporte Aéreo 26

4 Método Simplex 27

5 Problema de Redes 28

Lista de Figuras

1.1 CPLEX Optimizer 5
1.2 Programação Linear X Inteira 8
1.3 Exemplo de um problema de programação não linear 9
1.4 O processo de construção de modelos 11

2.1 Correspondência entre os Passos do Problem Solving e elementos da Programação Linear. 17
2.2 Solução Gráfica do Problema Exemplo. 19
2.3 Capa do artigo de Dantzig et al. (1954) 21

Lista de Tabelas

3.1 Informações de produção 22
3.2 Dados dos Títulos de Investimento 23
3.3 Número mínimo de empregados por dia da semana 24
3.4 Preços de Venda e Compra por Mês 25
3.5 Dados de Investimentos 26
3.6 Informações das demandas e das classes tarifárias da rede de vôos. 26

1. Pesquisa Operacional

Os objetivos do capítulo são:

- Definir o conceito de Pesquisa Operacional;
- Breve histórico da Pesquisa Operacional;
- A Pesquisa Operacional no Brasil;
- Futuro da Pesquisa Operacional;
- Pesquisa Operacional e suas técnicas;
- Tipos de modelos;
- Construção de modelos;

1.1 Pesquisa Operacional (PO)

Alguns conceitos clássicos sobre o que é a PO foram propostos por Kittel (1947) [4], e Ackoff (1962) [1]. São eles:

Definição 1. Pesquisa Operacional é o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões [4].

Definição 2. A Pesquisa Operacional é a aplicação do método científico, por equipes multidisciplinares, a problemas envolvendo o controle de sistemas organizados de forma a fornecer soluções que melhor interessam a determinada organização" [1].

Assim, de acordo com as definições 1 e 2, a seguinte observação pode ser realizada: A PO é um método científico de tomada de decisão e, neste contexto, remonta a Frederick W. Taylor, e a Gilbreths e Henry Gantt.

Conceitos-chave:

1. Uso ou aplicação para resolver problemas reais;
2. Apoio à tomada de decisões;
3. Multidisciplinaridade;

Em complemento outros dois conceitos são importantes:

Definição 3. Método é um conjunto de etapas, ordenadamente dispostas, a serem executadas para se alcançar determinado fim;

Definição 4. Método Científico é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo – conhecimentos válidos e verdadeiros –, traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões do cientista.

O método científico tem cinco passos básicos, mais um passo de retroalimentação:

1. Faça uma observação.
2. Faça uma pergunta.
3. Formule uma hipótese ou uma explicação testável.
4. Faça uma previsão baseada na hipótese.
5. Teste a previsão.
6. Repita: use os resultados para formular novas hipóteses ou previsões.

1.2 Resumo: O que é a Pesquisa Operacional?

- Uma abordagem científica na tomada de decisões;
- Um conjunto de métodos e modelos matemáticos aplicados à resolução de complexos problemas nas operações (atividades) de uma organização;

1.3 Origens da Pesquisa Operacional

1. Durante a Segunda Guerra Mundial, os líderes militares solicitaram que cientistas estudassem problemas como posicionamento de radares, armazenamento de munições e transporte de tropa, entre outros;
2. A aplicação do método científico e de ferramentas matemáticas em operações militares passou a ser chamado de Pesquisa Operacional.
3. Hoje em dia, Pesquisa Operacional é enfoque científico para Problemas de Decisão.

1.4 Pesquisa Operacional no Brasil

- Setor energético: Petrobrás, Cepel, Furnas, Eletrobrás, Ultragás;
- Telecomunicações;
- Bens de consumo: Souza Cruz, Ambev, Brasilit, Unilever, Tilibra;
- Agroindústrias: Sadia, Celpav, Ripasa, Copersucar, Citrosuco;
- Siderurgia: Cvrd, Usiminas, belgo mineira, acesita, villares mannesmann;
- Serviços: IBM, Unisoma, BNDES;
- Logística: CVRD, Cia. aéreas;
- Transporte Aéreo: Delta e American Airlines.

1.5 Pesquisa Operacional e o Futuro

- APO: Advanced Planning Optimizer [5];
- IBM ILog Optimization: IBM ILOG CPLEX Optimization Studio [3].

1.6 Pesquisa Operacional e suas Técnicas

- Programação Matemática;
- Estatística - Séries Temporais - Modelos de Previsão;
- Fluxo em Redes - Grafos - Otimização Combinatória;
- Metaheurística;
- Redes Neurais - Sistemas Especialistas - IA;
- Análise Multicritério;
- Simulação - filas - Processos Estocásticos;
- Teoria da decisão;

1.7 O que o CPLEX Optimizer pode fazer por seus negócios?

Permite modelar os problemas de negócios matematicamente e solucione-os com poderosos algoritmos do CPLEX Optimizer, que podem produzir decisões precisas e lógicas. A tecnologia de programação matemática do CPLEX Optimizer permite otimizar a decisão para melhorar a eficiência, reduzir custos e aumentar a lucratividade.

O CPLEX Optimizer (Figura1.1) fornece solvers de programação matemática flexíveis e de alto desempenho para programação linear, programação inteira mista, programação quadrática e problemas de programação quadraticamente restritos. Esses solvers incluem um algoritmo paralelo distribuído para programação inteira mista para alavancar vários computadores para resolver problemas difíceis.

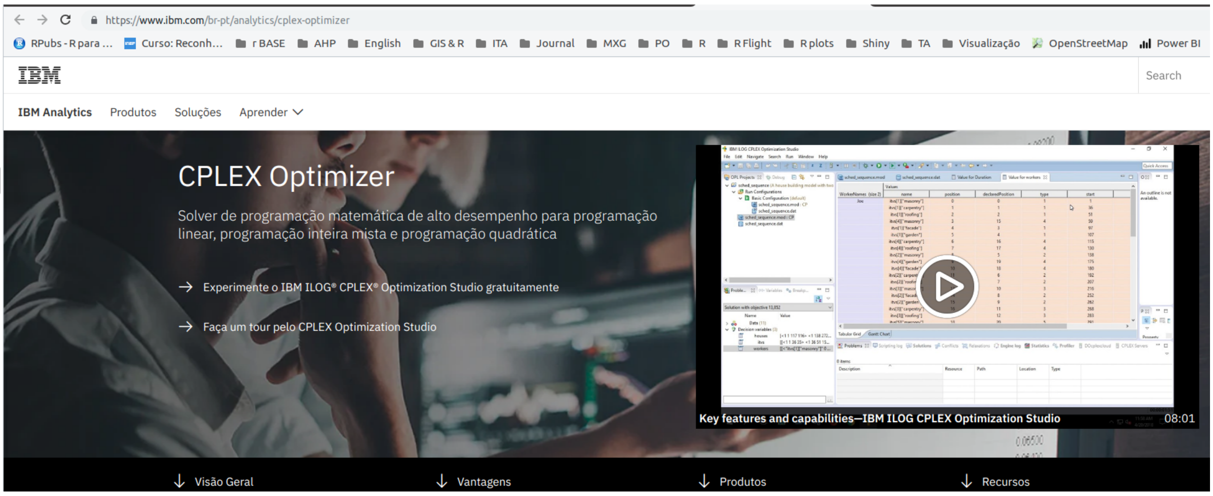


Figura 1.1: CPLEX Optimizer

Encontre a melhor solução entre bilhões de alternativas para decisões de negócios, como: Qual é o melhor plano para a minha fábrica atender a demanda de produtos acabados, minimizando os custos de instalação da máquina e considerando as chegadas programadas de matérias-primas?

Como posso designar as campanhas de marketing para os clientes de maneira otimizada, considerando previsões sobre a propensão dos clientes a responder e maximizar as compras esperadas, ao mesmo tempo em que ajustam as restrições orçamentárias?

1.8 Pesquisa Operacional e suas técnicas

- Programação Matemática;
- Estatística - Séries Temporais - Modelos de Previsão;
- Fluxo em Redes - Grafos - Otimização Combinatória;
- Metaheurística;
- Redes Neurais - Sistemas Especialistas - IA;
- Análise Multicritério;
- Simulação - filas - Processos Estocásticos;
- Teoria da decisão;

1.9 Programação Matemática

Um problema de programação matemática tem por objetivo encontrar os valores para as variáveis de decisão que otimizam (maximizam ou minimizam) uma função objetivo respeitando um conjunto de restrições.

Para ilustrar, o conjunto formado pelas Equações 1.1 a 1.5 é um típico Problema de Programação Matemática (PPM) completo.

Exemplo 1.

$$\text{min } Z = 2x_1 + \ln(x_2) \tag{1.1}$$

$$\text{sujeito a: } 4x_1^2 + 3x_2^2 \geq 6 \tag{1.2}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \tag{1.3}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{1.4}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{1.5}$$

A Equação 1.1 é a função objetivo; Z é o valor a ser otimizado (por exemplo, minimização do custo de produção); as Equações 1.2 a 1.5 são as restrições do modelo; e, por fim, x_1 e x_2 são as variáveis de decisão do PPM.

De maneira geral, a formulação algébrica é:

$$\text{max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.6}$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{1.7}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.8}$$

1.10 Programação Linear

Um PPM é dito linear se a função objetivo e o conjunto de restrições que o compõem forem simultaneamente lineares (Equações de primeiro grau).

O conjunto formado pelas Equações 1.8 a 1.12, porém, diferentemente do PPL do Exemplo 1, trata-se de um problema de maximização (por exemplo, lucro).

Exemplo 2.

$$\text{max } Z = 5x_1 + 10x_2 \tag{1.9}$$
$$\text{sujeito a: } 8x_1 + 6x_2 \geq 3 \tag{1.10}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{1.11}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{1.12}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{1.13}$$

1.11 Programação inteira

Um **problema de programação inteira** (PPI) é aquele em que as variáveis de decisão obrigatoriamente só podem assumir valores inteiros.

$$\text{max } Z = 5x_1 + 10x_2 \tag{1.14}$$

sujeito a:

$$8x_1 + 6x_2 \geq 3 \tag{1.15}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{1.16}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{1.17}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{1.18}$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \text{para } j = 1, 2 \tag{1.19}$$

A Programação Inteira pode ser entendida como um caso específico da Programação Linear, onde as variáveis devem ser inteiras (ou ao menos, parte destas variáveis). De maneira geral tem-se:

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.20}$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \tag{1.21}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.22}$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \text{para } j = 1, 2, ..., p(\leq n) \tag{1.23}$$

Quando todas as variáveis devam possuir valores inteiros, o modelo é denominado de um problema de Programação Inteira Pura, caso contrário, é denominado de um problema de Programação Inteira Mista.

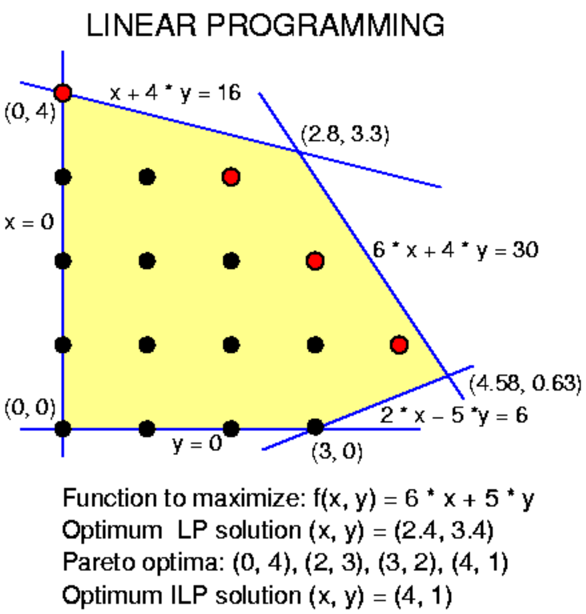


Figura 1.2: Programação Linear X Inteira

1.12 Programação não linear

Os modelos empregados em Programação Linear são, como o próprio nome diz, lineares (tanto a função objetivo quanto as restrições). Este fato é, sem dúvida, ”a maior das restrições”impostas sobre um modelo de Programação.

Em grande parte das aplicações, modelos lineares refletem apenas aproximações dos modelos reais. Fenômenos físicos ou econômicos são geralmente melhor representados por modelos não-lineares.

Em geral, os modelos empregados em Programação Não-Linear são do tipo:

$$\text{max ou min } f(x) \tag{1.24}$$

$$\text{sujeito a: } g_i(x) \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2..., m \tag{1.25}$$

$$x_i \geq 0 \tag{1.26}$$

com:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$f(.)$ e $g_i(.)$ são funções não lineares.

Os métodos para resolução de problemas de Programação Não-Linear podem ser divididos em 2 grupos:

1. Modelos sem restrições;
2. Modelos com restrições.

$$\text{Min} \qquad f(X) = x_1^2 + 3x_2^2 \qquad \nabla f(X) = \begin{bmatrix} \partial x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \nabla f(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

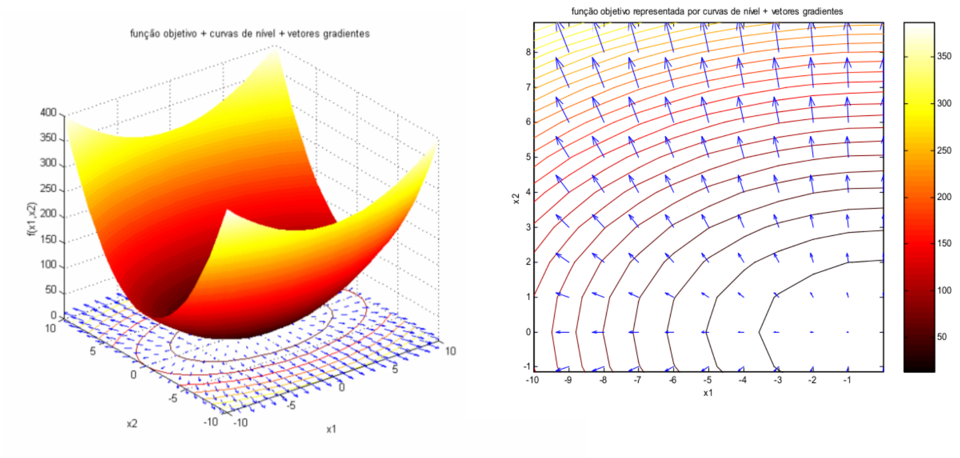


Figura 1.3: Exemplo de um problema de programação não linear

1.13 Princípios do Processo de Modelagem

Sugestão de leitura do Capítulo 01 do livro Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos [2]. Os textos a seguir foram extraídos do referido livro. Ou seja, não é de autoria do presente autor.

1.13.1 Conceito intuitivo de Modelo

Na impossibilidade de lidar diretamente com a complexidade do mundo, o homem tem se mostrado cada vez mais hábil na criação de metáforas para a representação e solução de sua relação com esse mundo [2].

Um modelo é um veículo para uma visão bem estruturada da realidade. Um modelo pode também ser visto, com os devidos cuidados, como uma representação substitutiva da realidade.

Os modelos são representações simplificadas da realidade que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada.

Definição 5. Conceitualmente, um modelo pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo.

O ato de modelar, conhecido como modelagem, pode ser aplicado a um grande número de problemas.

- Exemplo: O estudo da análise ambiental nas proximidades de um rio, a forma da asa de um avião, um sistema econômico, uma cultura agrícola, um estudo populacional, um estudo físico, e até mesmo um sistema matemático como o conjunto dos números naturais.

1.13.2 Classificação dos modelos

Quanto à natureza do modelo:

- Concretos: Físicos e geométricos;
- Abstratos: Matemáticos, Lógicos e esquemáticos.

1.13.3 O processo de modelagem

É possível, de uma forma bastante geral, resumir o processo de modelagem ou de construção de modelos na ótica operacional, pelos passos sugeridos pelo fluxograma da Figura 1.4.

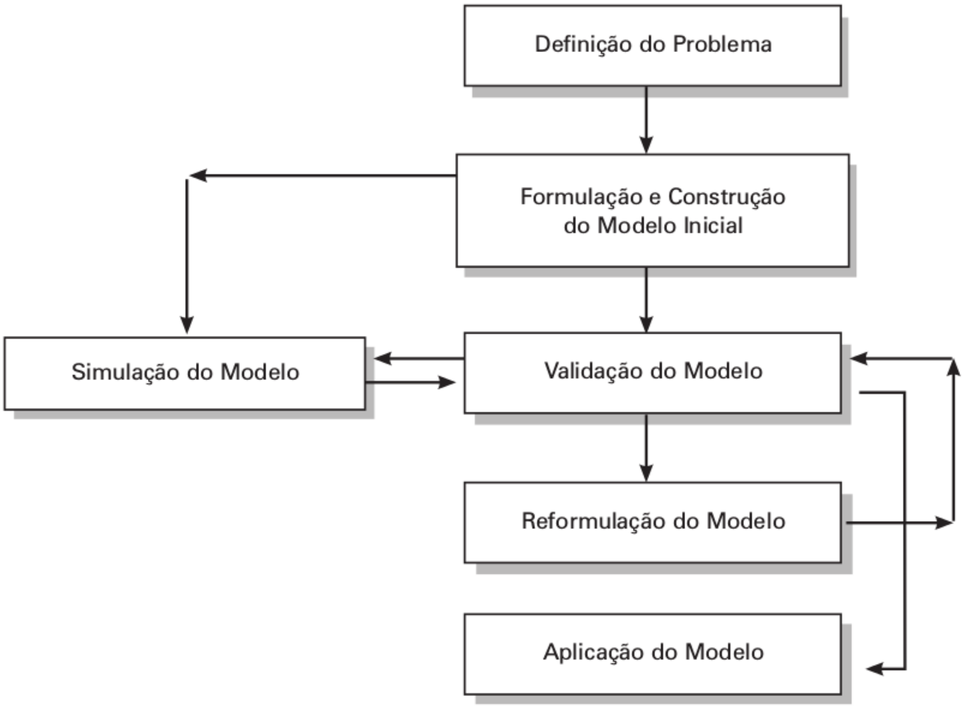


Figura 1.4: O processo de construção de modelos

A definição do problema é uma das fases mais importantes do processo e compreende a clara percepção do desafio colocado. O problema deve ser traduzido em elementos palpáveis englobando:

1. Objetivos;
2. Variáveis de decisão ou controle;
3. Níveis de detalhe.

O segredo do sucesso do modelo de otimização depende da adequação de sua tradução, também denominada ”formulação”.

O próprio termo “formular”, largamente empregado para exprimir o processo de construção de modelos de otimização, traz consigo uma enorme carga quantitativa e matemática.

Por outro lado, a adequação pretendida depende também de elementos que escapam ao conteúdo estritamente técnico, envolvendo a percepção do elaborador do modelo (ou equipe de elaboração), uma faculdade cognitiva de alto nível.

As fórmulas ou equações do modelo não existem prontas e acabadas na natureza, elas têm de ser identificadas ou criadas.

Estranhamente, o rigor da tradução é obtido através de processos pouco rigorosos ou conhecidos, envolvendo:

- Intuição.
- Experiência.
- Criatividade.
- Poder de síntese.
- etc.

Temos daí duas consequências imediatas para o desenvolvimento de modelos:

- Existe uma enorme dificuldade de modelar o processo de formulação.
- Existe uma forte tendência a considerar a atividade de formulação de um modelo como uma arte.

A abordagem artística do fenômeno de formulação tem suas justificativas, mas ela poderá trazer em si um elemento perverso: deslocar o foco do desenvolvimento das técnicas de modelagem para um contexto pouco conhecido e controlável.

Se, por um lado, a construção de um modelo é inegavelmente uma atividade subjetiva, podendo exigir características inatas do modelador, por outro, na maioria das ocasiões, conjugar o verbo modelar implicará um esforço absolutamente técnico.

Apesar do lado genial e quase místico, na maioria dos casos da vida real, os fatores predominantes da elaboração serão conhecimentos e habilidades paroquiais, cuja aprendizagem e desenvolvimento estarão perfeitamente ao alcance do indivíduo mediano.

Na fase de formulação do modelo de otimização são definidos os tipos de variáveis a utilizar na representação, bem como o nível apropriado de agregação dessas variáveis.

Ainda na formulação devem ser representadas as restrições do problema, tanto as quantitativas como as de natureza lógica.

O modelo deverá ser adequado à natureza dos dados de entrada e de saída, bem como ser capaz de expressar as funções de desempenho que possivelmente serão exigidas no processo de otimização.

As funções de desempenho, via de regra, serão denominadas de funções objetivo. A formulação será completada com o estabelecimento das hipóteses de representação que irão orientar a escolha e a possível utilização de modelos já existentes e de técnicas de solução (exatas, heurísticas etc.) para o caso.

A construção de modelos determina a inclusão de parâmetros e constantes que serão responsáveis pela definição e dimensionamento das relações entre as variáveis do modelo (constantes de similaridade).

Na fase de validação do modelo, cumpre comparar seu comportamento com a realidade e, se necessário, atuar sobre esses elementos de forma a aproximar ao máximo o comportamento do sistema modelo ao do sistema real.

1.14 Padrões para a Construção de Modelos de Otimização

Apesar de não considerarmos a técnica de construção de modelos como verdadeiramente uma arte, dificilmente seria possível reunir em um algoritmo específico e autônomo todos os passos indispensáveis para modelarmos um sistema genérico.

Buscando o equilíbrio entre a arte e a técnica, podemos propor uma sistematização, se não completa, pelo menos parcial desse processo. Segundo [1], poderão ser considerados cinco padrões de construção de modelos:

Padrão 1: quando a estrutura do sistema é suficientemente simples e evidente para ser compreendida por inspeção. Nesse caso, o modelo pode ser construído com facilidade, o que não significa que não possa ser muito difícil ou até mesmo impossível avaliar as variáveis não controladas e diversos outros parâmetros. O número de variáveis controladas pode também tornar impossível a solução prática do problema.

Padrão 2: quando a estrutura do sistema é relativamente aparente, mas a representação simbólica não é tão aparente. Nessa situação, a busca de um sistema análogo com estrutura já conhecida é uma boa opção. O sistema análogo poderá auxiliar na descoberta das propriedades do sistema em estudo.

Padrão 3: quando a estrutura do sistema não é aparente, contudo, uma análise estatística do mesmo pode atender ao desejado. Nesse caso, o sistema é considerado uma caixa preta, em que conhecemos, com segurança, as respostas para determinados estímulos.

Padrão 4: quando a estrutura do sistema não é aparente e nem é possível isolar os efeitos das diversas variáveis através de uma análise estatística. Nesse caso, uma boa política será o projeto de experimentos, de forma a determinar variáveis e correlações relevantes e reduzir o caso ao padrão 3.

Padrão 5: quando verificamos as situações do padrão 4, porém as experimentações possíveis sobre o modelo são limitadas para o fim desejado. Será o fim da linha? Nesse caso, existem ainda os modelos de conflitos e jogos de operações. Se isso ainda não for suficiente, então a dimensão criativa da modelagem deve ser ativada.

2. Introdução à Programação Linear

Os objetivos do capítulo são:

- Compreender os conceitos fundamentais da Programação Linear.
- Explorar a estrutura do processo de Problem Solving na Programação Linear.
- Analisar e interpretar soluções gráficas para Problemas de Programação Linear.
- Implementar soluções de Programação Linear usando R.

2.1 O Problema de Solving

A Figura 2.1 ilustra os passos do Problem Solving e sua correspondência direta com os elementos da Programação Linear (PL).

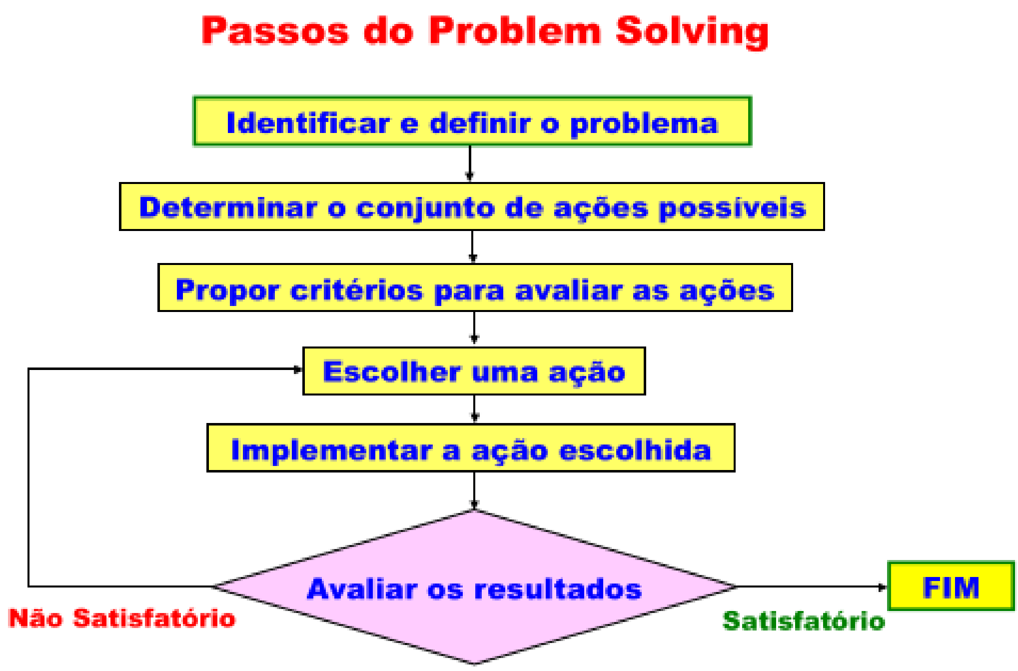


Figura 2.1: Correspondência entre os Passos do Problem Solving e elementos da Programação Linear.

O processo inicia com a **identificação e definição do problema,** que na PL corresponde diretamente à formulação do Modelo Matemático. Este passo é imprescindível pois estabelece a base para todo o processo de otimização.

Em seguida, a determinação do conjunto de ações possíveis equivale à identificação das **Variáveis de Decisão** na PL. Estas variáveis representam as quantidades que serão otimizadas no problema.

A proposição de critérios para avaliar as ações corresponde à definição da **Função Objetivo** na PL. Esta função matemática expressa o que se deseja otimizar (maximizar ou minimizar) no problema.

Por fim, a escolha de uma ação representa a etapa de **Programação Matemática** na PL, onde se aplicam métodos como o Simplex para resolver o modelo e encontrar a solução ótima.

Esta abordagem estruturada do Problem Solving, quando aplicada à Programação Linear, fornece um framework sistemático para abordar e resolver problemas de otimização complexos de maneira eficiente e eficaz.

2.2 Programação Linear

Nesta seção, apresentar-se-á um exemplo simples de programação linear para ilustrar os conceitos básicos e a aplicação do método. Este problema servirá como uma introdução prática à modelagem e resolução de problemas de otimização linear.

Como exemplo, uma empresa dispõe de R$ 90.000,00 para investir em ações de duas companhias: TeleMundo (TM) e CosmoFone (CF). As informações relevantes são:

- Ações da TeleMundo custam R$ 50,00 cada, com retorno esperado de R$ 6,00 por ação ao ano.
- Ações da CosmoFone custam R$ 30,00 cada, com retorno esperado de R$ 4,00 por ação ao ano.
- A diretoria estabeleceu que não se deve investir mais de R$ 60.000,00 em ações de uma única companhia.

O objetivo é maximizar o retorno anual total do investimento.

Definimos as variáveis de decisão:

- TM: Quantidade de ações da TeleMundo a serem compradas
- CF: Quantidade de ações da CosmoFone a serem compradas

O modelo de programação linear resultante é:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar: } & 6,00 \cdot TM + 4,00 \cdot CF \\
\text{Sujeito a: } & 50 \cdot TM + 30 \cdot CF \leq 90.000 \\
& 50 \cdot TM \leq 60.000 \\
& 30 \cdot CF \leq 60.000 \\
& TM, CF \geq 0
\end{aligned}
$$

Para o exemplo introdutório, obter-se-á a solução gráfica do problema. Este método visual permite compreender melhor a natureza das restrições e a região viável, além de identificar o ponto ótimo de forma intuitiva.

A solução gráfica indicada na Figura 2.2 permite analisar as interseções das restrições e identificar o ponto que maximiza a função objetivo.

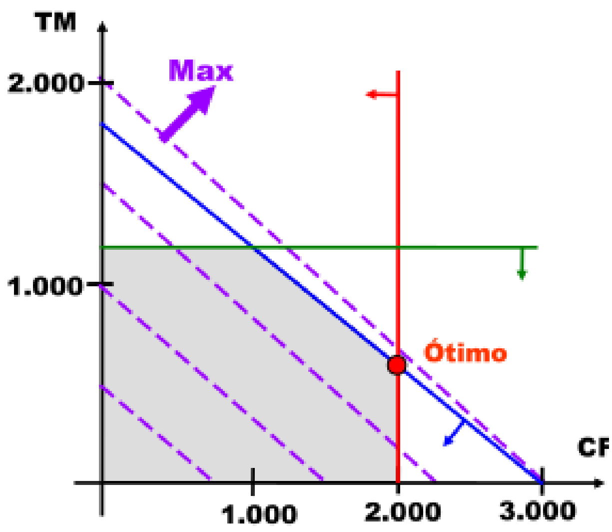


Figura 2.2: Solução Gráfica do Problema Exemplo.

Cuja solução é CF = R$ 2.000 e TM = R$ 600 com Retorno máximo igual a R$ 11600.

2.3 Código R com LpSolve

O código R para resolver o exemplo de problema de programação linear com Lpsolve:

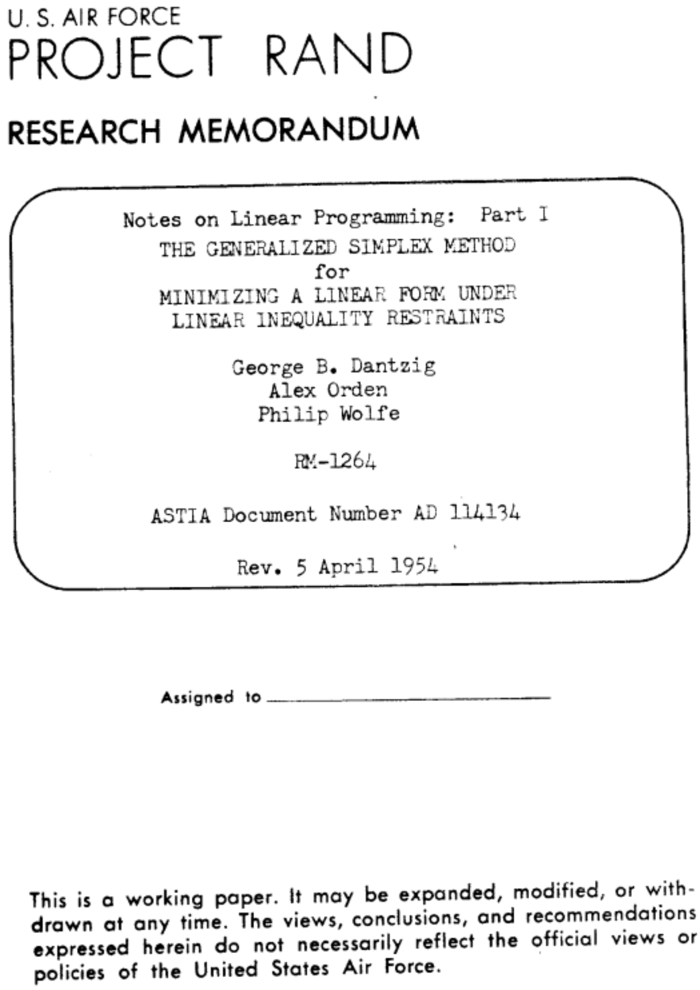
```
# Instalar e carregar o pacote lpSolve
install.packages("lpSolve")
library(lpSolve)

# Definir a função objetivo (maximizar o retorno)
f.obj = c(6, 4)
```

```
# Definir a matriz de coeficientes das restrições
f.con = matrix(c(
  50, 30,  # Restrição de orçamento total
  50,  0,  # Restrição de investimento máximo em TeleMundo
   0, 30   # Restrição de investimento máximo em CosmoFone
), nrow=3, byrow=TRUE)

# Definir as direções das desigualdades
f.dir = c("<=", "<=", "<=")

# Definir os lados direitos das restrições
f.rhs = c(90000, 60000, 60000)

# Resolver o problema de programação linear
resultado <- lp("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)

# Exibir a solução
print("Solução ótima:")
print(paste("Ações da TeleMundo:", round(resultado$solution[1])))
print(paste("Ações da CosmoFone:", round(resultado$solution[2])))
print(paste("Retorno máximo: R$", round(resultado$objval, 2)))
```

Este código resolve o problema de programação linear para determinar o investimento ótimo nas ações possíveis de compra.

2.4 Leitura Complementar

Como atividade complementar os alunos devem ler o artigo fundamental de George B. Dantzig, Alex Orden e Philip Wolfe intitulado *"Notes on Linear Programming: Part I - The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints"*, publicado em abril de 1954 no âmbito do Project RAND da U.S. Air Force. Este artigo é importante para entender as bases teóricas do Método Simplex, que será explorado em detalhe ao longo deste curso.



U. S. AIR FORCE
PROJECT RAND
RESEARCH MEMORANDUM

Notes on Linear Programming: Part I
THE GENERALIZED SIMPLEX METHOD
for
MINIMIZING A LINEAR FORM UNDER
LINEAR INEQUALITY RESTRAINTS

George B. Dantzig
Alex Orden
Philip Wolfe

RM-1264

ASTIA Document Number AD 114134

Rev. 5 April 1954

Assigned to

This is a working paper. It may be expanded, modified, or withdrawn at any time. The views, conclusions, and recommendations expressed herein do not necessarily reflect the official views or policies of the United States Air Force.

Figura 2.3: Capa do artigo de Dantzig et al. (1954)

Este artigo fornece uma visão do método matemático desenvolvidos para resolver problemas de Programação Linear, que ainda hoje são amplamente utilizados em diversas áreas de otimização. A leitura deste documento permitirá aos alunos compreenderem as motivações históricas e os desenvolvimentos iniciais da Programação Linear.

3. Modelagem de Problemas Reais

Os objetivos do capítulo são:

- Compreender e modelar problemas reais utilizando técnicas de programação linear;
- Desenvolver habilidades para formular e resolver problemas de produção, transporte e escala de funcionários;
- Analisar e interpretar os resultados obtidos com as modelagens.

3.1 Caso ITABr

A ITABr motores LTDA recebeu recentemente R$900.000 em pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A ITABr pode terceirizar parte da sua produção. A Tabela 3.1 resume estas informações. Modele o problema para descobrir como distribuir a produção.

Modelo	1	2	3	Capacidade
Demanda (unid)	3000	2500	500	
Montagem (h/unid)	1	2	0,5	6.000 h
Acabamento (h/unid)	2,5	1	4	10.000 h
Produção (R$)	50	90	120	
Terceirizado (R$)	65	92	140	

Tabela 3.1: Informações de produção

De forma resumida, a Tabela 3.1 mostra as demandas e os requisitos de produção para cada modelo de motor, além das opções de terceirização. Modele o problema para descobrir como distribuir a produção.

3.2 Caso LCL Investimentos

A LCL Investimentos S.A. gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimento para diversos clientes, baseados em bonds de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

- Não mais de 25% do total seja aplicado em um único investimento.
- Mais de 50% do total deve ser aplicado em títulos de maturidade de mais de 10 anos.
- O total aplicado em títulos de alto risco deve ser no máximo de 50% do total investido.

A Tabela 3.5 mostra os dados dos títulos selecionados.

Tabela 3.2: Dados dos Títulos de Investimento

Título	**Retorno Anual**	**Anos para Vencimento**	**Risco**
Título 1	8,7%	15	1 - Muito Baixo
Título 2	9,5%	12	3 - Regular
Título 3	12,0%	8	4 - Alto
Título 4	9,0%	7	2 - Baixo
Título 5	13,0%	11	4 - Alto
Título 6	20,0%	5	5 - Muito Alto

3.3 Caso LCL Correios e Malotes

A LCL Correios e Malotes, uma franquia da ECT - Empresa de Correios e Telégrafos, deseja estabelecer o número de funcionários de horário integral que deve contratar para iniciar suas atividades. Para fazê-lo, recebeu uma tabela da ECT com o mínimo de funcionários por dia da semana. Essas informações se encontram na Tabela 3.3.

Dia da Semana	N.º Mínimo Empregados	Dia da Semana	N.º Mínimo Empregados
2ª	18	6ª	14
3ª	12	Sábado	16
4ª	15	Domingo	11
5ª	19		

Tabela 3.3: Número mínimo de empregados por dia da semana

A Tabela 3.3 indica o número mínimo de empregados necessários por dia da semana. Modele o problema para determinar a escala de funcionários.

O sindicato dos empregados mantém um acordo sindical que determina que cada empregado deve trabalhar cinco dias consecutivos e folgar em seguida dois dias, e que as franquias devem ter apenas empregados em regime de horário integral. Formule o problema de maneira a resolver o problema.

3.4 Caso LCL Tintas Ltda

A firma LCL Tintas Ltda produz dois tipos de tintas chamadas: Seca Rápido (SR) e Super Seca (SS). Ambas são produzidas a partir de uma base de silicato e uma solução de óleo de linhaça, que são adquiridos pela LCL de vários fornecedores. Atualmente apenas duas soluções preliminares estão disponíveis no mercado, além dos produtos isolados. A solução do tipo A contém 60% de silicato e 40% de óleo de linhaça, e a do tipo B contém 30% de silicato e 70% de óleo de linhaça. O preço da solução A custa R$0,50 por litro e a do tipo B custa R$ 0,75 por litro, enquanto o silicato e óleo de linhaça isoladamente custam R$1,00 e R$1,10 por litro. Cada litro de SR requer no mínimo 25% de silicato e 50% de óleo de linhaça, e cada litro de SS requer no mínimo 20% de silicato e no máximo 50% de óleo de linhaça. Formule o problema de programação linear para determinar quantos litros de cada solução e de cada produto isoladamente devem ser comprados para produzir exatamente 100 litros de SR e 250 litros de SS?

3.5 Caso LCL Armazéns e Comércio

A LCL Armazéns e Comércio Ltda. possui 1 armazém com capacidade de armazenamento de 200.000 toneladas de grãos. No início do mês de janeiro a LCL tinha 8.000 toneladas de grãos de trigo em seu armazém. Considerando que em cada mês você pode comprar ou vender trigo a preços pré-fixados pelo governo (tabela a seguir), em qualquer quantidade desejada, desde que sujeitas as restrições de armazenagem e o estoque inicial do mês (vendas máximas no mêsi = saldo mês(i-1)). Formule o problema de maneira a maximizar o lucro da operação nos próximos 12 meses. A Tabela 3.4 fornece as informações para o processo de modelagem.

Tabela 3.4: Preços de Venda e Compra por Mês

Mês do Ano	**Preço de Venda (R$/ton)**	**Preço de Compra (R$/ton)**
Janeiro	3	8
Fevereiro	6	8
Março	8	2
Abril	2	3
Maio	4	4
Junho	5	3
Julho	6	3
Agosto	1	2
Setembro	3	5
Outubro	2	5
Novembro	3	3
Dezembro	3	3

3.6 Caso LCL Restaurantes

A LCL Restaurantes Ltda. quer construir um novo restaurante. O total R$ 500.000,00 da obra será pago a construtora em duas parcelas de R$ 150.000,00 ao final do 2º e do 5º mês e uma parcela de R$ 200.000,00 ao final da construção no 7º mês. A empresa dispõe de 4 tipos de investimentos (tabela a seguir) que podem ser utilizados a fim de gerar caixa para quitar a construção de maneira a reduzir a necessidade total de caixa. A Tabela 3.5 fornece as informações para o processo de modelagem.

Tabela 3.5: Dados de Investimentos

Investimento	**Mês Disponível para Aplicação**	**Duração da Aplicação (meses)**	**Retorno ao Final do Investimento**
Tipo A	1,2,3,4,5,6,7	1	1,5%
Tipo B	1,3,5	2	3,2%
Tipo C	1,4	3	4,5%
Tipo D	1	7	9,0%

3.7 Rede de Transporte Aéreo

Considere uma rede de vôos $A-B$, $B-C$, $C-D$, que geram seis possíveis itinerários. Com os dados a seguir, e admitindo que não se pratica overbooking, formule um modelo para a maximização da receita desta rede. Resolva o modelo e comente os resultados. Como se analisa eventuais alterações na configuração interior da aeronave (alterações no número de assentos das classes executiva e econômica nos diferentes voos)?

- Voos: A-B, B-C, e C-D;
- Classes Tarifárias: Executiva (C) e Econômica (Y);
- Capacidade das Aeronaves: 160 assentos nos vôos A-B e C-D; e 140 assentos no vôo B-C;

Tabela 3.6: Informações das demandas e das classes tarifárias da rede de vôos.

Rota	Tarifa (R$) classe Y	Tarifa (R$) classe C	Demanda classe Y	Demanda classe C
A-B	300	400	90	30
B-C	200	250	40	50
C-D	300	360	50	25
A-C	400	480	70	30
A-D	700	840	80	40
B-D	400	450	60	30

A tabela 3.6 apresenta as tarifas e demandas de cada classe em diferentes rotas da rede aérea. Use essas informações para modelar o problema de maximização da receita.

4. Método Simplex

5. Problema de Redes

Referências Bibliográficas

[1] Russell L. Ackoff. *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions*. John Wiley & Sons, New York, 1962.

[2] Marco Cesar Goldbarg and Henrique Pacca L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

[3] IBM Corporation. Ibm ilog cplex optimization studio. `https://www.ibm.com/br-pt/products/ilog-cplex-optimization-studio`, 2024. Accessed: 2024-08-09.

[4] Charles Kittel. The nature and development of operations research. *Science*, 105(2719):150–153, 1947.

[5] SAP SE. Advanced planning and optimization (apo). `https://www.sap.com/brazil/products/scm/advanced-planning-optimization.html`, 2024. Accessed: 2024-08-09.