

AGOSTO DE 2024

PESQUISA OPERACIONAL

Aplicações em Transporte Aéreo



Marcelo Xavier Guterres, Ph.d

Produzido por:

Marcelo Xavier Guterres, Ph.d
Mauro Caetano de Souza, Ph.d

Direitos autorais da MXG.

Aprovado por:

Marcelo Xavier Guterres
Professor Associado II do Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Sumário

1	Pesquisa Operacional	1
1.1	Objetivos do Módulo	1
1.2	Pesquisa Operacional (PO)	1
1.3	Resumo: O que é a Pesquisa Operacional?	2
1.4	Origens da Pesquisa Operacional	3
1.5	Pesquisa Operacional no Brasil	3
1.6	Pesquisa Operacional e o Futuro	4
1.7	Pesquisa Operacional e suas Técnicas	4
1.8	O que o CPLEX Optimizer pode fazer por seus negócios?	4
1.9	Pesquisa Operacional e suas técnicas	5
1.10	Programação Matemática	6
1.11	Programação Linear	7
1.12	Programação inteira	7
1.13	Programação não linear	8
1.14	Princípios do Processo de Modelagem	10
1.14.1	Conceito intuitivo de Modelo	10
1.14.2	Classificação dos modelos	10
1.14.3	O processo de modelagem	11
1.15	Padrões para a Construção de Modelos de Otimização	14
1.15.1	Padrão 1	14
1.15.2	Padrão 2	14
1.15.3	Padrão 3	14
1.15.4	Padrão 4	15

Lista de Figuras

1.1 CPLEX Optimizer	5
1.2 Programação Linear X Inteira	8
1.3 Exemplo de um problema de programação não linear	9
1.4 O processo de construção de modelos	11

Lista de Tabelas

1. Pesquisa Operacional

1.1 Objetivos do Módulo

- Definir o conceito de Pesquisa Operacional;
- Breve histórico da Pesquisa Operacional;
- A Pesquisa Operacional no Brasil;
- Futuro da Pesquisa Operacional;
- Pesquisa Operacional e suas técnicas;
- Tipos de modelos;
- Construção de modelos;

1.2 Pesquisa Operacional (PO)

Alguns conceitos clássicos sobre o que é a PO foram propostos por Kittel (1947) [4], e Ackoff (1962) [1]. São eles:

Definição 1. Pesquisa Operacional é o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões [4].

Definição 2. A Pesquisa Operacional é a aplicação do método científico, por equipes multidisciplinares, a problemas envolvendo o controle de sistemas organizados de forma a fornecer soluções que melhor interessam a determinada organização” [1].

Assim, de acordo com as definições 1 e 2, a seguinte observação pode ser realizada: A PO é um método científico de tomada de decisão e, neste contexto, remonta a Frederick W. Taylor, e a Gilbreths e Henry Gantt.

Conceitos-chave:

1. Uso ou aplicação para resolver problemas reais;
2. Apoio à tomada de decisões;
3. Multidisciplinaridade;

Em complemento outros dois conceitos são importantes:

Definição 3. Método é um conjunto de etapas, ordenadamente dispostas, a serem executadas para se alcançar determinado fim;

Definição 4. Método Científico é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo – conhecimentos válidos e verdadeiros –, traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões do cientista.

O método científico tem cinco passos básicos, mais um passo de retroalimentação:

1. Faça uma observação.
2. Faça uma pergunta.
3. Formule uma hipótese ou uma explicação testável.
4. Faça uma previsão baseada na hipótese.
5. Teste a previsão.
6. Repita: use os resultados para formular novas hipóteses ou previsões.

1.3 Resumo: O que é a Pesquisa Operacional?

- Uma abordagem científica na tomada de decisões;

- Um conjunto de métodos e modelos matemáticos aplicados à resolução de complexos problemas nas operações (atividades) de uma organização;

1.4 Origens da Pesquisa Operacional

1. Durante a Segunda Guerra Mundial, os líderes militares solicitaram que cientistas estudassem problemas como posicionamento de radares, armazenamento de munições e transporte de tropa, entre outros;
2. A aplicação do método científico e de ferramentas matemáticas em operações militares passou a ser chamado de Pesquisa Operacional.
3. Hoje em dia, Pesquisa Operacional é enfoque científico para Problemas de Decisão.

1.5 Pesquisa Operacional no Brasil

- Setor energético: Petrobrás, Cepel, Furnas, Eletrobrás, Ultragás;
- Telecomunicações;
- Bens de consumo: Souza Cruz, Ambev, Brasilit, Unilever, Tilibra;
- Agroindústrias: Sadia, Celpav, Ripasa, Copersucar, Citrosuco;
- Siderurgia: Cvrld, Usiminas, belgo mineira, acesita, villares mannesmann;
- Serviços: IBM, Unisoma, BNDES;
- Logística: CVRD, Cia. aéreas;
- Transporte Aéreo: Delta e American Airlines.

1.6 Pesquisa Operacional e o Futuro

- APO: Advanced Planning Optimizer [5];
- IBM ILog Optimization: IBM ILOG CPLEX Optimization Studio [3].

1.7 Pesquisa Operacional e suas Técnicas

- Programação Matemática;
- Estatística - Séries Temporais - Modelos de Previsão;
- Fluxo em Redes - Grafos - Otimização Combinatória;
- Metaheurística;
- Redes Neurais - Sistemas Especialistas - IA;
- Análise Multicritério;
- Simulação - filas - Processos Estocásticos;
- Teoria da decisão;

1.8 O que o CPLEX Optimizer pode fazer por seus negócios?

Permite modelar os problemas de negócios matematicamente e solucioná-los com poderosos algoritmos do CPLEX Optimizer, que podem produzir decisões precisas e lógicas. A tecnologia de programação matemática do CPLEX Optimizer permite otimizar a decisão para melhorar a eficiência, reduzir custos e aumentar a lucratividade.

O CPLEX Optimizer (Figura 1.1) fornece solvers de programação matemática flexíveis e de alto desempenho para programação linear, programação inteira mista, programação quadrática e problemas de programação quadraticamente restritos. Esses solvers incluem um algoritmo paralelo distribuído

para programação inteira mista para alavancar vários computadores para resolver problemas difíceis.

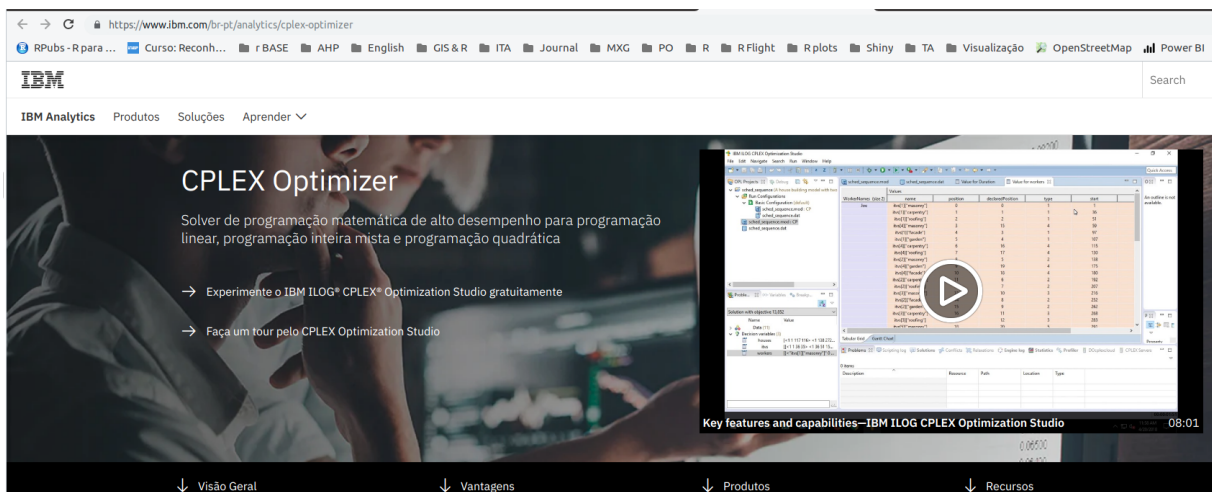


Figura 1.1: CPLEX Optimizer

Encontre a melhor solução entre bilhões de alternativas para decisões de negócios, como: Qual é o melhor plano para a minha fábrica atender a demanda de produtos acabados, minimizando os custos de instalação da máquina e considerando as chegadas programadas de matérias-primas?

Como posso designar as campanhas de marketing para os clientes de maneira otimizada, considerando previsões sobre a propensão dos clientes a responder e maximizar as compras esperadas, ao mesmo tempo em que ajustam as restrições orçamentárias?

1.9 Pesquisa Operacional e suas técnicas

- Programação Matemática;
- Estatística - Séries Temporais - Modelos de Previsão;
- Fluxo em Redes - Grafos - Otimização Combinatória;
- Metaheurística;
- Redes Neurais - Sistemas Especialistas - IA;
- Análise Multicritério;

- Simulação - filas - Processos Estocásticos;
- Teoria da decisão;

1.10 Programação Matemática

Um problema de programação matemática tem por objetivo encontrar os valores para as variáveis de decisão que otimizam (maximizam ou minimizam) uma função objetivo respeitando um conjunto de restrições.

Para ilustrar, o conjunto formado pelas Equações 1.1 a 1.5 é um típico Problema de Programação Matemática (PPM) completo.

Exemplo 1.

$$\min Z = 2x_1 + \ln(x_2) \quad (1.1)$$

$$\text{sujeito a: } 4x_1^2 + 3x_2^2 \geq 6 \quad (1.2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (1.3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (1.5)$$

A Equação 1.1 é a função objetivo; Z é o valor a ser otimizado (por exemplo, minimização do custo de produção); as Equações 1.2 a 1.5 são as restrições do modelo; e, por fim, x_1 e x_2 são as variáveis de decisão do PPM.

De maneira geral, a formulação algébrica é:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.6)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.7)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.8)$$

1.11 Programação Linear

Um PPM é dito linear se a função objetivo e o conjunto de restrições que o compõem forem simultaneamente lineares (Equações de primeiro grau).

O conjunto formado pelas Equações 1.8 a 1.12, porém, diferentemente do PPL do Exemplo 1, trata-se de um problema de maximização (por exemplo, lucro).

Exemplo 2.

$$\max Z = 5x_1 + 10x_2 \quad (1.9)$$

$$\text{sujeito a: } 8x_1 + 6x_2 \geq 3 \quad (1.10)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (1.11)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.12)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (1.13)$$

1.12 Programação inteira

Um **problema de programação inteira** (PPI) é aquele em que as variáveis de decisão obrigatoriamente só podem assumir valores inteiros.

$$\max Z = 5x_1 + 10x_2 \quad (1.14)$$

sujeito a:

$$8x_1 + 6x_2 \geq 3 \quad (1.15)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (1.16)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.17)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (1.18)$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \text{para } j = 1, 2 \quad (1.19)$$

A Programação Inteira pode ser entendida como um caso específico da Programação Linear, onde as variáveis devem ser inteiras (ou ao menos,

parte destas variáveis). De maneira geral tem-se:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.20)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.21)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.22)$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p(\leq n) \quad (1.23)$$

Quando todas as variáveis devam possuir valores inteiros, o modelo é denominado de um problema de Programação Inteira Pura, caso contrário, é denominado de um problema de Programação Inteira Mista.

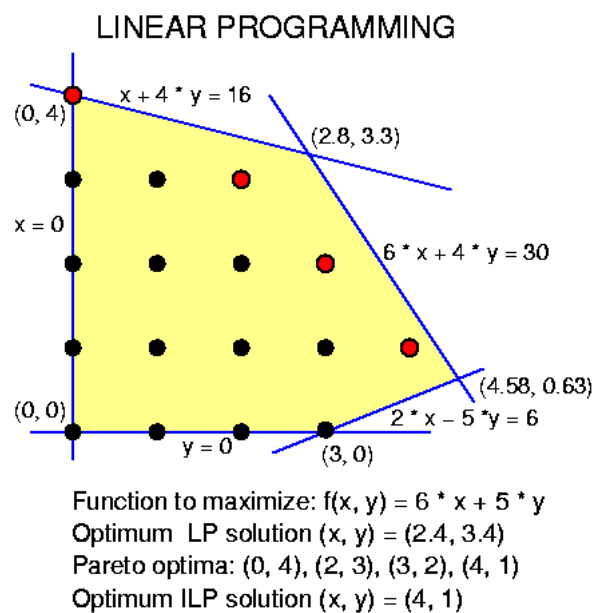


Figura 1.2: Programação Linear X Inteira

1.13 Programação não linear

Os modelos empregados em Programação Linear são, como o próprio nome diz, lineares (tanto a função objetivo quanto as restrições). Este fato é, sem dúvida, "a maior das restrições" impostas sobre um modelo de Programação.

Em grande parte das aplicações, modelos lineares refletem apenas aproximações dos modelos reais. Fenômenos físicos ou econômicos são geralmente melhor representados por modelos não-lineares.

Em geral, os modelos empregados em Programação Não-Linear são do tipo:

$$\max \text{ ou } \min f(x) \quad (1.24)$$

$$\text{sujeito a: } g_i(x) \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (1.25)$$

$$x_i \geq 0 \quad (1.26)$$

com:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$f(\cdot)$ e $g_i(\cdot)$ são funções não lineares.

Os métodos para resolução de problemas de Programação Não-Linear podem ser divididos em 2 grupos:

1. Modelos sem restrições;
2. Modelos com restrições.

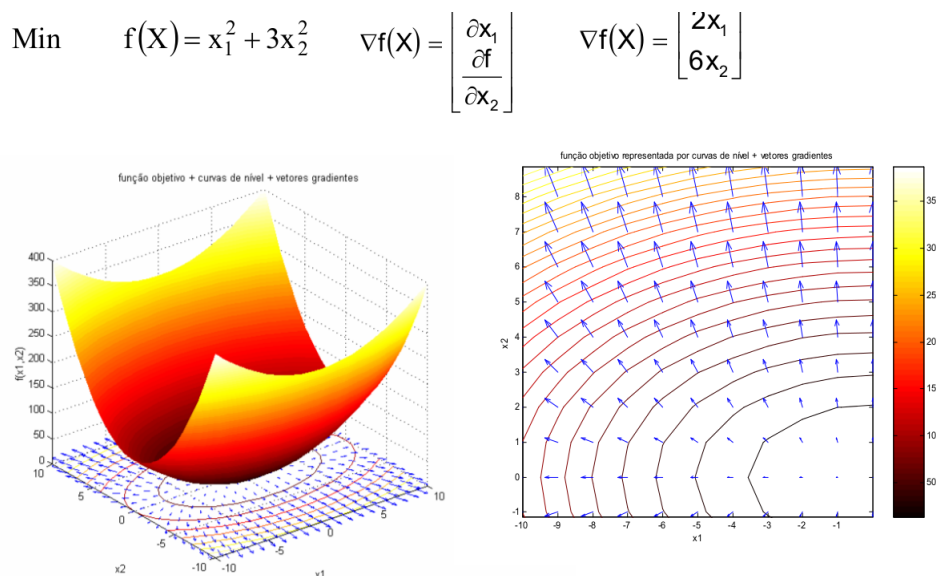


Figura 1.3: Exemplo de um problema de programação não linear

1.14 Princípios do Processo de Modelagem

Sugestão de leitura do Capítulo 01 do livro Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos [2]. Os textos a seguir foram extraídos do referido livro. Ou seja, não é de autoria do presente autor.

1.14.1 Conceito intuitivo de Modelo

Na impossibilidade de lidar diretamente com a complexidade do mundo, o homem tem se mostrado cada vez mais hábil na criação de metáforas para a representação e solução de sua relação com esse mundo [2].

Um modelo é um veículo para uma visão bem estruturada da realidade. Um modelo pode também ser visto, com os devidos cuidados, como uma representação substitutiva da realidade.

Os modelos são representações simplificadas da realidade que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada.

Definição 5. Conceitualmente, um modelo pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo.

O ato de modelar, conhecido como modelagem, pode ser aplicado a um grande número de problemas.

- Exemplo: O estudo da análise ambiental nas proximidades de um rio, a forma da asa de um avião, um sistema econômico, uma cultura agrícola, um estudo populacional, um estudo físico, e até mesmo um sistema matemático como o conjunto dos números naturais.

1.14.2 Classificação dos modelos

Quanto à natureza do modelo:

- Concretos: Físicos e geométricos;
- Abstratos: Matemáticos, Lógicos e esquemáticos.

1.14.3 O processo de modelagem

É possível, de uma forma bastante geral, resumir o processo de modelagem ou de construção de modelos na ótica operacional, pelos passos sugeridos pelo fluxograma da Figura 1.4.

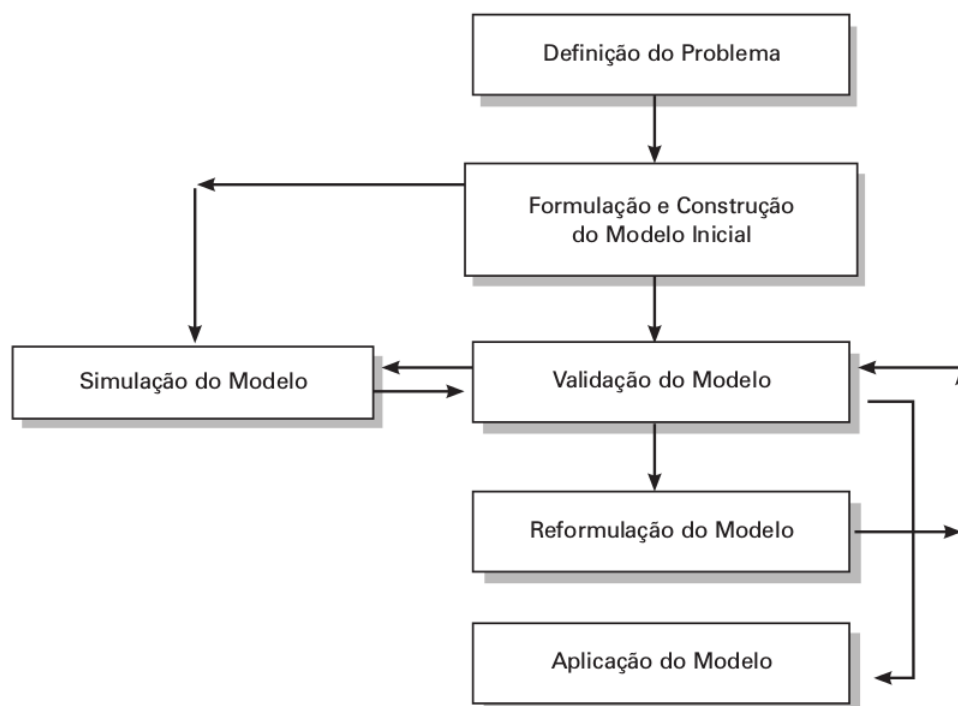


Figura 1.4: O processo de construção de modelos

A definição do problema é uma das fases mais importantes do processo e compreende a clara percepção do desafio colocado. O problema deve ser traduzido em elementos palpáveis englobando:

1. Objetivos;
2. Variáveis de decisão ou controle;
3. Níveis de detalhe.

O segredo do sucesso do modelo de otimização depende da adequação de sua tradução, também denominada “formulação”.

O próprio termo “formular”, largamente empregado para exprimir o processo de construção de modelos de otimização, traz consigo uma enorme carga quantitativa e matemática.

Por outro lado, a adequação pretendida depende também de elementos que escapam ao conteúdo estritamente técnico, envolvendo a percepção do elaborador do modelo (ou equipe de elaboração), uma faculdade cognitiva de alto nível.

As fórmulas ou equações do modelo não existem prontas e acabadas na natureza, elas têm de ser identificadas ou criadas.

Estranhamente, o rigor da tradução é obtido através de processos pouco rigorosos ou conhecidos, envolvendo:

- Intuição.
- Experiência.
- Criatividade.
- Poder de síntese.
- etc.

Temos daí duas consequências imediatas para o desenvolvimento de modelos:

- Existe uma enorme dificuldade de modelar o processo de formulação.
- Existe uma forte tendência a considerar a atividade de formulação de um modelo como uma arte.

A abordagem artística do fenômeno de formulação tem suas justificativas, mas ela poderá trazer em si um elemento perverso: deslocar o foco do desenvolvimento das técnicas de modelagem para um contexto pouco conhecido e controlável.

Se, por um lado, a construção de um modelo é inegavelmente uma atividade subjetiva, podendo exigir características inatas do modelador, por outro, na maioria das ocasiões, conjugar o verbo modelar implicará um esforço absolutamente técnico.

Apesar do lado genial e quase místico, na maioria dos casos da vida real, os fatores predominantes da elaboração serão conhecimentos e habilidades paroquiais, cuja aprendizagem e desenvolvimento estarão perfeitamente ao alcance do indivíduo mediano.

Na fase de formulação do modelo de otimização são definidos os tipos de variáveis a utilizar na representação, bem como o nível apropriado de agregação dessas variáveis.

Ainda na formulação devem ser representadas as restrições do problema, tanto as quantitativas como as de natureza lógica.

O modelo deverá ser adequado à natureza dos dados de entrada e de saída, bem como ser capaz de expressar as funções de desempenho que possivelmente serão exigidas no processo de otimização.

As funções de desempenho, via de regra, serão denominadas de funções objetivo. A formulação será completada com o estabelecimento das hipóteses de representação que irão orientar a escolha e a possível utilização de modelos já existentes e de técnicas de solução (exatas, heurísticas etc.) para o caso.

A construção de modelos determina a inclusão de parâmetros e constantes que serão responsáveis pela definição e dimensionamento das relações entre as variáveis do modelo (constantes de similaridade).

Na fase de validação do modelo, cumpre comparar seu comportamento com a realidade e, se necessário, atuar sobre esses elementos de forma a aproximar ao máximo o comportamento do sistema modelo ao do sistema real.

1.15 Padrões para a Construção de Modelos de Otimização

Apesar de não considerarmos a técnica de construção de modelos como verdadeiramente uma arte, dificilmente seria possível reunir em um algoritmo específico e autônomo todos os passos indispensáveis para modelarmos um sistema genérico.

Buscando o equilíbrio entre a arte e a técnica, podemos propor uma sistematização, se não completa, pelo menos parcial desse processo. Segundo [1], poderão ser considerados cinco padrões de construção de modelos:

1.15.1 Padrão 1

Quando a estrutura do sistema é suficientemente simples e evidente para ser compreendida por inspeção. Nesse caso, o modelo pode ser construído com facilidade, o que não significa que não possa ser muito difícil ou até mesmo impossível avaliar as variáveis não controladas e diversos outros parâmetros. O número de variáveis controladas pode também tornar impossível a solução prática do problema.

1.15.2 Padrão 2

Quando a estrutura do sistema é relativamente aparente, mas a representação simbólica não é tão aparente. Nessa situação, a busca de um sistema análogo com estrutura já conhecida é uma boa opção. O sistema análogo poderá auxiliar na descoberta das propriedades do sistema em estudo.

1.15.3 Padrão 3

Quando a estrutura do sistema não é aparente, contudo, uma análise estatística do mesmo pode atender ao desejado. Nesse caso, o sistema

é considerado uma caixa preta, em que conhecemos, com segurança, as respostas para determinados estímulos.

1.15.4 Padrão 4

Quando a estrutura do sistema não é aparente e nem é possível isolar os efeitos das diversas variáveis através de uma análise estatística. Nesse caso, uma boa política Nesse caso, uma boa política será o projeto de experimentos, de forma a determinar variáveis e correlações relevantes e reduzir o caso ao padrão 3.

Referências Bibliográficas

- [1] Russell L. Ackoff. *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [2] Marco Cesar Goldbarg and Henrique Pacca L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.
- [3] IBM Corporation. Ibm ilog cplex optimization studio. <https://www.ibm.com/br-pt/products/ilog-cplex-optimization-studio>, 2024. Accessed: 2024-08-09.
- [4] Charles Kittel. The nature and development of operations research. *Science*, 105(2719):150–153, 1947.
- [5] SAP SE. Advanced planning and optimization (apo). <https://www.sap.com/brazil/products/scm/advanced-planning-optimization.html>, 2024. Accessed: 2024-08-09.