

# **Analytic Hierarchical Process**

## Decisão

É comum o **gerente** se deparar com uma situação na qual uma **decisão** deve ser tomada entre uma série de alternativas conflitantes e concorrentes, então duas opções básicas se apresentam:

- 1) usar a sua intuição gerencial; e
- 2) realizar um processo de modelagem da situação, simulando os mais diversos cenários, de maneira a estudar mais profundamente o problema



# Propostas para tratar problemas multicriteriais

## Economia

*Multi-Attribute-Utility Theory*

Preços-sombra

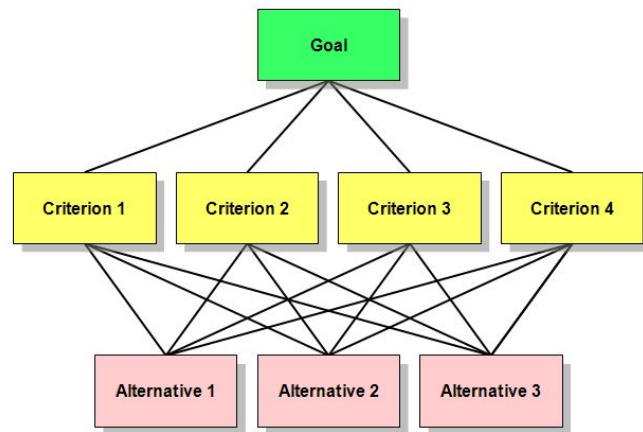
## Engenharia e Administração

Métodos de “score”: AHP, Electre, Star, ...

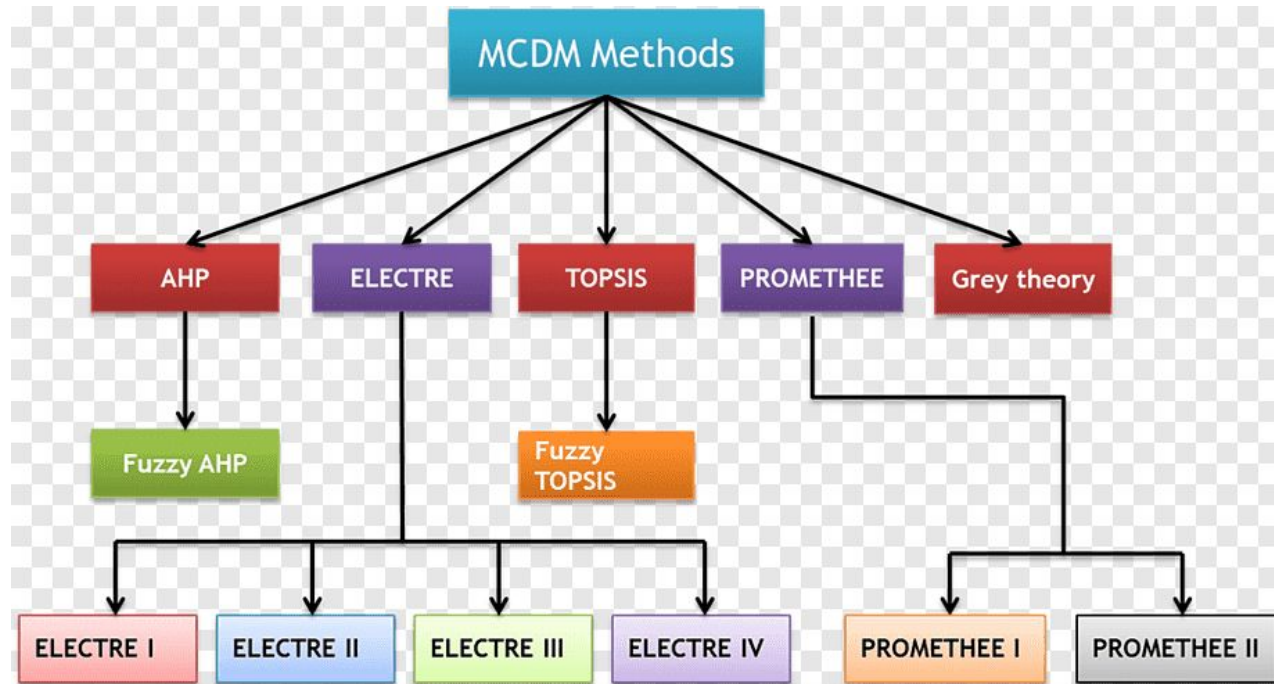
*Quantificar a importância de cada critério*

*Avaliar como cada alternativa contribui a cada critério*

*Identificar a alternativa com melhor contribuição total (ponderando as contribuições a cada critério pela importância desses critérios)*

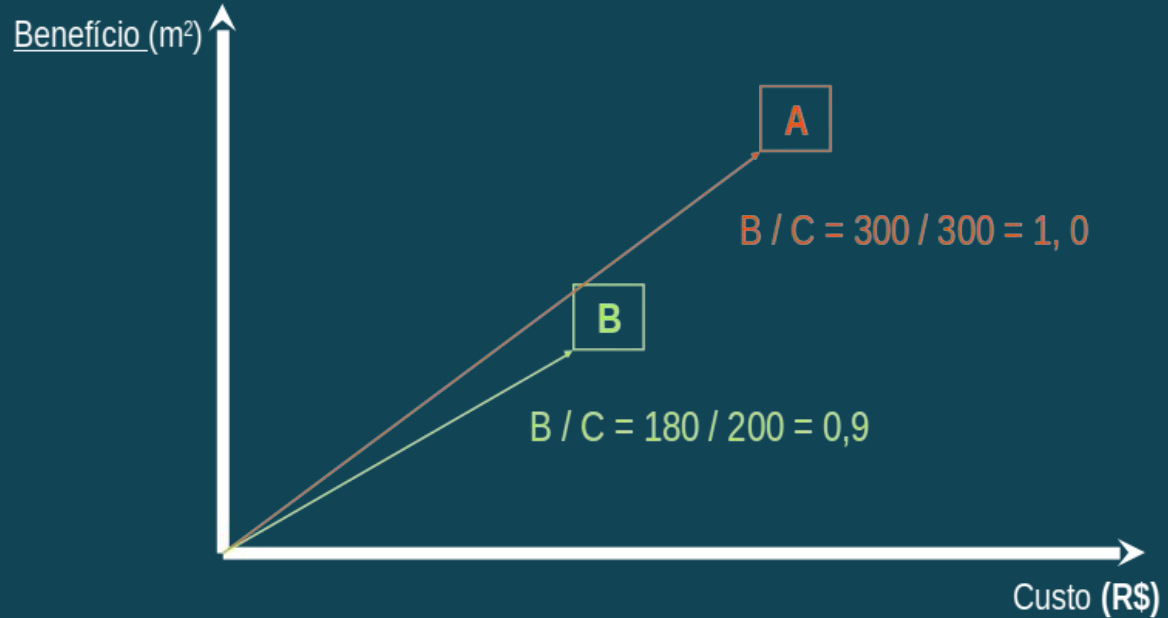


## Propostas para tratar problemas multicriteriais



## Exemplo de análise multicriterial: seleção de projeto

Análise custo | benefício



A inclinação das retas (razão B/C) determina a seleção. (desprezando a escala dos projetos)

## Análise multicriterial

## Desafios

### Escala de medida em cada critério

m<sup>2</sup> ou número de dormitórios?

Linear?

### Importância relativa de cada critério

Linear?

Depende do tomador de decisão: seu nível de riqueza, sua idade, etc

## Exemplo: seleção de um emprego

Passo 1: Listar os critérios de decisão

Passo 2: Definir um peso para cada critério

Passo 3: Avaliar como cada alternativa satisfaz cada critério: atribua uma nota ou um grau

Passo 4: Compute o score de cada alternativa, ponderando as notas de cada alternativa em todos os critérios

Passo 5: Ordene as alternativas segundo os scores

## Exemplo: seleção de um emprego

**Passo 1:** Listar os critérios de decisão;

**Passo 2:** Definir um peso para cada critério;

**Passo 3:** Avaliar como cada alternativa satisfaz cada critério: atribua uma nota ou um grau;

**Passo 4:** Compute o score de cada alternativa, ponderando as notas de cada alternativa em todos os critérios;

**Passo 5:** Ordene as alternativas segundo os scores

Critério	Ponderação ( $w_i$ )
Progressão na carreira	5
Localização	3
Gestão	4
Salário	3
Prestígio	2
Estabilidade	4
Trabalho agradável	5



## Exemplo: seleção de um emprego

Passo 1: Listar os critérios de decisão;

Passo 2: Definir um peso para cada critério;

Passo 3: Avaliar como cada alternativa satisfaz cada critério: atribua uma nota ou um grau;

Passo 4: Compute o score de cada alternativa, ponderando as notas de cada alternativa em todos os critérios;

Passo 5: Ordene as alternativas segundo os scores

Critério	Ponderação ( $w_i$ )	Analyst – Chicago	Accountant –Denver	Auditor Houston
Progressão na carreira	5	8	6	4
Localização	3	3	8	7
Gestão	4	5	6	9
Salário	3	6	7	5
Prestigio	2	7	5	4
Estabilidade	4	4	7	6
Trabalho agradável	5	8	6	5

## Ponderação de notas

Passo 1: Listar os critérios de decisão;

Passo 2: Definir um peso para cada critério;

Passo 3: Avaliar como cada alternativa satisfaz cada critério: atribua uma nota ou um grau;

Passo 4: Compute o score de cada alternativa, ponderando as notas de cada alternativa em todos os critérios;

Passo 5: Ordene as alternativas segundo os scores

Ponderação linear

$$S_j = \sum_i w_i r_{ij}$$

Onde:

$w_i$  = (weight) peso do critério  $i$  na decisão;

$r_{ij}$  = (rating) grau da alternativa  $j$  no critério  $i$ ;

$S_j$  = (score) nota ponderada da alternativa  $j$ ;

## Ponderação de notas

**Passo 1:** Listar os critérios de decisão;

**Passo 2:** Definir um peso para cada critério;

**Passo 3:** Avaliar como cada alternativa satisfaz cada critério: atribua uma nota ou um grau;

**Passo 4:** Compute o score de cada alternativa, ponderando as notas de cada alternativa em todos os critérios;

**Passo 5:** Ordene as alternativas segundo os scores

### Ponderação linear

$$S_j = \sum_i w_i r_{ij}$$

Primeira alternativa – Analyst in Chicago			
Critério	Ponderação ( $w_i$ )	Grau ( $r_{i1}$ )	$w_i r_{i1}$
Progressão na carreira	5	8	40
Localização	3	3	9
Gestão	4	5	20
Salário	3	6	18
Prestigio	2	7	14
Estabilidade	4	4	16
Trabalho agradável	5	8	40
		Score	157

## Ponderação de notas

Ponderação linear

$$S_j = \sum_i w_i r_{ij}$$

Primeira alternativa – Analyst in Chicago			
Critério	Ponderação ( $w_i$ )	Grau ( $r_{i1}$ )	$w_i r_{i1}$
Progressão na carreira	5	8	40
Localização	3	3	9
Gestão	4	5	20
Salário	3	6	18
Prestigio	2	7	14
Estabilidade	4	4	16
Trabalho agradável	5	8	40
		Score	157

Segunda alternativa – Accountant -Denver			
Critério	Ponderação ( $w_i$ )	Grau ( $r_{i2}$ )	$w_i r_{i2}$
Progressão na carreira	5	6	30
Localização	3	8	24
Gestão	4	6	24
Salário	3	7	21
Prestigio	2	5	10
Estabilidade	4	7	28
Trabalho agradável	5	6	30
		Score	167

Terceira alternativa – Auditor Houston			
Critério	Ponderação ( $w_i$ )	Grau ( $r_{i3}$ )	$w_i r_{i3}$
Progressão na carreira	5	4	20
Localização	3	7	21
Gestão	4	9	36
Salário	3	5	15
Prestigio	2	4	8
Estabilidade	4	6	24
Trabalho agradável	5	5	25
		Score	149

1º

## AHP : Analytic Hierarchy Process

O “Processo Análise Hierárquica” desenvolvido pelo Prof. Thomas Saaty da Universidade da Pennsylvania, é um método de score com as seguintes características:

### estruturação hierárquica:

- critérios de primeiro nível decompostos em critérios de segundo nível

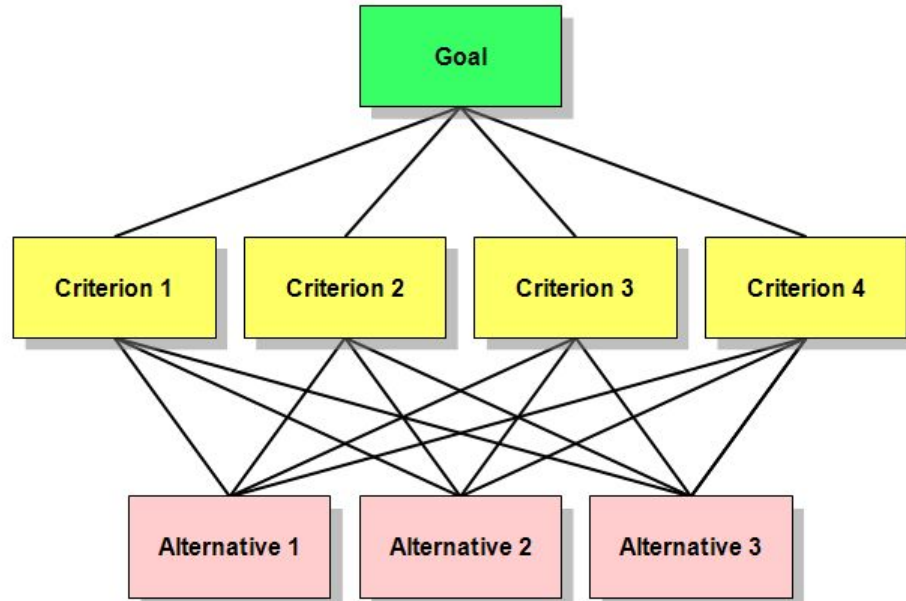
- ...

- critérios detalhados: os atributos sob os quais analisar as alternativas

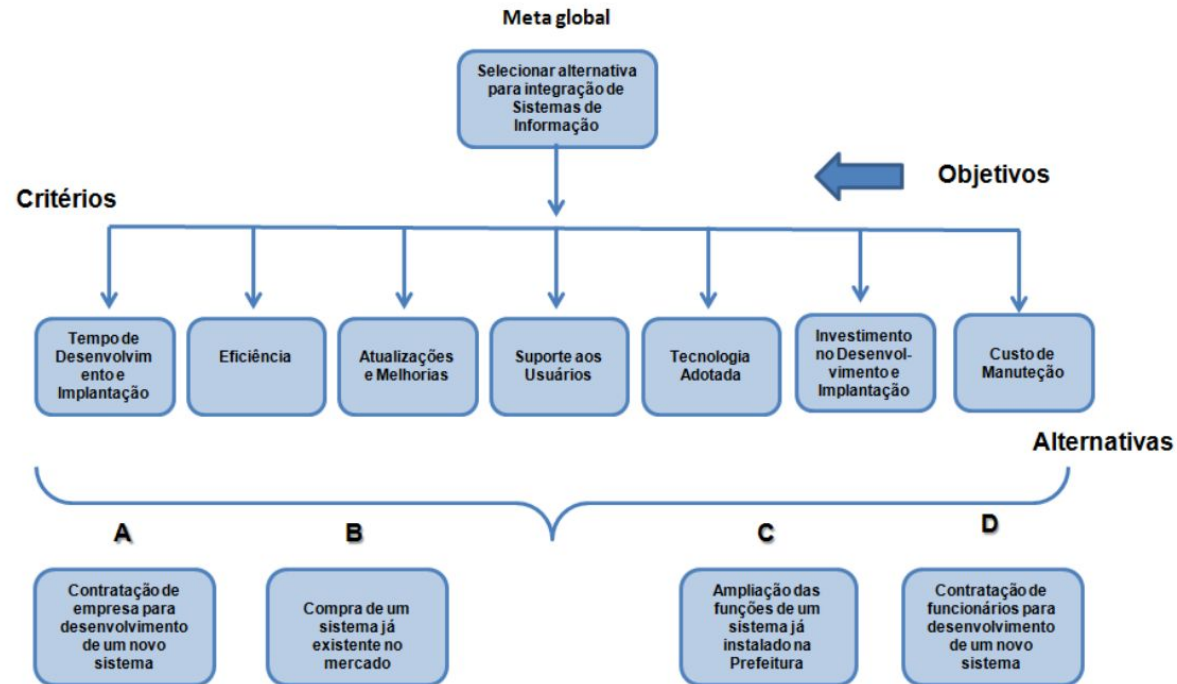
ponderação entre critérios estabelecida por  
comparação aos pares

graus de satisfação das alternativas aos atributos por  
comparação aos pares

# AHP : Analytic Hierarchy Process



# AHP : Analytic Hierarchy Process



# AHP : Analytic Hierarchy Process





## AHP Analytic Hierarchy Process: Escalas

Estudos mostraram que as comparações aos pares devem adotar uma escala de 1 a 9:

Intensidade de	Definição	Explicação
1	Mesma importância	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
2	Fraca importância	Entre igual e moderada importância.
3	Importância moderada	A experiência ou julgamento é fracamente a favor de uma atividade sobre outra.
4	Moderada para forte importância	Entre moderada e forte importância.
5	Fortemente importante	A experiência ou julgamento é fortemente a favor de uma atividade sobre outra.
6	Fortemente para muito fortemente preferível	Entre forte e muito forte importância.
7	Muito fortemente ou demonstra importância	Uma atividade é muito fortemente preferida sobre outra. A sua dominância é possível na prática.
8	Importância quase extrema	Entre muito forte e extrema importância.
9	Extrema importância	A evidência de preferência de uma atividade pode ser afirmada em sua

Escala	Avaliação	Recíproco	Comentário
Igualmente preferido	1	1	Os dois critérios contribuem igualmente para os objetivos
Moderadamente preferido	3	1/3	A experiência e o julgamento favorecem um critério levemente sobre o outro
Fortemente preferido	5	1/5	A experiência e o julgamento favorecem um critério fortemente sobre o outro
Muito fortemente preferido	7	1/7	Um critério é fortemente favorecido em relação a outro e pode ser demonstrado
Extremamente preferido	9	1/9	Um critério é favorecido em relação a outro com o mais alto grau de certeza
Valores intermediários	2, 4, 6 e 8	1/2; 1/4; 1/6 e 1/8	Quando o consenso não for obtido e houver necessidade de uma negociação

## AHP Analytic Hierarchy Process: Escalas

Valor numérico	Significado na determinação dos Pesos	Significado na determinação dos Graus
9	Critério A é extremamente preferível ao critério B, na consecução do critério hierarquicamente acima.	Em relação ao atributo em análise, o Projeto P tem grau de satisfação extremamente melhor que o do Projeto Q
...	...	...
1	Indiferente	Igual

## AHP Analytic Hierarchy Process: Escalas

Uma possível prática metodológica seria pedir para cada um dos (k) participantes preencher tabelas.

Escala da preferência dos usuários										
Atributo-base	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Atributo
Disponibilidade infraestrutura										operabilidade e confiabilidade
Disponibilidade infraestrutura										hidrografia e solo
operabilidade e confiabilidade										hidrografia e solo

Indique, a cada par de atributos constantes na Tabela o de sua maior preferência, de acordo com a escala de preferências.

Registro das preferências  
par-a-par dos analistas para os  
critérios  
do nível da hierarquia h

Escala da preferência dos especialistas											
critério-base	9	7	5	3	1	3	5	7	9	critério	$A_{i,j}$
$c_1$										$c_2$	$a_{1,2}$
$c_1$										$c_3$	$a_{1,3}$
$c_1$										$\vdots$	
$c_1$										$c_i$	$a_{1,i}$
$c_1$										$\vdots$	
$c_1$										$c_{n-1}$	$a_{1,n-1}$
$c_1$										$c_n$	$a_{1,n}$
$c_2$										$c_3$	$a_{2,3}$
$c_2$										$\vdots$	$\vdots$
$c_2$										$c_i$	$a_{2,i}$
$c_2$										$\vdots$	$\vdots$
$c_2$										$c_{n-1}$	$a_{2,n-1}$
$c_2$										$c_n$	$a_{2,n}$
$c_3$										$c_i$	$a_{3,i}$
$c_3$										$\vdots$	$\vdots$
$c_3$										$c_{n-1}$	$a_{3,n-1}$
$c_3$										$c_n$	$a_{3,n}$
$c_i$										$c_{n-1}$	$a_{i,n-1}$
$c_i$										$c_n$	$a_{i,n}$
$c_{n-1}$										$c_n$	$a_{n-1,n}$

Neste ponto, apenas os coeficientes  $a_{ij}$  acima da diagonal principal da matriz  $A$  são preenchidos, tendo como referência a Tabela.

A :

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_i$	$\dots$	$c_{n-1}$	$c_n$
$c_1$	<b>1</b>	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\dots$	$a_{1,i}$	$\dots$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$c_2$		<b>1</b>	$a_{2,3}$	$\dots$	$a_{2,i}$	$\dots$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$c_3$			<b>1</b>	$\dots$	$a_{3,i}$	$\dots$	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$
$\vdots$				<b>1</b>	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_i$					<b>1</b>	$\dots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$
$\vdots$						<b>1</b>	$\vdots$	$\vdots$
$c_{n-1}$							<b>1</b>	$a_{n-1,n}$
$c_n$								<b>1</b>

Na sequência é realizado o preenchimento dos coeficientes  $a_{ij}$ , abaixo da diagonal principal da **matriz de decisão A**, atribuindo o valor  $a_{ij} = 1/a_{ji}$

$$A = \begin{array}{c|ccccccccc} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_i & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ \hline c_1 & \mathbf{1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ c_2 & \frac{1}{a_{1,2}} & \mathbf{1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ c_3 & \frac{1}{a_{1,3}} & \frac{1}{a_{2,3}} & \mathbf{1} & \cdots & a_{3,i} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{1} & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_i & \frac{1}{a_{1,i}} & \frac{1}{a_{2,i}} & \frac{1}{a_{3,i}} & & \mathbf{1} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{1} & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \frac{1}{a_{1,n-1}} & \frac{1}{a_{2,n-1}} & \frac{1}{a_{3,n-1}} & \cdots & \frac{1}{a_{i,n-1}} & \cdots & \mathbf{1} & a_{n-1,n} \\ c_n & \frac{1}{a_{1,n}} & \frac{1}{a_{2,n}} & \frac{1}{a_{3,n}} & \cdots & \frac{1}{a_{i,n}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1,n}} & \mathbf{1} \end{array}$$

A matriz de decisão é sempre uma matriz quadrada, recíproca e positiva.

## Cálculo das Prioridades

A compreensão fundamental desta etapa considera que, se o analista soubesse os **pesos relativos** de cada um dos critérios de uma matriz de  $n$  elementos, então a **matriz de comparação dos pares** deveria ser equivalente a  $A$ , em que:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

Supondo que  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  são estimativas precisas, todos os elementos da matriz são consistentes:

\*  $(w_i/w_j)$ : importância relativa dos elementos da linha de ordem  $i$  em relação aos elementos da coluna de ordem  $j$ .

\*  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ : os pesos numéricos que refletirão os julgamentos registrados.

## Cálculo das Prioridades

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

A representação dos pesos relativos  $w_i/w_j$  é eficiente para mostrar a dominância do julgamento de uma alternativa em relação a outra, e é muito usual na literatura. Se o tomador de decisão, por exemplo, afirma que a alternativa 1 é moderadamente melhor do que a alternativa 2 (nota 3 na escala), o elemento  $a_{12}$  da matriz vale 3/1, isto é,  $w_1 = 3$  e  $w_2 = 1$ . E também se sabe que o elemento  $a_{21}$  vale 1/3.



## Cálculo das Prioridades

$$A = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ w_1 & w_2 & & w_n \end{pmatrix}$$

Para  $w_i$  o peso relativo do critério  $i$ . Nesse caso, os pesos relativos podem ser facilmente obtidos de qualquer uma das  $n$  linhas de  $A$  porque  $Aw = nw$  para  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ .

$$Aw = nw$$

Cada entrada da matriz de comparação,  $a_{ij}$ , deve ser considerada como uma estimativa da razão entre os elementos da linha de ordem  $i$  e os elementos da coluna de ordem  $j$ , isto é,  $a_{ij} = w_i / w_j$

## Cálculo das Prioridades

Uma matriz quase consistente  $A = (a_{ij})$  é uma pequena perturbação multiplicativa de uma matriz consistente  $W = (w_i/w_j)$ .

A utilização da representação  $Ax = cx$  significaria que estamos falando de matrizes quase consistentes, que um autovetor  $x$ , que é uma pequena perturbação do autovetor  $w$  da matriz consistente.

## Solução exata usando autovalores e autovetores

É frequente se ver na literatura a relação  $Ax = cx$  do cálculo do autovetor e do autovalor representada por  $Aw = \lambda_{max}w$ , onde  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  é o autovetor principal e  $\lambda_{max}$  é o autovalor máximo correspondente.

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \lambda_{max} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$$

No caso ideal, todos os autovalores são zero, exceto um, que é  $\lambda$ .

## Solução exata usando autovalores e autovetores

**Método Autovetor Direito:** pode-se calcular o autovalor e o autovetor de qualquer matriz por dois métodos: algébrico e numérico. O cálculo algébrico é efetuado a partir da equação característica da matriz. A equação característica da matriz de decisão  $M$  é a seguinte

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad \rightarrow$$

$$\text{Det}(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 6 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(M - \lambda I) &= [(1-\lambda)^3 + 1 + 1] - [(1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda)] = \\ &= [1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2] - [3 - 3\lambda] = \\ &= [3\lambda^2 - \lambda^3] = 0. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$  e  $\lambda = 3$ , Conforme o teorema de Perron enunciado anteriormente, é necessário obter o maior autovalor ( $\lambda_{\max}$ ) que estará associado ao autovetor principal da referida matriz positiva. Portanto, o  $\lambda_{\max}$  será 3

## Solução exata usando autovalores e autovetores

$w_1 / w_1$	$w_1 / w_2$	$w_1 / w_3$	.	$w_1$	=	$\lambda w_1$
$w_2 / w_1$	$w_2 / w_2$	$w_2 / w_3$		$w_2$		$\lambda w_2$
$w_3 / w_1$	$w_3 / w_2$	$w_3 / w_3$		$w_3$		$\lambda w_3$

Neste caso,  $\lambda=3$  e não houve inconsistência. Na prática, a matriz de comparações aos pares apresenta inconsistências. Veremos exemplo.

## Exemplo: escolhendo um fornecedor

Hierarquia de critérios



## Atribuindo graus

No critério **CUSTO** *Brush Pik* é moderadamente preferível a *Cornell*  
Células da matriz são 3 e 1/3

	Cornell	Brush Pik	Picobuy
Cornell		1/3	
Brush Pik	3		
Picobuy			

## Atribuindo graus

Comparações aos pares para o critério custo

	Cornell	Brush Pik	Picobuy
Cornell	1	$\frac{1}{3}$	6
Brush Pik	3	1	7
Picobuy	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	1



## Método do autovetor: $Aw = \lambda w$

	Cornell	Brush Pik	Picobuy
Cornell	1	1/3	6
Brush Pik	3	1	7
Picobuy	1/6	1/7	1

Sabemos que para determinar o autovetor correspondente ao maior autovalor de uma matriz, podemos fazer por aproximações: Começando com  $y_0$  arbitrário, calculamos  $y_{i+1}$  multiplicando  $A$  por  $y_i$  e normalizando-o.

$y_0$	$A y_0$	$y_1$	$A y_1$	$y_2$	$A y_2$	$y_{i+1}$	$A y_i$	$y_{i+1}$	$A y_i$	$y_{i+1}$	$A y_i$	$y_{i+1}$	$A y_i$	$y_{i+1}$	$A y_i$	$w$	lambda
1	7,333	0,373	0,960	0,290	0,883	0,290	0,906	0,293	0,908	0,293	0,907	0,293	0,907	0,293	0,907	<b>0,293</b>	3,100
1	11,000	0,560	2,147	0,647	1,957	0,643	1,982	0,640	1,987	0,641	1,986	0,641	1,986	0,641	1,986	<b>0,641</b>	3,100
1	1,310	0,067	0,209	0,063	0,204	0,067	0,207	0,067	0,207	0,067	0,207	0,067	0,207	0,067	0,207	<b>0,067</b>	3,100

## Método do autovetor: $Aw = \lambda w$

**w**

**0,293**

**0,641**

**0,067**

Verificando se esses valores condizem com a matriz ( $w_i/w_j$ ):

<b>,293 / ,293</b>	<b>,293 / ,641</b>	<b>,293 / ,067</b>	<b>=</b>	<b>1,0</b>	<b>0,5</b>	<b>4,4</b>
<b>,641 / ,293</b>	<b>,641 / ,641</b>	<b>,641 / ,067</b>		<b>2,2</b>	<b>1,0</b>	<b>9,6</b>
<b>,067 / ,293</b>	<b>,067 / ,641</b>	<b>,067 / ,067</b>		<b>0,2</b>	<b>0,1</b>	<b>1,0</b>

A matriz de comparações original (ao lado) difere um pouco da que resulta do autovetor, pois havia inconsistência.

<b>1</b>	<b>1/3</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>1</b>	<b>7</b>
<b>1/6</b>	<b>1/7</b>	<b>1</b>

## Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

Para testar o resultado do processo, é necessário conhecer se há consistência na comparação pareada realizada. Segundo a teoria de Saaty isto vai indicar se os dados estão logicamente relacionados.

## Índice de Consistência aleatória (RI)

É necessário ainda consultar o índice de inconsistência aleatória RI , que é o mesmo índice de inconsistência calculado em uma matriz gerada aleatoriamente na escala de julgamentos de 1 a 9, com os valores recíprocos calculados de modo a forçar sua consistência.

n	IR
2	0,00
3	0,58
4	0,90
5	1,12
6	1,24
7	1,32
8	1,41

## Razão de inconsistência CR

É o CR que mede a inconsistência dos julgamentos de uma matriz, e tem como valor aceitável até 0,10 no caso de cinco ou mais alternativas, 0,08 para quatro elementos e 0,05 para três elementos. Quando  $CR = 0$ , a matriz é dita absolutamente consistente

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

## Verificando consistência

O autovalor máximo deveria ser  $\lambda=n$  (onde  $n$  é a ordem da matriz), No caso  $\max = 3.10$ .

Índice de Inconsistência proposto por Saaty:  $CI = (\max - n)/(n - 1) = (3.10 - 3)/2 = .05$

Índice de Inconsistência de matrizes aleatórios:  $RI = .58$  (para matrizes de ordem 3)

Percentual de inconsistência:  $CR = CI / RI = .05/.58 = 9\%$

Percentual de inconsistência menor que 10% é muito bom.

## Exemplo: escolhendo um fornecedor

Hierarquia de critérios



## Exemplo: escolhendo um fornecedor

Cornell Brush Pik Picobuy

Cornell	1	1/3	6
Brush Pik	3	1	7
Picobuy	1/6	1/7	1

W

0,293

0,641

0,067

CUSTO

$$CR = CI / RI = .05 / .58 = 9\%$$



## Exemplo: escolhendo um fornecedor

Cornell Brush Pik Picobuy

Cornell	1	7	2
Brush Pik	1/7	1	5
Picobuy	1/2	1/5	1

Confiabilidade

Cornell:  $\begin{bmatrix} .63 \\ .24 \\ .13 \end{bmatrix}$   
Brush Pik:  
Picobuy:

Inconsistência:

Ruim: 52% deveria rever as comparações

## Exemplo: escolhendo um fornecedor

	Cornell	Brush Pik	Picobuy
Cornell	1	8	1
Brush Pik	1/8	1	1/8
Picobuy	1	8	1

Prazo de Entrega

Cornell:  $\begin{bmatrix} .471 \\ .059 \\ .471 \end{bmatrix}$   
Brush Pik:  
Picobuy:

**Inconsistência:**  
• verificada: 0%

## Importância Relativa dos Critérios

Também para avaliar as importâncias dos critérios, novamente se usa matriz de comparações aos pares:

	Custo	Confiabil.	Prazo
Custo	1	7	9
Confiabil.	1/7	1	7
Prazo	1/9	1/7	1

$$\begin{array}{l} \text{Custo:} \\ \text{Confiabil.:} \\ \text{Prazo:} \end{array} \begin{bmatrix} .729 \\ .216 \\ .055 \end{bmatrix}$$

## Ponderando

Scores são obtidos ponderando graus pela importância dos respectivos critérios

Pesos dos critérios

[ .729      .216      .055 ]

Graus nos critérios

Cust

Conf.

Prazo

Cornell

.298

.571

.471

Brush Pik

.632

.278

.059

Picobuy

.069

.151

.471

## Prioridade

Scores são obtidos ponderando graus pela importância dos respectivos critérios

$$\text{Cornell: } (.729)(.298) + (.216)(.571) + (.055)(.471) = .366$$

$$\text{Brush Pik: } (.729)(.632) + (.216)(.278) + (.055)(.059) = .524$$

$$\text{Picobuy: } (.729)(.069) + (.216)(.151) + (.055)(.471) = .109$$

## Comentários Finais

- Número de níveis hierárquicos: use de 1 a 3.
- Se um critério aparentemente for mais que 9 vezes mais importante que outro, é porque deveria estar acima na hierarquia de critérios.
- Metodologia serve para critérios qualitativos e quantitativos. Quando as alternativas têm medidas conhecidas em um critério (por exemplo, o valor a investir no projeto, ou a área de um terreno) pode-se usar essas medidas, mas provavelmente seja melhor aplicar uma curva de utilidade antes de usar o AHP.
- Se critérios e alternativas apresentam influências que não podem ser representadas numa árvore: use ANP (Analytic Network Process)