Atividade 05 - Teorema de Stokes Data: 17/06/25

Aluno: marcelo Augusto de Barros Araújo. professor: marcos maia.
instituição: UABJ. curso: Engenharia da Computação.
disciplina: cálculo 3.

$F(x,y,z) = (z^2, y^2, x^2)$

Vamos verificar o $rot(\vec{F})$:

$$rot(\vec{F}) = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z^2 & y^2 & x^2 & z^2 & y^2 \end{array} \right.$$

$$= \vec{i}(0-0) + \vec{j}(2z-2x) + \vec{k}(0-0) \Rightarrow rot(\vec{F}) = (0, 2z-2x, 0)$$

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F})\, dS, \quad dS = \vec{n}\, dA = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dA$$

$r(u,v)$ é a Parametrização da Superfície

nesse caso a superfície S será a região interna do triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ que neste caso, encontra-se no plano.

$$x + y + z = 1$$

Parametrização

$$\vec{r}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \quad , \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{array}$$

$\vec{r}_u = (1, 0, -1)$, $\vec{r}_v = (0, 1, -1)$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \boxed{(1,1,1)}$$

Parametrizando a superfície S com uma projeção no plano xy temos: $z = 1 - x - y$

Agora calculamos $rot(\vec{F}(\vec{r})) \cdot \vec{n}$

$$(0, 2z-2x, 0) \cdot (1,1,1) = 2z - 2x \rightarrow \text{substitui } z = 1 - x - y$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (1 - x - y) - 2x = 2 - 2x - 2y - 2x$$
$$= 2 - 4x - 2y$$

$x = u$
$y = v$

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-u} (2 - 4u - 2v) \, dv \right] du$$

$$= \int_0^1 \left[2v - 4uv - \frac{\cancel{2} v^2}{\cancel{2}} \right] \Bigg|_{v=0}^{v=1-u}$$

$$du = 2 \cdot (1-u) - 4u \cdot (1-u) - (1-u)^2$$

$$= 2 - \cancel{2u} - 4u + 4u^2 - 1 + \cancel{2u} - u^2$$

$$= 1 - 4u + 3u^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - 4u + 3u^2) \, du = u - \frac{\cancel{4}^2 u^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3} u^3}{\cancel{3}} \Bigg|_{u=0}^{u=1}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cdot (1)^2 + 1^3 = 1 - 2 + 1 = \boxed{0}$$

Portanto, o trabalho realizado pelo campo de vetores ao longo da curva C é 0.