23/06/25

Atividade 06 - Integração Numérica

Aluno: marcelo augusto de barros araújo. Professor: marcos maia.
instituição: UABJ. curso: Engenharia da computação.
disciplina: cálculo numérico.

1º) use a expressão do erro máximo da Regra dos trapézios para determinar o número mínimo m de sub-intervalos que garante a precisão desejada. calcule a integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ com erro absoluto menor que $\frac{1}{6} \cdot 10^{-4}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}[e^{-x^2}] = e^{-x^2} \cdot (-2x) \Rightarrow -2xe^{-x^2}$ Primeira derivada

$f''(x) = \frac{d}{dx}[-2xe^{-x^2}] = -2 \cdot \frac{d}{dx}[xe^{-x^2}]$

$\frac{d}{dx}[xe^{-x^2}] = e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$f''(x) = -2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$ Segunda derivada

$f'''(x) = \frac{d}{dx}[(4x^2-2)e^{-x^2}]$

$= (8x) \cdot e^{-x^2} + (4x^2-2) \cdot (-2xe^{-x^2})$

$= e^{-x^2}[8x - 2x(4x^2-2)]$

$= e^{-x^2}[8x - 8x^3 + 4x]$

$= e^{-x^2}(12x - 8x^3)$

$= 4xe^{-x^2}(3-2x^2)$ terceira derivada

Aplicando terceira derivada em $f''(x)$ nos pontos críticos que seram encontrados $e^{-x^2} \neq 0$

$f'''(x) = 4x(3-2x^2) = \boxed{0}$

$3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Extremidades dos pontos críticos no intervalo $[0,1]$

$M = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = (4(0)^2 - 2)e^0 = 2 \quad |f''(0)| = 2$

$f''(1) = (4(1)^2 - 2)e^{-1} = (4-2)e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0,7357$

FORONI

23/06/25

$h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ Agora determinar $n$:

$\text{Erro} \leq n \cdot \frac{h^3}{12} \cdot M \leq \frac{1}{6} \cdot 10^{-4} \Rightarrow \frac{1^3}{12n^2} \cdot 2 \leq \frac{1}{6} \cdot 10^{-4}$

$$\frac{2}{12n^2} \leq \frac{1}{6 \cdot 10^4} \Rightarrow \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{6 \cdot 10^4}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{10^4} \Rightarrow n^2 \geq 10^4 \Rightarrow n \geq \sqrt{10^4} = 100$$

$n \geq 100$ É o menor valor de $n$ que garante o erro exigido.

Obs: como $f'''(x)$ é o produto de termos não negativos em $[0,1]$, temos que $f'''(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. ou seja é sempre positivo, crescente neste intervalo.