Visualizando $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

Marcelo Lynch

Sabiendo que $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ y $c = 2^{\aleph_0}$, es inmediato ver que

$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

. Otra manera de escribir esto es:

$$(0,1)^{\mathbb{N}} \sim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim (0,1)$$

Es ilustrativo[1] ver una manera "natural" de relacionar los elementos de estos conjuntos para convencerse de que de alguna manera "son lo mismo", y es lo que vamos a hacer **(informalmente)** a continuación. La idea va a ser mostrar como **un elemento particular** del conjunto $(0,1)^{\mathbb{N}}$ *"puede pensarse como"* un elemento de cualquiera de los otros conjuntos.

Partimos entonces de un elemento $a \in (0,1)^{\mathbb{N}}$. Esta a es una función de $\mathbb{N}$ al intervalo $(0,1)$, es decir una sucesión de numeros reales de ese intervalo. O sea que a es una *lista infinita de numeros reales* $a_0, a_1, a_2, \cdots$. Si escribimos cada uno de estos números en binario (y supongamos, en la escritura sin colas de 1), podemos hacer una lista con todos los elementos uno abajo del otro así:

$$\begin{array}{c}
0, a_0^0\ a_0^1\ a_0^2\ a_0^3\ a_0^4\ \cdots \\
0, a_1^0\ a_0^1\ a_1^2\ a_1^3\ a_1^4\ \cdots \\
0, a_2^0\ a_0^1\ a_2^2\ a_2^3\ a_2^4\ \cdots \\
0, a_3^0\ a_0^1\ a_3^2\ a_3^3\ a_3^4\ \cdots \\
0, a_4^0\ a_0^1\ a_4^2\ a_4^3\ a_4^4\ \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Donde a_i^j es el j-ésimo dígito (despues de la coma) del numero a_i, y siempre es 0 o 1.

Estos números siempre se van a poder escribir como "cero coma algo", porque están en $(0,1)$, entonces podemos ahorrarnos escribir eso y solamente identificar a cada numero con la parte después de la coma. Si además numeramos cada fila con un número natural, y "separamos los dígitos", nos queda:

$$\begin{array}{l}
0 \to a_0^0,\ a_0^1,\ a_0^2,\ a_0^3,\ a_0^4,\ \cdots \\
1 \to a_1^0,\ a_0^1,\ a_1^2,\ a_1^3,\ a_1^4,\ \cdots \\
2 \to a_2^0,\ a_0^1,\ a_2^2,\ a_2^3,\ a_2^4,\ \cdots \\
3 \to a_3^0,\ a_0^1,\ a_3^2,\ a_3^3,\ a_3^4,\ \cdots \\
4 \to a_4^0,\ a_0^1,\ a_4^2,\ a_4^3,\ a_4^4,\ \cdots \\
\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\ \vdots\ \vdots
\end{array}$$

¡Momento! A cada número natural (el numero de la fila) le podemos asignar una lista infinita de dígitos 0 y 1. Pero eso es lo mismo que asignarle una sucesión de 0 y 1 a cada numero natural: ¡este dibujo es el de una función $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$! Entonces otra manera de "distribuir" la información de a es en un elemento de $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Pero podemos ir más allá: en vez de solamente ponerle número a las filas, podemos también numerar las columnas:

[1]En el fondo no vamos a estar haciendo nada nuevo, únicamente "componer" las demostraciones individuales de $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ y $c = 2^{\aleph_0}$, pero quizás es interesante verlo en un ejemplo concreto

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\cdots & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & \to & a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & a_0^3 & a_0^4 & \cdots \\
1 & \to & a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \cdots \\
2 & \to & a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \cdots \\
3 & \to & a_3^0 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & \cdots \\
4 & \to & a_4^0 & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & \cdots \\
\vdots & & & & \vdots\,\vdots\,\vdots & & &
\end{array}
$$

Y entonces podemos pensar este dibujo como una asignación de 0 o 1 a cada coordenada (i, j) donde i es la fila y j la columna: pero esto es precisamente una función $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, o sea un elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

Ahora, ¿cómo hacemos para transformar esto en una única sucesión de ceros y unos (o sea, un elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$? El truco está en recorrer la "cuadrícula" de manera tal de no perdernos ninguno, y asi armar la sucesión individual:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\cdots & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & \to & a_0^0 & a_0^1 & a_0^2 & a_0^3 & a_0^4 & \cdots \\
1 & \to & a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \cdots \\
2 & \to & a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \cdots \\
3 & \to & a_3^0 & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & \cdots \\
4 & \to & a_4^0 & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & \cdots \\
\vdots & & & & \vdots\,\vdots\,\vdots & & &
\end{array}
$$

Haciendo este zigzag podemos ir **recorriendo todos los dígitos sin saltearnos ninguno**. Con este recorrido podemos armar la sucesión:

$$a_0^0,\ a_1^0,\ a_0^1,\ a_0^2,\ a_1^1,\ a_2^0,\ \cdots$$

¡Y ya está! Toda la tabla de infinitas filas e infinitas columnas nos queda condensada *en una sola sucesión* de ceros y unos. Por como elegimos la representacion de los números al principio, esta sucesión tampoco tendrá colas de 1. Notemos que dada una de estas sucesiones podemos reconstruir la tabla, si la arrancamos vacía y vamos llenando los espacios mientras recorremos con el mismo zig-zag, es decir, no se pierde información.

Finalmente, la manera de transformar esta sucesión en un único número real es usando los elementos como dígitos en la representación binaria (sin colas de 1) del número:

$$x = 0, a_0^0\ a_1^0\ a_0^1\ a_0^2\ a_1^1\ a_2^0\ \cdots$$

<u>**Observación**</u>: Cada una de estas operaciones que fuimos haciendo puede pensarse como una función que lleva un elemento de un conjunto a un elemento del siguiente. Como estuvimos forzados a eliminar representaciones al principio, estas construcciones no constituyen biyecciones, o sea, hay algunos elementos de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ que no podríamos construir cuando hacemos el primer paso desde $(0, 1)^{\mathbb{N}}$. Pero sí son inyecciones, porque todas las construcciones son reversibles.