Buscando modelos de Algebra de relaciones con SAT: una axiomatización para álgebras de relaciones finitas

Ejemplo: orden total no acotado

Modelado en Alloy

Se puede modelar el hecho de que R es un orden total sin un maximo en Alloy utilizando formulas que versan solo sobre la relacion R, la identidad y la relación universal (Top). Obviamente Alloy no encuentra un modelo pues no hay modelos finitos.

```
sig A {
 R: set A
}

fun Top[] : set A->A { A->A }
fun Dom[r: set A->A] : set A->A { r.~r & iden }

-- Orden total
fact { iden in R } -- Reflexiva
fact { R & ~R in iden } -- Antimetrica
fact { R.R in R } -- Transitiva
fact { ~R + R = Top[] } -- Total

-- Predicado: "no hay maximo"
run { no iden - Dom[R - iden] } -- No encuentra ejemplos
```

Traduciendo las fórmulas a la lógica proposicional interpretada como algebra de relaciones

En lo que sigue:

- At denota al conjunto finito de átomos.
- Si i es un átomo y R una relación, $p_{i,R}$ es una variable proposicional que se puede leer $i \in R$
- Si a, b, c son átomos $c_{a,b,c}$ es una variable proposicional que se puede leer $a; b \geq c$
- La relación Id siempre existe como la identidad (en los facts es $iden$)
- Top es la relacion universal
- Podemos indicar $i \in\sim R$ con $p_{\sim i,R}$

Las fórmulas que se presentan intentan de estar lo más cerca a lo que se podría generar automáticamente (de la forma más "naïve" posible excepto en un caso, supongo) a partir de las sentencias Alloy.

Fact. *iden* in R (reflexividad)

Fórmula.

$$\bigwedge_{i \in At} (p_{i,Id} \to p_{i,R})$$

Fact. R & $\sim R$ in *iden* (antisimetría)

Fórmula.

$$\bigwedge_{i \in At} ((p_{i,R} \wedge p_{\sim i,R}) \to p_{i,Id})$$

Fact. $R.R$ in R (transitividad)

Fórmula. En esta fórmula aparece la expresión para la composición relacional. Un problema es que este tipo de formulas (disyuncion de conjunciones) pueden explotar exponencialmente en tamaño al pasar a CNF. ¿Es aceptable usar traducciones equisatisfacibles en lugar de equivalentes?

$$\bigwedge_{i \in At} [\underbrace{(\bigvee_{j,k \in At} p_{j,R} \wedge p_{k,R} \wedge c_{jki})}_{i \in R;R} \to p_{i,R}]$$

Fact. $R+\sim R = univ$ (totalidad)

Fórmula. La formula que sigue no tiene la pinta de una 'traduccion automatica' de una formula de igualdad $R1 = R2$, pero podría uno imaginarse que se puede interpretar $R = univ$ con una semantica especial ("R es la suma de todos los atomos") que resulte en algo así:

$$\bigwedge_{i \in At} p_{i,R} \vee p_{\sim i,R}$$

Fact. no $iden - Dom(R - iden)$ ("no hay maximo para R": aquí $Dom(R) = R. \sim R$ & $iden$)

Fórmula. Esto supone que la semántica para "no R" es la conjuncion sobre todos los atomos negando su pertenencia a R.

$$\bigwedge_{i \in At} \neg(p_{i,Id} \wedge \neg \bigvee_{j,k \in At} [\underbrace{p_{j,R} \wedge \neg p_{j,Id}}_{j \in R-Id} \wedge \underbrace{p_{\sim k,R} \wedge \neg p_{\sim k,Id}}_{k \in \sim(R-Id)} \wedge c_{jki}])$$

Observaciones extras

Hay que notar que además de estas fórmulas hace falta codificar otras formulas que le den marco de algebra relacional a lo demás. Los axiomas del álgebra booleana se cumplen gratis por la forma en la que traducimos la unión e intersección a la logica. Para el operador relacional tenemos que basta con que se cumpla:

1. $x = x; Id$
2. $x; y \cdot z \neq 0 \Leftrightarrow \sim x; z \cdot y \neq 0$
3. $x; y \cdot z \neq 0 \Leftrightarrow z; \sim y \cdot x \neq 0$
4. $v; x \cdot w; y \neq 0 \Leftrightarrow \sim v; w \cdot x; \sim y \neq 0$

Para el primer axioma podemos agregar, por cada símbolo de relación R que tengamos, la fórmula:

$$\bigwedge_{i \in At} [\underbrace{(\bigvee_{j,k \in At} p_{j,R} \wedge p_{k,I} \wedge c_{jki})}_{i \in R;Id} \leftrightarrow p_{i,R}]$$

Los axiomas (2) a (4) son equivalentes a decir que para todos v, w, x, y, z **átomos**:

2.* $x; y \geq z \Leftrightarrow \sim x; z \geq y$

3.* $x; y \geq z \Leftrightarrow z; \sim y \geq x$

4.* $\exists a.(v; x \geq a \wedge w; y \geq a) \Leftrightarrow \exists a.(\sim v; w \geq a \wedge x; \sim y \geq a)$

Veamos por ejemplo que (2) es equivalente a (2*):

($\Rightarrow$) Se cumple (2) para todos los elementos del álgebra, en particular para todos los átomos. Además notemos que si a, b, c son átomos:

$$a; b \cdot c \neq 0 \Rightarrow (a; b \geq c) \vee (c \geq a; b) \Rightarrow (a; b \geq c) \vee (c = a; b) \Rightarrow (a; b \geq c)$$

.

Entonces, sean x, y, z átomos.

$$x; y \geq z \iff x; y \cdot z \neq 0 \iff \sim x; z \cdot y \neq 0 \iff \sim x; z \geq y$$

($\Leftarrow$). Sean X, Y, Z elementos cualesquiera del álgebra. $X; Y \cdot Z \neq 0$ significa, por aditividad completa, que existen átomos $x \leq X$, $y \leq Y$, $z \leq Z$ tales que $x; y \cdot z \neq 0$. Luego

$$X; Y \cdot Z \neq 0 \iff x; y \cdot z \neq 0 \iff x; y \geq z \iff \sim x; z \geq y \iff \sim x; z \cdot y \neq 0 \iff \sim X; Z \cdot Y \neq 0$$

Donde la última equivalencia sale notando (de nuevo por aditividad completa)

$$\sim X = \sum_{x \in At,\ x \leq X} \sim x$$

Estas propiedades las podemos traducir a fórmulas de la lógica proposicional en función de las variables de ciclos:

Fórmula. $x; y \geq z \Leftrightarrow \sim x; z \geq y$

$$c_{x,y,z} \leftrightarrow c_{\sim x,z,y}$$

Fórmula. $x; y \geq z \Leftrightarrow z; \sim y \geq x$

$$c_{x,y,z} \leftrightarrow c_{z,\sim y,x}$$

Fórmula. $\exists a.(v; x \geq a \wedge w; y \geq a) \Leftrightarrow \exists a.(\sim v; w \geq a \wedge x; \sim y \geq a)$

$$(\bigvee_{a \in At} (c_{v,x,a} \wedge c_{w,y,a})) \leftrightarrow (\bigvee_{a \in At} (c_{\sim v,w,a} \wedge c_{x,\sim y,a}))$$