

Algunas propiedades del álgebra de cardinales

Marcelo M. Lynch
Lógica Computacional - ITBA

Decimos que dos conjuntos A y B son coordinables si existe una función biyectiva entre ellos. Notamos $A \sim B$ (\sim es una relación de equivalencia). Decimos $\#A = \#B$ si $A \sim B$. Decimos que $\#A \leq \#B$ si existe una función $f : A \rightarrow B$ inyectiva.

En lo que sigue, A, B, C son conjuntos disjuntos dos a dos (necesitamos que sean disjuntos cuando utilizamos la unión, pero de todas formas no perdemos generalidad pidiendo esto en otros casos) y $a = \#A, b = \#B, c = \#C$.

Recordemos que con $a + b$ se denota al cardinal del conjunto $A \cup B$, con ab se denota al cardinal del conjunto $A \times B$, y con a^b el cardinal del conjunto de funciones con dominio en B y codominio en A (llamamos a este conjunto A^B).

Propiedad. $a(b + c) = ab + ac$

Demostración. Por propiedades de conjuntos, sabemos:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Luego, por la reflexividad de \sim tenemos $A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C)$. \square

Propiedad. $a^{b+c} = a^b a^c$

Demostración. Llamamos:

$$X = \{f : B \cup C \rightarrow A : f \text{ es función}\}$$

$$Y = \{(f, g) / f : B \rightarrow A \text{ es función y } g : C \rightarrow A \text{ es función}\}$$

Notemos que $\#X = a^{b+c}$ y $\#Y = a^b a^c$. Definimos entonces una biyección:

$$\begin{aligned}\Phi : X &\rightarrow Y \\ \Phi(f) &= (f|_B, f|_C)\end{aligned}$$

i. Φ es inyectiva: Sean $f, g \in X$, tenemos $\Phi(f) = \Phi(g) \Rightarrow (f|_B, f|_C) = (g|_B, g|_C)$ luego las imágenes de f y g coinciden en todo su dominio ($B \cup C$), es decir, $f = g$.

ii. Φ es sobreyectiva: Sea $(g, h) \in Y$, defino:

$$f : B \cup C \rightarrow A$$

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in B \\ h(t) & \text{si } t \in C \end{cases}$$

$f \in X$, y además $\Phi(f) = (g, h)$. Luego Φ es sobreyectiva.
Entonces Φ es biyectiva, es decir, $X \sim Y$, o sea $a^{b+c} = a^b a^c$

□

Propiedad. $(a^b)^c = a^{bc}$

Demostración. Queremos ver $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$. Recordemos que en $(A^B)^C$ tenemos funciones de $C \rightarrow \{\text{funciones } B \rightarrow A\}$, y en $A^{B \times C}$ tenemos funciones de $B \times C \rightarrow A$.

Definimos entonces la función $\Omega : A^{B \times C} \rightarrow (A^B)^C$ según:

$$\Omega(g) = f_g : C \rightarrow A^B$$

$$f_g(c) = h_{g,c} : B \rightarrow A$$

$$h_{g,c}(x) = g(x, c)$$

Para entender Ω se puede pensar que con el argumento de f_g se "fija" el segundo argumento de g (un elemento del conjunto C), y se devuelve una función $h_{g,c}$ que "fija" el primero (un elemento de B): es decir, al evaluar $h_{g,c}$ en un $x \in B$ se está evaluando la función g que es parámetro de Ω , con el elemento c como segundo parámetro, y el elemento x como primer parámetro.

Probemos la inyectividad de Ω mostrando que si $\alpha, \beta \in A^{B \times C}$ con $\alpha \neq \beta$ entonces $\Omega(\alpha) \neq \Omega(\beta)$. Si $\alpha \neq \beta$, por la definición de igualdad de funciones debe existir un elemento $(b_0, c_0) \in B \times C$ tal que $\alpha(b_0, c_0) \neq \beta(b_0, c_0)$.

Pero por como definimos Ω , tenemos $\alpha(b_0, c_0) = \Omega(\alpha)(c_0)(b_0)$ (¿se ve que primero se fija c_0 y luego b_0 , evaluando α con esos parámetros?) y $\beta(b_0, c_0) = \Omega(\beta)(c_0)(b_0)$.

Pero así $\Omega(\alpha)(c_0)(b_0) \neq \Omega(\beta)(c_0)(b_0)$ es decir, $h_{\alpha, c_0}(b_0) \neq h_{\beta, c_0}(b_0)$

Entonces, por igualdad de funciones: $h_{\alpha, c_0} \neq h_{\beta, c_0}$ (ya que difieren en b_0).

Pero $h_{\alpha, c_0} = f_{\alpha}(c_0)$, y $h_{\beta, c_0} = f_{\beta}(c_0)$, luego, de la misma manera, por igualdad de funciones es $f_{\alpha} \neq f_{\beta}$.

Como $\Omega(\alpha) = f_{\alpha}$ y $\Omega(\beta) = f_{\beta}$, entonces $\Omega(\alpha) \neq \Omega(\beta)$, que era lo que queríamos

ver. Luego Ω es inyectiva.

Veamos que Ω es sobreyectiva. Sea $\gamma \in (A^B)^C$, definimos $g : B \times C \rightarrow A : g(b, c) = \gamma(c)(b)$. Para cualquier $c_0 \in C$, dado cualquier $b_0 \in B$ es $\Omega(g)(c_0)(b_0) = g(b_0, c_0) = \gamma(c_0)(b_0) \Rightarrow \Omega(g)(c) = \gamma(c) \forall c \in C$, luego $\Omega(g) = \gamma$. Concluimos que Ω es sobreyectiva.

Entonces Ω es biyectiva y así $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$.

□

Propiedad. $b \leq c \Rightarrow b^a \leq c^a$

Demostración. Como $b \leq c$ existe $g : B \rightarrow C$ inyectiva. Definimos $\Psi : B^A \rightarrow C^A$ según:

$$\begin{aligned}\Psi(f) &= g \circ f : A \rightarrow C \\ g \circ f(x) &= g(f(x))\end{aligned}$$

Queremos ver que Ψ es inyectiva: $\Psi(f_1) = \Psi(f_2) \Rightarrow g(f_1(x)) = g(f_2(x))$, $\forall x \in A$. Como g es inyectiva, esto implica $f_1(x) = f_2(x)$. Como esto se cumple para cualquier $x \in A$, tenemos $f_1 = f_2$. Luego Ψ es inyectiva, y $b^a \leq c^a$. □

Propiedad. $b \leq c \Rightarrow a^b \leq a^c$

Demostración. Como $b \leq c$ existe $g : B \rightarrow C$ inyectiva. Definimos $f : B \rightarrow \text{Im}(g) / f(x) = g(x)$. La función f es biyectiva, por como esta definida (ya que g es inyectiva, y porque siendo el codominio la imagen de g se garantiza la sobreyectividad), luego existe $f^{-1} : \text{Im}(g) \rightarrow B$. Definimos $\Psi : A^B \rightarrow A^C$ según:

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) &= h : C \rightarrow A \\ h(x) &= \begin{cases} \gamma \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{Im}(g) \\ a_0 \in A & \text{si } x \notin \text{Im}(g) \end{cases}\end{aligned}$$

Donde a_0 es un elemento fijo cualquiera de A .

Veamos que Ψ es inyectiva. Tomemos $\alpha, \beta \in A^B$. Si $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$, por igualdad de funciones tenemos que $\forall x \in C$ se cumple $\Psi(\alpha)(x) = \Psi(\beta)(x)$.

En particular, $\forall x \in \text{Im}(g)$, $\alpha \circ f^{-1}(x) = \beta \circ f^{-1}(x)$, con $x = f(y)$ para algún $y \in B$ por ser x parte de la imagen de g . (Notemos que todo $x \in \text{Im}(g)$ tiene un único $y \in B$ tal que $x = f(y)$ por ser f biyectiva, y que existe $f(y)$ para todo $y \in B$ por ser f función).

Luego $\forall y \in B$, $\alpha(f^{-1}(f(y))) = \beta(f^{-1}(f(y))) \Rightarrow \forall y \in B$, $\alpha(y) = \beta(y) \Rightarrow \alpha = \beta$, por igualdad de funciones. Luego Ψ es inyectiva, y así $a^b \leq a^c$. □

Propiedad. $\boxed{b \leq c \Rightarrow ab \leq ac}$

Demostración. Como $b \leq c$ existe $g : B \rightarrow C$ inyectiva.

Definimos $f : A \times B \rightarrow A \times C / f(x, y) = (x, g(y))$

f es inyectiva: $f(x, y) = f(z, w) \Rightarrow (x, g(y)) = (z, g(w)) \Rightarrow x = z \wedge g(y) = g(w) \Rightarrow x = z \wedge y = w$, por ser g inyectiva. Entonces $(x, y) = (z, w)$.
Entonces f es inyectiva, y probamos $ab \leq ac$

□

Propiedad. $\boxed{(ab)^c = a^c b^c}$

Demostración. Definimos $\Phi : A^C \times B^C \rightarrow (A \times B)^C$ según:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha, \beta) &= \gamma : C \rightarrow A \times B \\ \gamma(x) &= (\alpha(x), \beta(x))\end{aligned}$$

Vemos la inyectividad de Φ :

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi(\beta_1, \beta_2) \Rightarrow \forall x \in C, (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\beta_1(x), \beta_2(x)) \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2).$$

Veamos la sobreyectividad de Φ :

Sea $\gamma \in (A \times B)^C$, tenemos $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$. Definimos $f : C \rightarrow A / f(x) = \gamma_1(x)$ y $g : C \rightarrow B / g(x) = \gamma_2(x)$.

$(f, g) \in A^C \times B^C$, y $\Phi(f, g) = \gamma$. Por lo tanto Φ es sobreyectiva.

Luego Φ es biyectiva y $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$, o sea $a^c b^c = (ab)^c$.

□