CMP562 - Fundamentos Matemáticos para Processamento Gráfico

Aula Prática 2

1. Dada uma nuvem de pontos 3D que estão aproximadamente em um plano que passa pela origem, se pode estimar a equação do plano através da PCA. Mais precisamente, calcula-se a matriz de covariância C a partir da nuvem, e o vetor principal associado à menor variância aproxima o vetor normal ao plano (tente entender bem isso). O código abaixo gera uma nuvem de pontos 3D aproximadamente planar (o parâmetro `no` introduz algum ruído), e armazena na variável `data`.

```
no = 1; % ruido
% vetores base do plano
u1 = [3;2;1];
u2 = [2;1;5];
data = [];
for i = 1:1000, % gera 1000 pontos
    c1 = 10*randn();
    c2 = 10*randn();
    y = c1*u1 + c2*u2 + no*randn(3,1); % gera vetor "aproximadamente" no plano
    data = [data; y']; % gera array n x 1000 com a nuvem de pontos
end
plot3(data(:,1), data(:,2), data(:,3),'.'); % plota a nuvem
```

a) Calcule a matriz de covariância da nuvem de pontos, e estime o vetor normal ao plano

b) Calcule o vetor normal ao plano exato (a partir dos vetores base `u1` e `u2`), e compare com o vetor estimado no item anterior

c) Refaça o exercício para valores maiores de `no`

2. Considere a seguinte função em MATLAB para realizar a decomposição RQ de uma matriz (obtida de `http://www.mathworks.com/matlabcentral/newsreader/view_thread/237007`).

```
function [R Q]=rq(A)
% function [R Q]=rq(A)
% A [m x n] with m<=n
% return R [m x n] triangular and
% Q [n x n] unitary (i.e., Q'*Q=I)
% such that A=R*Q
% Author: Bruno Luong
% Last Update: 04/Oct/2008

[m n]=size(A);
if m>n
    error('RQ: Number of rows must be smaller than column');
end

[Q R]=qr(flipud(A).');
R=flipud(R.');
R(:,1:m)=R(:,m:-1:1);
Q=Q.';
Q(1:m,:)=Q(m:-1:1,:);
```

a) Teste a função e verifique sua validade

b) Relacione os comandos usados na função com as multiplicações por matrizes de permutação, conforme o exercício 7 da lista 5.

3. Considere a equação $2x + e^{-x} - 2 = 0$, que possui ao menos uma raiz real r_1 no intervalo $I_1 = (-2, -1)$, e ao menos uma raiz real r_2 no intervalo $I_2 = (0, 1)$.

a) Ache uma recursão da forma $x_{n+1} = g(x_n)$ que convirja garantidamente para cada uma das raízes (possivelmente uma recursão para cada raíz).

b) Monte a recursão de Newton-Raphson para a equação acima, e rode com as mesmas aproximações iniciais usadas no item (a). Compare a velocidade de convergência.