Lista 7 - Equações Diferenciais Ordinárias

1. Decida sobre existência/unicidade dos Problemas de Valor Inicial (PVI) abaixo usando o Teorema de Picard:

a) $\begin{cases} y' = 2x^2/y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |t|e^x \\ x(0) = 3 \end{cases}$

2. Ache a solução geral das EDOs abaixo:

a) $3xy' = 1 + y^2$ b) $3\cos x dx - y dy = 0$ c) $y' = 3xe^{x+y}$

3. Uma **equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes de ordem** n é aquela que pode ser escrita na forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad \text{com } a_n \neq 0, \tag{1}$$

e a **equação linear homogênea associada** é

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2}$$

a) Mostre que se y_1 e y_2 são soluções de (2), então $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução de (2), para quaisquer constantes c_1 e c_2.

b) Mostre que se λ é raiz do **polinômio característico** $p(r)$ dado por

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0,$$

então $y = e^{\lambda x}$ é solução de (2).

c) Usando os itens (a) e (b), mostre que se $\lambda = \alpha + i\beta$ é raiz complexa do polinômio característico, então $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ são soluções de (2).

d) Mostre que se y_p é solução de (1) e y_h é solução de (2), então $y = y_p + y_h$ também é solução de (1).

4. Considere um **sistema** de equações diferenciais ordinárias linear homogêneo abaixo:

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \tag{3}$$

onde $y = (y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x))^T$ e A é uma matriz $n \times n$.

a) Mostre que se $\vec{v}$ é autovetor de A associado ao autovalor λ, então $\vec{y} = c_1 e^{\lambda x}\vec{v}$ é uma solução do sistema, para qualquer escalar c_1.

b) Mostre que se montarmos o vetor $\vec{y} = (y\ y'\ ...\ y^{(n-1)})^T$, então a equação (2) pode ser reescrita na forma $\vec{y}' = A\vec{y}$, para uma matriz A adequada (determine A).

5. Considere um PVI da forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Em um esquema numérico de passo constante, temos uma discretização do domínio $x_n = nh$, com $h > 0$ sendo o passo, e y_n uma aproximação de $y(x_n)$. Uma técnica de **passo simples** se baseia apenas em y_n (e possivelmente valores x_k) para calcular y_{n+1}. Assumindo que $y_n = y(x_n)$ (ou seja, a aproximação y_n é perfeita), o **erro de truncamento local** é a diferença entre o valor calculado y_{n+1} e o valor exato da solução $y(x_{n+1})$, usualmente expresso na forma $\mathcal{O}(h^\alpha)$, com $\alpha \geq 0$.

a) Mostre que o erro de truncamento local do método de Euler direto é de ordem 2.

b) Calcule a ordem do erro de truncamento local do esquema trapezoidal, dado abaixo

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}\right)$$

6. O erro de truncamento local definido no exercício anterior se refere à diferença entre y_{n+1} e $y(x_{n+1})$, assumindo que y_n é calculado de forma exata. Como na prática y_n em si possui erro, define-se o **erro de truncamento global** como a diferença entre y_{n+1} e $y(x_{n+1})$, considerando os erros acumulados no cálculo de y_n. Pode-se mostrar que se a ordem do erro de truncamento local é $\mathcal{O}(h^{\alpha+1})$, então a ordem do erro de truncamento global é $\mathcal{O}(h^{\alpha})$. Com base nisso, ache a ordem do erro de truncamento global para as técnicas mencionadas no exercício anterior.