Aluno: Marcelo Melo de Oliveira

Link do Repositório no Github: https://github.com/marcelomeloo/P2-GED13

Questão 1

a)

- Inicializacao

```r
library(nortest)
amostra <- c(149.3355, 140.3779, 145.7254, 149.8931, 139.6168, 149.1934,
129.6147, 134.7523, 167.8030, 171.7407, 157.5422, 160.2664, 155.4553,
142.5989, 134.9844, 148.5172, 163.1447, 131.0138, 130.2423, 167.2239,
149.4015, 145.6802, 160.3472, 121.1775, 136.7295, 162.2381, 150.7192,
117.8144, 137.3630, 158.6373, 168.0833, 133.9263, 150.9102, 149.4811,
167.4367, 178.0970, 138.4903, 148.6764, 181.0990, 167.3345, 147.0679,
156.1410, 148.8734, 140.9484, 147.6408, 134.5726, 184.6812, 134.6648,
146.8130, 167.4161)

z.amostra <- scale(amostra)
```

- Testes

```r
ks.test(z.amostra, "pnorm", 0, 1) #p-value = 0.4688
```

```
##
##  Exact one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  z.amostra
## D = 0.1167, p-value = 0.4688
## alternative hypothesis: two-sided
```

```r
shapiro.test(amostra) #p-value = 0.6324
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  amostra
## W = 0.98185, p-value = 0.6324
```

```r
ad.test(amostra) #p-value = 0.3928
```

```
##
##  Anderson-Darling normality test
##
## data:  amostra
## A = 0.37902, p-value = 0.3928
```

```r
lillie.test(amostra) #p-value = 0.08619
```

```
##
##  Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
##
## data:  amostra
## D = 0.1167, p-value = 0.08619
```

- Interpretacao

Como em todos os testes obteve-se um valor de `p` maior do que 0.05, não foi negada a hipotese nula dos testes de normalidade. Isto é, é possível que a amostra siga uma distribuição normal.

b)

```r
mi <- 150
sigma <- 15

phi <- function(x) (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2)
plot(phi, 100, 200, lwd=5, xlab="segundos", ylab="freq")
x <- seq(125, 150, 0.1)
lines(x, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2), type="h", col="grey")
```

Logo a probabilidade desejada deve ser:

```r
pnorm(150,mean=mi,sd=sigma)-pnorm(125,mean=mi,sd=sigma)
```

```
## [1] 0.4522096
```

c)

```r
phi <- function(x) (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2)
plot(phi, 100, 200, lwd=5, xlab="segundos", ylab="freq")
x <- seq(100, 125, 0.1)
lines(x, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2), type="h", col="grey")
```

Logo a probabilidade desejada deve ser:

```r
pnorm(125,mean=mi,sd=sigma)-pnorm(100,mean=mi,sd=sigma)
```

```
## [1] 0.04736129
```

d)

```r
phi <- function(x) (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2)
plot(phi, 100, 200, lwd=5, xlab="segundos", ylab="freq")
x <- seq(145, 155, 0.1)
lines(x, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2), type="h", col="grey")
```

Logo a probabilidade desejada deve ser:

```r
pnorm(155,mean=mi,sd=sigma)-pnorm(145,mean=mi,sd=sigma)
```

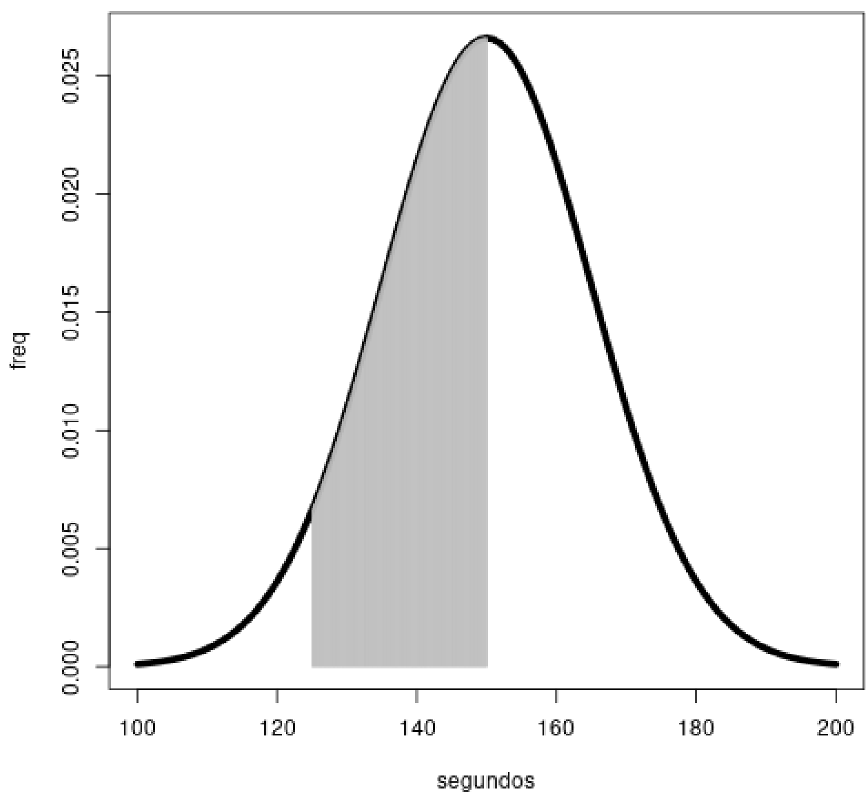


Figure 1: plot of chunk Probabilidade de que uma chamada demore entre 125 e 150 segundos.

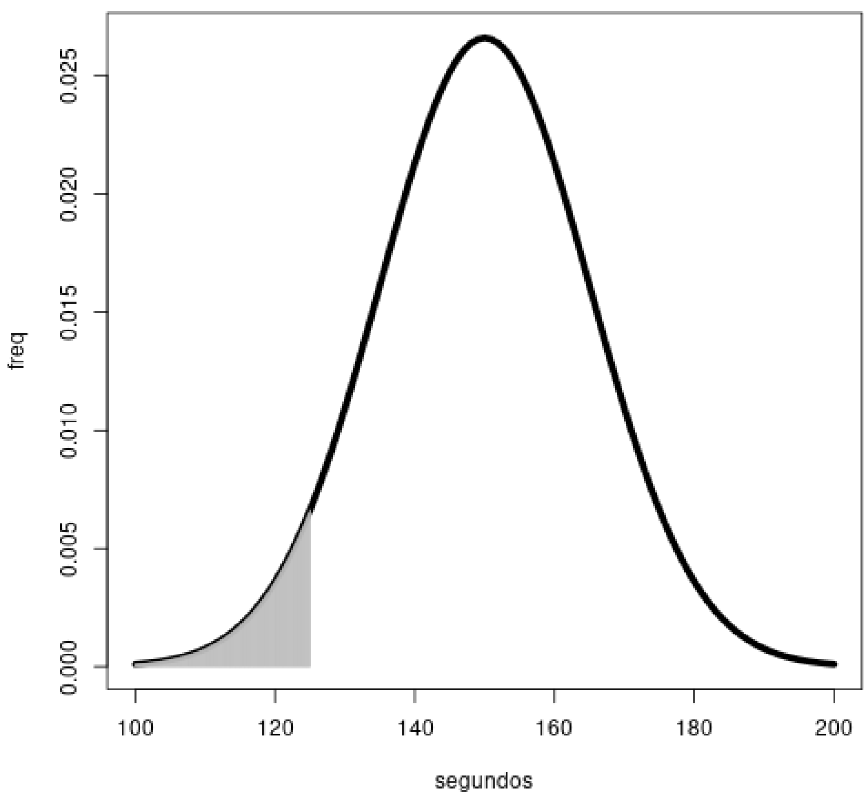


Figure 2: plot of chunk Probabilidade de que uma chamada demore menos de 125 segundos.

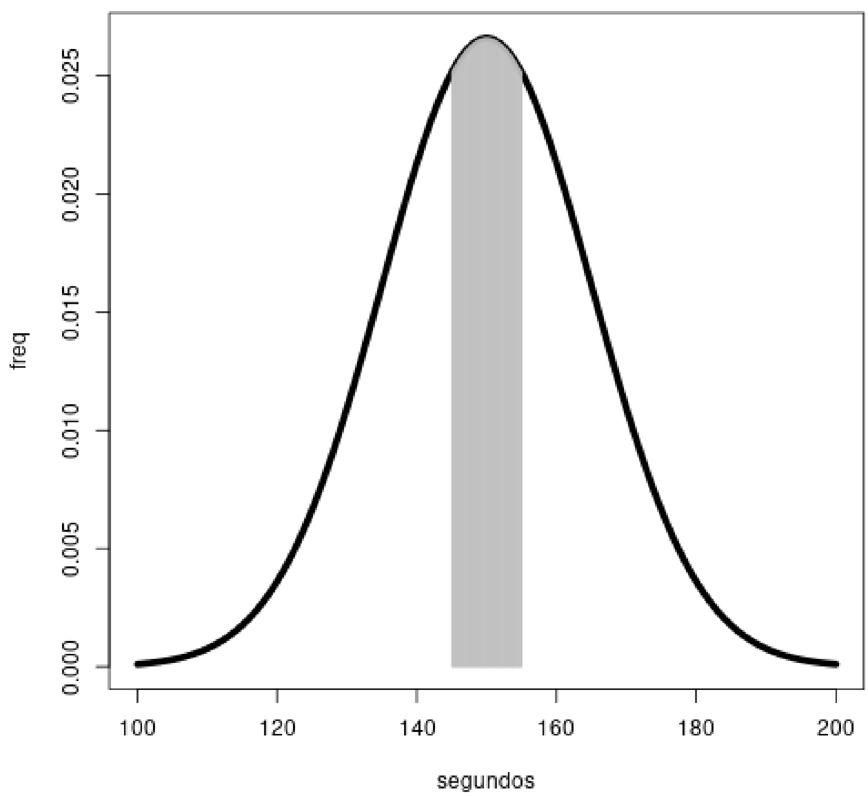


Figure 3: plot of chunk Probabilidade de que uma chamada demore entre 145 e 155 segundos.

```
## [1] 0.2611173
```

e)

```
phi <- function(x) (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2)
plot(phi, 100, 200, lwd=5, xlab="segundos", ylab="freq")
x <- seq(160, 165, 0.1)
lines(x, (1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp((-1/2)*((x-mi)/sigma)^2), type="h", col="grey")
```

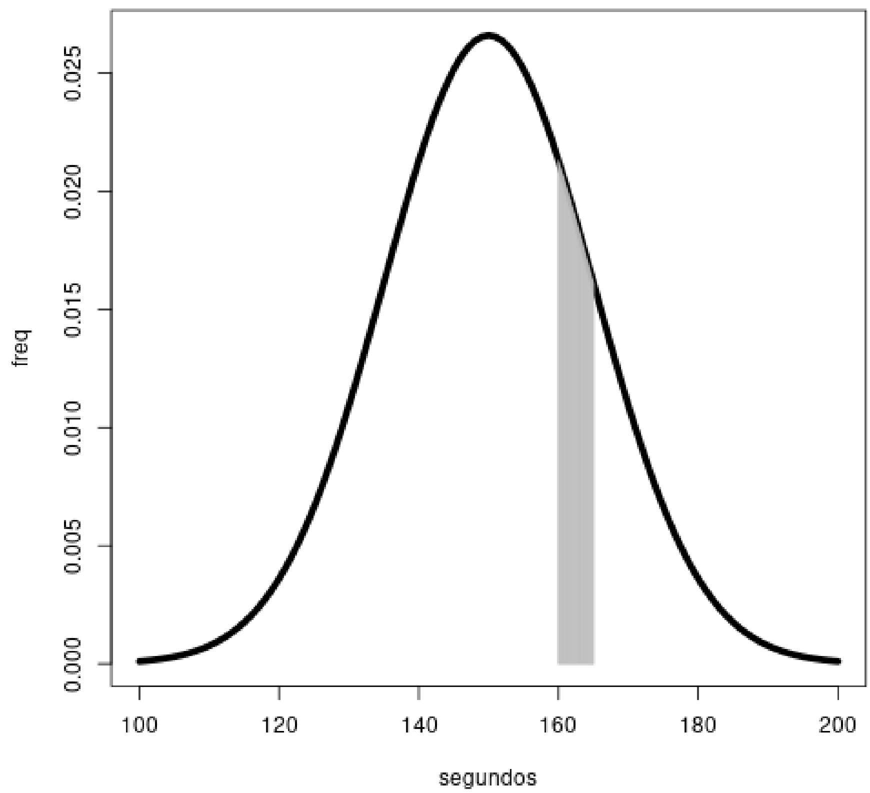


Figure 4: plot of chunk Probabilidade de que uma chamada demore entre 160 e 165 segundos.

Logo a probabilidade desejada será:

```
pnorm(165,mean=mi,sd=sigma)-pnorm(160,mean=mi,sd=sigma)
```

```
## [1] 0.09383728
```

Questão 2

a) Inicializacao

```
library(fitdistrplus)
```

```
## Loading required package: MASS
```

```
## Loading required package: survival
```

```
library(logspline)

dados_1 <- c(1.5041523,0.5808705,0.6199756,0.2929858,1.2147418,1.1732594,1.8467931,0.72696
dados_2 <- c(0.135745877,0.027801227,0.621652353,0.095321044,1.869870340,0.014069777,0.504
```

b)

Utilizando o comando descdist e mostre as estatísticas geradas.

```
descdist(dados_1, discrete = FALSE, graph = FALSE)
```

```
## summary statistics
## ------
## min:  0.1266975   max:  5.296872
## median:  1.307606
## mean:  1.48898
## estimated sd:  0.8704146
## estimated skewness:  1.159633
## estimated kurtosis:  4.644712
```

```
descdist(dados_2, discrete = FALSE, graph = FALSE)
```

```
## summary statistics
## ------
## min:  0.001452129   max:  1.86987
## median:  0.20739
## mean:  0.3038428
## estimated sd:  0.3081601
## estimated skewness:  2.057199
## estimated kurtosis:  8.673908
```

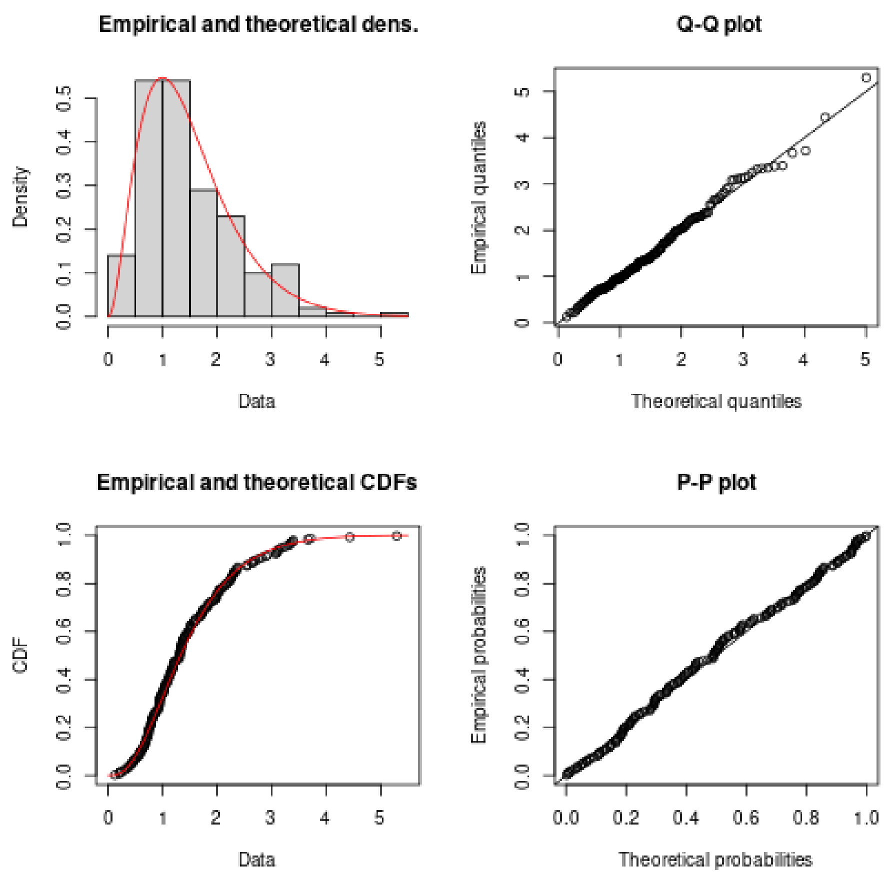
c)

Utilizando o comando fitdist para o primeiro conjunto de dados, temos:

```
fit.weibull_1 <- fitdist(dados_1, "weibull")
fit.gamma_1 <- fitdist(dados_1, "gamma")
fit.lognormal_1 <- fitdist(dados_1, "lnorm")
fit.normal_1 <- fitdist(dados_1, "norm")
fit.expo_1 <- fitdist(dados_1, "exp")
fit.gamma_1
```

```
## Fitting of the distribution ' gamma ' by maximum likelihood
## Parameters:
##       estimate Std. Error
## shape 3.027141  0.2875985
## rate  2.032940  0.2100724
```

```
plot(fit.gamma_1)
```



É provável que o primeiro conjunto de dados seja melhor descrito pela distribuição gama, uma vez que é a distribuição que apresenta menor erro relativo para o ajuste e possui melhor alinhamento às retas dos gráficos

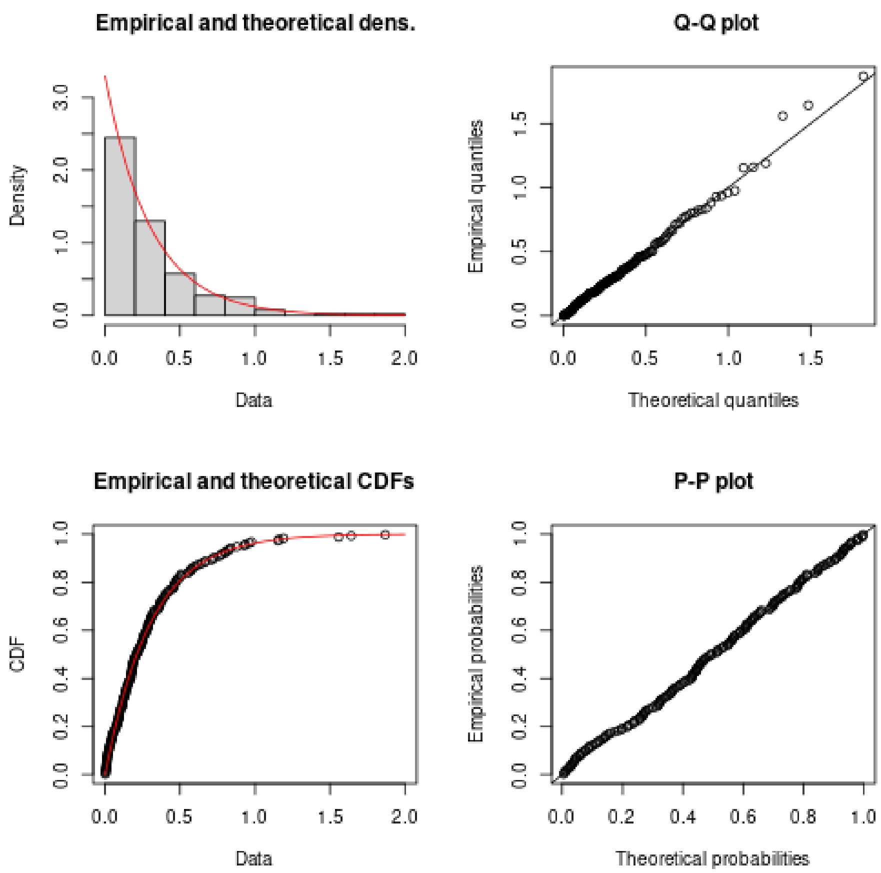
Agora, utilizando o comando fitdist para o segundo conjunto de dados, temos:

```
fit.weibull_2 <- fitdist(dados_2, "weibull")
fit.gamma_2 <- fitdist(dados_2, "gamma")
fit.lognormal_2 <- fitdist(dados_2, "lnorm")
```

```r
fit.normal_2 <- fitdist(dados_2, "norm")
fit.expo_2 <- fitdist(dados_2, "exp")
fit.expo_2
```

```
## Fitting of the distribution ' exp ' by maximum likelihood
## Parameters:
##      estimate Std. Error
## rate 3.291175  0.2327212
```

```r
plot(fit.expo_2)
```

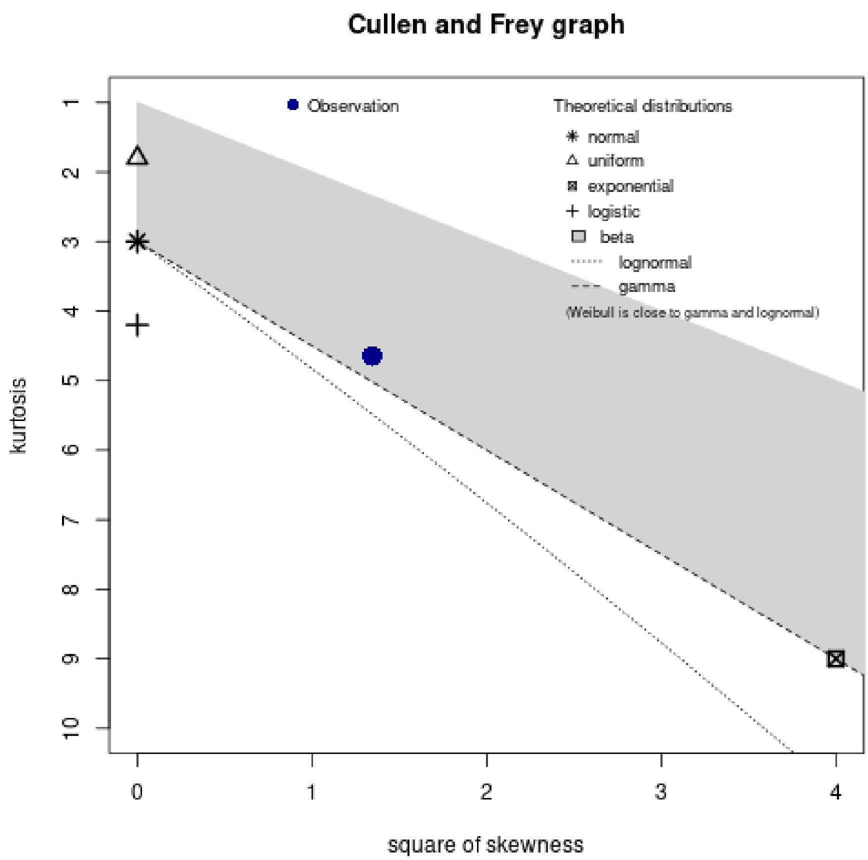


É provavel que o segundo conjunto de dados seja melhor descrito pela distribuição exponencial, uma vez que é a distribuição possui melhor alinhamento ás retas dos gráficos

d)

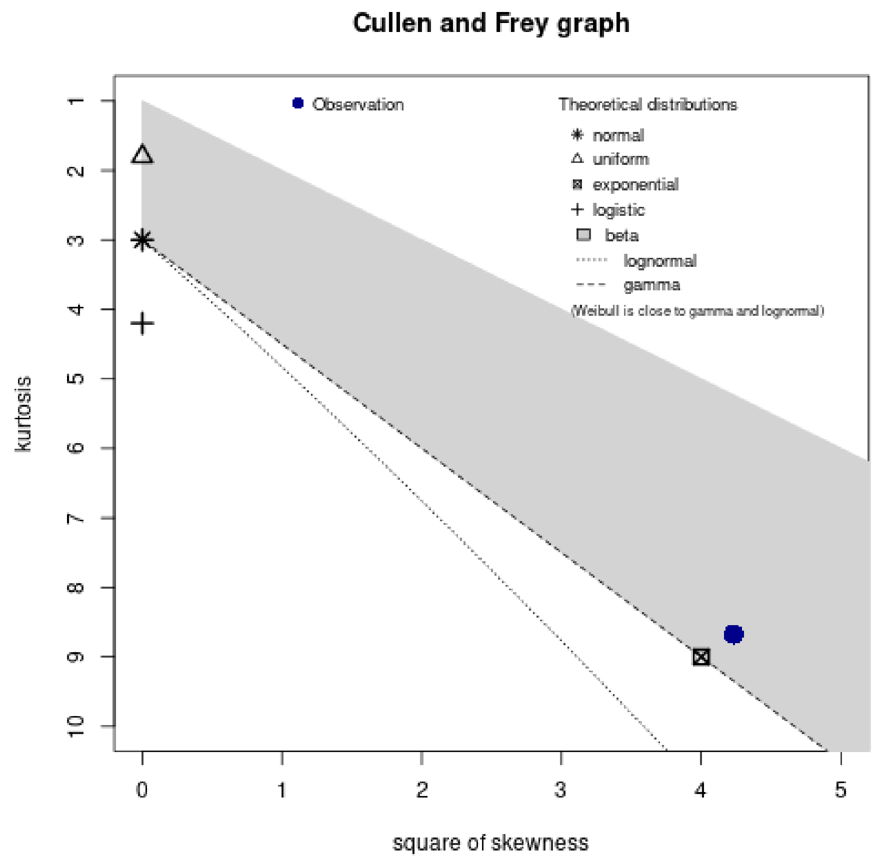
Para os dados 1:

```r
descdist(dados_1, discrete = FALSE)
```



De acordo com gráfico, é possível perceber que a amostra de dados se aproxima mais de uma distribuição gama, já que o ponto azul se aproxima mais da reta tracejada. Agora, para os dados 2:

```r
descdist(dados_2, discrete = FALSE)
```



De acordo com gráfico, é possível perceber que a amostra de dados se aproxima mais de uma distribuição exponencial, já que o ponto azul se aproxima mais do ponto marcado como exponencial.

e)
Para os dados 1:

```
fit.weibull_1$aic
```

```
## [1] 469.4881
```

```
fit.gamma_1$aic
```

```
## [1] 461.497
```

```
fit.lognormal_1$aic
```

```
## [1] 469.2617
```

```
fit.normal_1$aic
```

```
## [1] 515.0587
```

```r
fit.expo_1$aic
```

```
## [1] 561.2366
```

Como o AIC do fit da gama é o menor, percebe-se que, de fato, o ajuste para a distribuição gama é o melhor dentre os demais para o primeiro conjunto de dados.

Agora, para os dados 2:

```r
fit.weibull_2$aic
```

```
## [1] -72.59204
```

```r
fit.gamma_2$aic
```

```
## [1] -72.64928
```

```r
fit.lognormal_2$aic
```

```
## [1] -33.86214
```

```r
fit.normal_2$aic
```

```
## [1] 99.71861
```

```r
fit.expo_2$aic
```

```
## [1] -74.49791
```

Como o AIC do fit da exponencial é o menor, percebe-se que, de fato, o ajuste para a distribuição exponencial é o melhor dentre os demais para o segundo conjunto de dados.

f)

```r
ks.test(dados_1, "pgamma", 3.027141, 2.032940, exact=FALSE)
```

```
##
##  Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  dados_1
## D = 0.045778, p-value = 0.796
## alternative hypothesis: two-sided
```

```r
ks.test(dados_2, "pexp", 3.291175, exact=FALSE)
```

```
##
##  Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  dados_2
## D = 0.033408, p-value = 0.9789
## alternative hypothesis: two-sided
```

Como os p-valores sao 0.796 e 0.9789 para, respectivamente, os testes da gama e da exponencial, podemos concluir que os ajustes são adequados, uma vez que os p-valores são superiores a 5%.

Questão 3

a)

Pelo método dos momentos temos:

$$\mu_1 = \int_0^\infty \frac{y^2 * e^{\frac{-y}{\beta}}}{\beta^2} dy \ = E[Y] \quad \therefore \quad \mu_1 = E[Y] = 2\beta$$

$$\mu_1 = E[Y] = 2\beta \quad \therefore \quad \beta = \mu_1/2$$

Agora,

$$m_1 = \mu = \mu_1 \quad \therefore \quad \beta = \frac{\mu}{2}$$

Além disso,

$$\mu_2 = E[Y^2] = \sigma^2 + \mu^2 = \int_0^\infty \frac{y^3 * e^{\frac{-y}{\beta}}}{\beta^2} dy \ = 6\beta^2$$

$$\sigma^2 + 4\beta^2 = 6\beta^2 \quad \therefore \quad \sigma^2 = 2\beta^2$$

Portanto:

$$E[\beta] = E[\frac{< Y >}{2}] = \frac{\mu}{2}$$

$$Var[\beta] = E[\frac{< Y >^2}{4}] - E[\frac{< Y >}{2}]^2 = \frac{\sigma^2/n + \mu^2}{4} - \mu^2/4 = \frac{\mu^2}{8n}$$

b)

Pelo método da máxima verossimilhança, temos:

$$L(\beta) = f(y_1) * f(y_2) \cdots * f(y_n) = y_1 * y_2 \cdots * y_n * \frac{e^{\frac{-n*<Y>}{\beta}}}{\beta^{2n}}$$

$$l(\beta) = ln(L(\beta)) = ln(y_1) + ln(y_2) + \cdots + ln(y_n) - \frac{n* < Y >}{\beta} - 2nln(\beta)$$

$$\frac{dl(\beta)}{d\beta} = 0 \quad \therefore \quad \frac{n* < Y >}{\beta} = 2n \quad \therefore \quad \beta_{MV} = \frac{< Y >}{2}$$

Além disso,

$$\frac{d^2 l(\beta)}{d\beta^2} = -\frac{2n* < Y >}{\beta^3} + \frac{2n}{\beta^2} \quad \therefore \quad \frac{d^2 l(\beta)}{d\beta^2} = -\frac{4n\beta}{\beta^3} + \frac{2n}{\beta^2} = -2n/\beta^2 < 0$$

Mas,

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{y^2 * e^{\frac{-y}{\beta}}}{\beta^2}\,dy \ = 2\beta =< Y >$$

$$E[Y^2] = \sigma^2 + < Y >^2 = \int_0^\infty \frac{y^3 * e^{\frac{-y}{\beta}}}{\beta^2}\,dy \ = 6\beta^2 \quad \therefore \quad \sigma^2 = 2\beta^2 = \frac{< Y >^2}{2}$$

Portanto, temos:

$$E[\beta] = E[< Y > /2] = \frac{< Y >}{2}$$

$$Var[\beta] = E[< Y >^2 /4] - (E[< Y > /2])^2 = \frac{\sigma^2/n + < Y >^2}{4} - < Y >^2 /4 = \frac{< Y >^2}{8n}$$

Questão 4

a)

$$\mu_{X_1} = \frac{58 + 72 + 72 + 86 + 86 + 100 + 100 + 114 + 114 + 128}{10} = 93$$

b)

$$\mu_{Y_1} = \frac{80 + 80 + 90 + 90 + 100 + 100 + 110 + 110 + 120 + 120}{10} = 100$$

c)

$$Cov[X_1, Y_1] = E[X_1 Y_1] - \mu_{X_1} * \mu_{Y_1} = 1/10 * (\sum_{n=1}^{10} x_n * y_n) - 9300$$

$$Cov[X_1, Y_1] = 9580 - 9300 = 280$$

d)

$$E[X_1^2] = \sum_{n=1}^{6} x_n^2 * P(x_n) = 0.1*58^2 + 0.2*72^2 + 0.2*86^2 + 0.2*100^2 + 0.2*114^2 + 0.1*128^2$$

$$E[X_1^2] = 9090$$

e)

$$E[Y_1^2] = \sum_{n=1}^{5} x_n^2 * P(x_n) = 0.2*80^2 + 0.2*90^2 + 0.2*100^2 + 0.2*110^2 + 0.2*120^2$$

$$E[Y_1^2] = 10200$$

f)

$$Var[X_1] = Cov[X_1^2] = E[X_1^2] - \mu_{X_1}^2$$

$$Var[X_1] = 9090 - 93*93 = 441$$

g)

$$Var[Y_1] = Cov[Y_1^2] = E[Y_1^2] - \mu_{Y_1}^2$$
$$Var[Y_1] = 10200 - 100 * 100 = 200$$

h)

$$\rho_{X_1,Y_1} = \frac{Cov(X_1, Y_1)}{\sigma_{X_1} * \sigma_{Y_1}}$$
$$\rho = 0.942809042$$

i) Obteve-se que a correlação entre X2 e Y2 é -0.942809. Com isso, observa-se que a correlação é igual em módulo, mas diferentes em sinal. Tal fato indica que enquanto o valor de X1 sobe é esperado que Y1 cresca e Y2 descresca.

Questão 5

a)

$$E[X] = \sum_{n=1}^{3} x_n * P(x_n) = -3/8 + 0 + 3/8 = 0$$

b)

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{3} y_n * P(y_n) = -3/8 + 0 + 3/8 = 0$$

c)

$$Cov[X, Y] = E[X, Y] - E[X]E[Y] = \sum_{n=1}^{3} x_n * y_n * P_{X,Y}(x_n, y_n)$$
$$Cov[X, Y] = 1/8 - 1/8 = 0$$

d) Não são independentes, tome o seguinte contra-exemplo:

$$P_{X,Y}(-1, -1) = 1/8$$

é diferente de

$$P_X(-1)P_Y(-1) = 3/8 * 3/8$$