Hoja de Referencia Econometría

Por Marcelo Moreno Porras - Universidad Rey Juan Carlos
The Econometrics Cheat Sheet Project

Conceptos básicos

Definiciones

Econometría - es una disciplina de las ciencias sociales que tiene como objetivo cuantificar las relaciones entre agentes económicos, contrastar teorías económicas y evaluar e implementar políticas públicas y privadas.
Modelo econométrico - es una representación simplificada de la realidad para explicar fenómenos económicos.
Ceteris paribus - si todos los demás factores relevantes permanecen constantes.

Estructuras de datos

Sección cruzada - muestra recogida en un momento dado en el tiempo, una *foto* estática. El orden no importa.
Series temporales - observaciones a lo largo del tiempo. El orden sí importa.
Datos de panel - una serie temporal por cada observación de una sección cruzada.
Secciones transversales agrupadas - secciones cruzadas de diferentes periodos temporales.

Fases de un modelo econométrico

1. Especificación.
2. Estimación.
3. Validación.
4. Utilización.

Análisis de regresión

Estudiar y predecir el valor medio de una variable (dependiente, y) respecto a unos valores fijos de otras variables (variables independientes, x). En econometría, es común usar Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) para análisis de regresión.

Análisis de correlación

El análisis de correlación no distingue entre variables dependientes e independientes.

- La correlación simple mide el grado de asociación lineal entre dos variables.
$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i-\overline{y})^2}}$$
- La correlación parcial mide el grado de de asociación lineal entre dos variables controlando una tercera.

Supuestos y propiedades

Supuestos del modelo econométrico

Bajo estos supuestos, el estimador de MCO presentará buenas propiedades. Supuestos **Gauss-Markov**:

1. **Linealidad en parámetros** (y dependencia débil en series temporales). y debe ser una función lineal de β.
2. **Muestreo aleatorio**. La muestra de la población se ha tomado de forma aleatoria. (Sólo sección cruzada)
3. **No colinealidad perfecta**.
   - No hay variables independientes que sean constantes: $\mathrm{Var}(x_j) \neq 0,\ \forall j = 1, \ldots, k$
   - No hay una relación lineal exacta entre variables independientes.
4. **Media condicional cero y correlación cero**.
   a. No hay errores sistemáticos: $\mathrm{E}(u \mid x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{E}(u) = 0 \rightarrow$ **exogeneidad fuerte** (a implica b).
   b. No hay variables relevantes fuera del modelo: $\mathrm{Cov}(x_j, u) = 0,\ \forall j = 1, \ldots, k \rightarrow$ **exogeneidad débil**.
5. **Homocedasticidad**. La variabilidad de los residuos es igual para todos los niveles de x: $\mathrm{Var}(u \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma_u^2$
6. **No autocorrelación**. Los residuos no contienen información sobre otros residuos: $\mathrm{Corr}(u_t, u_s \mid x_1, \ldots, x_k) = 0,\ \forall t \neq s$
7. **Normalidad**. Los residuos son independientes e idénticamente distribuidos: $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$
8. **Tamaño de datos**. El número de observaciones disponibles debe ser mayor a $(k+1)$ parámetros a estimar. (Ya satisfecho bajo situaciones asintóticas)

Propiedades asintóticas de MCO

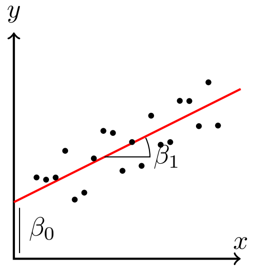
Bajo los supuestos del modelo econométrico y el Teorema Central del Límite (TCL):

- De 1 a 4a: MCO es **insesgado**. $\mathrm{E}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$
- De 1 a 4: MCO es **consistente**. $\mathrm{plim}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ (a 4b sin 4a, exogeneidad débil, insesgado y consistente).
- De 1 a 5: **normalidad asintótica** de MCO (entonces, 7 es necesariamente satisfecho): $u \underset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$
- De 1 a 6: **estimador insesgado** de σ_u^2. $\mathrm{E}(\hat{\sigma}_u^2) = \sigma_u^2$
- De 1 a 6: MCO es MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado, BLUE en inglés) ó **eficiente**.
- De 1 a 7: contrastes de hipótesis e intervalos de confianza son fiables.

Mínimos Cuadrados Ordinarios

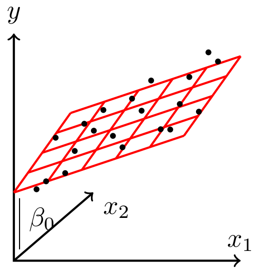
Objetivo - minimizar Suma de Resid. Cuadrados (SRC):
$$\min \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2, \text{ donde } \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

Modelo de regresión simple



Ecuación:
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$
Estimación:
$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$
donde:
$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{Cov}(y,x)}{\mathrm{Var}(x)}$$

Modelo de regresión múltiple



Ecuación:
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$$
Estimación:
$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$
donde:
$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}_1 - \cdots - \hat{\beta}_k \overline{x}_k$$
$$\hat{\beta}_j = \frac{\mathrm{Cov}(y, \text{resid } x_j)}{\mathrm{Var}(\text{resid } x_j)}$$
Matriz: $\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1}(X^\top y)$

Interpretación de coeficientes

Modelo	Dependiente	Independ.	Interpretación β_1
Nivel-nivel	y	x	$\Delta y = \beta_1 \Delta x$
Nivel-log	y	$\log(x)$	$\Delta y \approx (\beta_1/100)(\%\Delta x)$
Log-nivel	$\log(y)$	x	$\%\Delta y \approx (100\beta_1)\Delta x$
Log-log	$\log(y)$	$\log(x)$	$\%\Delta y \approx \beta_1(\%\Delta x)$
Cuadrático	y	$x + x^2$	$\Delta y = (\beta_1 + 2\beta_2 x)\Delta x$

Medidas de error

Suma de Resid. Cuad.: $\mathrm{SRC} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
Suma Explicada de Cuadrados: $\mathrm{SEC} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \overline{y})^2$
Suma Tot. de Cuad.: $\mathrm{STC} = \mathrm{SEC} + \mathrm{SRC} = \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$
Error Estándar de la Regresión: $\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{\mathrm{SRC}}{n-k-1}}$
Error Estándar de $\hat{\beta}$: $\mathrm{ee}(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \cdot (X^\top X)^{-1}}$
Raíz del Error Cuadrático Medio: $\mathrm{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$
Error Medio Absoluto: $\mathrm{EMA} = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}$
Porcentaje Medio de Error: $\mathrm{PME} = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{u}_i / y_i|}{n} \cdot 100$

R-cuadrado

Es una medida de la **bondad del ajuste**, cómo la regresión se ajusta a los datos:

$$R^2 = \frac{\text{SEC}}{\text{STC}} = 1 - \frac{\text{SRC}}{\text{STC}}$$

- Mide el **porcentaje de variación** en y que es linealmente **explicado** por variaciones de las x.
- Toma valores **entre 0** (no hay explicación lineal) **y 1** (explicación total).

Cuando el número de regresores incrementa, el R-cuadrado también, independientemente de si las nuevas variables son relevantes o no. Para resolver este problema, hay un **R-cuadrado ajustado** por grados de libertad (o corregido):

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{\text{SRC}}{\text{STC}} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot (1 - R^2)$$

Para muestras grandes: $\overline{R}^2 \approx R^2$

Contrastes de hipótesis

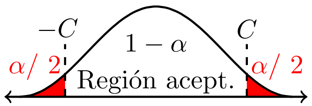
Definiciones

Es una regla diseñada para, a partir de una muestra, explicar si existe **evidencia para rechazar (o no) una hipótesis** sobre uno o más parámetros poblacionales.

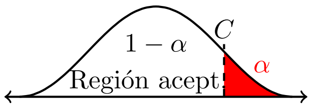
Elementos de un contraste de hipótesis:

- **Hipótesis nula** (H_0) - es la hipótesis a ser probada.
- **Hipótesis alternativa** (H_1) - el la hipótesis que no puede rechazarse si H_0 es rechazada.
- **Estadístico de contraste** - es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es conocida bajo H_0.
- **Valor crítico** (C) - es el valor contra el cual se compara el estadístico de contraste para determinar si se rechaza o no H_0. Determina la frontera entre la región de aceptación y la de rechazo de H_0.
- **Nivel de significación** (α) - es la probabilidad de rechazar H_0 siendo cierta (Error Tipo I). Es elegido por quien conduce el contraste. Usualmente 10%, 5% ó 1%.
- **p-valor** - es el nivel de significación máximo por el cual H_0 no puede ser rechazada.

Dos colas. Distrib. H_0



Una cola. Distrib. H_0



Regla general: si p-valor $< \alpha$, existe evidencia para rechazar H_0, es decir, existe evidencia para aceptar H_1.

Contrastes individuales

Prueba si un parámetro es significativamente diferente de un cierto valor, ϑ.

- $H_0 : \beta_j = \vartheta$
- $H_1 : \beta_j \neq \vartheta$

$$\text{Bajo } H_0: \quad t = \frac{\hat{\beta}_j - \vartheta}{\text{ee}(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1,\alpha/2}$$

Si $|t| > |t_{n-k-1,\alpha/2}|$, existe evidencia para rechazar H_0.

Contraste de significación individual - prueba si un parámetro es **significativamente distinto de cero**.

- $H_0 : \beta_j = 0$
- $H_1 : \beta_j \neq 0$

$$\text{Bajo } H_0: \quad t = \frac{\hat{\beta}_j}{\text{ee}(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1,\alpha/2}$$

Si $|t| > |t_{n-k-1,\alpha/2}|$, existe evidencia para rechazar H_0.

Contraste F

Prueba simultáneamente múltiples hipótesis (lineales) sobre los parámetros. Hace uso de un modelo no restringido y uno restringido:

- **Modelo no restringido** - es el modelo donde se quiere probar la hipótesis.
- **Modelo restringido** - es el modelo donde se ha impuesto la hipótesis que se quiere probar.

Entonces, viendo los errores, hay:

- **SRC$_{\text{UR}}$** - es la SRC del modelo no restringido.
- **SRC$_{\text{R}}$** - es la SRC del modelo restringido.

$$\text{Bajo } H_0: \quad F = \frac{\text{SRC}_{\text{R}} - \text{SRC}_{\text{UR}}}{\text{SRC}_{\text{UR}}} \cdot \frac{n-k-1}{q} \sim F_{q,n-k-1}$$

donde k es el número de parámetros del modelo no restringido y q es el número de hipótesis lineales a probar.

Si $F > F_{q,n-k-1}$, existe evidencia para rechazar H_0.

Contraste de significación global - prueba si todos los parámetros asociados a las x son **simultáneamente cero**.

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$
- $H_1 : \beta_1 \neq 0$ y/o $\beta_2 \neq 0 \ldots$ y/o $\beta_k \neq 0$

Podemos simplificar la fórmula para el estadístico F:

$$\text{Bajo } H_0: \quad F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k-1}{k} \sim F_{k,n-k-1}$$

Si $F > F_{k,n-k-1}$, existe evidencia para rechazar H_0.

Intervalos de confianza

Los intervalos de confianza al nivel de confianza $(1-\alpha)$, se pueden calcular:

$$\hat{\beta}_j \mp t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot \text{ee}(\hat{\beta}_j)$$

Variables ficticias

Las variables ficticias (o binarias) son usadas para recoger información cualitativa: sexo, estado civil, país, etc.

- Toman **valor 1** en una categoría dada y **0 en el resto**.
- Se usan para analizar y modelar **cambios estructurales** en los parámetros.

Si una variable cualitativa tiene m categorías, sólo hay que incluir $(m-1)$ variables ficticias en el modelo.

Cambio estructural

El cambio estructural se refiere a los cambios en los valores de los parámetros del modelo producidos por el efecto de diferentes sub-poblaciones. El cambio estructural se puede incluir en el modelo a través de variables ficticias.

La ubicación de las variables ficticias (D) es importante:

- **En la constante** (efecto aditivo) - representa la diferencia media entre los valores producidos por el cambio estructural.

$$y = \beta_0 + \delta_1 D + \beta_1 x_1 + u$$

- **En la pendiente** (efecto multiplicativo) - representa la diferencia en el efecto (pendiente) entre los valores producidos por el cambio estructural.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \delta_1 D \cdot x_1 + u$$

Contraste de Chow para cambio estructural - analiza la existencia de cambio estructural en todos los parámetros del modelo, es una expresión particular del contraste F, donde H_0: No hay cambio estructural (todos $\delta = 0$).

Cambios de escala

Cambios en las **unidades de medida** de las variables:

- Sobre la variable **endógena**, $y^* = y \cdot \lambda$ - afecta a todos los parámetros del modelo, $\beta_j^* = \beta_j \cdot \lambda$, $\forall j = 1, \ldots, k$
- Sobre una variable **exógena**, $x_j^* = x_j \cdot \lambda$ - sólo afecta al parámetro ligado a dicha variable exógena, $\beta_j^* = \beta_j \cdot \lambda$
- Mismo cambio de escala sobre endógena y exógena - sólo afecta al término constante, $\beta_0^* = \beta_0 \cdot \lambda$

Cambios de origen

Cambios en el **origen de medida** de las variables (endógenas o exógenas), $y^* = y + \lambda$ - sólo afectan al término constante del modelo, $\beta_0^* = \beta_0 + \lambda$

Multicolinealidad

- **Multicolinealidad perfecta** - hay variables independientes que son constantes y/o hay una relación lineal exacta entre variables independientes. Es el **incumplimiento del tercer (3) supuesto** del modelo.
- **Multicolinealidad aproximada** - hay variables independientes que son aproximadamente constantes y/o hay una relación lineal aproximada entre variables independientes. **No implica el incumplimiento de algún supuesto** del modelo, pero afecta a MCO.

Consecuencias

- **Multicolinealidad perfecta** - el sistema de ecuaciones de MCO no puede resolverse (infinitas soluciones).
- **Multicolinealidad aproximada**
  - Pequeñas variaciones en la muestra producen grandes variaciones en las estimaciones de MCO.
  - La varianza de los estimadores MCO de las x que son colineales incrementa, la inferencia de los parámetros es afectada (intervalo de confianza grande).

Detección

- **Análisis de correlación** - buscar altas correlaciones entre variables independientes, $|r| > 0.7$.
- **Factor de Inflación de la Varianza (FIV o VIF)** - indica el incremento en $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j)$ debido a la multicolinealidad.

$$\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_j) = \frac{1}{1-R_j^2}$$

donde R_j^2 denota el R-cuadrado de una regresión entre x_j y todas las otras x.
  - Valores entre 4 y 10 - pueden existir problemas de multicolinealidad.
  - Valores > 10 - existen problemas de multicolinealidad.

Una característica típica de la multicolinealidad es que los coeficientes de regresión del modelo no son individualmente significativos (por las altas varianzas), pero sí que son conjuntamente significativos.

Corrección

- Eliminar una de las variables colineales.
- Realizar análisis factorial(u otra técnica de reducción de dimensiones) en las variables colineales.
- Interpretar los coeficientes con multicolinealidad conjuntamente.

Heterocedasticidad

Los residuos u_i de la función de regresión poblacional no tienen una varianza constante σ_u^2:

$$\mathrm{Var}(u \mid x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Var}(u) \neq \sigma_u^2$$

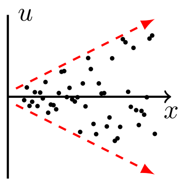
Es el **incumplimiento del quinto (5) supuesto** del modelo.

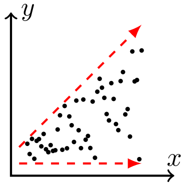
Consecuencias

- Estimadores MCO son insesgados.
- Estimadores MCO son consistentes.
- MCO ya **no es eficiente**, pero sigue siendo ELI (Estimador Lineal Insesgado).
- La **estimación de la varianza** de los estimadores es **sesgada**: la construcción de intervalos de confianza y contraste de hipótesis no son fiables.

Detección

- **Gráficos** - buscar patrones de dispersión en gráficos x vs. u ó x vs. y.





- **Contrastes** - White, Bartlett, Breusch-Pagan, etc. Generalmente, H_0: No heterocedasticidad.

Corrección

- Usar MCO con un estimador de la matriz de varianzas-covarianzas robusto a la heterocedasticidad (HC), por ejemplo, la propuesta de White.
- Si la estructura de la varianza es conocida, usar Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) o Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG):
  - Suponiendo que $\mathrm{Var}(u) = \sigma_u^2 \cdot x_i$, dividir las variables del modelo entre la raíz cuadrada de x_i y aplicar MCO.
  - Suponiendo que $\mathrm{Var}(u) = \sigma_u^2 \cdot x_i^2$, dividir las variables del modelo entre x_i (la raíz cuadrada de x_i^2) y aplicar MCO.
- Si la estructura de la varianza es desconocida, hacer uso de Mínimos Cuadrados Ponderados Factibles (MCPF), que estima una posible varianza, divide las variables del modelo entre ella y entonces aplica MCO.
- Nueva especificación del modelo, por ejemplo, transformación logarítmica (reduce la varianza).

Autocorrelación

El residuo de cualquier observación, u_t, está correlacionado con el residuo de cualquier otra observación. Las observaciones no son independientes.

$$\mathrm{Corr}(u_t, u_s \mid x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{Corr}(u_t, u_s) \neq 0, \quad \forall t \neq s$$

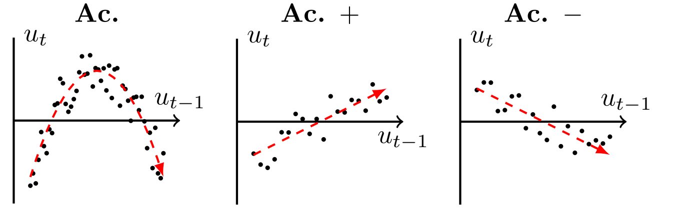
El contexto "natural" de este fenómeno son las series temporales. Es el **incumplimiento del sexto (6) supuesto** del modelo.

Consecuencias

- Estimadores MCO son insesgados.
- Estimadores MCO son consistentes.
- MCO ya **no es eficiente**, pero sigue siendo ELI (Estimador Lineal Insesgado).
- La **estimación de la varianza** de los estimadores es **sesgada**: la construcción de intervalos de confianza y contraste de hipótesis no son fiables.

Detección

- **Gráficos** - buscar patrones de dispersión en gráficos u_{t-1} vs. u_t o hacer uso del correlograma.



- **Contrastes** - Durbin-Watson, Breusch-Godfrey, etc. Generalmente, H_0: No autocorrelación.

Corrección

- Usar MCO con un estimador de la matriz de varianzas-covarianzas robusto a la heterocedasticidad y autocorrelación (HAC), por ejemplo, la propuesta de Newey-West.
- Usar Mínimos Cuadrados Generalizados. Suponiendo $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$, con $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $|\rho| < 1$ y ε_t es ruido blanco.
  - Si ρ es conocido, crear un modelo cuasi-diferenciado donde u_t es ruido blanco y estimarlo por MCO.
  - Si ρ es desconocido, estimarlo -por ejemplo- por el método de Cochrane-Orcutt, crear un modelo cuasi-diferenciado donde u_t es ruido blanco y estimarlo por MCO.