INF1608 – Análise Numérica

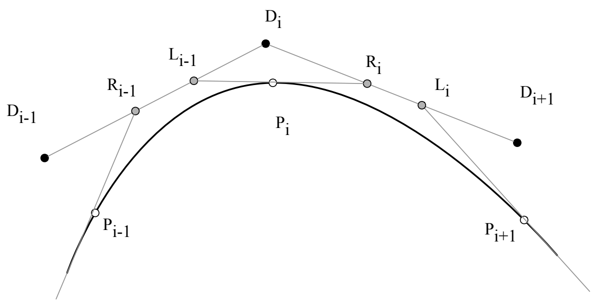
Trabalho Final: Interpolação por Spline Cúbica

Prof. Waldemar Celes

Departamento de Informática, PUC-RIo

Descrição

Em diversas aplicações, precisamos determinar uma curva suave que interpola um conjunto de n pontos P_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Em geral, utiliza-se *spline cúbica*, isto é, uma interpolação por partes onde cada tramo é representado por uma cúbica. Nos pontos interpolados, garante-se continuidade de derivada de primeira e segunda ordem (continuidade de tangente e curvatura). *Splines cúbicas* são muito utilizadas em modelagem, robótica e computação gráfica.



Pontos de controle D_i de uma spline

Este trabalho descreve um procedimento para, dado um conjunto de pontos P_i, determinar a spline cúbica. Uma spline é determinada por seus pontos de controle D_i, como ilustra a figura. De posse dos pontos de controle, podemos determinar os pontos R_i e L_i usados no traçado das curvas. A determinação dos pontos de controle recai na solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ c_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-2} \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Considerando curvas planas, cada ponto é dado pelas coordenadas (x, y); portanto, o mesmo sistema tem que ser resolvido para as coordenadas x e y. Os coeficientes a_i, b_i e c_i são dados por:

$$\begin{aligned} a_i &= (1 - \delta_i)(1 - \lambda_i) \\ b_i &= (1 - \delta_i)\lambda_i + \delta_i(1 - \mu_i) \\ c_i &= \delta_i \mu_i \end{aligned}$$

onde:

$$\delta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$

Os valores h_i, para $i = 0, 1, \cdots, n$ (note que devem existir $n+1$ valores de h), representam os espaçamentos entre os *nós* da spline. Se considerarmos uma spline com espaçamento *uniforme*, podemos adotar $h_i = 1$ para todos os espaçamentos entre nós internos. No entanto, splines não uniformes tendem a ter melhor ajuste. Uma heurística boa para spline não uniforme é adotar o espaçamento igual à distância entre os pontos a serem interpolados: $h_i = \|\overline{P_i\, P_{i-1}}\|$. Se a spline for aberta, fazemos $h_0 = h_n = 0$. Se a spline for fechada, isto é, existe um tramo que interpola o último ponto ao primeiro, fazemos: $h_0 = h_n = \|\overline{P_{n-1}\, P_0}\|$.

Os coeficientes λ_i e μ_i, para $i = 1, \cdots, n-2$, são dados por:

$$\lambda_i = \frac{\gamma_{i-1}h_{i-1} + h_i}{\gamma_{i-1}h_{i-1} + h_i + \gamma_i h_{i+1}}$$
$$\mu_i = \frac{\gamma_i h_i}{\gamma_i h_i + h_{i+1} + \gamma_{i+1}h_{i+2}}$$

onde:

$$\gamma_i = \frac{2(h_i + h_{i+1})}{\nu_i h_i h_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})}, \quad i = 0, \cdots, n-1$$

Os coeficientes ν_i representam as tensões nos nós. Se fazemos $\nu_i = 0$, temos a interpolação normal de splines cúbicas; se aumentamos o valor de ν_i, tendemos a criar um corner no ponto de interpolação correspondente.

Para spline aberta, temos:

$$\lambda_0 = \lambda_{n-1} = 1$$
$$\mu_0 = \mu_{n-1} = 0$$

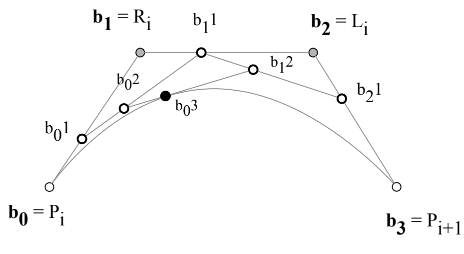
Com isso, a_0, c_0, a_{n-1} e c_{n-1} valem zero, e ficamos com um sistema tridiagonal simples. Para spline fechada, os valores de λ e μ devem corresponder ao do tramo interligando o último ponto ao primeiro:

$$\lambda_0 = \frac{\gamma_{n-1}h_{n-1} + h_0}{\gamma_{n-1}h_{n-1} + h_0 + \gamma_0 h_1}$$
$$\lambda_{n-1} = \frac{\gamma_{n-2}h_{n-2} + h_{n-1}}{\gamma_{n-2}h_{n-2} + h_{n-1} + \gamma_{n-1}h_0}$$
$$\mu_0 = \frac{\gamma_0 h_0}{\gamma_0 h_0 + h_1 + \gamma_1 h_2}$$
$$\mu_{n-1} = \frac{\gamma_{n-1}h_{n-1}}{\gamma_{n-1}h_{n-1} + h_n + \gamma_0 h_1}$$

Dados os pontos de controle D_i, podemos calcular os pontos que definem a spline em cada tramo: R_i e L_i.

$$R_i = (1 - \mu_i)D_i + \mu_i D_{i+1}$$
$$L_i = (1 - \lambda_{i+1})D_i + \lambda_{i+1}D_{i+1}$$

Note portanto o significado geométrico dos parâmetros μ_i e λ_i: eles definem, respectivamente, a posição relativa dos pontos R_i e L_i no segmento que liga os dois pontos de controle, D_i e D_{i+1}, associados ao tramo em questão.



Algoritmo de Casteljau.

Os pontos $b_0 \equiv P_i$, $b_1 \equiv R_i$, $b_2 \equiv L_i$ e $b_3 \equiv P_{i+1}$ são então usados para determinar pontos $P(t)$, com $t \in [0, 1]$, ao longo da cúbica de cada tramo. Para tanto, podemos usar o algoritmo de Casteljau, ilustrado na figura, dado por:

$$P(t) = b_0^3(t)$$

onde:

$$b_i^k(t) = (1-t)b_i^{k-1}(t) + t\, b_{i+1}^{k-1}(t)$$

Tarefa

O objetivo deste trabalho é implementar um algoritmo para interpolação de pontos por spline cúbica: dado um conjunto de n pontos P_i, determinar a spline cúbica interpolante. Este trabalho pode ser implementado considerando diferentes etapas:

1. Determinar a spline *uniforme* que interpola os pontos dados. Como sugestão de implementação, podemos pensar em definir um tipo que representa uma spline, que é instanciado com o conjunto de pontos a serem interpolados. Podemos então prever uma função para calcular a spline interpolante e uma função para calcular um ponto na spline. Esta última função pode receber dois parâmetros, i e t, onde i indica o tramo da spline e t o parâmetro dentro deste tramo.

2. Determinar a spline *não uniforme* que interpola os pontos dados.

3. Experimentar a variação da tensão ν_i associada aos pontos. Avaliar os efeitos na spline resultante.

4. Considerar também spline fechadas (com o último ponto sendo conectado ao primeiro)

5. Resolver o sistema linear do problema (sistema tridiagonal ou próximo de tridiagonal, para splines fechadas) em complexidade $O(n)$.