

Lab 9: Integração Numérica Adaptativa

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

A Regra de Simpson aproxima a integração de uma função pela integração de uma parábola:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,b]} = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = -\frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{iv}(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações de Simpson, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,c]} + S_{[c,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

Podemos então fazer:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= S_{[a,b]} + E_{[a,b]} = S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{E_{[a,b]}}{16} \\ |S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}| &= \frac{15}{16} E_{[a,b]} \end{aligned}$$

Logo, a avaliação de $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$ nos fornece um valor 15 vezes maior que o erro de $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração de Simpson Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em um passo e em dois semi-passos, avaliando a diferença $|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}|$. Se esta diferença for menor que 15 vezes a tolerância adotada, podemos assumir o valor $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

Pede-se:

1. Implemente uma função que calcule o valor de integral adotando um passo e dois semi-passos de integração, usando a Regra de Simpson. Sua função deve retornar o erro avaliado por $|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}|$ dividido por 15, e preencher o valor da integral $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$ no endereço de memória v passado, seguindo o protótipo:

```
double DoubleSimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double* v);
```

2. Implemente uma função recursiva que implemente a Integração por Simpson Adaptativa, usando a função do item anterior. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada, e retornar o valor total da derivada no intervalo dentro da tolerância, seguindo o protótipo:

```
double AdaptiveSimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

Escreva um programa que use a regra de Simpson Adaptativa para achar uma solução das integrais abaixo, com *sete* dígitos de precisão, exibindo os resultados na tela:

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 9}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^3 e^{-x^2} \, dx$$

Organize seu código da seguinte forma. O arquivo “simpson.c” deve conter a implementação das funções, com os protótipos no arquivo “simpson.h”, e o arquivo “simpson_teste.c” deve conter o código do programa de teste.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “simpson.c”, “simpson.h”, “teste_simpson.c”) deve ser enviado para inf1608@tecgraf.puc-rio.br (não envie os arquivos comprimidos). A implementação completa deve ser enviada até **hoje, segunda-feira, dia 7 de novembro (prazo final)**. O assunto da mensagem para envio da implementação completa deve ser: **Lab9: XXXXXXXX**, onde **XXXXXXX** representa o número de matrícula do aluno sem o dígito de controle.