INF1608 – Análise Numérica

Lab 7: Método dos Mínimos Quadrados

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

Para este exercício, considere a representação de matrizes por vetor de ponteiros do Lab 0 e o método de solução de sistemas lineares do Lab 4 ou 5. Isto é, o código a ser entregue deve incluir as interfaces “matriz.h” e “gauss.h”, e fazer uso das funções disponibilizadas pelos módulos. Se usar estes módulos, envie também os arquivos correspondentes. Se preferir, você pode copiar as funções necessárias já existentes para o código deste exercício.

Podemos resolver um sistema inconsistente na forma $A_{m\times n}x_n = b_m$ através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Na sua forma mais direta, a solução do MMQ é feita resolvendo o sistema linear $n \times n$ definido pela equação normal:

$$A^T A\, \bar{x} = A^T b$$

onde A^T representa a matriz transposta de A e $\bar{x}$ a solução aproximada do problema. O erro do método pode ser avaliado pelo vetor residual $r = b - A\bar{x}$. Como métrica de erro, podemos usar a norma-2 deste vetor:

$$e = \|r\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} r_i^2}$$

1. Implemente uma função que resolva o sistema $A_{m\times n}x_n = b_m$ pelo método dos mínimos quadrados. A função cria e retorna o vetor que representa a solução aproximada:

   ```
   double* mmq (int m, int n, double** A, double* b);
   ```

2. Implemente uma função para calcular a norma-2 do resíduo:

   ```
   double norma2 (int m, int n, double** A, double* b, double* x);
   ```

3. Para testar seu método, escreva um programa que resolva o sistema inconsistente abaixo usando o MMQ. Exiba na tela o vetor que representa a solução aproximada e seu respectivo erro associado (norma-2) de cada sistema abaixo.

a) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. A concentração (c) observada de uma droga na corrente sanguínea de um paciente, em função do número de horas (t), é dada pela seguinte tabela:

t (h)	c (ng/ml)
1	8.0
2	12.3
3	15.5
4	16.8
5	17.1
6	15.8
7	15.2
8	14.0

Usando o método dos mínimos quadrados, escreva um programa que ache os coeficientes a e b que ajustem estes dados considerando o modelo: $c = a\ t\ e^{bt}$. Além de exibir na tela os valores dos coeficientes encontrados e a norma-2 do resíduo, faça seu programa imprimir os pares (t_i, c_i), usando o modelo encontrado, fazendo $t_i = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 15.8, 15.9, 16.0$. Com o auxílio de um software de traçado de gráfico qualquer (por exemplo, Excel), gere uma imagem de um gráfico com a curva representada por estes pontos; sobreponha ao gráfico os pontos da tabela acima para verificar o ajuste do modelo.

Organize seu código da seguinte forma. O arquivo "mmq.c" deve conter a implementação das funções `mmq` e `norma2`, com seus respectivos protótipos no arquivo "mmq.h". O arquivo "teste_mmq.c" deve conter o código (função *main*) do teste do método (questão 3) e do problema de ajuste (questão 4). A imagem gerada também deverá ser enviada. Não esqueça de incluir as implementações de laboratórios anteriores se forem utilizadas nesta solução.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "mmq.c", "mmq.h", "teste_mmq.c" e outros, se usados) deve ser enviado para inf1608@tecgraf.puc-rio.br (não envie os arquivos comprimidos). A implementação completa deve ser enviada até **hoje, segunda-feira, dia 24 de outubro (prazo final)**. O assunto da mensagem para envio da implementação completa deve ser: **Lab7: XXXXXXX**, onde **XXXXXXX** representa o número de matrícula do aluno sem o dígito de controle.