

# INF1608 – Análise Numérica

## Lab 12: Matrizes Simétricas Definidas Positivas

Prof. Waldemar Celes  
Departamento de Informática, PUC-Rio

Para estes exercícios, considere a representação de matrizes simétricas como quadradas cheias  $M_{n \times n}$ , e use o código do Lab 0.

Para a solução de sistemas lineares na forma  $Ax = b$ , onde  $A$  é uma matriz simétrica definida positiva, pede-se:

1. Implemente a fatoração de Cholesky:

$$A = R^T R$$

onde:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array} \right], \quad R = \left[ \begin{array}{c|c} \sqrt{a} & u^T \\ \hline 0 & V \end{array} \right]$$

A matriz  $R$  é triangular superior e pode ser conseguida pelo seguinte procedimento:

```
for  $k = 1, \dots, n$  do  
     $R_{kk} = \sqrt{A_{kk}}$   
     $u^T = \frac{1}{R_{kk}} A_{k,k+1:n}$   
     $A_{k+1:n,k+1:n} = A_{k+1:n,k+1:n} - uu^T$   
end
```

Escreva uma função que transforme uma matriz  $A$  na matriz  $R$  da fatoração. O protótipo da função é dado por:

```
void Cholesky (int n, double** A);
```

2. O método Gradiente Conjugado é um método direto/iterativo para solução de sistemas lineares  $Ax = b$ . Sua implementação, na forma mais simples, segue o procedimento:

```

 $x_0$  = estimativa inicial
 $d_0 = r_0 = b - Ax$ 
for  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  do
    if  $r_k = 0$  then
        stop
    end
     $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$ 
     $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ 
     $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$ 
     $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$ 
     $d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k$ 
end

```

Implemente o procedimento Gradiente Conjugado para resolver  $Ax = b$ , dada uma estimativa inicial da solução  $x$ :

```
void ConjugateGradient (int n, double** A, double* b, double* x);
```

3. Teste suas implementações determinando a matriz  $R$  da fatoração de Cholesky e a solução usando Gradiente Conjugado dos sistemas abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Organize seu código, as funções dos métodos e a função *main*, no arquivo “gradconj.c”.

**Entrega:** O código fonte deste trabalho (isto é, o arquivo “gradconj.c”) deve ser enviado para inf1608@tecgraf.puc-rio.br (não envie o arquivo comprimido). A implementação completa deve ser enviada até **quarta-feira, dia 7 de dezembro (prazo final)**. O assunto da mensagem para envio da implementação completa deve ser: **Lab12: XXXXXXXX**, onde **XXXXXXX** representa o número de matrícula do aluno sem o dígito de controle.